

Санкт-Петербургский государственный университет  
Физический факультет  
Кафедра радиофизики



Моделирование стохастических флуктуаций поля при  
трансионосферном распространении радиоволн

Магистерская работа студентки  
дневного отделения:  
**Закарьяевой Мдины Закарьяевны**

Научный руководитель:  
к. ф.-м. н., доцент **Герм В.Э.**

Рецензент:  
к. ф.-м. н., доцент **Илюшин Я. А.**

Санкт-Петербург  
2017

## Оглавление

1. Введение.....	2
1.1 Общие сведения об ионосферных мерцаниях.....	2
1.2 Постановка задачи исследования.....	2
1.3 Флуктуации сигналов и их распределения.....	3
<i>Лог-нормальное распределение.....</i>	3
<i>Распределение Накагами-т. ....</i>	4
<i>Распределение Райса. ....</i>	4
<i>Распределение <math>\alpha - \mu</math>. ....</i>	4
1.4 Некоторые теоретические модели описания распространения волн в ионосфере с флуктуациями электронной плотности.....	5
1.5 Моделирование флуктуирующего сигнала. Гибридная модель.....	6
2. Распределение уровня сигнала с учетом второго приближения метода Рытова. ....	7
2.1 Теоретический расчет функции плотности вероятности уровня при учете второго приближения метода Рытова.....	7
2.2 Теоретический расчет кумулянта $K_3$ . ....	12
3. Результаты вычислений.....	19
3.1 Численный расчет третьего кумулянта.....	20
3.2 Получение отображения для логарифма амплитуды. ....	24
3.3 Результаты моделирования поля на Земле.....	31
4. Заключение. ....	34
Список литературы.....	35

# 1. Введение.

## 1.1 Общие сведения об ионосферных мерцаниях.

Впервые наука столкнулась с вопросом изучения ионосферных мерцаний в 1946 г, когда Хей, Парсон и Филлипс обнаружили заметные короткопериодические нерегулярные флуктуации интенсивности излучения от радиозвезды в созвездии Лебедя [1]. Учеными было предложено, что эти флуктуации присущи самому источнику излучения, однако вскоре наблюдения показали, что данное явление носит локальный характер, и, по всей видимости, связано с земной атмосферой. Последующие наблюдения подтвердили, что в этих работах действительно впервые наблюдалось явление ионосферных мерцаний.

Теоретический анализ явления ионосферных мерцаний исторически впервые был проведен в рамках теории тонкого фазового экрана [1]. Было установлено, что для слабых мерцаний вполне пригодна теория однократного рассеяния, и это подтверждалось экспериментальными данными. Большинство теоретических работ по исследованию распространения волн в средах со случайными неоднородностями, а также многие экспериментальные в основном сосредоточены на статистике интенсивности сигнала, так как расчеты фазы сигнала сложны и часто не доступны в эксперименте. Анализ распространения волн связан с исследованием пространственно-временных полей, характеризуемых некоторой скоростью при переходе из одной области пространства в другую. Для её определения, необходимо проследить за другой характеристикой поля (например, максимумом амплитуды или быстро нарастающим фронтом). В процессе распространения могут меняться амплитуда, форма и даже сама скорость распространения поля, но особый интерес представляет распределение амплитуды флуктуирующих сигналов, поскольку наличие сильных замираний осложняет работу приемника и может даже привести к полной потере сигнала.

Дальнейшие исследования явления мерцаний в итоге способствовали развитию общей теории распространения радиоволн в случайных средах. В кругу задач данной теории стоит вопрос описания эффектов флуктуаций электронной плотности ионосферы на пути распространения радиоволны, иначе говоря, построение некоей теоретической модели, способной дать четкое представление о характере данного явления. К настоящему времени известно достаточно большое количество теорий и методов, позволяющих проводить приближенное исследование поведения радиоволн, проходящих через неоднородную флуктуирующую среду.

## 1.2 Постановка задачи исследования.

Ранее в бакалаврской работе мною было исследовано распределение амплитуды поля, полученной с использованием программы численного моделирования, основанной на так называемой «гибридной модели» распространения [8]. С ее помощью можно осуществить генерацию сигнала, обладающего статистическими характеристиками, полученными в результате решения задачи распространения в флуктуирующем трансionoсферном канале [11]. Представленная методика реализована в виде программного симулятора трансionoсферных сигналов. Однако в рассмотрении данного метода лежит приближение метода комплексной фазы первого порядка, в соответствии с которой распределение уровня и фазы флуктуирующего сигнала имеет нормальный характер и подчиняется Гауссову закону. Принятие же во внимание приближение теории Рытова второго порядка искажает

характер плотности распределения комплексной фазы, распределение становится отличным от нормального.

В данной работе второе приближение метода Рытова будет использовано для вычисления статистических характеристик флуктуаций поля, распространяющегося в ионосфере с флуктуациями электронной плотности, которые необходимы для описания отклонения функции распределения уровня от нормального закона (третьего кумулянта флуктуаций уровня). Далее будет найдено преобразование (коррекция значений реализации уровня), применение которого обеспечит генерацию реализаций уровня с заданным негауссовым законом распределения. Полученные результаты будут использованы для модификации гибридной модели в части генерации реализаций фазы и уровня на стохастическом экране. Будут проведены расчёты с использованием исходного и модифицированного кодов программного симулятора поля в транс-ионосферном флуктуирующем канале распространения и соответствующий анализ результатов.

### 1.3 Флуктуации сигналов и их распределения.

Передача информации в каналах связи и вещания, использующих свободное распространение радиоволн, как известно, всегда сопровождается флуктуациями сигнала. Случайные флуктуации уровня сигнала на входе приемника называются замираниями. Существует два вида амплитудных флуктуаций — быстрые и медленные. Причиной быстрых замираний является многолучевая структура сигнала и интерферирующих лучей, в то время как возникновение медленных замираний происходит из-за затенения первой полузоны Френеля радиосигнала на трассе вследствие особенностей рельефа. Так как природа быстрых и медленных замираний различна, то их влияние принято рассматривать отдельно. Распределение интенсивности флуктуирующего сигнала на данный момент хорошо описывается с помощью некоторых эмпирических моделей, использующие для результата экспериментальные данные, полученные в конкретных условиях.

В этом разделе приводится краткий обзор основных существующих моделей плотности распределения вероятностей амплитуд сигналов, проходящих через неоднородную флуктуирующую среду, которые используются для аппроксимации результатов экспериментальных измерений.

#### *Лог-нормальное распределение.*

Как известно, для исследования вероятностных распределений сигналов мерцаний существует несколько различных подходов. Один из них основан на использовании эвристических соображений для анализа процесса рассеяния и последующем приложении центральной предельной теоремы из теории вероятностей с целью нахождения распределения сигналов. Применение подобных соображений к решению, найденному в приближении Рытова [4], дает совместное нормальное распределение для уровня и фазы рассеянного сигнала и, следовательно, логарифмически-нормальное распределение для интенсивности.

Если представить сигнал в виде  $E = Ae^{i\phi} = \exp(\chi + i\phi)$ , где  $\chi$  - уровень, а  $\phi$  - фаза, тогда распределение уровня дается следующей формулой:

$$f_R(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\chi} \exp\left\{-\frac{[\chi - \langle\chi\rangle]^2}{2\sigma_\chi^2}\right\}; \quad (1)$$

Для фазы в этом случае получаем:

$$f_R(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} \exp\left\{\frac{-\phi^2}{2\sigma_\phi^2}\right\}; \quad (2)$$

Здесь  $\langle \rangle$  - означает усреднение по ансамблю реализаций случайной величины,  $\langle \chi \rangle$  - среднее значение уровня,  $\sigma_\chi$  - стандартное отклонение уровня,  $\sigma_\phi$  - стандартное отклонение фазы [5].

Лог-нормальное распределение удовлетворительно описывает плотность распределения амплитуд при условии малости дисперсии флуктуаций уровня, т.е. в области применимости метода плавных возмущений.

#### *Распределение Накагами- $m$ .*

Ещё одним способом описания плотности распределения флуктуаций амплитуды радиосигналов является так называемое распределение Накагами- $m$  [3]:

$$f_R(r) = \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Gamma(m)} e^{-mr^2}; \quad (3)$$

где  $\Gamma()$  – это есть гамма функция,  $r$  – амплитуда, а  $m$  – параметр, равный  $\frac{1}{S_4^2}$

Величина  $S_4$ , называемая индексом мерцаний, является одним из наиболее важных параметров в исследованиях ионосферных мерцаний и определяется как нормированная дисперсия флуктуаций интенсивности сигнала:

$$S_4 = \sqrt{\frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I^2 \rangle}}; \quad (4)$$

Это распределение в течение продолжительного периода времени считалось наилучшей аппроксимацией экспериментально наблюдаемых плотностей распределения амплитуд флуктуирующих сигналов.

#### *Распределение Райса.*

Также часто используемым распределением для описания ионосферных мерцаний является распределение Райса [3]:

$$f_R(r) = 2r(1+K)I_0(2r\sqrt{K+K^2})e^{-K-r^2(1+K)}; \quad (5)$$

где  $I_0$  – есть функция Бесселя, а  $K$  – параметр Райса, который равен

$$K = \frac{\sqrt{m^2 - m}}{m - \sqrt{m^2 - m}}; \quad (6)$$

#### *Распределение $\alpha - \mu$ .*

В недавнем времени была предложена еще одна модель описания мерцаний амплитуды сигнала, более общая, так называемое распределение  $\alpha - \mu$  [3]:

$$f_R(r) = \frac{\alpha r^{\alpha\mu-1}}{\xi^{\frac{\alpha\mu}{2}} \Gamma(\mu)} \exp\left(-\frac{r^\alpha}{\xi^{\frac{2}{\alpha}}}\right), \quad \text{где } \xi = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+2/\alpha)}; \quad (7)$$

Его особенность заключается в том, что при различных значениях параметров  $\alpha$  и  $\mu$  распределение переходит в Накагами- $m$ , Релея или даже распределение Вейбулла. Например, при  $\alpha = 2$  мы получим распределение Накагами, где  $m = \mu$ . При  $\alpha = 2$  и  $\mu = 1$  оно превратится в распределение Релея, и если  $\mu = 1$  – распределение Вейбулла.

Моменты для данного распределения находятся по формуле:

$$\langle r^k \rangle = \frac{\Gamma(\mu+k/\alpha)}{\mu^{k/\alpha} \Gamma(\mu)} \hat{r}^k; \quad \hat{r} = \left(\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+2/\alpha)}\right)^{1/2} \mu^{1/2}; \quad (8)$$

Здесь  $r$  - нормированное значение амплитуды сигнала, такое, что  $\langle r^2 \rangle = 1$ .

#### 1.4 Некоторые теоретические модели описания распространения волн в ионосфере с флуктуациями электронной плотности.

Ионосфера представляет собой многомасштабную неоднородную нестационарную среду. В ней присутствуют как крупномасштабные неоднородности распределения электронной концентрации по высоте, широте и долготе, варьирующиеся в зависимости от времени суток, сезона, солнечной активности и других факторов, так и мелкомасштабные неоднородности. В первом случае мы сталкиваемся с необходимостью постановки детерминированной задачи, во втором – стохастического подхода.

Известно, что при прохождении сигнала через ионосферу, случайные неоднородности показателя преломления приводят только к изменениям фазы и амплитуды поля, поэтому после выхода волны из ионосферного слоя её фазовый фронт и амплитуда оказываются случайно модулированными. При дальнейшем распространении волны от ионосферы к земле за счет дифракции формируется интерференционная картина, характеризующаяся амплитудными и фазовыми флуктуациями. Посчитано, что основной вклад в амплитудные флуктуации на земле вносят неоднородности ионосферы размером порядка первой зоны Френеля.

В общем случае неоднородной фоновой среды для исследования распространения радиоволн высокочастотного диапазона в слабо флуктуирующей среде вполне успешно используется так называемый метод плавных возмущений или иначе метод Рытова, обобщённый на случай неоднородной фоновой среды (метод комплексной фазы [7]). С его помощью теоретически исследованы флуктуации амплитуды и фазы высокочастотных полей на вертикальных и наклонных трассах, их спектры и функция рассеяния. Метод Рытова также позволяет подробно исследовать распространение импульсных сигналов в средах с флуктуациями [4].

Однако физические условия распространения высокочастотных полей в ионосфере таковы, что наряду с режимом слабых флуктуаций амплитуды поля, могут также

реализоваться и сильные флуктуации, причем как ниже ионосферного слоя, так и непосредственно в неоднородном слое ионосферной плазмы. В связи с этим появилась необходимость дальнейшего развития теории сильных флуктуации поля в случайно-неоднородной среде при наличии неоднородной фоновой среды, а именно создание некоторых теоретических моделей распределений для фазы и амплитуды, которые бы позволили нам с некоторыми поправками описать флуктуации радиосигнала.

## **1.5 Моделирование флуктуирующего сигнала. Гибридная модель.**

Как говорилось ранее, строгой теории, описывающей характер поведения волны в условиях сильных флуктуации, нет. Эмпирические модели, рассмотренные выше, позволяют описать распределения амплитуды волн при прохождении ионосферы, исходя из экспериментальных данных, полученных в конкретных условиях. Однако особый интерес состоит в построении такой модели, которая позволила бы изменять некоторые исходные параметры задачи распространения с целью установить зависимость вида распределения от условий распространения. Примером такой теории, является гибридная модель [8].

Как было сказано ранее, если флуктуации поля нельзя считать слабыми, то методы возмущений становятся неприменимыми. Однако здесь следует различать два случая. Геометрия ионосферного распространения такова, что после выхода из ионосферы поле распространяется до поверхности Земли в неионизированной среде, которая практически не влияет на распространяющееся поле, хотя флуктуации поля продолжают развиваться из-за дифракции в свободном пространстве. Таким образом, возможны ситуации, когда при распространении в ионосферном слое вплоть до выхода из него флуктуации поля являются слабыми, но могут усилиться при распространении в свободном пространстве. Это подтверждается многочисленными расчетами распространения поля частот порядка 1 ГГц и выше сквозь ионосферу с флуктуациями электронной плотности даже в случае очень плотной фоновой ионосферы и больших значений относительных флуктуаций электронной плотности. Это также имеет место и для полей более низких частот, если фоновая ионосфера не является столь плотной и флуктуации относительной электронной плотности не столь значительны. Данный факт поставлен в основу гибридной модели, в соответствии с которой поле внутри ионосферы вплоть до её нижней границы описывается в рамках метода комплексной фазы, а случайное распределение поля генерируется на любой удобно выбранной поверхности непосредственно на выходе из ионосферы. Иначе говоря, это позволяет разумно задать физический стохастический экран, и рассматривать затем распространение поля до поверхности Земли, используя известную технику стохастического экрана [4]. При этом режим сильных флуктуаций поля может сформироваться в процессе распространения к Земле [2]. Описание теории и деталей реализации гибридной модели содержится в работе [8].

На основе данной теории была создана программа, позволяющая имитировать распространение радиосигнала в условиях неоднородной фоновой среды. Как известно, радиосигнал, в условиях реальной ионосферы испытывает искажения за счёт целого ряда эффектов, таких как дисперсия, рассеяние на флуктуациях электронной плотности ионосферы, многолучевость, что существенно ограничивает производительность навигационных систем. Вследствие этого появилась необходимость создания таких компьютерных симуляторов сигнала, которые смогли бы имитировать реальные условия распространения в соответствии с заложенной в них моделью канала. Результатом работы таких программ является искусственно синтезированный сигнал, искаженный так, как если бы он распространялся в реальном ионосферном канале.

## 2. Распределение уровня сигнала с учетом второго приближения метода Рытова.

В данной главе будет получено выражение для функции распределения флуктуаций уровня сигнала с учётом второго приближения метода Рытова и показано, что это распределение отличается от нормального.

Для получения реализаций уровня с таким негауссовым распределением будет построено отображение, которое позволит скорректировать генерируемые в симуляторе случайные реализации уровня, исходно имеющие нормальное распределение.

