Санкт-Петербургский государственный университет

Математика

Кафедра дифференциальных уравнений

Чермных Александр Сергеевич

Нормальные формы двумерных однородных кубических систем с общим множителем второй степени

Магистерская диссертация

Научный руководитель:
к. ф.-м. н. доцент Басов В.В.

Рецензент:
д. ф.-м. н. профессор Бодунов Н.А.

Санкт-Петербург
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mathematics

Chair of differential equations

Aleksandr Chermnykh

Normal forms of two-dimensional homogeneous cubic systems with a quadratic common factor

Magister's Thesis

Scientific supervisor:
professor Vladimir Basov

Reviewer:
professor Nikolai Bodunov

Saint-Petersburg
2017

Аннотация

Рассматриваются вещественные двумерные однородные кубические системы ОДУ, многочлены в правой части которых имеют квадратичный общий множитель. На основании должным образом введенных принципов упорядочивания множество таких систем разбивается на классы линейной эквивалентности, в каждом из которых выделяется структурно простейшая система – нормальная форма третьего порядка. Для матрицы коэффициентов ее правой части, называемой канонической формой (КФ), указывается каноническое множество значений, гарантирующее принадлежность системы к выбранному классу. Кроме того, для каждой КФ приводятся: a) условия на коэффициенты исходной системы, b) линейные замены, сводящие правую часть системы при этих условиях в выбранную КФ, c) получаемые при этом значения коэффициентов КФ.

Ключевые слова: однородная кубическая система, нормальная форма, каноническая форма.

Abstract

Real two-dimensional homogeneous cubic systems of ODE, polynomials in the right-hand part of which have a common quadratic factor are considered. On the basis of properly introduced ordering principles, the set of these systems is divided into classes of linear equivalence, in each of which the structurally simplest system is distinguished – the normal form of the third order. For the coefficient matrix of its right-hand part, called the canonical form (CF), the canonical set of values is specified, which guarantees the belonging of the system to the selected class. In addition, for each CF are given: a) conditions on the coefficients of the original system, b) linear substitutions that reduce the right-hand part of the system under these conditions to the chosen CF, c) obtained values of CF's coefficients.

Keywords: homogeneous cubic system, normal form, canonical form.

Содержание

1. Введение

1.1. Постановка задачи.

Рассматриваем вещественную двумерную однородную кубическую систему ОДУ

$$\dot{x} = P(x), \tag{1.1}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1^3 + b_1x_1^2x_2 + c_1x_1x_2^2 + d_1x_2^3 \\ a_2x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + d_2x_2^3 \end{pmatrix}$, $P_1, P_2 \not\equiv 0$.

Пусть вещественная неособая линейная замена

$$x = Ly \quad (\det L \neq 0) \tag{1.2}$$

преобразует (1.1) в систему

$$\dot{y} = \widetilde{P}(y) \qquad (\widetilde{P}_i = \tilde{a}_iy_1^3 + \tilde{b}_iy_1^2y_2 + \tilde{c}_iy_1y_2^2 + \tilde{d}_iy_2^3, \quad i = 1, 2). \tag{1.3}$$

В работе [1] поставлена задача определения и конструктивного построения кубических нормальных форм (1.3) из системы (1.1) посредством замен (1.2). Для этого требуется осуществить классификацию множества систем (1.1) путем разбиения векторных многочленов $P(x)$ на классы линейной эквивалентности. Основные линейные инварианты получены [1, 2.].

В [1, 1.2-1.4] всесторонне изучены проблемы, возникающие при нормализации возмущенных систем с многочленами P в невозмущенной части, и выяснены условия, при которых они минимизируются. На основании проведенных исследований для каждого класса эквивалентности в [2, 1.] разработаны структурные и нормировочные принципы, позволяющие вполне упорядочить многочлены $\widetilde{P}$, получаемые в результате замены (1.2), и, тем самым, теоретически выделить в каждом классе образующую – самый простой векторный многочлен $\widetilde{P}$, называемый канонической формой (КФ).

Оказалось, что любую КФ можно отождествить с матрицей коэффициентов многочлена $\widetilde{P}$, расположение нулевых элементов в которой фиксировано, а для ненулевых должны быть указаны канонические множества, описывающие их допустимые значения. Систему с КФ в правой части естественно называть кубической нормальной формой.

Наряду с задачей практического нахождения всех КФ в [1, 1.1] были поставлены также четыре дополняющие ее технические вычислительные задачи, позволяющие эффективно использовать разработанную классификацию на практике. Они заключаются в том, чтобы для каждой КФ в явном виде выписать:

a) условия на коэффициенты векторного многочлена $P(x)$;

b) замену (1.2), преобразующую $P(x)$ при указанных условиях в выбранную КФ;

c) получаемые при этом значения элементов КФ из канонического множества;

d) минимальное каноническое множество, в котором отсутствуют те значения элементов, от которых можно избавиться заменой (1.2), сохраняющей структуру КФ.

В [2, 2.] все поставленные задачи решены в случае, когда многочлены P_1 и P_2 пропорциональны, т. е. имеют общий множитель третьей степени.

Цель предлагаемой работы заключается в получении аналогичных результатов для случая, когда P_1 и P_2 обладают квадратичным общим множителем.

Следует иметь в виду, что большое количество символьных вычислений, связанных со всевозможными линейными преобразованиями однородных кубических систем, их нормировкой и выделением общего множителя, а также с решением различных алгебраических систем и уравнений, высоких степеней с параметрами невозможно без применения символьной математики. Для этих целей используется аналитический пакет Maple, в нем был написан набор стандартных процедур, используя которые для доказательства практически каждого утверждения были созданы соответствующие программы. С написанными программами можно ознакомиться в [3, 3.].

В работе [1, 1.] также можно найти более подробную постановку задачи, включающую в себя:

1) вывод связующей системы для возмущенных систем, зависящей исключительно от коэффициентом многочлена P, и выделение тех групп коэффициентов P, обнуление которых облегчает решение связующей системы, а значит, позволяет осознанно сформулировать структурные и нормировочные принципы, положенные в основу классификации систем (1.1), и выделить в линейно эквивалентных классах систем простейшие: те, правые части которых образуют канонические формы;

2) описание метода резонансных уравнений, позволяющего для возмущенных систем с какой-либо КФ в невозмущенной части дать конструктивное определение обобщенной нормальной формы с очевидным доказательством ее существования и выписать в явном виде все возможные структуры обобщенных нормальных форм, разумеется только для тех КФ, для которых удается решить связующую систему или хотя бы выписать резонансные уравнения, гарантирующие ее совместность;

3) обсуждение проблем и имеющихся результатов в близких по постановке задачах, когда в системе (1.1) рассматриваются квазиоднородные векторные многочлены $P(x)$ с определенными весами переменных или когда степени многочленов P_1 и P_2 принимают всевозможные значения от единицы до трех.

Остановимся в заключение на структуре предлагаемой работы.

В следующих разделах Введения приведены необходимые для дальнейшего определения и результаты, полученные в работах [1, 2.] и [2, 1.]. Разумеется, их более подробное изложение с приведением большого числа поясняющих примеров следует смотреть в указанных работах.

Основным в настоящей работе является Раздел 2, посвященный случаю, когда многочлены P_1, P_2 системы (1.1) имеют вещественный общий множитель степени два.

В 2.1–2.3 предложена удобная форма записи системы при $l = 2$, позволяющая разбить все множество систем на девять классов линейной эквивалентности, и приведен полный список нормированных структурных форм с допустимыми множествами.

В 2.4–2.6 последовательно рассматриваются случаи, когда дискриминант D_0 квадратичного общего множителя P_0 больше, равен и меньше нуля. Для каждого знака различными способами удается выделить канонические формы с каноническими и минимальными множествами и доказать теоремы о приведении к ним исходной системы. В 2.7 собраны в единый список все полученные для случая $l = 2$ канонические формы.

Также в Разделе 2 в соответствующих местах имеются ссылки на сопутствующие программы из приложения в работе [3].

Данная работа является продолжением и содержит результат бакалаврской выпускной работы, в которой был рассмотрен случай $D_0 > 0$.

1.2. Линейная эквивалентность однородных кубических систем.

Рассмотрим вещественную двумерную однородную кубическую систему

$$\dot{x} = P(x) \ \ \text{или} \ \ \dot{x} = A\, q^{[3]}(x), \tag{1.4}$$

в которой $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1^3 + b_1x_1^2x_2 + c_1x_1x_2^2 + d_1x_2^3 \\ a_2x_1^3 + b_2x_1^2x_2 + c_2x_1x_2^2 + d_2x_2^3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, $x = \operatorname{colon}(x_1,\, x_2)$, $q^{[3]}(x) = \operatorname{colon}(x_1^3,\, x_1^2x_2,\, x_1x_2^2,\, x_2^3)$, причем строки $A_1, A_2 \neq 0$.

Соглашение 1.1. *В дальнейшем для краткости матрицу коэффициентов A будем отождествлять с системой* (1.4) *или говорить, что A порождает систему* (1.4).

Определение 1.1. *Любой однородный многочлен с вещественными коэффициентами, являющийся общим множителем P_1 и P_2, будем обозначать P_0. Общий множитель P_0 максимальной степени l ($l = 1, 2, 3$) будем обозначать P_0^l. При отсутствии общего множителя будем считать, что $l = 0$.*

Для векторов $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ введем функцию $\delta_{rs} = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} = r_1s_2 - r_2s_1$.

Установить наличие или отсутствие общего множителя у любых двух многочленов позволяет функция $R = R(P_1, P_2)$, называемая результантом:

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \delta_{ad}^3 + \delta_{ac}^2\delta_{cd} + \delta_{ab}\delta_{bd}^2 - 2\delta_{ab}\delta_{ad}\delta_{cd} - \delta_{ab}\delta_{bc}\delta_{cd} - \delta_{ac}\delta_{ad}\delta_{bd}.$$

Утверждение 1.1. *Многочлены P_1, P_2 имеют вещественный общий множитель P_0 ненулевой степени тогда и только тогда, когда $R(P_1, P_2) = 0$.*

Для упрощения системы (1.4) будем использовать линейные неособые замены

$$\begin{cases} x_1 = r_1y_1 + s_1y_2 \\ x_2 = r_2y_1 + s_2y_2 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad x = Ly, \quad L = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}, \quad \delta = \det L \neq 0. \tag{1.5}$$

Пусть замена (1.5) преобразует систему (1.4) в систему

$$\dot{y} = \widetilde{P}(y) \ \ \text{или} \ \ \dot{y} = \widetilde{A}\, q^{[3]}(y), \tag{1.6}$$

где $\widetilde{P} = \begin{pmatrix} \widetilde{P}_1 \\ \widetilde{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1y_1^3 + \tilde{b}_1y_1^2y_2 + \tilde{c}_1y_1y_2^2 + \tilde{d}_1y_2^3 \\ \tilde{a}_2y_1^3 + \tilde{b}_2y_1^2y_2 + \tilde{c}_2y_1y_2^2 + \tilde{d}_2y_2^3 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{d}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{d}_2 \end{pmatrix}$.

Для многочленов $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$ по аналогии с R введем результант $\widetilde{R} = R(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2)$.

В [1, 2.2] для системы (1.6) получены следующие формулы

$$\widetilde{P}(y) = L^{-1}P(Ly) = L^{-1}Aq^{[3]}(Ly), \qquad \widetilde{R} = \delta^6 R,$$

$$\widetilde{A} = \delta^{-1}\begin{pmatrix} \delta_{P(r)s} & s_1\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_1}s} + s_2\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_2}s} & r_1\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_1}s} + r_2\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_2}s} & \delta_{P(s)s} \\ -\delta_{P(r)r} & -s_1\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_1}r} - s_2\delta_{\frac{\partial P(r)}{\partial r_2}r} & -r_1\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_1}r} - r_2\delta_{\frac{\partial P(s)}{\partial s_2}r} & -\delta_{P(s)r} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Среди замен (1.5), преобразующих (1.4) в (1.6), выделим две специальные замены:

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \text{ – нормировка,} \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 r_1^2 & b_1 r_1 s_2 & c_1 s_2^2 & d_1 s_2^3/r_1 \\ a_2 r_1^3/s_2 & b_2 r_1^2 & c_2 r_1 s_2 & d_2 s_2^2 \end{pmatrix}; \tag{1.8}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ – перенумерация,} \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \\ d_1 & c_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Замечание 1.1. Нормировка (1.8) имеет следующие особенности:
1) назовем a_2, b_1, c_2, d_1 элементами нечетного зигзага, a_1, b_2, c_1, d_2 – четного, тогда у всех элементов нечетного зигзага можно одновременно изменить знак, а у любого элемента из четного зигзага знак изменить нельзя;
2) любое из отношений a_1/b_2, b_1/c_2, c_1/d_2 на диагоналях изменить нельзя.

Замечание 1.2. Если в системе, полученной после замены $L = (r, s)$, потребуется перенумерация, то нужно в исходной системе сразу сделать замену $L = (s, r)$.

В то же время перенумерация (1.9) позволяет договориться о следующем.

Соглашение 1.2. *В дальнейшем, не уменьшая общности, будем считать, что в системе* (1.4) *при* $l = 1, 2, 3$,

$$a_1^2 + a_2^2 \neq 0, \quad \textit{если} \quad a_1^2 + a_2^2 + d_1^2 + d_2^2 \neq 0. \tag{1.10}$$

1.3. Структурные формы.

Базовым понятием развиваемой теории является понятие структурной формы.

Определение 1.2. *Вещественную матрицу* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ *с ненулевыми строками будем называть объединенной структурной* m*-формой* ($m = \overline{2,8}$) *и обозначать* USF^m *(united structural form), если какие-либо* m *ее элементов отличны от нуля, а остальные равны нулю. Конечное множество, объединяющее все* USF^m*, будем обозначать* $SUSF^m$ *(set of* USF^m*).*

Очевидно, что объединенные структурные m-формы отличаются одна от другой различным расположением мест для ненулевых элементов.

В дальнейшем для краткости любую USF^m можно будет записывать по строкам, указывая в каждой только ненулевые элементы, напр., $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} = (a_1, c_1; d_2)$.

Рассмотрим всевозможные расстановки ненулевых элементов в $SUSF^m$ $(m = \overline{2,8})$.

Определение 1.3. *Индексом элемента* a_{ij} $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3, 4)$ *матрицы* A *будем называть число, стоящее на месте* (i, j) *в матрице* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *В свою очередь, индексом* k *матрицы* A *будем называть сумму индексов ненулевых элементов* A *и при необходимости писать* $A_{[k]}$. *Аналогично вводятся индексы строк* A_1 *и* A_2.

В [2, 1.1] должным образом введены структурные принципы (СП), позволяющие вполне упорядочить конечное множество $SUSF = \bigcup_{m=2}^{8} SUSF^m$ и, в том числе, все входящие в него пары USF^m, получаемые друг из друга при перенумерации (1.9).

Определение 1.4. *Из двух различных объединенных структурных m-форм, получаемых друг из друга перенумерацией, форму, являющуюся согласно* СП *предшествующей, будем называть структурной m-формой, при желании добавляя основная, и обозначать SF^m, а другую – дополнительной и обозначать SF^m_a (additional SF).*

Очевидно, что имеется также определенное количество "симметричных" структурных m-форм, т. е. таких SF^m, которые не изменяются в ходе перенумерации (1.9).

Поскольку любая пара, состоящая из основной и дополнительной структурных форм линейно эквивалентна, то "худшая" с точки зрения СП дополнительная форма самостоятельного интереса не представляет, но использовать ее иногда будет удобно.

Соглашение 1.3. *Согласно введенной упорядоченности сопоставим любой основной структурной m-форме порядковый номер i и будем обозначать ее SF^m_i, а дополнительную к ней структурную форму – $SF^m_{a,i}$.*

В [2, 1.1] приведен Список 1.1, состоящий из 120 упорядоченных структурных форм, входящих в $SUSF$.

Определение 1.5. *Представителем произвольной SF^m_i будем называть любую числовую матрицу, структура нулей которой совпадает со структурой SF^m_i.*

Итак, любую SF^m_i можно трактовать как совокупность всех ее представителей.

Важная характеристика SF^m_i связана с определением всех возможных значений максимальной степени общего множителя P^l_0 (см. опр. 1.1), который можно выносить в правой части порожденной этой структурной формой системы (1.4) при различных значениях ненулевых коэффициентов. Поэтому множество вещественных ненулевых значений элементов любой SF^m_i разобьем на непустые множества $s^{m,l}_i$ $(0 \le l \le 3)$ следующим образом: $s^{m,l}_i$ содержит те и только те значения элементов SF^m_i, при которых в правой части системы (1.4), порожденной этой формой, можно вынести общий множитель P^l_0.

Определение 1.6. *Для любой SF^m_i, задаваемой матрицей A, запись $SF^{m,l}_i$ означает ту же матрицу A, но значения ее ненулевых элементов принадлежат $s^{m,l}_i \neq \emptyset$.*

Иными словами, $SF^{m,l}_i$ объединяет тех и только тех представителей SF^m_i, чьи элементы принадлежат $s^{m,l}_i$, или, что то же самое, $SF^{m,l}_i$ порождает только такие системы, правые части которых имеют общий множитель максимальной степени l.

Из определения (1.6) и теоремы 2.3 [1, 2.6] вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1.2. *SF^{m,l_1}_i линейно не эквивалентна SF^{m,l_2}_i при $l_1 \neq l_2$, т. е. любые два представителя SF^{m,l_1}_i и SF^{m,l_2}_i линейно не эквивалентны.*

Если SF^m_i имеет только одно множество $s^{m,l_0}_i \neq \emptyset$, то, очевидно, $SF^{m,l_0}_i = SF^m_i$.

1.4. Нормированные структурные формы и допустимые множества.

Следующим шагом на пути к определению канонической формы станет введение понятия нормированной структурной формы, основанного на нормировке при помощи замены (1.8) всех представителей $SF^{m,l}_i$ с целью получения на двух, как правило (см. зам. 1.1), должным образом выбранных местах единичных по модулю элементов.