Процедура такого построения также требует конкретных значений так называемых кумулянтов распределения, которые при учете второго приближения метода Рытова отличаются от исходных, рассчитанных в первом приближении. В главе будет подробно изложен теоретический расчет третьего кумулянта, который имеет в данном случае наиболее важное значение, так как определяет степень различия между исходным нормальным распределением уровня и новым, полученным во втором приближении метода Рытова.

### 2.1 Теоретический расчет функции плотности вероятности уровня при учете второго приближения метода Рытова.

Как было отмечено ранее, для случая умеренных и слабых флуктуаций амплитуд поля можно использовать так называемый метод комплексной фазы, представляющий собой обобщение классического метода плавных возмущений на случай неоднородной фоновой среды и точечного источника [7]. Метод позволяет учитывать дифракционные эффекты на локальных неоднородностях и частично эффект многократного рассеяния. Рассмотрим основные моменты данной теории.

Как известно, классическое волновое уравнение без учета поляризационного члена, имеет следующий вид:

$$\nabla^2 E + k^2 [1 + \Delta\epsilon(r, t)] E = source, \quad (9) \quad \text{где } k = 2\pi/\lambda - \text{волновое число.}$$

Возмущенное локальными неоднородностями поле волны можно представить в виде произведения невозмущенной части на некоторую компоненту, описывающую флуктуации поля:

$$E(R) = E_0(R) \exp[\psi(R)]; \quad (10)$$

Здесь  $E_0(R) = \exp[\psi_0(R)]$  - это невозмущенный фон, то есть поле в случае распространения в среде без флуктуации, а  $\psi(R)$  - комплексная фаза лучевого поля, описывающая его возмущение локальными неоднородностями. Если возмущения отсутствуют, то множитель  $\exp[\psi(R)]$  равен единице. Фоновая (невозмущенная) среда является плавно-неоднородной, и предполагается, что поле в невозмущенной среде всегда может быть описано в квазиклассическом приближении.

Подставим выражение для поля волны в основное уравнение:

$$\nabla^2 \psi + 2\nabla\psi_0 * \nabla\psi + (\nabla\psi)^2 + k^2 \Delta\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}; \quad (11)$$

Стандартная схема классического метода плавных возмущений предполагает малость возмущений диэлектрической проницаемости. Комплексную фазу в соответствии с теорией возмущений можно представить в виде бесконечного ряда:

$$\psi(\mathbf{R}) = \psi_1(\mathbf{R}) + \psi_2(\mathbf{R}) + \dots; \quad (12)$$

где  $\psi_1(\mathbf{R})$  имеет первый по возмущениям  $\Delta\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{t})$  порядок малости,  $\psi_2(\mathbf{R})$  - второй порядок малости и т.д. Подстановка данного выражения в (11) и приравнивание нулю группы членов одинакового порядка приводит к бесконечной системе линейных уравнений последовательного приближения:

$$\nabla^2 \psi_1 + 2\nabla\psi_0 * \nabla\psi_1 + k^2 \Delta\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}; \quad (13)$$

$$\nabla^2 \psi_2 + 2\nabla\psi_0 * \nabla\psi_2 + (\nabla\psi_1)^2 = \mathbf{0};$$

...

Решение первого из данных уравнений приводит к первому приближению метода Рытова:

$$\psi_1(\mathbf{R}) = -k^2 \int d^3r G(\mathbf{R}; \mathbf{r}) \Delta\epsilon(\mathbf{r}) \frac{E_0(\mathbf{r})}{E_0(\mathbf{R})}; \quad (14)$$

Используя полученное выражение для  $\psi_1(\mathbf{R})$  в уравнении (10), можно найти поле волны в первом приближении метода Рытова:

$$E_1(\mathbf{R}) = E_0(\mathbf{R}) \exp \left[ -k^2 \int d^3r G(\mathbf{R}; \mathbf{r}) \Delta\epsilon(\mathbf{r}) \frac{E_0(\mathbf{r})}{E_0(\mathbf{R})} \right]; \quad (15)$$

Здесь  $G(\mathbf{R}; \mathbf{r})$  - это функция Грина, определяемая уравнением для невозмущенной части.

В этом приближении фаза и уровень (логарифм амплитуды) волны распределены нормально или, иначе говоря, имеют Гауссов вид, однако учет последующего приближения меняет характер распределений, вследствие чего они становятся отличными от нормального.

Используя выражение для  $\psi_1(\mathbf{R})$  в решении второго уравнения системы (13), можно получить приближение комплексной фазы второго порядка:

$$\psi_2(\mathbf{R}) = - \int d^3r G(\mathbf{R}; \mathbf{r}) \frac{E_0(\mathbf{r})}{E_0(\mathbf{R})} [\nabla\psi_1(\mathbf{r})]^2; \quad (16)$$

Поле с учетом второго приближения будет иметь тогда следующий вид:

$$E_2(\mathbf{R}) = E_0(\mathbf{R}) \exp \left[ - \int d^3r G(\mathbf{R}; \mathbf{r}) [k^2 \Delta\epsilon(\mathbf{r}) + (\nabla\psi_1)^2] \frac{E_0(\mathbf{r})}{E_0(\mathbf{R})} \right]; \quad (17)$$

В самом компьютерном симуляторе уже реализована программа для определения уровня и фазы поля в первом приближении, которые впоследствии используются для генерации случайного поля на физическом стохастическом экране, поэтому нашей задачей становится нахождение явного вида функции плотности вероятности уровня, с помощью

которой в дальнейшем мы сможем скорректировать распределение уровня для исходного поля волны. Подобная задача рассматривалась в работе [9] для однородной среды распространения и изотропных флуктуаций показателя преломления. Мы рассмотрим общий случай неоднородной среды и анизотропных флуктуаций.

Функция плотности вероятности может быть представлена в виде Фурье интеграла через ее характеристическую функцию [12]:

$$P(\chi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iq\chi) \langle \exp(iq\chi) \rangle dq, \quad (18)$$

где  $\chi = \ln(A)$  – уровень поля,  $A$  – это амплитуда сигнала, а  $\langle \exp(iq\chi) \rangle$  – характеристическая функция.

Характеристическая функция может быть описана в терминах кумулянтов [10]. Кумулянты во многих отношениях являются более удобными характеристиками распределения, чем моменты, так как во многих практически важных случаях позволяют пренебрегать высшими порядками. Полный набор всех кумулянтов служит тождественным представлением вероятностного распределения. В данном случае для вычисления функции плотности вероятности ограничимся лишь первыми тремя членами ряда кумулянтов, считая члены выше четвертого порядка достаточно малыми величинами.

$$\langle \exp(iq\chi) \rangle = \exp\left(iqK_1 - \frac{1}{2}q^2K_2 - \frac{i}{6}q^3K_3\right); \quad (19)$$

Здесь  $K_1, K_2, K_3$  – как и говорилось, характеристики вероятностного распределения, носят название кумулянтов или семиинвариантов и выражаются через моменты поля волны:

$$K_1 = \langle \chi \rangle, \quad (20)$$

$$K_2 = \langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2, \quad (21)$$

$$K_3 = \langle \chi^3 \rangle - 3\langle \chi \rangle \langle \chi \rangle^2 + 2\langle \chi \rangle^3; \quad (22)$$

Первые два кумулянта имеют четкий смысл – это среднее значение и дисперсия распределения. Следующий кумулянт также имеет определённую интерпретацию, его называют асимметрией распределения. Если значение  $K_3$  отлично от нуля, то распределение уровня  $\chi$  перестает быть нормальным. Степень данного различия определяется величиной отношения  $K_3$  к  $K_2$ .

Подставим найденное выражение для характеристической функции в уравнение (18):

$$P(\chi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-iq(\chi - K_1) - \frac{1}{2}q^2K_2 - \frac{i}{6}q^3K_3\right) dq; \quad (23)$$

Данный интеграл можно вычислять несколькими различными способами, например, представив подынтегральную функцию через спец. функцию Эйри. Мы же для более легкого численного расчета будем использовать иной подход.

Переобозначим интеграл (23), введя новые переменные:

$$u = \frac{\chi - K_1}{\sqrt{K_2}}; \quad (24) \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{K_3}{6(K_2)^{3/2}}; \quad (25)$$

Здесь  $\gamma$  – параметр негауссовости, является важной характеристикой второго приближения в методе Рытова. Если  $\gamma = 0$ , то распределение уровня поля становится Гауссовым. Фактически,  $\gamma$  показывает насколько сильно распределение уровня поля отличается от нормального.

Используем новую переменную интегрирования  $x = q\sqrt{K_2}$  и отметим, что теперь интеграл можно рассматривать лишь в области положительных значений:

$$P(u; \gamma) = \frac{1}{\pi\sqrt{K_2}} \int_0^{\infty} \cos(xu + \gamma x^3) * \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx; \quad (26)$$

Фактически полученное выражение и представляет собой функцию плотности вероятности уровня поля при учете второго приближения метода Рытова. Однако, как показывает расчет, принимать данную функцию в качестве плотности вероятностного распределения мы не имеем права, так как в некоторой области значений уровня функция  $P(u; \gamma)$  принимает отрицательные значения, что нарушает требования положительной определенности функции плотности вероятности. Возникновение данного несоответствия связано с тем фактом, что при вычислении интеграла (23) мы пренебрегаем кумулянтами порядка выше четвертого, так как считаем их достаточно малыми. Во избежание подобного обстоятельства вновь обратимся к интегралу (23) и заменим два последних члена в показателе экспоненты на выражение, которое представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. В результате получим следующую формулу:

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-iq(x - K_1) - \frac{1}{2} \frac{q^2 K_2}{1 - \frac{iq K_3}{3 K_2}}\right\} dq; \quad (27)$$

Подобная замена, фактически, эквивалентна добавлению к показателю экспоненты формулы (26) бесконечного ряда кумулянтов. Это возможно, если ряд является сходящимся, то есть отношение  $K_3$  к  $K_2$  является величиной много меньшей единицы. Для оценки справедливости подобного перехода вспомним, что второй кумулянт представляет собой дисперсию распределения уровня, то есть величина  $K_2$  пропорциональна  $\sim \sigma^2$ , где  $\sigma$  - среднеквадратичное отклонение флуктуации электронной концентрации, которое считаем малым параметром задачи. Третий кумулянт, как будет ясно из дальнейшего, имеет порядок  $K_3 \sim \sigma^4$ . Тогда исходное (23) и модифицированное (27) представления, как видно, отличаются между собой членами порядка малости  $O(\sigma^6)$  и выше:

$$-\frac{1}{2} \frac{q^2 K_2}{1 - \frac{iq K_3}{3 K_2}} \approx -\frac{1}{2} q^2 K_2 + \frac{i}{6} q^3 K_3 + O(\sigma^6); \quad (28)$$

Так как во всех выкладках данной работы мы ограничиваемся членами, порядок малости которых не выше  $\sigma^4$ , то с этой точностью формулы (26) и (27) эквивалентны. Однако, как будет видно из дальнейшего, вычисления по формуле (27), в отличие от (26), не дают отрицательных значений  $P(x)$ , что является одним из требований к функции плотности вероятности.

Другим свойством функции распределения является нормировка, т.е. интеграл от функции распределения по всем значениям случайной величины должен быть равным единице [10]:

$$\int d\chi P(\chi) = 1. \quad (29)$$

Если принять во внимание формулу (27) нетрудно заметить, что интеграл от функции  $P(\chi)$  будет удовлетворять данному условию. Однако необходимо выполнение еще одного требования, получаемого из закона сохранения энергии, то есть равенство единице среднего значения интенсивности поля:

$$\int d\chi P(\chi) e^{2\chi} = 1. \quad (30)$$

Распишем этот интеграл, согласно формуле (27):

$$\int d\chi P(\chi) e^{2\chi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ 2\chi - iq(\chi - K_1) - \frac{1}{2} \frac{q^2 K_2}{1 - \frac{iq}{3} \frac{K_3}{K_2}} \right\} dq d\chi;$$

Проведем сперва интегрирование по переменной  $\chi$  и получим дельта-функцию  $\delta(2 - iq)$ , которая в конечном итоге даст следующий результат:

$$\exp \left\{ 2K_1 + \frac{2K_2}{1 - \frac{2}{9} \frac{K_3}{K_2}} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{K_3}{K_2} \right) \right\} = \exp \left\{ 2K_1 + \frac{2K_2}{1 - \frac{2}{3} \frac{K_3}{K_2}} \right\} = 1; \quad (31)$$

Для выполнения условия (30) необходимо, чтобы показатель в степени экспоненты уравнения (31) был равен нулю, то есть:

$$K_1 = - \frac{K_2}{1 - \frac{2}{3} \frac{K_3}{K_2}}; \quad (32)$$

Окончательно получили, что для расчета функции плотности вероятности при учете второго приближения метода Рытова, представленной по формуле (27), необходимо использовать значение кумулянта  $K_1$ , который находится согласно уравнению (32) через исходное значение второго кумулянта  $K_2$ , найденное по формуле (21). Расчет третьего кумулянта будет приведен в следующей главе.

Теперь приведем интеграл (27) к виду интеграла (23), для этого избавимся от мнимой единицы в знаменателе дроби и перейдем от экспоненты к косинусу в подынтегральном выражении:

$$P(\chi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -iq(\chi - K_1) - \frac{1}{2} \frac{q^2 K_2}{1 + \frac{q^2}{9} \frac{K_3^2}{K_2^2}} \left( 1 + \frac{iq}{3} * \frac{K_3}{K_2} \right) \right\} dq = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i \left[ q(\chi - K_1) - \frac{1}{6} \frac{q^3 K_3}{1 + \frac{q^2}{9} \frac{K_3^2}{K_2^2}} \right] - \frac{1}{2} \frac{q^2 K_2}{1 + \frac{q^2}{9} \frac{K_3^2}{K_2^2}} \right\} dq = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{q^2 K_2}{1 + \frac{q^2}{9} \frac{K_3^2}{K_2^2}} \right\} * \cos \left[ q(\chi - K_1) - \frac{1}{6} \frac{q^3 K_3}{1 + \frac{q^2}{9} \frac{K_3^2}{K_2^2}} \right] dq; \quad (33)$$

Используя ранее введенные замены (24) и (25), получим искомую зависимость для функции плотности вероятности уровня с учетом второго приближения метода Рытова:

$$P(u, x) = \frac{1}{\pi \sqrt{K_2}} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{x^2}{1 + (2\gamma x)^2} \right\} * \cos \left[ x * u - \frac{\gamma * x^3}{1 + (2\gamma x)^2} \right] dx; \quad (34)$$

Если положить  $\gamma = 0$ , то распределение уровня станет Гауссовым, как и в случае с интегралом (23).

Итак, мы получили окончательное выражение для функции плотности вероятности, которое позволяет численно рассчитать плотность вероятностного распределения уровня сигнала, как в случае учета второго приближения метода Рытова, так и для случая Гауссова процесса. В это выражение входят кумулянты  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$ . Кумулянт  $K_2$  вычисляется с помощью первого приближения Рытова. Кумулянт  $K_1$ , в принципе, требует использования второго приближения, т.к. среднее значение уровня первого приближения равно нулю. Поэтому его значение из условия сохранения энергии рассчитывается согласно уравнению (32). Что касается третьего кумулянта, то его необходимо вычислить с учётом второго приближения. Это и сделано в следующем разделе

## 2.2 Теоретический расчет кумулянта $K_3$ .

Как упоминалось ранее, для расчета интеграла (34) нам необходимо знать кумулянты вплоть до третьего порядка. Второй кумулянт представляет собой дисперсию распределения уровня логарифма амплитуды, первый находится из условия (32), а потому нахождение их значений не представляет собой сложной задачи. Однако для третьего кумулянта все обстоит несколько иначе.

Вспомним выражение (22), позволяющее определить асимметрию распределения:

$$K_3 = \langle \chi^3 \rangle - 3\langle \chi \rangle \langle \chi^2 \rangle + 2\langle \chi \rangle^3; \quad (22)$$

Зададимся целью определить явный вид для  $K_3$ . Для этого поставим и рассмотрим следующую задачу.