В [2, 1.2] приведены нормировочные принципы (НП) выбора нормируемых элементов матрицы A, позволяющие осуществить нормировку любой из 120 SF^m_i, т. е. однозначно выбрать в ней места для нормируемых элементов и значения, которые должны получить элементы на этих местах после нормировки. При этом нормирующая замена (1.8) определяется однозначно для всех SF, кроме $SF^{2,2}_3$ и $SF^{2,2}_4$, для которых элемент s_2 в замене произволен и может быть выбран, например, единицей (см. зам. 1.1).

Итак, представители любой $SF_i^{m,l}$ (числовые матрицы заданной структуры с элементами из $s_i^{m,l}$) разбиваются на классы эквивалентности относительно нормирующих замен (1.8), а в качестве образующих берутся нормированные представители.

Определение 1.7. *$SF_i^{m,l}$ будем называть нормированной структурной формой и обозначать $NSF_i^{m,l}$ (normalized SF), если она объединяет только своих нормированных в соответствии с НП представителей.*

Соглашение 1.4. *Любую нормированную структурную форму A будем записывать в виде σB, где вынесенный из матрицы A множитель σ равен знаку первого нормированного элемента. Оставшиеся ненормированными ненулевые элементы матрицы B, если таковые имеются, будем должным образом выражать через переменные, называемые в дальнейшем параметрами NSF и функции от них. Также при необходимости будем записывать NSF как функцию от своих параметров.*

Тем самым, параметры NSF, обозначаемые $u, v, w, \dots$, всегда предполагаются отличными от нуля. Например, $NSF_7^{5,1} = NSF_7^{5,1}(\sigma, u, v) = \sigma \begin{pmatrix} u & v & v-u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, но при этом $v \neq u$, иначе $m \neq 5$.

Соглашение 1.4 позволяет в матрице B, используемой в дальнейшем для нормализации возмущенных систем, получить максимальное количество единиц, а множитель σ, если он окажется отрицательным, заменой времени можно сделать равным единице.

Так, $SF_2^{2,1} = (a_1; c_2)$ заменой (1.8) может быть сведена к $NSF_2^{2,1} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ с $\sigma = \operatorname{sign} a_1$. Здесь нормируемые элементы расположены на разных зигзагах, и согласно замечанию 1.1 на знак элемента из четного зигзага повлиять невозможно, поэтому он выносится в виде множителя σ. А знак нормируемого элемента из нечетного зигзага всегда можно сделать равным σ, что и требуется в НП.

Определение 1.8. *Если все ненулевые элементы $SF_i^{m,l}$ расположены только на одном из зигзагов, из-за чего второй нормированный элемент в матрице B при его наличии может равняться как единице, так и минус единице (будем обозначать его $\varkappa$), то получаемую NSF будем называть двойственной и обозначать $NSF_{i,\varkappa}^{m,l}$.*

Отметим, что для $NSF_i^{m,l}$ по сравнению с $SF_i^{m,l}$ существенно облегчается практическое написание условий, фиксирующих максимальную степень l общего множителя.

Так, $NSF_7^5 = \sigma \begin{pmatrix} u & v & w & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ есть $NSF_7^{5,2}$ при $-v$, $w = u$; $NSF_7^{5,1}$ при $w = v - u$; $NSF_7^{5,0}$, если не выполняются перечисленные выше ограничения на параметры.

Определение 1.9. *Значения параметров, при которых определена произвольная $NSF_i^{m,l}$, будем называть допустимыми. Объединение допустимых значений параметров для каждой из форм будем называть допустимым множеством и обозначать $ps_i^{m,l}$ (permissible set). Допустимое множество будем называть тривиальным и обозначать $tps_i^{m,l}$ (trivial ps), если входящие в него параметры ограничений не имеют.*

1.5. Канонические множества и канонические формы. Итак, рассмотрим произвольную $NSF_i^{m,l}$ матрицу, имеющую m ненулевых элементов с заданным расположением, фиксирующим i – ее порядковый номер в $SUSF^m$ согласно введенным СП. Наконец, l – это степень общего множителя P_0^l, который выносится из правой части системы, порожденной любым представителем $NSF_i^{m,l}$. Согласно утверждению 1.2 l инвариантна относительно линейных неособых замен.

Отметим, что получение нормированных структурных форм – это формальная работа, требующая только нормировки (1.8), т. е. замены, не затрагивающей структуры порождающей эти формы матрицы A.

Теперь же станем упрощать $NSF_i^{m,l}$, сводя их посредством подходящих линейных неособых замен (1.5) при определенных значениях параметров из $ps_i^{m,l}$ к предшествующим структурным формам, т. е. к $SF_j^{n,l}$ с $n < m$ или с $j < i$ при $n = m$.

В связи с этим следует иметь в виду следующие два соображения.

С одной стороны, практически каждая $NSF_i^{m,l}$ может сводиться к предшествующим $SF_j^{n,l}$, т. е. имеет "лишних" представителей, линейно эквивалентных каким-либо представителям предшествующих форм. Значения параметров, допускающие таких представителей, надо удалять из $ps_i^{m,l}$.

С другой стороны, те $NSF_i^{m,l}$, которые при всех допустимых значениях своих параметров линейно эквивалентны каким-либо предшествующим формам, самостоятельного интереса не представляют, поскольку не могут выступать в роли "простейших".

Определение 1.10. *Непустое множество, содержащее те и только те значения параметров из $ps_i^{m,l}$, при которых $NSF_i^{m,l}$ линейно не эквивалентна никакой предшествующей SF, будем называть каноническим и обозначать $cs_i^{m,l}$ (canonical set).*

Определение 1.11. *Любую $NSF_i^{m,l}$ будем называть канонической формой и обозначать $CF_i^{m,l}$ (canonical form), если ее параметры принадлежат $cs_i^{m,l}$.*

Таким образом, матрицы $CF_i^{m,l}$ и $NSF_i^{m,l}$ выглядят одинаково, но параметры $CF_i^{m,l}$ принадлежат $cs_i^{m,l}$ – это $ps_i^{m,l}$, из которого удалены те значения, параметров при которых представители $NSF_i^{m,l}$ заменами (1.5) сводятся к предшествующим SF.

Утверждение 1.3. *Любые две канонические формы линейно не эквивалентны.*

Это очевидное утверждение означает, что никакие два представителя различных CF или, что то же самое, никакие две системы (1.4), порожденные соответствующими числовыми матрицами, не могут быть связаны линейной неособой заменой.

В ряде случаев канонические множества параметров удается дополнительно ограничить при помощи линейных замен, преобразующих CF в себя.

Определение 1.12. *Каноническое множество любой $CF_i^{m,l}$ будем называть минимальным и обозначать $mcs_i^{m,l}$ (minimal cs), если найдена линейная неособая замена, преобразующая $CF_i^{m,l}$ в себя и позволяющая ограничить значения элементов $cs_i^{m,l}$, а именно, если это возможно, то хотя бы один из неединичных элементов получен ограниченным сверху и (или) снизу и (или) зафиксирован знак множителя σ.*

Таким образом, если $CF_i^{m,l}$ не содержит параметров или их невозможно ограничить, то автоматически $cs_i^{m,l} = mcs_i^{m,l}$, т. е. является минимальным.

Определение 1.13. *Множество, содержащее те значения параметров из $cs_i^{m,l}$, от которых удается избавиться при помощи линейных неособых замен, переводящих $CF_i^{m,l}$ в себя, будем называть дополнительным и обозначать $acs_i^{m,l}$ (additional cs).*

Тем самым, $mcs_i^{m,l} = cs_i^{m,l} \backslash acs_i^{m,l}$.

Соглашение 1.5. *В дальнейшем: 1) Запись "$\ldots\ \zeta = [\,\varsigma_1 \vee \upsilon_1\,] \ldots \eta = [\,\varsigma_2 \vee \upsilon_2\,] \ldots$" будет означать, что или $\zeta = \varsigma_1,\ \eta = \varsigma_2$, или $\zeta = \upsilon_1,\ \eta = \upsilon_2$; 2) условие, заключенное в круглые скобки и записанное после другого условия, не является требованием, а приводится в качестве напоминания для лучшего восприятия последующих рассуждений; 3) в формулировках результатов отличие от нуля выражений, стоящих в знаменателе, не является предположением, а устанавливается в ходе доказательства.*

2. Однородные кубические системы с квадратичным общим множителем

2.1. Запись и линейная эквивалентность систем при $l = 2$.

Система (1.4) при $l = 2$ с учетом соглашения 1.2 однозначно представима в виде

$$\dot{x} = P_0^2(x)Hx, \tag{2.1}$$

где матрица $H = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$ и $\det H = \delta_{pq} \neq 0$, вещественный общий множитель $P_0^2 = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 = p_0^2 q^{[2]}(x)$ со строкой коэффициентов $p_0^2 = (\alpha, 2\beta, \gamma)$, он имеет дискриминант $D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma$, причем либо $\alpha = 1$ $(D_0 = \beta^2 - \gamma)$, либо $\alpha, \gamma = 0,\ 2\beta = 1$ $(D_0 = 1)$, так как условие (1.10) из соглашения 1.2 исключает случай $\alpha = 0, \gamma \neq 0$ потому, что перенумерация (1.9) при необходимости сводит p_0 к строке $(\gamma, 2\beta, \alpha)$.