Пусть из некоторого источника передается детерминированный сигнал в приемник, расположенный на расстоянии  $L$  от источника. Введем локально-лучевую систему координат, и будем считать началом отсчета точку, в которой расположен источник, как показано на рисунке 1. Среду, в которой происходит передача сигнала, будем считать неоднородной в направлении распространения сигнала.

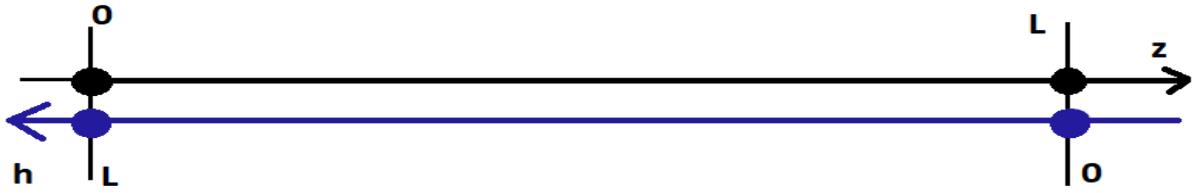


Рис. 1.

Пусть уровень на выходе флуктуационного радиоканала представлено в виде суммы двух приближений метода Рытова.

$$\chi = \chi_1 + \chi_2; \quad (35)$$

Перепишем уравнение (22) в соответствие с введенной переменной:

$$K_3 = \langle (\chi_1 + \chi_2)^3 \rangle - 3\langle \chi_1 + \chi_2 \rangle \langle (\chi_1 + \chi_2)^2 \rangle + 2\langle \chi_1 + \chi_2 \rangle^3; \quad (36)$$

Раскроем скобки и отбросим члены с нечетными моментами  $\chi_1$ , так как его распределение симметрично:

$$K_3 = \langle \chi_2^3 \rangle + 3\langle \chi_1^2 \chi_2 \rangle + 3\langle \chi_2^2 \chi_1 \rangle - 3\langle \chi_1^2 \rangle \langle \chi_2 \rangle - 3\langle \chi_2 \rangle \langle \chi_2^2 \rangle - 6\langle \chi_2 \rangle \langle \chi_1 \chi_2 \rangle + 2\langle \chi_2 \rangle^3; \quad (37)$$

Рассмотрим порядок малости для каждого из полученных членов и отбросим те, что выше четвертого порядка по флуктуациям электронной концентрации:

$$\langle \chi_2^3 \rangle \sim \sigma^6, \quad \langle \chi_2^2 \chi_1 \rangle \sim \sigma^5, \quad \langle \chi_2 \rangle \langle \chi_2^2 \rangle \sim \sigma^6, \quad \langle \chi_2 \rangle \langle \chi_1 \chi_2 \rangle \sim \sigma^5, \quad \langle \chi_2 \rangle^3 \sim \sigma^6;$$

Тогда выражение (37) примет вид:

$$K_3 = 3\{\langle \chi_1^2 \chi_2 \rangle - \langle \chi_1^2 \rangle \langle \chi_2 \rangle\} + o(\sigma^5); \quad (38)$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы определить явный вид моментов в уравнении (38).

Для уровня амплитуды  $\chi$  известно его Фурье-представление по продольной координате  $z$  и поперечному волновому вектору  $\vec{\kappa}$  [12], которое представлено следующими формулами:

$$\chi_1 = \frac{k}{2} \int_0^L dz_1 \int d\vec{\kappa}_1 \sin \left[ \frac{\vec{\kappa}_1^2 (L-z_1)}{2k} \right] * \varepsilon(\vec{\kappa}_1, z_1); \quad (39)$$

$$\chi_2 = \frac{k^2}{4} \int_0^L dz \int_0^z dz' \int_0^z dz'' \iint d\vec{\kappa}' d\vec{\kappa}'' \sin \left[ \frac{(\vec{\kappa}' + \vec{\kappa}'')^2 (L-z)}{2k} + \frac{\vec{\kappa}'^2 (z-z')}{2k} + \frac{\vec{\kappa}''^2 (z-z'')}{2k} \right] * \varepsilon(\vec{\kappa}', z') * \varepsilon(\vec{\kappa}'', z''); \quad (40)$$

$\varepsilon(\vec{\kappa}, z)$  представляет собой поперечный по отношению к направлению распространения спектр флуктуации диэлектрической проницаемости среды, которые будем считать

Гауссовыми. В этом случае можно осуществить следующее преобразование функции корреляции:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(\vec{\kappa}_1, \mathbf{z}_1) \varepsilon(\vec{\kappa}_2, \mathbf{z}_2) \varepsilon(\vec{\kappa}_3, \mathbf{z}_3) \varepsilon(\vec{\kappa}_4, \mathbf{z}_4) \rangle &= \langle \varepsilon(\vec{\kappa}_1, \mathbf{z}_1) \varepsilon(\vec{\kappa}_2, \mathbf{z}_2) \rangle \langle \varepsilon(\vec{\kappa}_3, \mathbf{z}_3) \varepsilon(\vec{\kappa}_4, \mathbf{z}_4) \rangle + \\ &\langle \varepsilon(\vec{\kappa}_1, \mathbf{z}_1) \varepsilon(\vec{\kappa}_3, \mathbf{z}_3) \rangle \langle \varepsilon(\vec{\kappa}_2, \mathbf{z}_2) \varepsilon(\vec{\kappa}_4, \mathbf{z}_4) \rangle + \langle \varepsilon(\vec{\kappa}_1, \mathbf{z}_1) \varepsilon(\vec{\kappa}_4, \mathbf{z}_4) \rangle \langle \varepsilon(\vec{\kappa}_2, \mathbf{z}_2) \varepsilon(\vec{\kappa}_3, \mathbf{z}_3) \rangle; \end{aligned} \quad (41)$$

Для последующего упрощения выражения поменяем порядок интегрирования в уравнении (40):

$$\int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' = 2 \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz''; \quad \mathbf{0} \leq z'' \leq z' \leq z, \quad (42)$$

Иначе говоря, интегрирование по квадрату мы заменили удвоенным интегралом по треугольнику. Аналогично можно поступить и со следующими интегралами:

$$\int_0^L dz \int_0^z dz' = \int_0^L dz' \int_{z'}^L dz; \quad (43)$$

Объединим результаты (42) и (43) в окончательное выражение:

$$\int_0^L dz \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' = 2 \int_0^L dz' \int_0^{z'} dz'' \int_{z'}^L dz; \quad (44)$$

Теперь рассмотрим синус в подынтегральной функции в интеграле (40). Раскроем скобки и сложим подобные члены:

$$\sin \left[ \frac{(\vec{\kappa}' + \vec{\kappa}'')^2 (L-z)}{2k} + \frac{\vec{\kappa}'^2 (z-z')}{2k} + \frac{\vec{\kappa}''^2 (z-z'')}{2k} \right] = \sin \left[ \frac{\vec{\kappa}'^2 (L-z')}{2k} + \frac{\vec{\kappa}''^2 (L-z'')}{2k} + \frac{2\vec{\kappa}' \vec{\kappa}'' (L-z)}{2k} \right];$$

Интеграл от синуса по продольной переменной  $\mathbf{z}$  не представляет сложности в вычислении. В результате мы получим:

$$\int_{z'}^L dz \sin \left[ \frac{\vec{\kappa}'^2 (L-z')}{2k} + \frac{\vec{\kappa}''^2 (L-z'')}{2k} + \frac{\vec{\kappa}' \vec{\kappa}'' (L-z)}{2k} \right] = \frac{k}{\vec{\kappa}' \vec{\kappa}''} \left\{ \cos \left[ \frac{\vec{\kappa}'^2 (L-z')}{2k} + \frac{\vec{\kappa}''^2 (L-z'')}{2k} \right] - \cos \left[ \frac{\vec{\kappa}'^2 (L-z')}{2k} + \frac{\vec{\kappa}''^2 (L-z'')}{2k} + \frac{2\vec{\kappa}' \vec{\kappa}'' (L-z)}{2k} \right] \right\}; \quad (45)$$

Мы определили вид интегралов для  $\chi_1$  и  $\chi_2$ , теперь найдем момент  $\langle \chi_1^2 \chi_2 \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \chi_1^2 \chi_2 \rangle &= \frac{k^2}{4} * \frac{k^2}{4} * \int_0^L dz_1 \int d\vec{\kappa}_1 \sin \left[ \frac{\vec{\kappa}_1^2 (L-z_1)}{2k} \right] \int_0^L dz_2 \int d\vec{\kappa}_2 \sin \left[ \frac{\vec{\kappa}_2^2 (L-z_2)}{2k} \right] * \\ &\int_0^L dz' \int_0^{z'} dz'' \iint d\vec{\kappa}' d\vec{\kappa}'' \left\{ \cos \left[ \frac{\vec{\kappa}'^2 (L-z')}{2k} + \frac{\vec{\kappa}''^2 (L-z'')}{2k} \right] - \cos \left[ \frac{\vec{\kappa}'^2 (L-z')}{2k} + \frac{\vec{\kappa}''^2 (L-z'')}{2k} + \frac{2\vec{\kappa}' \vec{\kappa}'' (L-z)}{2k} \right] \right\} * \\ &\langle \varepsilon(\vec{\kappa}_1, \mathbf{z}_1) \varepsilon(\vec{\kappa}_2, \mathbf{z}_2) \varepsilon(\vec{\kappa}', \mathbf{z}') \varepsilon(\vec{\kappa}'', \mathbf{z}'') \rangle; \end{aligned} \quad (46)$$

Полученное выражение выглядит слишком громоздко, поэтому упростим его используя уравнение (41). Первый член в выражении (41) даст после интегрирования -  $\langle \chi_1^2 \rangle \langle \chi_2 \rangle$ , а интегралы для второго и третьего членов можно будет объединить в один удвоенный. В итоге получим:

$$\langle \chi_1^2 \chi_2 \rangle = \langle \chi_1^2 \rangle \langle \chi_2 \rangle + 2 \frac{k^4}{16} \int_0^L dz_1 \int d\vec{\kappa}_1 \int_0^L dz_2 \int d\vec{\kappa}_2 \int_0^L dz' \int_0^L dz'' * \\ \iint d\vec{\kappa}' d\vec{\kappa}'' \sin \left[ \frac{\vec{\kappa}_1^2 (L-z_1)}{2k} \right] \sin \left[ \frac{\vec{\kappa}_2^2 (L-z_2)}{2k} \right] \left\{ \cos \left[ \frac{\vec{\kappa}'^2 (L-z')}{2k} + \frac{\vec{\kappa}''^2 (L-z'')}{2k} \right] - \cos \left[ \frac{\vec{\kappa}'^2 (L-z')}{2k} + \frac{\vec{\kappa}''^2 (L-z'')}{2k} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{2\vec{\kappa}'\vec{\kappa}''(L-z)}{2k} \right] \right\} \langle \varepsilon(\vec{\kappa}_1, z_1) \varepsilon(\vec{\kappa}', z') \rangle \langle \varepsilon(\vec{\kappa}_2, z_2) \varepsilon(\vec{\kappa}'', z'') \rangle; \quad (47)$$

Рассмотрим более подробно подынтегральную функцию. Представим функцию корреляции через дельта-функции Дирака и её спектральную плотность [12]:

$$\langle \varepsilon(\vec{\kappa}_1, z_1) \varepsilon(\vec{\kappa}', z') \rangle = 2\pi * \Phi(\vec{\kappa}_1, \mathbf{0}, z_1) \delta(\vec{\kappa}_1 + \vec{\kappa}') \delta(z_1 - z'); \quad (48)$$

Здесь  $\Phi(\vec{\kappa}_1, \mathbf{0}, z_1)$  – трехмерный пространственный спектр корреляционной функции от  $\varepsilon$ , медленно зависящий от высоты  $z_1$ . Используем данное представление (48) в интеграле для  $\langle \chi_1^2 \chi_2 \rangle$ :

$$\langle \chi_1^2 \chi_2 \rangle = \langle \chi_1^2 \rangle \langle \chi_2 \rangle + 2 \frac{k^4}{16} (2\pi)^2 \int_0^L dz_1 \int_0^L dz_2 \int d\vec{\kappa}_1 \int d\vec{\kappa}_2 \iint d\vec{\kappa}' d\vec{\kappa}'' * \\ \sin \left[ \frac{\vec{\kappa}_1^2 (L-z_1)}{2k} \right] \sin \left[ \frac{\vec{\kappa}_2^2 (L-z_2)}{2k} \right] * \left\{ \cos \left[ \frac{\vec{\kappa}'^2 (L-z')}{2k} + \frac{\vec{\kappa}''^2 (L-z'')}{2k} \right] - \cos \left[ \frac{\vec{\kappa}'^2 (L-z')}{2k} + \frac{\vec{\kappa}''^2 (L-z'')}{2k} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{2\vec{\kappa}'\vec{\kappa}''(L-z)}{2k} \right] \right\} \Phi(\vec{\kappa}_1, \mathbf{0}, z_1) * \Phi(\vec{\kappa}_2, \mathbf{0}, z_2); \quad (49)$$

Можно заметить, что под интегралом присутствует косинус от суммы аргументов, для которого известно следующее разложение:

$$\cos[\alpha] - \cos[\alpha + \beta] = \cos(\alpha) - \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta);$$

Если подставить полученный результат в основную формулу и взять интеграл от  $\sin(\alpha)\sin(\beta)$  по переменной  $\kappa$ , то его значение даст ноль, так как  $\beta$  является нечетной функцией по  $\kappa$ . Тогда оставшееся выражение легко преобразовать в следующий вид:

$$\cos[\alpha] - \cos[\alpha + \beta] \rightarrow \cos(\alpha)(1 - \cos(\beta)) = 2 * \cos(\alpha)\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right); \quad (50)$$

Вновь обратимся к уравнению (49). В подынтегральном выражении функции вида  $\Phi(\vec{\kappa}, \mathbf{0}, z)$  задаются анизотропной обратно-степенной моделью для пространственного спектра корреляционной функции:

$$\Phi(\vec{\kappa}, \mathbf{0}, z) \approx \frac{C \sigma^2(L-z)}{k^p [1 + (a^2 - 1) \sin^2 \theta * \cos^2 \varphi]^{p/2}}; \quad (51)$$

Здесь  $p$  – спектральный индекс (показатель степени закона убывания трёхмерного спектра турбулентности),  $C$  – нормировочный коэффициент,  $a$  – параметр анизотропии, представляющий собой отношение продольного и поперечного масштабов неоднородностей,  $\sigma^2(L-z)$  – распределение дисперсии относительных флуктуаций электронной плотности вдоль опорного луча,  $\varphi, \kappa$  – полярные координаты вектора  $\vec{\kappa}$ , а  $\theta$  – угол между направлением луча и магнитного поля.

Нормировочный коэффициент для (51) определяется равенством:

$C = \frac{\Gamma(\frac{p}{2}) * a}{\pi^{3/2} \Gamma(\frac{p-3}{2}) \kappa_0^3 p}$ ; (52) где  $\kappa_0 = \frac{2\pi}{L_0}$ ; а  $L_0$  - это внешний масштаб турбулентности в поперечном к магнитному полю направлении.

Для дисперсии флуктуаций диэлектрической проницаемости справедливо следующее выражение:

$$\sigma^2(L - z) = [1 - \varepsilon_0(L - z)]^2 \sigma_N^2 = \frac{\omega_p^4(L-z)}{\omega^4} \sigma_N^2, \quad (53)$$

где  $\sigma_N^2$  - дисперсия флуктуаций относительной электронной плотности,  $\omega$  – несущая частота сигнала, а  $\omega_p = \left(\frac{e^2 N(z)}{\varepsilon_0 m_e}\right)^{1/2}$  – плазменная частота, зависящая от  $z$  посредством пространственной зависимости концентрации  $N(z)$ .

В системе координат, связанной с направлением магнитного поля, в качестве модели спектра ионосферной турбулентности используется анизотропный степенной спектр с двумя различными масштабами вдоль и поперёк магнитного поля:

$$\Phi_\varepsilon(\vec{\kappa}_\perp, \kappa_\parallel, z) = a[1 - \varepsilon_0(z)]^2 \sigma_N^2 \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{p-3}{2}) \pi^2 \kappa_0^3} \left(1 + \frac{\kappa_\perp^2}{\kappa_0^2} + \frac{a^2 \kappa_\parallel^2}{\kappa_0^2}\right)^{-\frac{p}{2}}; \quad (54)$$

В системе координат, связанной с лучом, пространственный спектр функции корреляции зависит лишь от одной продольной и одной поперечной координаты и имеет следующий вид:

$$\Phi_\varepsilon(\vec{\kappa}, \mathbf{0}, z) = C \sigma^2(L - z) * \left(1 + \frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2 (\cos^2 \varphi + a \sin^2 \varphi)}{\kappa_0^2}\right)^{\frac{p}{2}}; \quad (55)$$

Здесь  $\kappa_x = \kappa \sin \varphi$  и  $\kappa_y = \kappa \cos \varphi$ , а переменные  $\kappa, \varphi$  представляют собой компоненты вектора  $\vec{\kappa}$  в полярной системе координат.

Введем новые переменные  $\eta_1$  и  $\eta_2$ :

$$\frac{\kappa_1^2(L-z_1)}{2k} = \eta_1^2; \quad \frac{\kappa_2^2(L-z_2)}{2k} = \eta_2^2; \quad (56)$$

Тогда члены в подынтегральной функции интеграла (49) примут следующий вид:

$$\frac{\kappa_1 \kappa_2 (L-z_1)}{2k} = \eta_1 \eta_2 \left(\frac{L-z_1}{L-z_2}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad (\kappa_1 \kappa_2)^2 = \frac{4k^2}{(L-z_1)(L-z_2)} (\eta_1 \eta_2)^2;$$

$$\vec{\kappa}_1 \vec{\kappa}_2 = \kappa_1 \kappa_2 * \cos(\varphi_1 - \varphi_2); \quad \text{где } \kappa = |\vec{\kappa}|; \quad (57)$$

Также перейдем в интеграле по переменной  $\vec{\kappa}_1$  к полярной системе координат:

$$\int d\vec{\kappa}_1 = \int_0^\infty \kappa_1 d\kappa_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 = \frac{2k}{L-z_1} \int_0^\infty \eta_1 d\eta_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1; \quad (58)$$

В результате использования явного вида функции  $\Phi(\vec{\kappa}, \mathbf{0}, z)$ , а также полученных преобразований (57) и (58) интеграл (49) примет следующий вид:

$$\langle \chi_1^2 \chi_2 \rangle = \langle \chi_1^2 \rangle \langle \chi_2 \rangle + \frac{k^4}{4} (2\pi)^2 * \int_0^L dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \iint_0^\infty \eta_1 \eta_2 d\eta_1 d\eta_2 * \iint_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 * \frac{(2k)^2}{(L-z_1)(L-z_2)} \sin\eta_1^2 * \sin\eta_2^2 * \cos(\eta_1^2 + \eta_2^2) * \sin \left[ \eta_1 \eta_2 \left( \frac{L-z_1}{L-z_2} \right)^{\frac{1}{2}} * \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] * C^2 \frac{\sigma^2(L-z_1) \sigma^2(L-z_2)}{[1+b*\cos^2\varphi_1]^{\frac{p}{2}} [1+b*\cos^2\varphi_2]^{\frac{p}{2}}} * \frac{(L-z_1)^{\frac{p}{2}} (L-z_2)^{\frac{p}{2}}}{(2k)^p (\eta_1 \eta_2)^p}; \quad (59)$$

Связь параметра  $b$  с параметром анизотропии дается через формулу:  $b = (a^2 - 1) \sin^2 \theta$ .

Следующим шагом вынесем нормировочный коэффициент и не зависящие от интегрирования переменные за знак интеграла (59):

$$\langle \chi_1^2 \chi_2 \rangle = \langle \chi_1^2 \rangle \langle \chi_2 \rangle + \frac{k^4}{4} (2\pi)^2 \frac{C^2}{(2k)^{p-2}} \int_0^L dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \sigma^2(L-z_1) \sigma^2(L-z_2) * * (L-z_1)^{\frac{p}{2}-1} * (L-z_2)^{\frac{p}{2}-1} \iint_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1 d\varphi_2}{[1+b*\cos^2\varphi_1]^{\frac{p}{2}} [1+b*\cos^2\varphi_2]^{\frac{p}{2}}} * \iint_0^\infty \frac{\eta_1 \eta_2 d\eta_1 d\eta_2}{(\eta_1 \eta_2)^p} \sin\eta_1^2 * \sin\eta_2^2 * \cos(\eta_1^2 + \eta_2^2) * \sin \left[ \eta_1 \eta_2 \left( \frac{L-z_1}{L-z_2} \right)^{\frac{1}{2}} * \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right]; \quad (60)$$

Для упрощения вида уравнения снова совершим замену переменных:

$$\eta_1 = \eta * \cos\gamma; \quad \eta_2 = \eta * \sin\gamma; \quad \eta_1 \eta_2 = \eta^2 * \cos\gamma * \sin\gamma;$$

$$\iint_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 = \int_0^\infty \eta d\eta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\gamma;$$

Тогда интеграл по  $\eta_1, \eta_2$  представится как:

$$Q = \iint_0^\infty \frac{\eta_1 \eta_2 d\eta_1 d\eta_2}{(\eta_1 \eta_2)^p} \sin\eta_1^2 * \sin\eta_2^2 * \cos(\eta_1^2 + \eta_2^2) * \sin \left[ \eta_1 \eta_2 \left( \frac{L-z_1}{L-z_2} \right)^{\frac{1}{2}} * \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] = \int_0^\infty \eta d\eta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\gamma \frac{\eta^2 \cos\gamma * \sin\gamma}{\eta^{2p} (\cos\gamma * \sin\gamma)^p} * \sin(\eta^2 \cos^2\gamma) * \sin(\eta^2 \sin^2\gamma) * \cos(\eta^2) * \sin \left[ \eta^2 \cos\gamma * \sin\gamma * \left( \frac{L-z_1}{L-z_2} \right)^{\frac{1}{2}} * \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right]; \quad (61)$$

Обозначим через  $y$  новую переменную, равную  $y = \eta^2$  и преобразуем интеграл  $Q$ :

$$Q_1(q) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dy}{(\cos\gamma * \sin\gamma)^{p-1}} \int_0^\infty \frac{dy}{y^{p-1}} \sin(y * \cos^2\gamma) * \sin(y * \sin^2\gamma) * \cos\gamma * \sin \left[ y * \cos\gamma * \sin\gamma * \left( \frac{L-z_1}{L-z_2} \right)^{\frac{1}{2}} * q \right]; \quad (62)$$

где для переменной  $q = \left( \frac{L-z_1}{L-z_2} \right)^{\frac{1}{2}} * \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = t * \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$  (63) область значений будет лежать в пределах  $-1 \leq q \leq 1$ , поскольку, как нетрудно заметить, выражение  $\left( \frac{L-z_1}{L-z_2} \right)^{\frac{1}{2}} = t$  будет лежать в диапазоне от нуля до единицы:  $0 \leq t \leq 1$ , так как обе переменные  $z_1$  и  $z_2$  лежат в интервале от 0 до L.

Отметим также, что интеграл (62) является четным по  $q$ :  $Q_1(q) = Q_1(-q)$ ;

Вернемся к выражению (61) и перепишем его в терминах переменных  $t, \varphi$ :

$$Q_2(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1 d\varphi_2}{[1+b*\cos^2\varphi_1]^{\frac{p}{2}}*[1+b*\cos^2\varphi_2]^{\frac{p}{2}}} Q_1(t * \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) =$$

$$4 \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{d\varphi_1 d\varphi_2}{[1+b*\cos^2\varphi_1]^{\frac{p}{2}}*[1+b*\cos^2\varphi_2]^{\frac{p}{2}}} Q_1(t * \cos(\varphi_1 - \varphi_2)); \quad (64)$$

Полученный интеграл можно рассчитать численно, если задавать переменную  $q$  в пределах следующей области значений:  $-1 \leq q \leq 1$ .

Зная теперь зависимость  $Q_2(t)$ , можно рассчитать и выражение (60):

$$\langle \chi_1^2 \chi_2 \rangle = \langle \chi_1^2 \rangle \langle \chi_2 \rangle + \frac{k^4}{4} (2\pi)^2 \frac{c^2}{(2k)^{p-2}} \int_0^L dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \sigma^2(L - z_1) \sigma^2(L - z_2) * (L - z_1)^{\frac{p}{2}-1} * (L - z_2)^{\frac{p}{2}-1} * Q_2 \left\{ \left( \frac{L - z_1}{L - z_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}; \quad (65)$$

Преобразуем данное уравнение в соответствии с новой заменой переменных:

$$L - z_1 = h_1; \quad L - z_2 = h_2; \quad \int_0^L dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 = \int_0^L dh_1 \int_{h_1}^L dh_2;$$

В итоге получим окончательное выражение для  $\langle \chi_1^2 \chi_2 \rangle$ :

$$\langle \chi_1^2 \chi_2 \rangle = \langle \chi_1^2 \rangle \langle \chi_2 \rangle + \frac{k^4}{4} (2\pi)^2 \frac{c^2}{(2k)^{p-2}} \int_0^L dh_1 \int_{h_1}^L dh_2 \sigma^2(h_1) * \sigma^2(h_2) * (h_1 h_2)^{\frac{p}{2}-1} * Q_2 \left\{ \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} = \langle \chi_1^2 \rangle \langle \chi_2 \rangle + \frac{k^4}{4} (2\pi)^2 \frac{c^2}{(2k)^{p-2}} \int_0^L dh_2 \int_0^{h_2} dh_1 \sigma^2(h_1) * \sigma^2(h_2) * (h_1 h_2)^{\frac{p}{2}-1} * Q_2 \left\{ \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\};$$

Вспоминая выражение (38), получим искомое уравнение:

$$K_3 = \frac{3*k^4}{4} (2\pi)^2 \frac{c^2}{(2k)^{p-2}} \int_0^L dh_2 \int_0^{h_2} dh_1 \sigma^2(h_1) * \sigma^2(h_2) * (h_1 h_2)^{\frac{p}{2}-1} * Q_2 \left\{ \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}; \quad (66)$$

Таким образом выражение (66) позволяет численно рассчитать значение третьего кумулянта, что, собственно, и требовалось в нашей задаче. Для большей наглядности и для сравнения с имеющимися результатами, полученными в работе [9] для однородной среды и изотропных флуктуаций, найдем соотношение между найденным кумулянтном и квадратом второго момента уровня.

Для этого аналогично предыдущим рассуждениям запишем Фурье-интеграл для момента  $\langle \chi_1^2 \rangle$ :

$$\langle \chi_1^2 \rangle = \frac{k^2}{4} * (2\pi)^2 \int_0^L dz \int d\vec{\kappa} \sin^2 \left[ \frac{\kappa^2(L-z)}{2k} \right] * \Phi_\epsilon(\vec{\kappa}, \mathbf{0}, z) = (2\pi)^2 * \frac{k^2}{4} \int_0^L dz \int_0^\infty \kappa d\kappa * \sin^2 \left[ \frac{\kappa^2(L-z)}{2k} \right] \int_0^{2\pi} \frac{c \sigma^2(L-z)}{x^p [1+b*\cos^2\varphi]^{\frac{p}{2}}}; \quad (67)$$

Введем новую переменную  $y = \frac{x^2(L-z)}{2k}$  и подставим в выражение (67):

$$\begin{aligned} \langle \chi_1^2 \rangle &= (2\pi)^2 \frac{k^2}{4} C \int_0^L dz \int_0^\infty \left(\frac{L-z}{2k}\right)^{\frac{p}{2}-1} \frac{dy}{y^2} \sin^2 y \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi \sigma^2(L-z)}{[1+b*\cos^2\varphi]^{\frac{p}{2}}} = \left[ \begin{matrix} (L-z) = h \\ -dz = dh \end{matrix} \right] = \\ &= (2\pi)^2 \frac{k^2}{4} C \int_0^L dh \left(\frac{h}{2k}\right)^{\frac{p}{2}-1} \sigma^2(h) * \int_0^\pi \frac{d\varphi}{[1+b*\cos^2\varphi]^{\frac{p}{2}}} \int_0^\infty \frac{dy}{y^2} \sin^2 y; \quad (68) \end{aligned}$$

Имея явный вид выражения (68), легко определить, чему будет равен квадрат первого момента:

$$\begin{aligned} \langle \chi_1^2 \rangle^2 &= (2\pi)^4 \frac{k^4}{16} \frac{C^2}{(2k)^{p-2}} \int_0^L \int_0^L dh_1 dh_2 \sigma^2(h_1) * \sigma^2(h_2) (h_1 h_2)^{\frac{p}{2}-1} * \\ &= \left\{ \int_0^\pi \frac{d\varphi}{[1+b*\cos^2\varphi]^{\frac{p}{2}}} \right\}^2 \left\{ \int_0^\infty \frac{dy}{y^2} \sin^2 y \right\}^2; \quad (69) \end{aligned}$$

Обозначим интегралы в выражении (69) через отдельные переменные:

$$\left\{ \int_0^\infty \frac{dy}{y^2} \sin^2 y \right\}^2 = IR_1^2; \quad \left\{ \int_0^\pi \frac{d\varphi}{[1+b*\cos^2\varphi]^{\frac{p}{2}}} \right\}^2 = IR_2^2; \quad (70)$$

Расчет интегралов (70) производится численно. Таким образом определив значения выражений (69) и (66), можно определить искомое значение параметра  $\alpha$ , связанного с третьим кумулянтном посредством следующего уравнения:

$$\langle \chi_1^2 \rangle^2 = \alpha * K_3; \quad (71)$$

### 3. Результаты вычислений.

В данном разделе будут представлены результаты вычислений для третьего кумулянта, найденного по формуле (66), проведен анализ зависимостей параметра негауссовости  $\gamma$  и коэффициента  $\alpha$ , рассчитанного по формуле (71) от величин анизотропии и флуктуации электронной концентрации.

Будут построены функции плотности вероятностей распределения уровня амплитуды и их интегральные функции распределения, которые в дальнейшем позволят определить функцию отображения уровня  $\chi_{\text{исходное}} \rightarrow \chi_{\text{новое}}$ . Такое отображение необходимо для корректировки исходного случайного ряда уровня сигнала, полученного в первом приближении, таким образом, чтобы в конечном итоге получить уже известное негауссово распределение, рассчитанное при учете второго приближения.

### 3.1 Численный расчет третьего кумулянта.

Как говорилось ранее, для того чтобы получить функцию плотности вероятности уровня сигнала при учете второго приближения метода Рытова, необходимо знать величины кумулянтов вплоть до третьего порядка, однако в силу сложности определения вида выражения для третьего кумулянта, нам приходится прибегать к численным методам. Соотношение (66) рассматривается как уравнение, которое предоставляет возможность рассчитать искомое значение третьего кумулянта. Значения  $K_3$  в программном симуляторе вычисляются для конкретно заданных условий распространения.