Действительно, из равенства $\begin{pmatrix} \alpha p_1 & \alpha q_1 + 2\beta p_1 & 2\beta q_1 + \gamma p_1 & \gamma q_1 \\ \alpha p_2 & \alpha q_2 + 2\beta p_2 & 2\beta q_2 + \gamma p_2 & \gamma q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ вытекают формулы, однозначно определяющие p_0^2 и H (см. прил. [3, 3.2]):

$$\begin{aligned}
&1)\ a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ \text{тогда}\ \ \delta_{ab} \neq 0,\ \ P_1^{(2)}(\theta_*) = P_2^{(2)}(\theta_*) = 0,\\
&\text{где}\ \ P_i^{(2)}(\theta) = a_i^2\theta^3 - 2a_i b_i \theta^2 + (a_i c_i + b_i^2)\theta + a_i d_i - b_i c_i\ \ (i = 1, 2),\ \ 2\theta_* = \delta_{ac}\delta_{ab}^{-1},\\
&\text{и}\ \ \alpha = 1,\ 2\beta = \theta_*,\ \gamma = \theta_*^2 - (b_i\theta_* - c_i)a_i^{-1},\ \ p_i = a_i,\ \ q_i = b_i - a_i\theta_*;\\
&2)\ a_1 \neq 0,\ a_2 = 0,\ \text{тогда}\ \ b_2 \neq 0,\ P_1^{(2)}(\theta_*) = 0,\ \theta_*^2 - (b_1\theta_* - c_1)a_1^{-1} = d_2 b_2^{-1},\\
&\text{где}\ \theta_* = c_2 b_2^{-1},\ \text{и}\ \alpha = 1,\ 2\beta = \theta_*,\ \gamma = d_2 b_2^{-1},\ p_1 = a_1,\ q_1 = b_1 - a_1\theta_*,\ p_2 = 0,\ q_2 = b_2;\\
&3)\ a_1 = 0,\ a_2 \neq 0,\ \text{тогда все аналогично п. 2) со сменой нижних индексов};\\
&4)\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ \text{тогда}\ \ d_1 = 0,\ d_2 = 0,\ \delta_{bc} \neq 0\ \text{и}\ \alpha = 0,\ \beta = 1/2,\ \gamma = 0,\ p_i = b_i,\ q_i = c_i.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь в (2.2_1) значение θ_* найдено из равенства правых частей формулы для γ причем $\delta_{ab} = 0$, иначе $\delta_{ac} = 0$ и A_1, A_2 пропорциональны, т. е. $l = 3$; а в (2.2_4) $\delta_{bc} = \delta_{pq} \neq 0$.

Собственные числа H и дискриминант характеристического полинома имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = (p_1 + q_2 \pm \sqrt{D})/2 \neq 0, \quad D = (p_1 + q_2)^2 - 4\delta_{pq} = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2 q_1. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. *При $l = 2$ замена* (1.5) $x = Ly$ *преобразует систему* (1.4), *записанную в виде* (2.1) *согласно* (2.2), *в систему* (1.6) $\dot{y} = \widetilde{P}(y)$ *вида*

$$\dot{y} = \widetilde{P}_0^2(y)\,\widetilde{H}y, \tag{2.4}$$

где матрица $\widetilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{q}_1 \\ \tilde{p}_2 & \tilde{q}_2 \end{pmatrix}$ *и строка коэффициентов* $\tilde{p}_0^2 = (\tilde{\alpha},\ 2\tilde{\beta},\ \tilde{\gamma})$ *общего множителя* $\widetilde{P}_0^2 = \tilde{\alpha} y_1^2 + 2\tilde{\beta} y_1 y_2 + \tilde{\gamma} y_2^2 = \tilde{p}_0^2\, q^{[2]}(y)$ *вычисляются по следующим формулам:*

$$\tilde{p}_0^2 = p_0^2 M,\ \ M = \begin{pmatrix} r_1^2 & 2r_1 s_1 & s_1^2 \\ r_1 r_2 & \delta_* & s_1 s_2 \\ r_2^2 & 2r_2 s_2 & s_2^2 \end{pmatrix},\ \ \begin{matrix} \delta_* = r_1 s_2 + \\ +r_2 s_1, \\ \det M = \delta^3 \end{matrix}\ \ \text{или}\ \ \begin{matrix} \tilde{\alpha} = \alpha r_1^2 + 2\beta r_1 r_2 + \gamma r_2^2, \\ \tilde{\beta} = \alpha r_1 s_1 + \beta\delta_* + \gamma r_2 s_2, \\ \tilde{\gamma} = \alpha s_1^2 + 2\beta s_1 s_2 + \gamma s_2^2; \end{matrix} \tag{2.5}$$

$$\widetilde{H} = L^{-1}HL\ \ \text{или}\ \ \widetilde{H} = \delta^{-1}\begin{pmatrix} r_1\delta_{ps} + r_2\delta_{qs} & s_1\delta_{ps} + s_2\delta_{qs} \\ -r_1\delta_{pr} - r_2\delta_{qr} & -s_1\delta_{pr} - s_2\delta_{qr} \end{pmatrix}\ \ (\delta_{\tilde{p}\tilde{q}} = \delta_{pq}),$$

при этом дискриминант $\widetilde{D}_0 = \tilde{\beta}^2 - \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}$ *связан с* D_0 *следующим образом:*

$$\widetilde{D}_0 = \delta^2 D_0. \tag{2.6}$$

а собственные числа $\widetilde{H}$ *и дискриминант* $\widetilde{D}$ *совпадают с* λ_1, λ_2 *и* D (см. [1, 2.4, т.2.2]).

Следствие 2.1. *При* $l = 2$ *квадратичный общий множитель* P_0^2, *выносимый из многочленов* P_1, P_2 *системы* (1.4), *и полученный в результате замены* (1.5) *общий множитель* $\widetilde{P}_0^2$, *выносимый из многочленов* $\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2$ *системы* (2.4), *одновременно раскладываются или не раскладываются на линейные множители с вещественными коэффициентами и полный квадрат у них сохраняется.*

Следствие 2.2. *Для матрицы* $\widetilde{A}$ *системы* (1.6) *верна формула*

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{d}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 & \tilde{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}\tilde{p}_1 & \tilde{\alpha}\tilde{q}_1 + 2\tilde{\beta}\tilde{p}_1 & 2\tilde{\beta}\tilde{q}_1 + \tilde{\gamma}\tilde{p}_1 & \tilde{\gamma}\tilde{q}_1 \\ \tilde{\alpha}\tilde{p}_2 & \tilde{\alpha}\tilde{q}_2 + 2\tilde{\beta}\tilde{p}_2 & 2\tilde{\beta}\tilde{q}_2 + \tilde{\gamma}\tilde{p}_2 & \tilde{\gamma}\tilde{q}_2 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Из теоремы 2.1 также вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.1. *Всех представителей, образующих* $NSF_i^{m,2}$, *в зависимости от знака дискриминанта* $D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma$ *можно разбить на три непересекающихся множества, обозначаемых* $NSF_i^{m,2,>}$, $NSF_i^{m,2,=}$, $NSF_i^{m,2,<}$. *В свою очередь всех представителей, образующих* $NSF_i^{m,2,*}$, *в зависимости от знака дискриминанта* D *из* (2.3) *можно разбить на три непересекающихся множества, обозначаемых* $NSF_i^{m,2,*,>}$, $NSF_i^{m,2,*,=}$, $NSF_i^{m,2,*,<}$. *Аналогичные разбиения можно осуществить в* $ps_i^{m,2}$.

Следствие 2.3. *Системы, порожденные любыми двумя представителями* $NSF_i^{m,2}$ *с различными парами третьих и четвертых верхних индексов, не могут оказаться линейно эквивалентными.*

2.2. Список $\mathbf{NSF_i^{m,2}}$.

Выделим сначала из множества структурных форм (см. [2, Список 1.1]) все формы (кроме SF_1^8), имеющие хотя бы одного представителя, порождающего систему, из правой части которой можно вынести общий множитель максимальной степени два, т. е. выделим те формы, для которых может быть реализован случай $l = 2$. Затем нормируем их, согласно введенным в [2, 1.2] НП, получая $NSF_i^{m,2}$.