Далее в соответствии с выведенным в главе 2.2. формулами, программа компьютерного симулятора производит численный расчет интегралов (62) и (64), который необходим для дальнейшего определения параметра  $K_3$ . В результате проведенного интегрирования мы получаем зависимости интегралов  $Q_1(q)$  и  $Q_2(t)$  от их параметров. Примеры таких зависимостей представлены на рис. 2 и рис.3

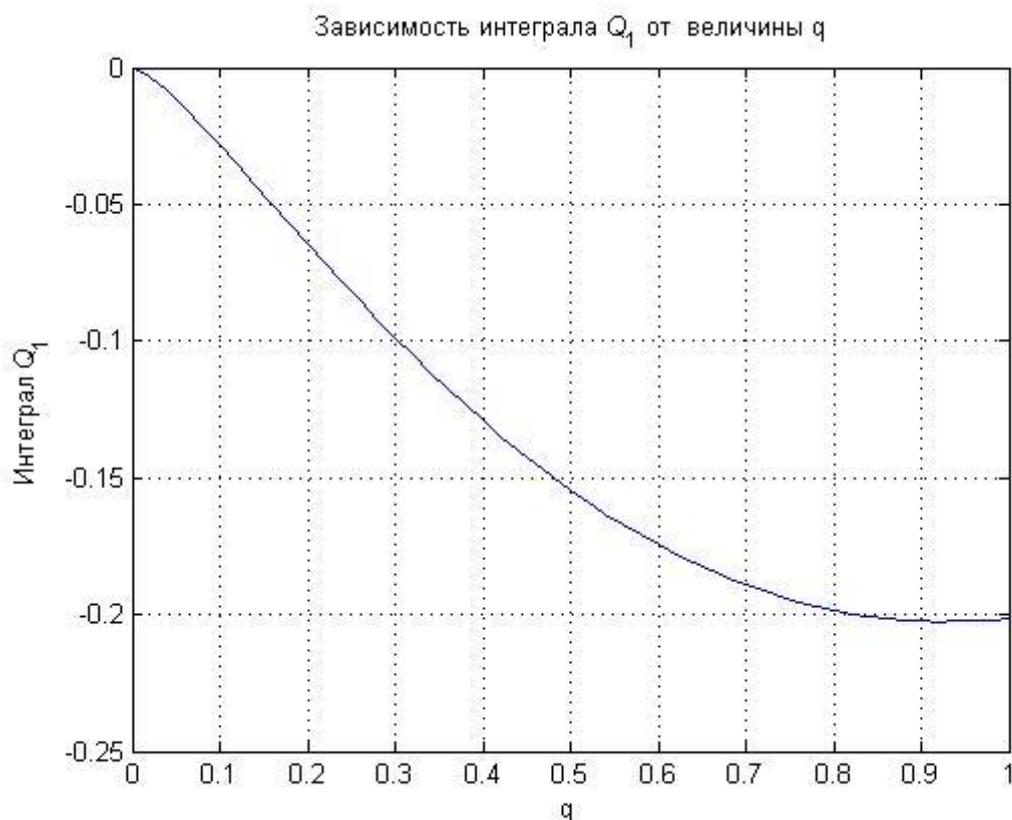
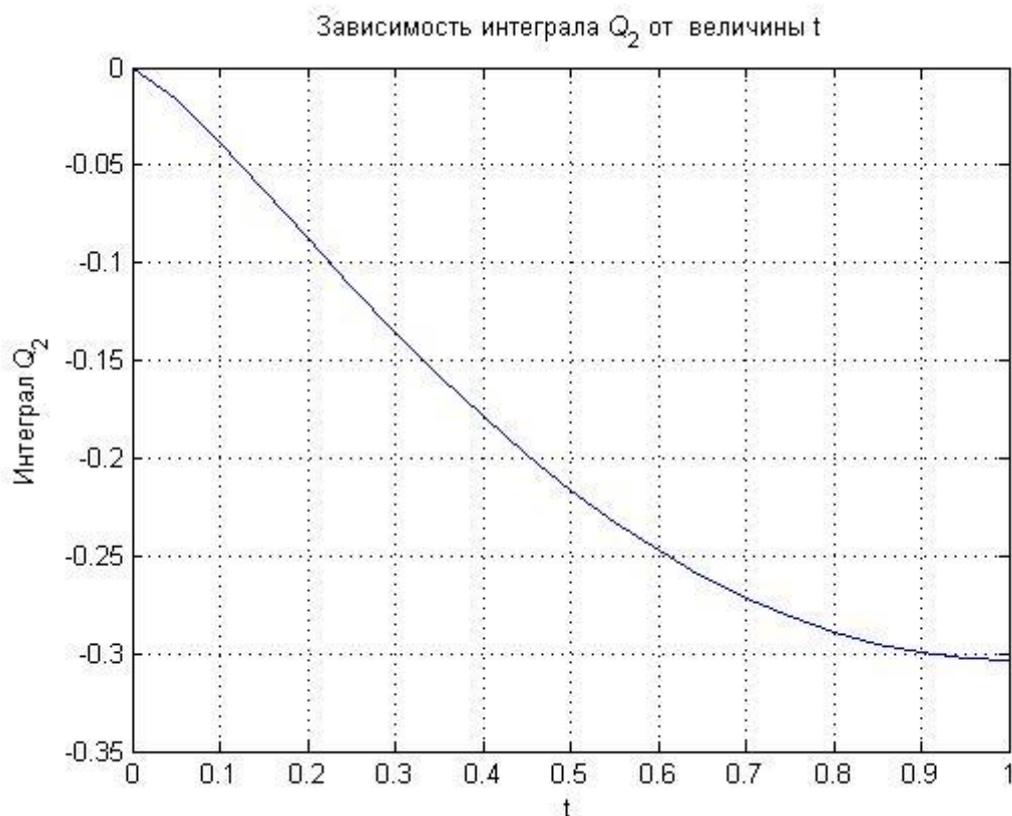


Рис 2. Зависимость интеграла  $Q_1(q)$  для  $0 \leq q \leq 1$ .



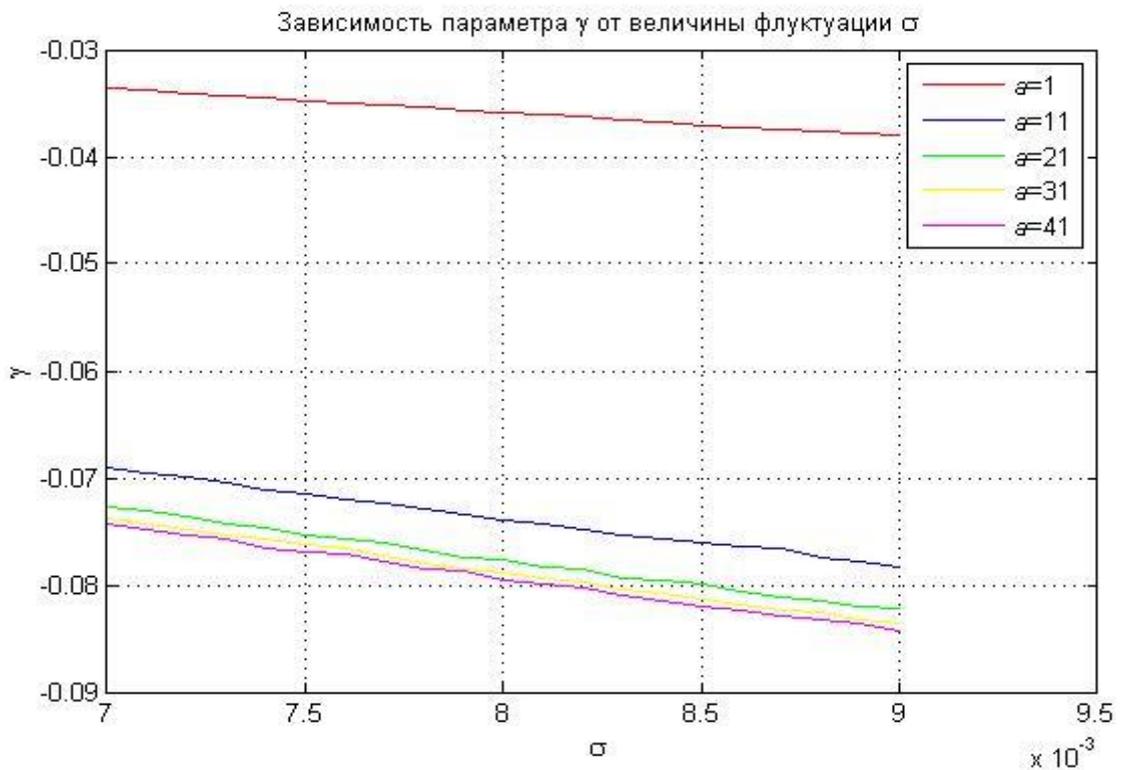
**Рис 3.** Зависимость интеграла  $Q_2(t)$  для  $0 \leq t \leq 1$ .

Из полученных изображений видно, что зависимость интегралов (62) и (64) имеет нелинейный характер, а область их значений лежит в нижней отрицательной полуплоскости.

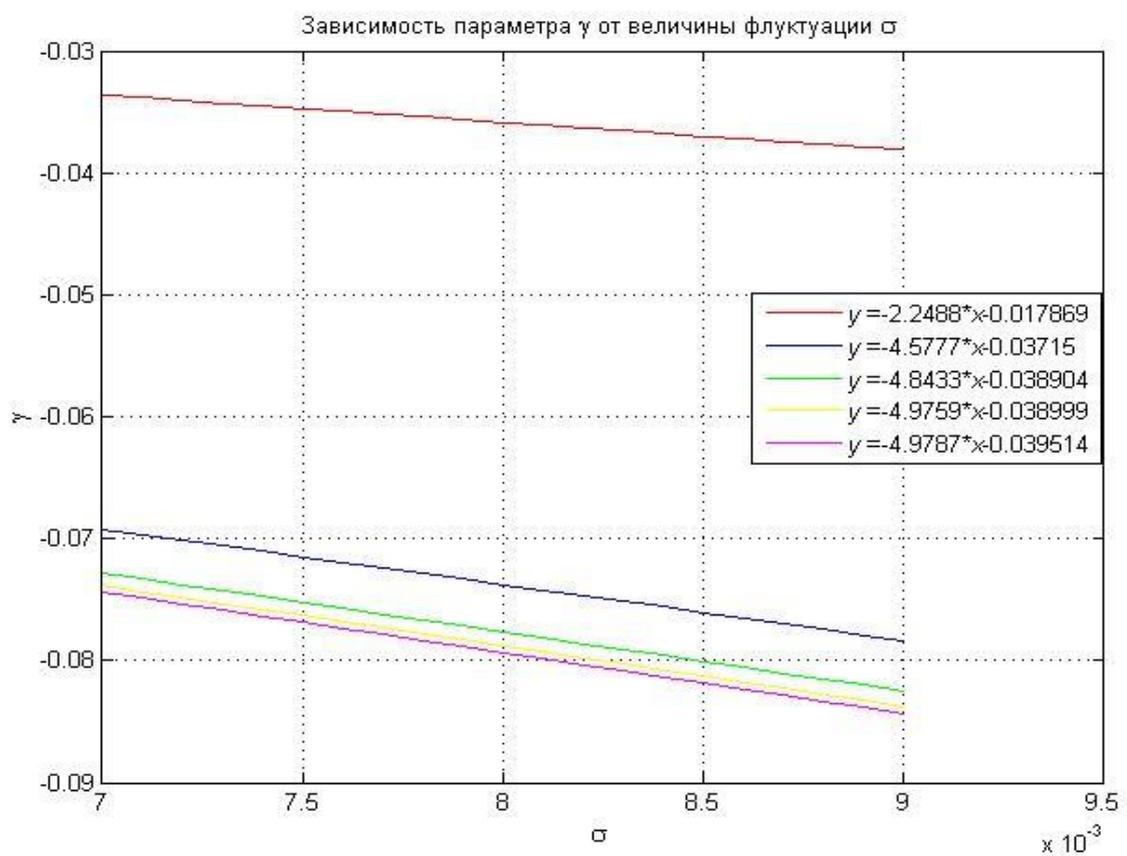
Далее в соответствии с предложенным ранее алгоритмом для получения коэффициента  $\alpha$  необходимо произвести расчет интегралов (70), необходимых для дальнейшего вычисления интеграла (69). Таким образом, зная конкретные значения интегралов (66) и (69), можно найти их отношение, которое в конечном итоге и даст искомый коэффициент  $\alpha$ .

Для контроля правильности выведенных формул и численных процедур был проведён расчёт для однородной среды распространения и изотропной модели флуктуаций ( $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ), аналогичный расчётам работы [9]. Результаты расчёта коэффициента  $\alpha$  совпали до трёх значащих цифр, что подтверждает правильность используемого подхода.

Зная алгоритм расчета третьего кумулянта, не составит труда вычислить значение параметра негауссовости  $\gamma$ , который представлен формулой (25). Интересно проследить зависимость параметра  $\gamma$  от параметров среды. Например, на рис. 4 показана зависимость параметра негауссовости от величины флуктуаций электронной концентрации  $\sigma$ , при разных значениях параметра анизотропии.



**Рис 4.** Зависимость параметра  $\gamma$  от величины флуктуаций электронной концентрации при разных параметрах анизотропии.



**Рис 5.** Зависимость параметра  $\gamma$  от величины флуктуаций электронной концентрации, аппроксимированная линейной функцией, при разных параметрах анизотропии.

Если взять в расчет формулу (25), то согласно ей величина параметра  $\gamma$  пропорциональна величине  $\sigma$ , что наглядно изображено на рис. 5.

Изменение величины параметра анизотропии даст несколько иную зависимость для параметра  $\gamma$  и коэффициента  $\alpha$  (рис. 6-7), которое также как в предыдущем случае вычисляется для различных значений флуктуаций электронной концентрации.

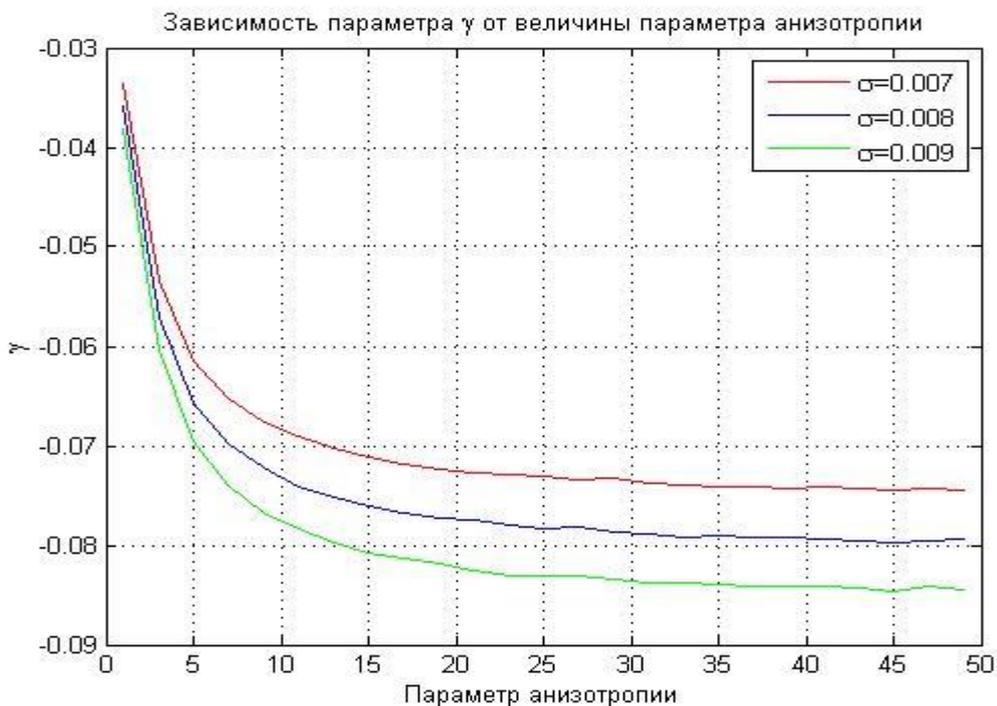


Рис 6. Зависимость параметра  $\gamma$  от величины от параметра анизотропии при разных значениях флуктуации электронной концентрации.

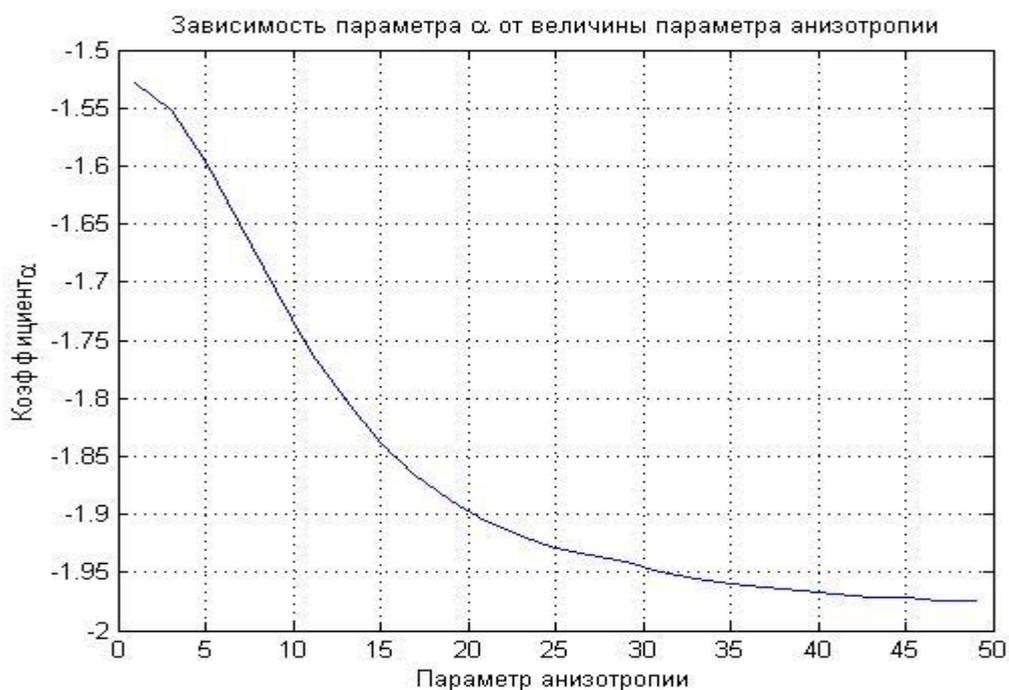


Рис 7. Зависимость коэффициента  $\alpha$  от величины от параметра анизотропии.

Как видно из графиков, область значений параметра  $\gamma$  и коэффициента  $\alpha$  лежит в отрицательной полуплоскости. Зависимость  $\gamma$  от параметра анизотропии имеет нелинейный характер. Нетрудно заметить, что чем больше анизотропия, тем медленнее рост параметра негауссовости по абсолютной величине. Также на рис 6. представлена зависимость параметра  $\gamma$  от величины флуктуации электронной концентрации: чем больше флуктуации, тем ниже кривая зависимости  $\gamma$ . Коэффициента  $\alpha$ , как несложно заметить, от величины флуктуаций не зависит, его кривая остается неизменной для любого значения  $\sigma$ .

### 3.2 Получение отображения для логарифма амплитуды.

Как говорилось ранее, чтобы получить новое сгенерированное поле при учете второго приближения теории Рытова, необходимо задать функцию отображения уровня, которая позволила бы скорректировать исходное нормальное распределение уровня так, чтобы в конечном итоге получить распределение уровня, вычисленное с учётом второго приближения метода Рытова.

Рассмотрим подробно процедуру построения такого отображения. Она заключается в следующем:

1. Используя формулу (34), строим распределение уровня  $P_{\chi_{исх}}(\chi_{исх})$  для первого приближения метода Рытова, когда параметр негауссовости  $\gamma = 0$  и распределение  $P_{\chi_{нов}}(\chi_{нов})$  при учете второго приближения, когда  $\gamma \neq 0$ . В дальнейшем будут использоваться интегральные функции распределения для данных распределений.
2. Для исходного распределения  $\chi_{исх}$  имеем:  $\int_{-\infty}^{\chi_{исх}} P_{\chi_{исх}}(\chi_{исх}) d\chi_{исх}$
3. Для нового распределения:  $\int_{-\infty}^{\chi_{нов}} P_{\chi_{нов}}(\chi_{нов}) d\chi_{нов}$
4. Из равенства данных интегралов легко установить искомое соответствие:  $\chi_{нов} = F_{\chi}(\chi_{исх})$ . Оно заключается в том, что для каждого значения  $\chi_{исх}$  должно выполняться равенство  $P_{\chi_{исх}}(\chi_{исх}) d\chi_{исх} = P_{\chi_{нов}}(\chi_{нов}) d\chi_{нов}$ , иначе говоря, зная интегральные распределения для  $\chi_{исх}$  и  $\chi_{нов}$ , не составит труда определить и функцию отображения  $F_{\chi}$ .

Перейдем непосредственно к моделированию. Проиллюстрируем реализацию алгоритма, описанного в главе 2.1 (формулы (23), (34)) на конкретном примере для конкретного значения индекса сцинтилляций  $S_4$ . Как отмечалось ранее, для иллюстрации всех шагов реализации разработанного алгоритма требуется задать параметры неоднородной фоновой среды, в которой происходит распространение волнового сигнала, и условия его распространения. В нашем случае мы задаем следующие параметры:

$L_0 = 10$  км – внешний масштаб турбулентностей;

$\sigma = 0.01$  – флуктуации электронной плотности;

$f = 1575$  – несущая частота сигнала;

$\varphi = 45^{\circ}$  – угол наклона луча;

$\theta = 0^{\circ}$  – азимут относительно магнитного поля;

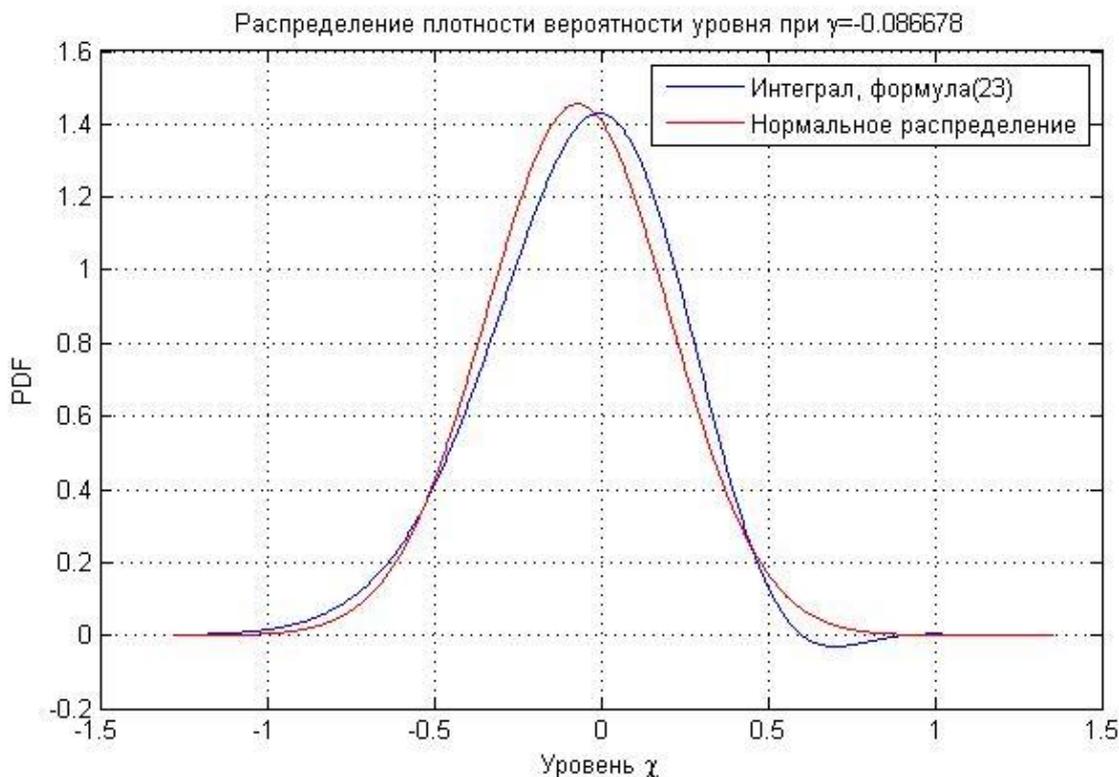
$\psi = -35^{\circ}$  - угол наклона магнитного поля;

В частности, профиль электронной концентрации ионосферы, используемый в расчётах, сгенерирован ионосферной моделью NeQuick [6] для широты =  $23, 20^{\circ}$ , долготы =  $45, 90^{\circ}$  в 19:00 по местному времени января месяца 2002 года и величины потока солнечного радиоизлучения  $S_{10.7} = 176$ .

В качестве модели флуктуаций электронной концентрации используется анизотропный степенной закон со спектральным индексом **3.7** и внешними масштабами, различными вдоль и поперёк направления магнитного поля (степень анизотропии = **15**). Моделирование осуществляется для сигнала с несущей частотой **1575 Гц**.

Далее в программном симуляторе реализуется расчет интегралов (23) и (34).

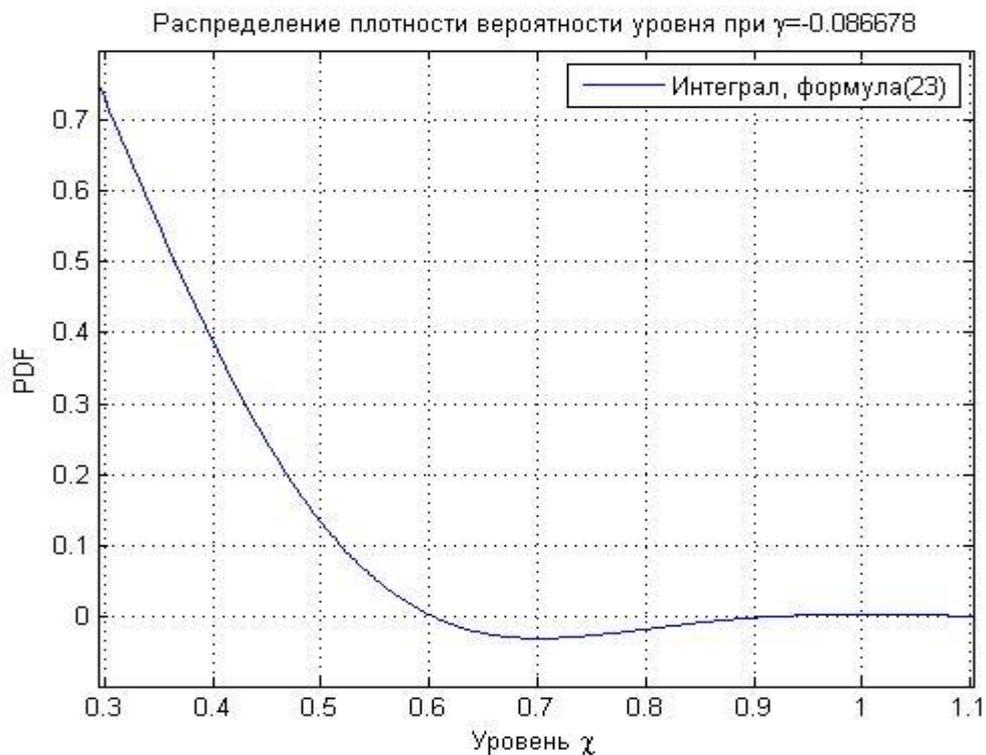
На **рис. 8.** представлено распределения плотности вероятности логарифма амплитуд, рассчитанное по формуле (23) для исходного нормального распределения (**рис. 8.** красная линия, Гауссов процесс,  $\gamma = 0$ ) с дисперсией  $\sigma^2$  и распределения, полученного с учетом второго приближения (**рис. 8.** синяя линия,  $\gamma \neq 0$ ).



**Рис 8.** Распределение плотности вероятности уровня для первого и второго приближения метода Рытова (формула 23).

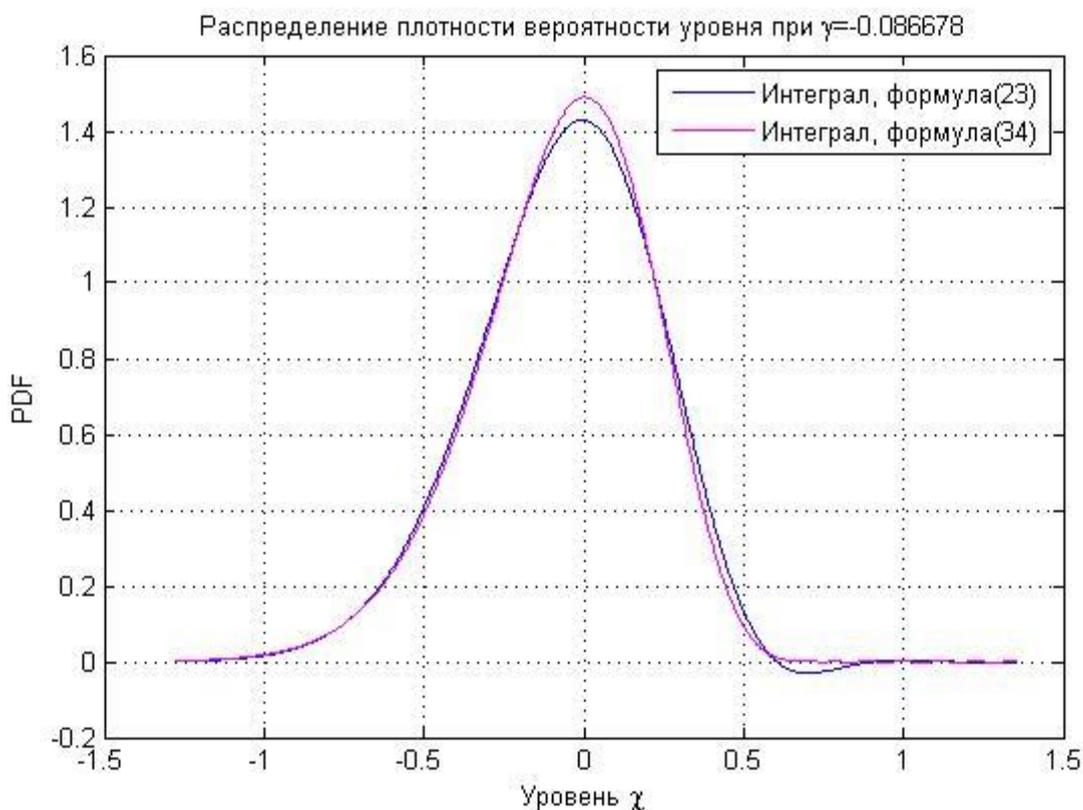
Однако, как отмечалось ранее, принимать функцию плотности вероятности, рассчитанную по формуле (23) в качестве плотности вероятностного распределения мы не

имеем права, так как в некоторой области значений уровня распределение принимает отрицательные значения, как показано на **рис 9**.

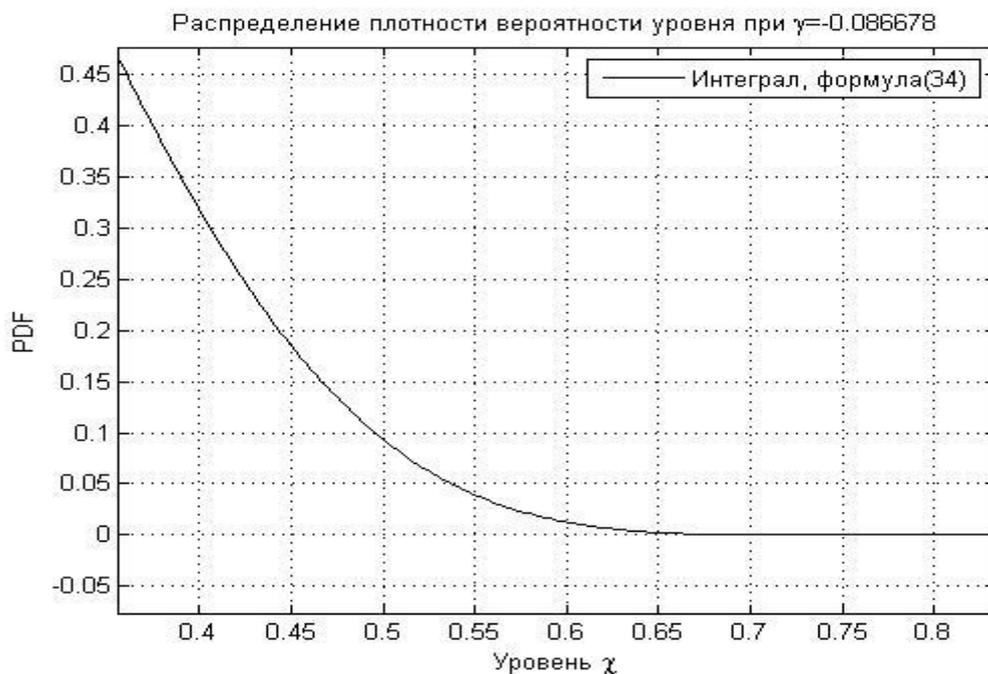


**Рис9.** Распределение плотности вероятности уровня, рассчитанное для второго приближения метода Рытова (формула 23).

Вследствие этого в главе 2.2. был проведен расчет для новой функции распределения, представленной интегралом (34). Результаты интегрирования такой функции представлены на **рис. 10-11**.