Список 2.1. Сорок четыре $NSF^{m,2}$ $(m = \overline{2,7})$ с указанием для каждой p_0^2 и D_0 (под ней), σH, а также D и $ps^{m,2}$ (под ним) $(\sigma, \kappa = \pm 1,\ u, v, w \neq 0)$.

$$NSF_3^{2,2} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[4]}, \quad \begin{matrix} (1,0,0), \\ 0, \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} (u-1)^2, \\ tps_3^{2,2}; \end{matrix}$$

$$NSF_4^{2,2} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[4]}, \quad \begin{matrix} (0,1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} (u-1)^2, \\ tps_4^{2,2}; \end{matrix}$$

$$NSF_{7,\kappa}^{2,2} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[6]}, \quad \begin{matrix} (1,0,0), \\ 0, \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 4\kappa, \\ tps_{7,\kappa}^{2,2}; \end{matrix}$$

$$NSF_{8,\kappa}^{2,2} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[6]}, \quad \begin{matrix} (0,1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 4\kappa, \\ tps_{8,\kappa}^{2,2}; \end{matrix}$$

$$NSF_7^{3,2} = \sigma \begin{pmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[6]}, \quad \begin{matrix} (1,0,0), \\ 0, \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} (u-1)^2, \\ tps_7^{3,2}; \end{matrix}$$

$$NSF_{10}^{3,2} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[7]}, \quad \begin{matrix} (0,1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} (u-1)^2, \\ tps_{10}^{3,2}; \end{matrix}$$

$$NSF^{3,2}_{12} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[7]}, \begin{matrix} (1,0,0), \\ 0, \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{matrix} 4u+1, \\ tps^{3,2}_{12}; \end{matrix}$$

$$NSF^{3,2}_{a,13} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[8]}, \begin{matrix} (1,0,0), \\ 0, \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & u \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u-1)^2, \\ tps^{3,2}_{13}; \end{matrix}$$

$$NSF^{3,2}_{16} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[8]}, \begin{matrix} (0,1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u-1)^2, \\ tps^{3,2}_{16}; \end{matrix}$$

$$NSF^{3,2}_{a,18} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[9]}, \begin{matrix} (1,0,0), \\ 0, \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} 4u+1, \\ tps^{3,2}_{18}; \end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{a,7} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & u & 0 \end{pmatrix}_{[8]}, \begin{matrix} (1,1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u-1)^2, \\ tps^{4,2}_{7}; \end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{8,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & \kappa u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \kappa \end{pmatrix}_{[8]}, \begin{matrix} (1,0,\kappa), \\ -\kappa, \end{matrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u-1)^2, \\ tps^{4,2}_{8,\kappa}; \end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{a,12} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -u & 0 & u & 0 \end{pmatrix}_{[9]}, \begin{matrix} (1,1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & u \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u-1)^2, \\ tps^{4,2}_{12}; \end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{a,14,-1} = \sigma \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & u & 0 \end{pmatrix}_{[9]}, \begin{matrix} (1,1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u+1)^2, \\ tps^{4,2}_{14,-1}; \end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{a,18} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ v & u & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[10]}, \begin{matrix} (1,0,0), \\ 0, \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u-1)^2+4v, \\ ps^{4,2}_{18} = \{u \neq v\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{23} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & v & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[10]}, \begin{matrix} (0,1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u-1)^2+4v, \\ ps^{4,2}_{23} = \{u \neq v\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{a,27,-1} = \sigma \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ u & u & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[11]}, \begin{matrix} (1,1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix}, \begin{matrix} 4u+1, \\ tps^{4,2}_{27,-1}; \end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{a,29} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -u & 0 & u & 0 \end{pmatrix}_{[11]}, \begin{matrix} (1,1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u & u \end{pmatrix}, \begin{matrix} u(u-4), \\ tps^{4,2}_{29}; \end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{a,33} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ u & u & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[12]}, \begin{matrix} (1,1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix}, \begin{matrix} 4u, \\ tps^{4,2}_{33}; \end{matrix}$$

$$NSF^{4,2}_{34,+1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{[12]}, \begin{matrix} (1,0,1), \\ -1, \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{matrix} 4u, \\ tps^{4,2}_{34,+1}; \end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{7} = \sigma \begin{pmatrix} u & -u & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[11]}, \begin{matrix} (1,-1,1), \\ -3/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u-1)^2, \\ tps^{5,2}_{7}; \end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{8} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & v-u & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[11]}, \begin{matrix} (1,1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} u & v-u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u-1)^2, \\ ps^{5,2}_{8} = \{u \neq v\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{a,10} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ v-u & v & u & 0 \end{pmatrix}_{[12]}, \begin{matrix} (1,1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v-u & u \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u-1)^2, \\ ps^{5,2}_{10} = \{u \neq v\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{14,-1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & -u \pm v & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{[12]}, \begin{matrix} (1,\pm 1,0), \\ 1/4 \end{matrix}, \begin{pmatrix} u & v \mp u \\ 1 & \mp 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u \mp 1)^2+4v, \\ ps^{5,2}_{14,-1} = \{u \neq \pm v\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{a,16,-1} = \sigma \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -u \pm v & v & u & 0 \end{pmatrix}_{[13]}, \begin{matrix} (1,\pm 1,0), \\ 1/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & \pm 1 \\ -u \pm v & \pm u \end{pmatrix}, \begin{matrix} (u \mp 1)^2+4v, \\ ps^{5,2}_{16,-1} = \{u \neq \pm v\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{a,20} = \sigma \begin{pmatrix} v-v^2 & 1 & 1 & 0 \\ uv & u & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[13]}, \begin{matrix} (1,v^{-1},0), \\ v^{-2}/4, \end{matrix} \begin{pmatrix} v-v^2 & v \\ uv & 0 \end{pmatrix}, \begin{matrix} (v(1-v))^2+4uv^2, \\ ps^{5,2}_{20} = \{v \neq 1\}; \end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{22}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&-u&u\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{[14]},\quad \begin{matrix}(1,-1,1),\\-3/4,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}0&u\\1&1\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}4u+1,\\tps^{5,2}_{22};\end{matrix}$$

$$NSF^{5,2}_{a,23}=\sigma\begin{pmatrix}0&1&1&0\\v-u&v&u&0\end{pmatrix}_{[14]},\quad \begin{matrix}(1,1,0),\\1/4,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}0&1\\v-u&u\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}u^2+4(v-u),\\ps^{5,2}_{23}=\{u\neq v\};\end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{1}=\sigma\begin{pmatrix}u&u&uv&0\\0&1&1&v\end{pmatrix}_{[12]},\quad \begin{matrix}(1,1,v),\\(1-4v)/4,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}u&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}(u-1)^2,\\tps^{6,2}_{1};\end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{3}=\sigma\begin{pmatrix}u&u(1-v)&0&-uv^2\\0&1&1&v\end{pmatrix}_{[13]},\quad \begin{matrix}(1,1,v),\\(1-4v)/4,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}u&-uv\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}(u-1)^2,\\ps^{6,2}_{3}=\{v\neq 1\};\end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{4,+1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&u&v\\0&1&0&+1\end{pmatrix}_{[14]},\quad \begin{matrix}(1,0,1),\\-1,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}u&v\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}(u-1)^2,\\tps^{6,2}_{4,+1};\end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{5}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&u(v-1)&-uv\\0&1&1&v\end{pmatrix}_{[14]},\quad \begin{matrix}(1,1,v),\\(1-4v)/4,\end{matrix}\quad \sigma\begin{pmatrix}u&-u\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}(u-1)^2,\\ps^{6,2}_{5}=\{v\neq 1\};\end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{6}=\sigma\begin{pmatrix}u&u(v^{-2}-v)&0&uv^{-3}\\1&0&v^{-1}-v^2&1\end{pmatrix}_{[14]},\quad \begin{matrix}(1,-v,v^{-1}),\\(v^3-4)v^{-1}/4,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}u&uv^{-2}\\1&v\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}(u-v)^2+4uv^{-2},\\ps^{6,2}_{6}=\{v\neq 1\};\end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{7}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&-v&u+v\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{[15]},\quad \begin{matrix}(1,-1,1),\\-3/4,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}u&u+v\\1&1\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}(u+1)^2+4v,\\ps^{6,2}_{7}=\{u\neq -v\};\end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{a,9}=\sigma\begin{pmatrix}w(1-w)&1&1&0\\w(v-uw)&v&u&0\end{pmatrix}_{[15]},\quad \begin{matrix}(1,w^{-1},0),\\w^{-2}/4,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}w-w^2&w\\w(v-uw)&uw\end{pmatrix},$$
$(w(u-w+1))^2+4w^2(v-u),\quad ps^{6,2}_{9}=\{w\neq 1,\ v\neq u,\, uw\};$

$$NSF^{6,2}_{11,+1}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&u&v\\1&0&+1&0\end{pmatrix}_{[16]},\quad \begin{matrix}(1,0,1),\\-1,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}u&v\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}u^2+4v,\\tps^{6,2}_{11,+1};\end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{12}=\sigma\begin{pmatrix}0&-uv&u&-uv^2\\1&0&v-v^{-2}&1\end{pmatrix}_{[16]},\quad \begin{matrix}(1,v^{-1},v),\\(1-4v^3)v^{-2}/4,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}0&-uv\\1&v^{-1}\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}v^{-2}-4uv,\\ps^{6,2}_{12}=\{v\neq 1\};\end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{13}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&uv&uv^2(1+v)\\1&1&0&v(1+v)^2\end{pmatrix}_{[16]},\quad \begin{matrix}(1,-v,v^2+v),\\-v(3v+4)/4,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}u&uv\\1&1+v\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}(u+v+1)^2-4u,\\ps^{6,2}_{13}=\{v\neq -1\};\end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{15}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&uv&uv(v-1)\\1&1&0&-v(v-1)^2\end{pmatrix}_{[17]},\quad \begin{matrix}(1,v,v^2-v),\\-v(3v-4)/4,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}0&u\\1&1-v\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}(v-1)^2+4u,\\ps^{6,2}_{15}=\{v\neq 1\};\end{matrix}$$

$$NSF^{6,2}_{16}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&u&uv\\1&1&v&0\end{pmatrix}_{[18]},\quad \begin{matrix}(1,1,v),\\(1-4v)/4,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}0&u\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}4u,\\tps^{6,2}_{16};\end{matrix}$$

$$NSF^{7,2}_{1}=\sigma\begin{pmatrix}u&w&uv-u+w&v(w-u)\\0&1&1&v\end{pmatrix}_{[16]},\quad \begin{matrix}(1,1,v),\\(1-4v)/4,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}u&w-u\\0&1\end{pmatrix},$$
$(u-1)^2,\quad ps^{7,2}_{1}=\{w\neq u,\, u(1-v)\};$

$$NSF^{7,2}_{2}=\sigma\begin{pmatrix}u&w&uv^{-1}-v(uv+w)&u+wv^{-1}\\1&0&v^{-1}-v^2&1\end{pmatrix}_{[17]},\quad \begin{matrix}(1,-v,v^{-1}),\\(v^3-4)v^{-1}/4,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}u&uv+w\\1&v\end{pmatrix},$$
$(u+v)^2+4w,\ ps^{7,2}_{2}=\{v\neq 1,\ w\neq uv,\, -u(v-v^{-2})\};$

$$NSF^{7,2}_{3}=\sigma\begin{pmatrix}u&u+v&v(w+1)&w(w+1)(v-uw)\\1&1&0&-w^2(w+1)\end{pmatrix}_{[18]},\quad \begin{matrix}(1,w+1,w(w+1)),\\(w+1)(1-3w)/4,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}u&v-uw\\1&-w\end{pmatrix},$$
$(u-w)^2+4v,\quad ps^{7,2}_{3}=\{w\neq -1,\ v\neq -u,\, uw\};$

$$NSF^{7,2}_{4}=\sigma\begin{pmatrix}u&u+v&v+uw&vw\\1&1&w&0\end{pmatrix}_{[19]},\quad \begin{matrix}(1,1,w),\\(1-4w)/4,\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}u&v\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}u^2+4v,\\ps^{7,2}_{4}=\{v\neq -u,\, -uw\}.\end{matrix}$$

Замечание 2.1. В представленном списке содержатся две нормированные структурные формы: $NSF^{5,2}_{14,-1}$ и $NSF^{5,2}_{16,-1}$, имеющие раздвоение, не связанное с нормировкой (см. опр. 1.8). Однако, этот вид двойственности не представляет интереса, поскольку обе эти формы, как будет показано ниже, не являются каноническими. Существуют линейные замены, сводящие их к предшествующим согласно СП структурным формам при любых допустимых значениях параметров.

Замечание 2.2. В связи с использованием в разложении правой части системы (2.1) нормировки коэффициентов общего множителя P_0^2 отвечающей соглашению 1.2, согласно которой $\alpha = 1$ или $\alpha, \gamma = 0,\ 2\beta = 1$, так как случай $\alpha = 0, \gamma \neq 0$ исключается при помощи перенумерации (1.9), во-первых, σ является множителем матрицы H, во-вторых, из $NSF^{m,2}$, требующих перенумерации, в соответствии с определением 1.4 получаются дополнительные $NSF^{m,2}_a$, что и отражено в списке 2.1.

2.3. Девять классов эквивалентности однородных кубических систем.

Итак, пусть произвольная система (1.4) $\dot{x} = A\, q^{[3]}(x)$ при $l = 2$ записана в виде (2.1) $\dot{x} = P_0^2(x)Hx$, где $P_0^2 = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2$, причем $\alpha = 1$ ($D_0 = \beta^2 - \gamma$) или $\alpha, \gamma = 0$, $2\beta = 1$ ($D_0 = 1$), и матрица $H = (p, q)$ – неособая.

По теореме 2.1 любая замена (1.5) $x = Ly$ ($\det L \neq 0$) преобразует (2.1) в систему (2.4) $\dot{y} = (\tilde{\alpha}, 2\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})\, q^{[2]}(y)\, \widetilde{H}y$, у которой $\tilde{p}_0^2 = (\tilde{\alpha}, 2\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ и матрица $\widetilde{H}$ с $\delta_{\tilde{p}\tilde{q}} \neq 0$ из (2.5), При этом с учетом обозначений (1.6) для матрицы $\widetilde{A}$ системы (2.4) верна формула (2.7).

Приводить систему (2.1) к различным каноническим формам будем в два этапа.

На первом этапе выберем замену (1.5), которая сводит матрицу H системы (2.1) к жордановой форме $\widetilde{H}$ в получаемой системе (2.4). Вид замены будет, конечно, зависеть от знака дискриминанта D из формулы (2.3) (см. прил. [3, 3.3]).

1) $D > 0$, тогда согласно (2.3) матрица H имеет вещественные различные собственные числа $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Точнее говоря, пусть

$$\lambda_1 = (p_1 + q_2 + \sigma_0\sqrt{D})/2, \quad \lambda_2 = (p_1 + q_2 - \sigma_0\sqrt{D})/2, \quad \lambda_* = p_1 - q_2 + \sigma_0\sqrt{D} \neq 0, \quad (2.8)$$

где $\sigma_0 = \{1$ при $p_1 \geq q_2$, -1 при $p_1 < q_2\}$, тогда $\sigma_0 = \operatorname{sign}\lambda_*$ и $\sigma_0\sqrt{D} = \lambda_1 - \lambda_2$.

Замена $J_1^2 = \begin{pmatrix} \lambda_* & -2q_1 \\ 2p_2 & \lambda_* \end{pmatrix}$ ($\delta = 2\sigma_0\sqrt{D}\,\lambda_*$) с учетом формул для $\widetilde{P}_0$ из (2.5) сводит систему (2.1) к системе, записанной в виде (2.7) или (2.4), у которой

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}\lambda_1 & 2\tilde{\beta}\lambda_1 & \tilde{\gamma}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha}\lambda_2 & 2\tilde{\beta}\lambda_2 & \tilde{\gamma}\lambda_2 \end{pmatrix}; \quad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha\lambda_*^2 + 4\beta p_2\lambda_* + 4\gamma p_2^2,$$
$$\tilde{\beta} = \beta\lambda_*^2 - 2(\alpha q_1 - \gamma p_2)\lambda_* - 4\beta p_2 q_1, \quad \tilde{\gamma} = \gamma\lambda_*^2 - 4\beta q_1\lambda_* + 4\alpha q_1^2. \quad (2.9)$$

2) $D = 0$, тогда в формуле (2.3) $\lambda_1, \lambda_2 = \nu = (p_1 + q_2)/2 \neq 0$, иначе $\det H = 0$.

2_1): a) $q_1 \neq 0$, тогда замена $J_{2a}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2q_1 \\ 2 & q_2 - p_1 \end{pmatrix}$, b) $q_1 = 0$, $p_2 \neq 0$ ($p_1, q_2 = \nu$), тогда нормировка $J_{2b}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$, сводят (2.1) к системе (2.7) или (2.4), у которой:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}\nu & 2\tilde{\beta}\nu & \tilde{\gamma}\nu & 0 \\ \tilde{\alpha} & \tilde{\alpha}\nu + 2\tilde{\beta} & 2\tilde{\beta}\nu + \tilde{\gamma} & \tilde{\gamma}\nu \end{pmatrix}; \quad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 1 & \nu \end{pmatrix},$$

$$a)\ \tilde{\alpha} = 4\gamma, \quad \tilde{\beta} = 4\beta q_1 - 2\gamma(p_1 - q_2), \quad \tilde{\gamma} = 4\alpha q_1^2 - 4\beta q_1(p_1 - q_2) + \gamma(p_1 - q_2)^2, \quad (2.10)$$
$$b)\ \tilde{\alpha} = \alpha,\ \tilde{\beta} = \beta p_2,\ \tilde{\gamma} = \gamma p_2^2 \quad (\nu = p_1).$$

2_2) q_1, $p_2 = 0$, тогда в системе (2.1) матрица H – диагональная и $p_1, q_2 = \nu \neq 0$.

3) $D < 0$ $(\delta_{pq} > 0,\ p_2 q_1 < 0)$, тогда в (2.3) λ_1, λ_2 – комплексно-сопряженные.