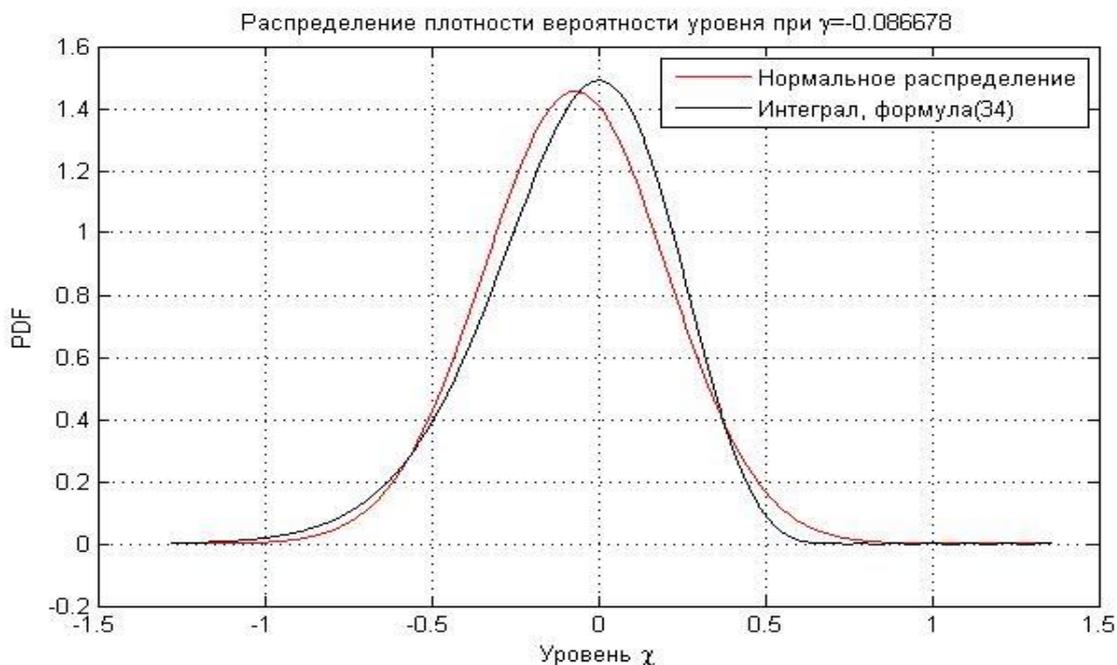
**Рис 10. Распределение плотности вероятности уровня для второго приближения метода Рытова (формулы 23 и 34).**



**Рис 11. Распределение плотности вероятности уровня второго приближения метода Рытова (формула 34).**

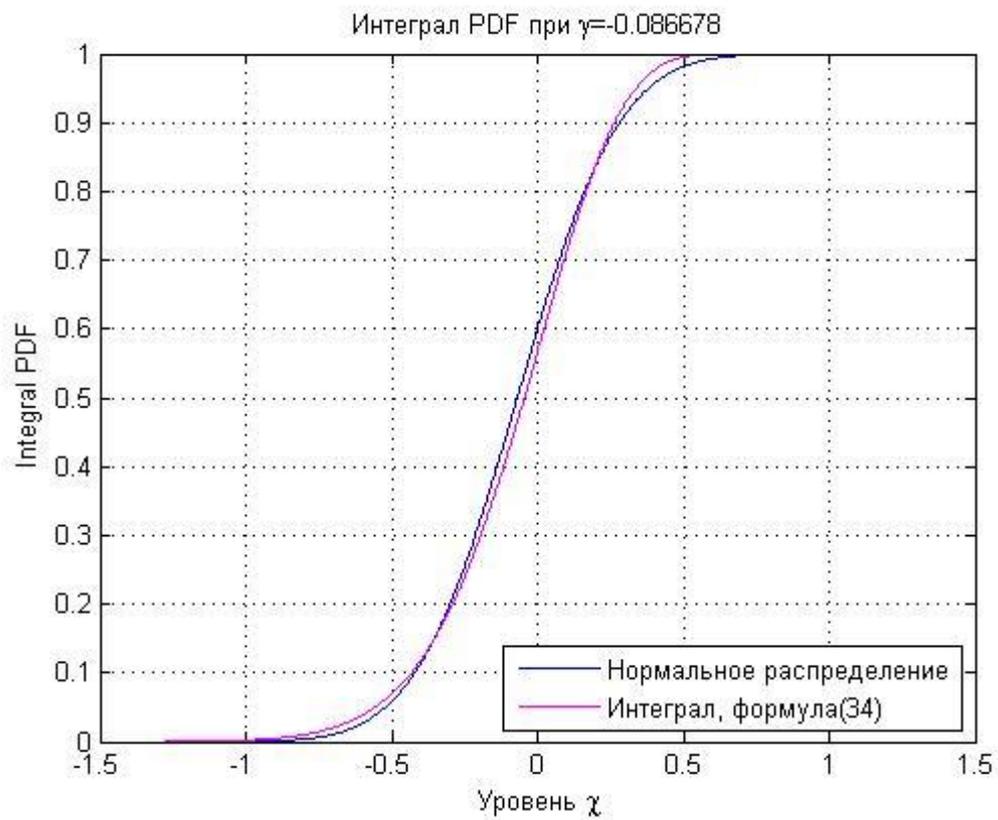
Как видно из графика на **рис. 11** распределение логарифма амплитуды теперь полностью определяется положительной областью значений, что позволяет рассматривать интеграл (34) в качестве основной формулы для расчета функции плотности вероятности при учете приближения метода Рытова второго порядка.

Окончательный результат представлен на **рис. 12**, который иллюстрирует различие распределения уровня сигнала в первом (нормальное распределение **рис. 12**. красная линия,  $\gamma = 0$ ) и во втором (скорректированный интеграл, **рис. 12** черная линия,  $\gamma \neq 0$ ) приближениях метода Рытова, рассчитанных по формуле (34).

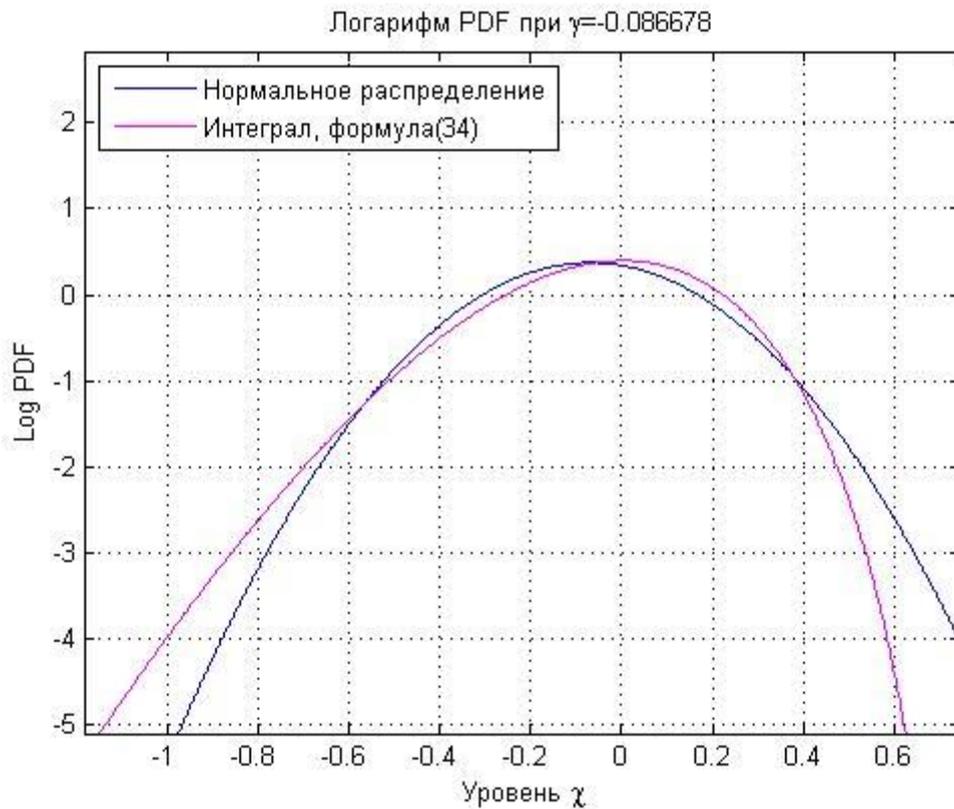


**Рис 12.** Распределение плотности вероятности уровня для первого и второго приближения метода Рытова (формула 34).

Далее в программном симуляторе, реализующем гибридную модель, уже реализован процесс определения уровня и фазы сигнала в первом приближении. Построив интеграл (34), мы теперь знаем, как должно выглядеть распределение уровня сигнала при учете второго приближения метода комплексной фазы. Как оговаривалось ранее, наша задача состоит в том, чтобы найти такой вид функции отображения  $\mathcal{X}_{\text{исходное}} \rightarrow \mathcal{X}_{\text{новое}}$ , которая позволила бы скорректировать исходный случайный ряд уровня сигнала, иначе говоря, из равенства  $P_{\mathcal{X}_{\text{исх}}}(\mathcal{X}_{\text{исх}}) = P_{\mathcal{X}_{\text{нов}}}(\mathcal{X}_{\text{нов}})$  для каждого известного значения  $\mathcal{X}_{\text{исх}}$  получаем скорректированное значение  $\mathcal{X}_{\text{нов}}$ . Таким образом несложно определить саму функцию отображения  $F_{\mathcal{X}}$ . Процедура построения такого отображения представлена в работах [13-14], и согласно ей, сперва необходимо построить интегральные функции распределения  $P_{\mathcal{X}_{\text{исх}}}(\mathcal{X}_{\text{исх}})$  и  $P_{\mathcal{X}_{\text{нов}}}(\mathcal{X}_{\text{нов}})$ . Эти функции приведены на **рис.13-14**.

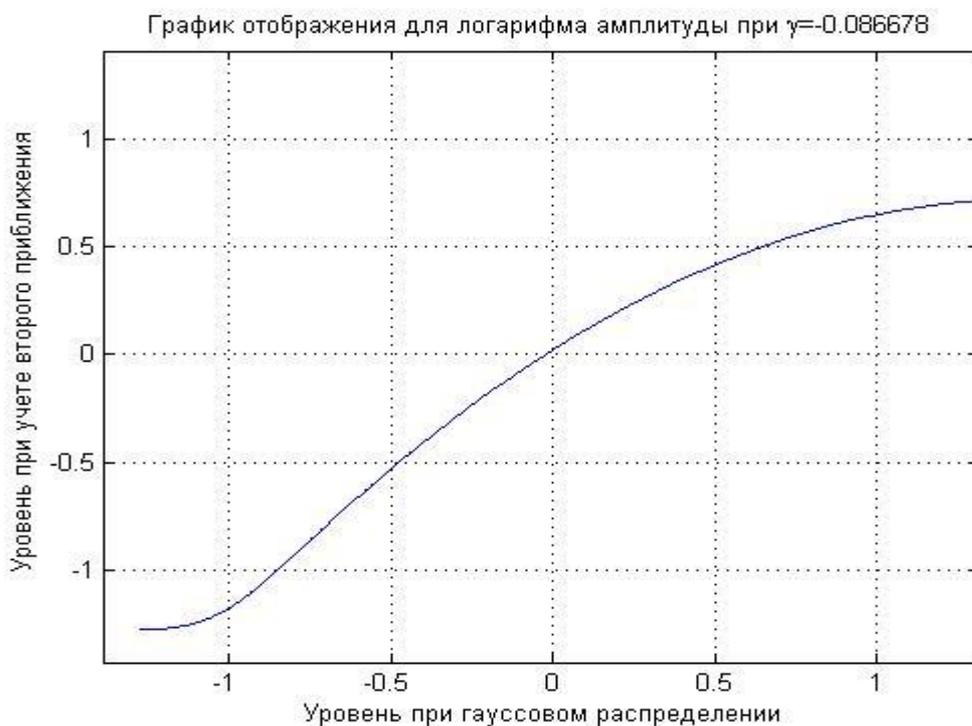


**Рис.13. Интегральное распределение уровня сигнала для первого и второго приближений метода Рытова.**



**Рис.14. Логарифм интегрального распределения уровня сигнала для первого и второго приближений метода Рытова.**

Зная конкретный вид этих распределений, теперь можно построить искомое отображение, позволяющее получить новые значения для случайного ряда уровня сигнала, как показано на рис. 15.



**Рис. 15. Построенное отображение для логарифма амплитуды.**

Как видно из рисунка для данного случая эта функция несколько отличается от простой линейной зависимости. При учете второго приближения происходит небольшое смещение уровня поля в сторону отрицательных значений.

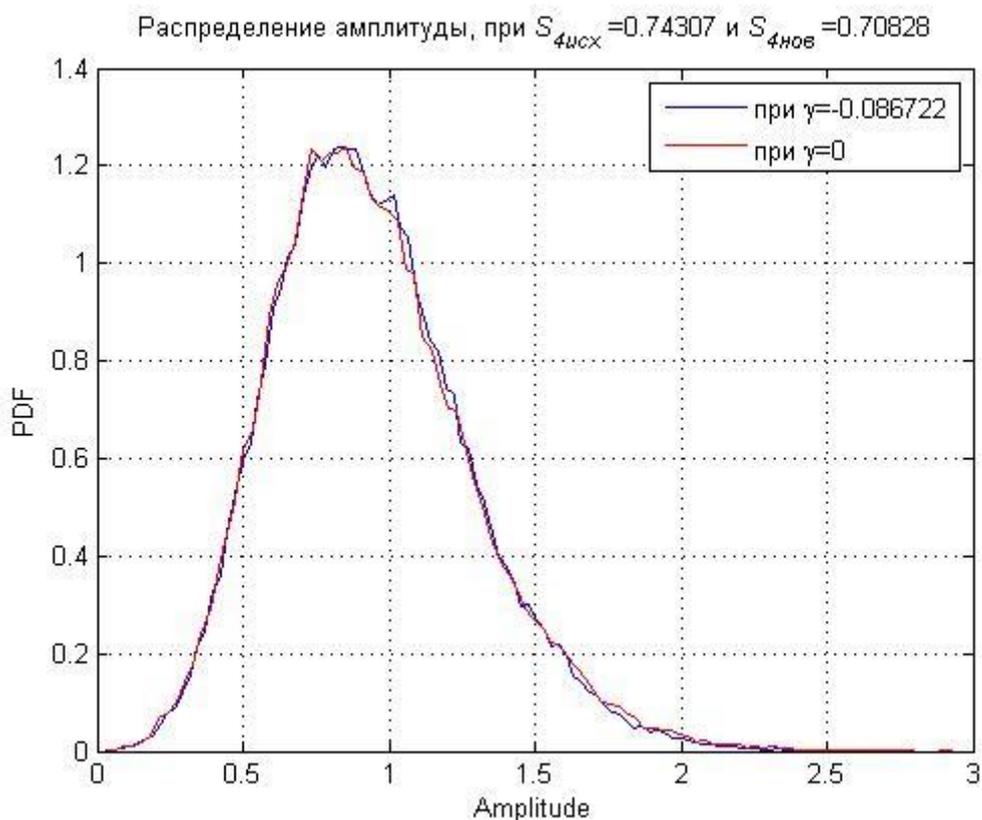
Также необходимо отметить, что при таком преобразовании функция корреляции процесса меняется незначительно.