Замена $J_3^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{-D} & p_1 - q_2 \\ 0 & 2p_2 \end{pmatrix}$ $(\delta = 2p_2\sqrt{-D})$ с учетом формул для $\widetilde{P}_0$ из (2.5) сводит (2.1) к системе, записанной в виде (2.7) или (2.4), у которой

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}\nu & 2\tilde{\beta}\nu - \tilde{\alpha}\mu & \tilde{\gamma}\nu - 2\tilde{\beta}\mu & -\tilde{\gamma}\mu \\ \tilde{\alpha}\mu & \tilde{\alpha}\nu + 2\tilde{\beta}\mu & 2\tilde{\beta}\nu + \tilde{\gamma}\mu & \tilde{\gamma}\nu \end{pmatrix}; \quad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} \nu & -\mu \\ \mu & \nu \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha} = -\alpha D,$$
$$\tilde{\beta} = \sqrt{-D}(\alpha(p_1 - q_2) + 2\beta p_2), \quad \tilde{\gamma} = \alpha(p_1 - q_2)^2 + 4\beta p_2(p_1 - q_2) + 4\gamma p_2^2, \tag{2.11}$$

где $\nu = (p_1 + q_2)/2\,(= \operatorname{Re}\lambda_{1,2})$, $\mu = \sqrt{-D}/2\,(= |\operatorname{Im}\lambda_{1,2}|) > 0$, причем $\nu^2 + \mu^2 = \delta_{pq}$.

На втором этапе в линейно неэквивалентных системах (2.9), (2.10), (2.11) сделаем произвольную замену (1.5), сводящую каждую из них к системе (2.4), все составляющие которой вместо символа $\tilde{}$ будем сверху отмечать символом $\breve{}$.

В результате, учитывая (2.5), по аналогии с (2.7) получим систему

$$\breve{A} = \begin{pmatrix} \breve{a}_1 & \breve{b}_1 & \breve{c}_1 & \breve{d}_1 \\ \breve{a}_2 & \breve{b}_2 & \breve{c}_2 & \breve{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \breve{\alpha}\breve{p}_1 & \breve{\alpha}\breve{q}_1 + 2\breve{\beta}\breve{p}_1 & 2\breve{\beta}\breve{q}_1 + \breve{\gamma}\breve{p}_1 & \breve{\gamma}\breve{q}_1 \\ \breve{\alpha}\breve{p}_2 & \breve{\alpha}\breve{q}_2 + 2\breve{\beta}\breve{p}_2 & 2\breve{\beta}\breve{q}_2 + \breve{\gamma}\breve{p}_2 & \breve{\gamma}\breve{q}_2 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

у которой $\breve{\alpha} = \tilde{\alpha}r_1^2 + 2\tilde{\beta}r_1r_2 + \tilde{\gamma}r_2^2$, $\breve{\beta} = (\tilde{\alpha}s_1 + \tilde{\beta}s_2)r_1 + (\tilde{\beta}s_1 + \tilde{\gamma}s_2)r_2$, $\breve{\gamma} = \tilde{\alpha}s_1^2 + 2\tilde{\beta}s_1s_2 + \tilde{\gamma}s_2^2$,
$\breve{H} = \begin{pmatrix} \breve{p}_1 & \breve{q}_1 \\ \breve{p}_2 & \breve{q}_2 \end{pmatrix} = \delta^{-1}\begin{pmatrix} r_1\delta_{ps} + r_2\delta_{qs} & s_1\delta_{ps} + s_2\delta_{qs} \\ -r_1\delta_{pr} - r_2\delta_{qr} & -s_1\delta_{pr} - s_2\delta_{qr} \end{pmatrix}$ $(\det \breve{H} = \delta_{\breve{p}\breve{q}} = \delta_{\tilde{p}\tilde{q}} = \delta_{pq})$.

Остается подобрать коэффициенты замены (1.5) так, чтобы система (2.12) оказалась наиболее простой в соответствии с введенными в [2, 1.1,1.2] СП и НП.

Реализация указанного плана будет проводиться отдельно для каждого из трех классов систем, на которые разбивается (2.1) в соответствии со знаком дискриминанта D_0 общего множителя P_0^2, инвариантного согласно (2.6) относительно замен (1.5).

Таким образом фактическое нахождение канонических форм будет осуществляться отдельно в каждом из девяти линейно неэквивалентных классов, разделяемых знаками дискриминантов D_0 и D системы (2.1) (см. след. 2.3).

Набор 2.1. Константы и замены, используемые в дальнейшем в разделе 2:
$D = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1$, $\sigma_0 = \{1$ при $p_1 \geq q_2$, -1 при $p_1 < q_2\}$, $\lambda_{1,2} = (p_1 + q_2 \pm \sigma_0\sqrt{D})/2$, $\lambda_* = p_1 - q_2 + \sigma_0\sqrt{D}$; $\nu = (p_1 + q_2)/2$, $\mu = \sqrt{-D}/2$; $\tilde{\tau} = (\tilde{\beta}^2 - \tilde{\alpha}\tilde{\gamma})^{1/2}$, $\tilde{\phi} = (2\tilde{\tau})^{-1/2}$, $\sigma_\alpha = \operatorname{sign}\tilde{\alpha}$, $\sigma_\beta = \{1$ при $\tilde{\beta} \geq 0$, -1 при $\tilde{\beta} < 0\}$, $\sigma_\gamma = \operatorname{sign}\tilde{\gamma}$, $\tilde{\eta} = \tilde{\beta} + \sigma_\beta\tilde{\tau}$; $\tilde{\varsigma} = (\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} - \tilde{\beta}^2)^{1/2}$;
$J_1^2 = \{r_1 = \lambda_*,\ s_1 = -2q_1,\ r_2 = 2p_2,\ s_2 = \lambda_*\}$, $J_{2a}^2 = \{r_1 = 0,\ s_1 = 2q_1,\ s_2 = 2,\ r_2 = q_2 - p_1\}$, $J_{2b}^2 = \{r_1 = 1,\ s_1 = 0,\ r_2 = 0,\ s_2 = p_2\}$, $J_3^2 = \{r_1 = \sqrt{-D},\ s_1 = p_1 - q_2,\ r_2 = 0,\ s_2 = 2p_2\}$.

2.4. Построение $\mathbf{CF^{m,2}}$ при нулевом дискриминанте $\mathbf{P_0^2}$.

Система (2.1), у которой $P_0^2(x)$ является полным квадратом, имеет вид

$$\dot{x} = P_0^2(x)Hx, \quad P_0^2 = (x_1 + \beta x_2)^2 \quad (\gamma = \beta^2 \Leftrightarrow D_0 = 0,\ \det H = \delta_{pq} \neq 0). \tag{2.1$^=$}$$

Выделим из списка 2.1 нормированные формы до $NSF_{a,13}^{3,2}$ включительно, относящиеся к случаю $D_0 = 0$, таких форм – 5. Обозначения для них см. в утверждении 2.1.

Докажем, что приведенный ниже список содержит все возможные канонические формы системы (2.1$^=$) со своими каноническими множествами из определения 1.11.

Список 2.2. Пять $CF_i^{m,2,=}$ и их $cs_i^{m,2,=}$ $(\sigma,\kappa=\pm1,\ u\neq0,\ p_0^2=(1,0,0))$:

$CF_3^{2,2,=,\geqslant}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}cs_3^{2,2,=,>}=\{u\neq1\},\\ cs_3^{2,2,=,=}=\{u=1\};\end{matrix}$

$CF_{7,\kappa}^{2,2,=,\gtrless}=\sigma\begin{pmatrix}0&\kappa&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}cs_{7,\kappa}^{2,2,=,>}=\{\kappa=1\},\\ cs_{7,\kappa}^{2,2,=,<}=\{\kappa=-1\};\end{matrix}$

$CF_7^{3,2,=,\geqslant}=\sigma\begin{pmatrix}u&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}cs_7^{3,2,=,>}=\{u\neq\pm1\},\\ cs_7^{3,2,=,=}=\{u=1\};\end{matrix}$

$CF_{12}^{3,2,=,<}=\sigma\begin{pmatrix}1&u&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $cs_{12}^{3,2,=,<}=\{u<-1/4\};$

$CF_{a,13}^{3,2,=,=}=\sigma\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&u&0&0\end{pmatrix}$, $cs_{13}^{3,2,=,=}=\{u=1\}.$

Утверждение 2.2. *Только следующие формы из списка 2.2 при указанных значениях параметров сводятся к предшествующим, согласно СП, структурным формам:*
$NSF_7^{3,2,=,>}$ *при* $u=-1$ *заменой* (1.5) *с* $r_1=r_2,\ s_1=0$ *сводится к* $SF_7^{2,2}$;
$NSF_{12}^{3,2,=,>}$ $(u>-1/4)$, $NSF_{12}^{3,2,=,=}$ $(u=-1/4)$ *заменой* (1.5) *с* $r_1=(1+\sqrt{1+4u})r_2/2$, $s_1=0$ *сводятся к* $SF_7^{3,2}$;
$NSF_{13}^{3,2,=,>}$ $(u\neq1)$ *заменой* (1.5) *с* $r_2=(1-u)r_1,\ s_2=0$ *сводится к* $SF_3^{2,2}$.