Далее используем полученное нелинейное преобразование для генерации нового моделируемого случайного ряда для поля сигнала.

### 3.3 Результаты моделирования поля на Земле.

В результате конечного преобразования получаем новое представление поля сигнала, регистрируемого на Земле. На **рис. 16-17** показан явный вид распределений для амплитуды и уровня сигнала.

Отметим, что значение параметра мерцаний для нового случайного ряда уровня при учете второго приближения несколько отличается от прежнего. Значения индекса сцинтилляций для распределений в первом и втором приближениях метода Рытова указаны на графиках **рис. 17-19**. Здесь красной линией отмечено распределение, посчитанное в первом приближении, синий маркер - для учета второго приближения метода Рытова.



**Рис. 16.** Распределение амплитуды поля, построенного на Земле.

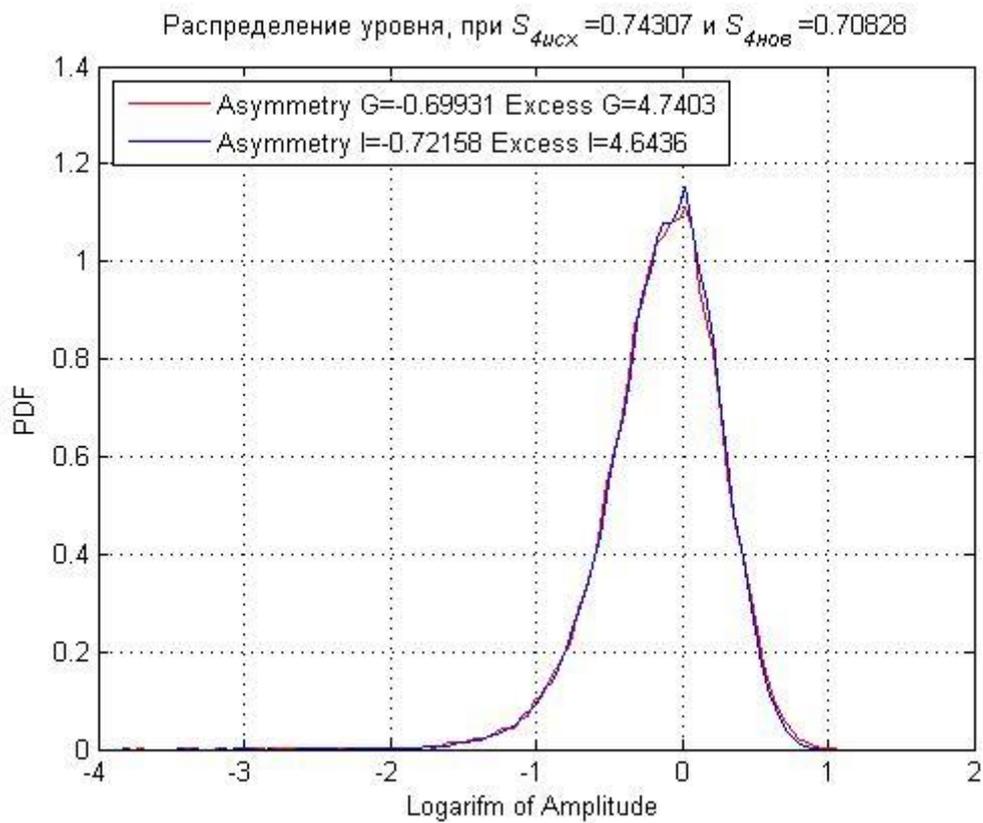


Рис. 17. Распределение логарифма амплитуды поля, построенного на Земле.

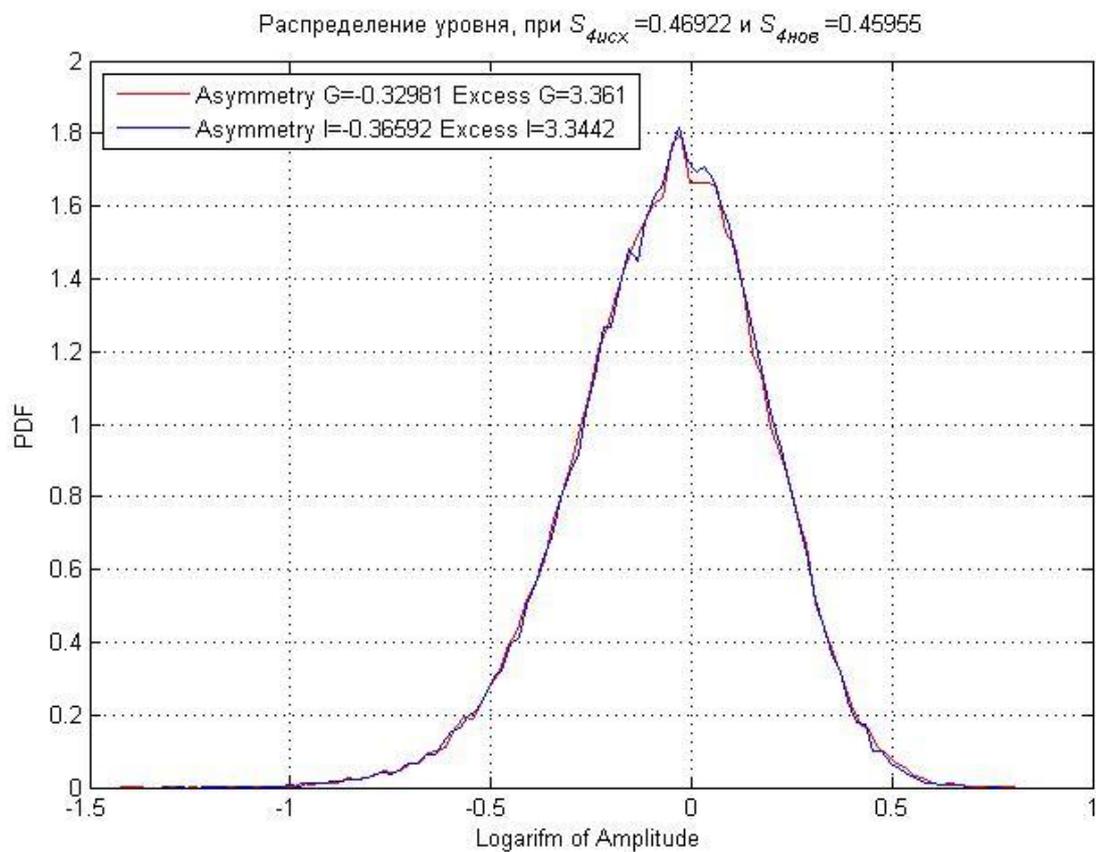
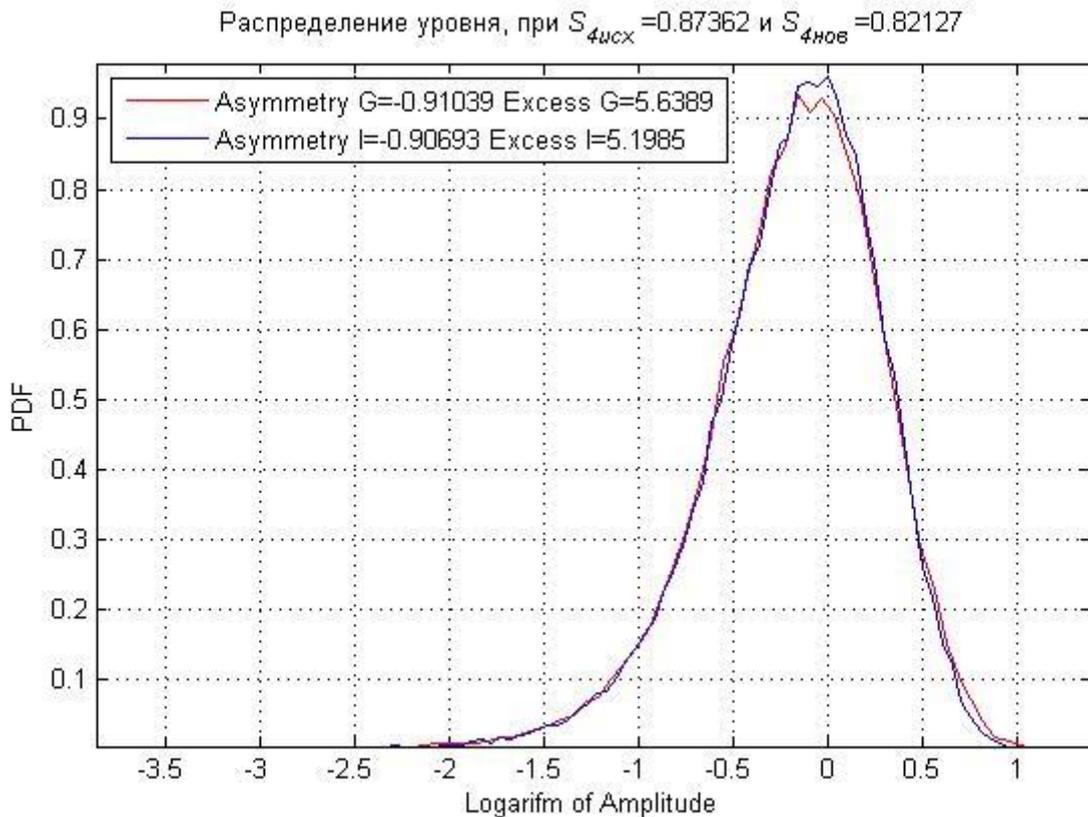


Рис. 18. Распределение логарифма амплитуды поля, построенного на Земле.



**Рис. 19.** Распределение логарифма амплитуды поля, построенного на Земле.

Как показывают результаты наших расчётов, учет второго приближения метода комплексной фазы несущественно влияет на характер распределения амплитуды синтезируемого сигнала.

Чтобы численно охарактеризовать поправки, вносимые в распределения из-за учета второго приближения метода Рытова, в программном симуляторе вычисляются коэффициенты асимметрии и эксцесса, которые определяются следующими выражениями:

$$Asymmetry = \frac{\langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle}{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^{\frac{3}{2}}}; \quad Excess = \frac{\langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle}{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^2};$$

Асимметрия представляет собой нормированный третий кумулянт распределения. Она отлична от нуля для плотности вероятности, асимметричной относительно точки с координатой равной ее среднему значению. Нормированный четвертый кумулянт называется эксцессом распределения. Он описывает отклонение распределения от Гауссова в сторону более острой или более тупой вершины. Для Гауссова распределения коэффициент эксцесса равен 3. Иначе говоря, эти кумулянты описывают степень отклонения вероятностного распределения от Гауссова. Конкретное значение параметров асимметрии и эксцесса, полученного для данного распределения, указано на **рис. 17-19**. Несложно заметить, что при увеличении величины флуктуации электронной концентрации различие между параметрами асимметрии и эксцесса, рассчитанных в первом и втором приближении, качественно увеличивается, и для сильных флуктуаций разница проявляется в основной значащей цифре. То же самое происходит относительно индекса сцинтилляций, однако, если сравнивать сам вид распределений, то, как видно из графиков, сильных различий между ними не наблюдается.

## 4. Заключение.

Разработан метод и построен алгоритм моделирования флуктуаций трансionoсферного сигнала с учетом приближения второго порядка метода Рытова. В алгоритме учитывается отклонение функции распределения флуктуаций уровня сигнала от нормального.

Для моделирования разработана процедура расчета третьего кумулянта распределения уровня, который определяет степень отличия распределения от нормального. Для этого выведены формулы и разработана методика вычисления соответствующих моментов уровня во втором приближении метода Рытова. При этом учтена анизотропия спектра флуктуации электронной концентрации среды и неоднородность фоновой ионосферы в направлении распространения сигнала, что обобщает формулы, полученные в работе [9], для случая изотропных флуктуации и однородной среды. Получены зависимости значения параметра негауссовости от параметров среды, таких как анизотропия и дисперсия флуктуаций электронной концентрации ионосферы.

Разработанная методика использована для обобщения гибридной модели трансionoсферного флуктуационного канала распространения.

Результаты моделирования с использованием модифицированной модели не выявили значительных различий статистических характеристик флуктуаций трансionoсферных сигналов по сравнению с базовой версией, не учитывающей отклонения распределения уровня поля от нормального. Это объясняется незначительностью отклонения функции распределения уровня от нормального закона для используемых при моделировании условий распространения. Тем не менее, полученные в работе результаты способствуют более глубокому пониманию закономерностей распространения волн в средах с флуктуациями.

Результаты, полученные в работе, были включены в доклад [15] на международной конференции Progress in Electromagnetic Research Symposium PIERS 2017, St Petersburg, Russia, May 2017.

## Список литературы

### Текущий документ

- [1] Е Гундзе, Лю Чжаохань. «**Мерцание волн в ионосфере**» ТИИЭР, Т. 70, №4 апрель 1982 г.
- [2] В.Э. Герм, Н.Н. Зернов. «**Исследование эффектов флуктуаций электронной плотности ионосферы при распространении электромагнитных полей высоких частот**» Сер. 4. 2009. вып. 4.
- [3] Alison de Oliveira Moraes • Eurico Rodrigues de Paula • Waldecir Joaõ Perrella • Fabiano da Silveira Rodrigues «**On the distribution of GPS signal amplitudes during low-latitude ionospheric scintillation**» Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012
- [4] С.М. Рытов, Ю.А. Кравцов, В.И. «**Введение в статистическую радиофизику**» Ч. II. Татарский. Москва Наука, 1978 г, 32.841 Р 95 УДК 583.3
- [5] E. J. Fremouw, R. C. Livingston and Deborah, A. Miller «**On the statistics of scintillating signals**» Physical Dynamics, Inc., Bellevue, Washington 98005; t SRI International, Menlo Park, California 94025, U.S.A.
- [6] <http://t-ict4d.ictp.it/nequick2/nequick-2-web-model>
- [7] Зернов Н. Н. **Рассеяние волн КВ диапазона при наклонном распространении в ионосфере** // Изв. вузов. Сер.: Радиофизика. 1980. Т. 23. С. 151–158.
- [8] V.E.Gherm, N. N. Zernov and H.J. Strangeways. **Propagation model for transionospheric fluctuating paths of propagation: simulator of the transionospheric channel**, Radio Science, 40. no.1, pp. 29-37, Jan/Feb 2005. doi:10.1029/2004RS003097.
- [9] Albert D. Wheelon. **Skewed distribution of irradiance predicted by the second-order Rytov approximation**. Vol. 18, No. 11/ Noovember 2011/J. Opt. Soc. Am. A.
- [10] А. Н. Малахов. **Кумулятивный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований**. М. "Совесткое радио", 1978, 376 с. УДК 621.37.1/519.21
- [11] Yeh, C. K., and C. H. Liu (1982), **Radio wave scintillations in the ionosphere**, Proc. IEEE, 70(4), 324–360.
- [12] N.N. Zernov. **Workshop on the future of ionospheric research for satellite navigation and positioning: its relevance for developing countries**. 4 - 15 December 2006/Lecture Notes/St. Petersburg State University, Russian Federation and University of Leeds, U.K. SMR 1782/1
- [13] Zernov, N. N., and V. E. Gherm (2015), **Strong scintillation of GNSS signals in the inhomogeneous ionosphere: 1. Theoretical background**, Radio Sci., 50, doi:10.1002/2014RS005603.
- [14] Gherm, V. E., and N. N. Zernov (2015), **Strong scintillation of GNSS signals in the inhomogeneous ionosphere: 2. Simulator of transionospheric channel**, Radio Sci., 50, doi:10.1002/2014RS005604
- [15] Vadim E. Gherm, Nikolay N. Zernov, and M. Z. Zakaryayeva, **Recent Developments of the Hybrid Scintillation Propagation Model of Transionospheric Stochastic Channel**, PIERS 2017, St Petersburg, Russia.