Набор 2.2. Константы и замены, используемые в дальнейшем в разделе 2.4:

$\varpi_1=2p_2\beta+\lambda_*,\ \ \varpi_2=2q_1-\lambda_*\beta,\ \ \varpi_3=(p_1-q_2)\beta-2q_1,$
$\varpi_4=p_2\beta^2+2p_1\beta-q_1,\ \ \varpi_5=p_2\beta^2+(p_1-q_2)\beta-q_1,\ \ \varpi_6=p_1-q_2+2p_2\beta;$
$L_3^{2,2,=,>}=\{r_1=[\,0\vee|\varpi_1^2\lambda_2|^{-1/2}\,],\ s_1=[\,1\vee0\,],\ r_2=[\,|\varpi_2^2\lambda_1|^{-1/2}\vee0\,],\ s_2=[\,0\vee1\,]\};$
$L_{7,+1}^{2,2,=,>}=\{r_1,-s_1=\varpi_1^{-1}\varpi_2r_2,\ r_2,s_2=|4\varpi_2^2\lambda_2|^{-1/2}\};$
$L_7^{3,2,=,>}=\{r_1=0,\ s_1=-\varpi_1^{-1}\varpi_2s_2,\ r_2=|\varpi_2^2\lambda_1|^{-1/2},\ s_2=\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)^{-1}r_2\};$
$L_3^{2,2,=,=}=\{r_1=|p_1|^{-1/2},\ s_1=-\beta,\ r_2=0,\ s_2=1\};$
$L_7^{3,2,=,=}=\{r_1=0,\ s_1=\nu r_2,\ r_2=[\,|\varpi_3^2\nu|^{-1/2}\vee|(\beta p_2)^2\nu|^{-1/2}\,],$
$s_2=[\,2\beta\varpi_3^{-1}\nu r_2\vee-(\beta p_2)^{-1}r_2\,]\};$
$L_{13}^{3,2,=,=}=\{r_1,s_2=0,\ s_1=[\,|4\beta^2\nu|^{-1/2}\vee|\nu|^{-1/2}\,],\ r_2=\nu^{-1}s_1\};$
$L_{7,-1}^{3,2,=,<}=\{r_1,s_2=(-D)^{1/4}(2^{3/2}p_2\varpi_4)^{-1},\ -s_1,r_2=(p_1+\beta p_2)(-D)^{-1/4}(\sqrt{2}p_2\varpi_4)^{-1}\};$
$L_{12}^{3,2,=,<}=\{r_1=(\delta_{pq}+\nu(\beta p_2-q_2)(-D)^{-1/2}\rho^{-1},\ s_1=\delta_{pq}\varpi_6(-D)^{-1/2}(4\nu\rho)^{-1},$
$r_2=(\beta p_2-q_2)(2\rho)^{-1},\ s_2=\delta_{pq}(4\nu\rho)^{-1}\}$, где $\rho=p_2\varpi_5|2\nu|^{1/2}$.

Теорема 2.2. *Любая система* (1.4) *с* $l=2$, *записанная в виде* $(2.1^=)$ *согласно* (2.2), *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей канонической формы из списка 2.2. Ниже для каждой* $CF_i^{m,2,=,*}$ *приведены:*
a) условия на P_0^2 *и* H *системы* $(2.1^=)$, *b) замены* (1.5), *преобразующие правую часть системы* $(2.1^=)$ *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения множителя* σ *и параметров из* $cs_i^{m,2,=,*}$:

$CF_3^{2,2,=,>}$: *a)* $D>0,\ [\,\varpi_1=0\vee\varpi_2=0\,]$, *b)* $J_1^2,\ L_3^{2,2,=,>}$, *c)* $\sigma=[\,\operatorname{sign}\lambda_1\vee\operatorname{sign}\lambda_2\,]$, $u=[\,\lambda_1^{-1}\lambda_2\vee\lambda_1\lambda_2^{-1}\,]$;

$CF_{7,+1}^{2,2,=,>}$: *a)* $D>0,\ \varpi_1,\varpi_2\neq0,\ \lambda_1=-\lambda_2$, *b)* $J_1^2,\ L_{7,+1}^{2,2,=,>}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_2$;

$CF_7^{3,2,=,>}$: *a)* $D>0,\ \varpi_1,\varpi_2\neq0,\ \lambda_1\neq-\lambda_2$, *b)* $J_1^2,\ L_7^{3,2,=,>}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_1,\ u=\lambda_1^{-1}\lambda_2$;

$CF_3^{2,2,=,=}$: *a)* $D=0,\ q_1=0,\ p_2=0$, *b)* $L_3^{2,2,=,=}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}p_1$;

$CF_7^{3,2,=,=}$: *a)* $D=0,\ [\,q_1\neq0,\ \varpi_3\neq0\vee q_1=0,\ p_2\neq0,\ \beta\neq0\,]$, *b)* $[\,J_{2a}^2\vee J_{2b}^2\,],\ L_7^{3,2,=,=}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\nu$;

$CF_{13}^{3,2,=,=}$: *a)* $D=0,\ [\,q_1\neq0,\beta\neq0,\varpi_3=0\vee q_1=0,p_2\neq0,\beta=0\,]$, *b)* $[\,J_{2a}^2\vee J_{2b}^2\,]$,

$L_{13}^{3,2,=,=}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\nu$;

$CF_{7,-1}^{2,2,=,<}$: *a)* $D<0,\ q_2=-p_1$, *b)* $J_3^2,\ L_{7,-1}^{3,2,=,<}$, *c)* $\sigma=1$;

$CF_{12}^{3,2,=,<}$: *a)* $D<0,\ \nu\neq 0$, *b)* $J_3^2,\ L_{12}^{3,2,=,<}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\nu,\ u=-\delta_{pq}(2\nu)^{-2}$.

Доказательство. В зависимости от знака дискриминанта D из (2.3) система $(2.1^=)$ с $\gamma=\beta^2$ одной из замен $J_1^2,\ J_{2a}^2$ или $J_{2b}^2,\ J_3^2$ сведена соответственно к системе (2.9), (2.10), (2.11) с жордановой матрицей $\widetilde{H}$ и общим множителем $\widetilde{P}_0^2$. При этом $\tilde\alpha,\tilde\gamma\geq 0,\ \tilde\alpha+\tilde\gamma>0,\ \tilde\beta^2=\tilde\alpha\tilde\gamma$ в силу (2.5), (2.6).

Далее, в каждой из полученных систем сделана произвольная замена (1.5), преобразующая ее в систему (2.12), из которой и будут выделяться канонические формы.

В системе (2.12) общий множитель $\breve{P}_0^2$ имеет следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned}&\tilde\alpha>0: \quad \breve\alpha=\tilde\alpha^{-1}(\tilde\alpha r_1+\tilde\beta r_2)^2,\quad \breve\beta=\tilde\alpha^{-1}(\tilde\alpha r_1+\tilde\beta r_2)(\tilde\alpha s_1+\tilde\beta s_2),\quad \breve\gamma=\tilde\alpha^{-1}(\tilde\alpha s_1+\tilde\beta s_2)^2;\\ &\tilde\alpha=0\ \ (\tilde\beta=0,\ \tilde\gamma>0): \quad \breve\alpha=\tilde\gamma r_2^2,\quad \breve\beta=\tilde\gamma r_2 s_2,\quad \breve\gamma=\tilde\gamma s_2^2.\end{aligned}\tag{2.13}$$

В формуле (2.13) всегда можно сделать, например, $\breve\beta=0,\ \breve\gamma=0$. Для этого в замене (1.5) достаточно зафиксировать следующую связь между s_1 и s_2 :

$$\tilde\alpha\neq 0:\ s_1=-\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta s_2,\qquad \tilde\alpha=0:\ s_2=0,\tag{2.14}$$

при которой в получаемой системе (2.12) два правых столбца $\breve{A}$ будут нулевыми.

1) $D>0\ \ (\lambda_1,\lambda_2\neq 0,\ \lambda_1-\lambda_2=\sigma_0\sqrt{D}\neq 0)$, (см. прил. [3, 3.4.1]). Из системы $(2.1^=)$ заменой J_1^2 получена система (2.9), у которой в $\widetilde{P}_0^2:\ \tilde\alpha=\varpi_1^2,\ \ \tilde\beta=\varpi_1\varpi_2,\ \ \tilde\gamma=\varpi_2^2$.

Пусть замена (1.5) при условии (2.14) сводит систему (2.9) к системе (2.12), у которой коэффициенты $\breve{P}_0^2$ определены в (2.13).

1_1) $\tilde\alpha=0\ \ (\tilde\gamma>0,\ s_2=0)$. Тогда система (2.12) $=\tilde\gamma r_2^2\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0 & 0 & 0\\ (\lambda_1-\lambda_2)r_1s_1^{-1} & \lambda_1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
При $r_1=0,\ s_1=1,\ r_2=(\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2}$ – это $CF_3^{2,2,=,>}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_1,\ u=\lambda_1^{-1}\lambda_2\neq 1$.

1_2) $\tilde\alpha>0$. Тогда система (2.12) имеет вид

$$\breve{A}=(r_1+\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_2)\begin{pmatrix}\tilde\alpha\lambda_1r_1+\tilde\beta\lambda_2r_2 & \tilde\beta(\lambda_2-\lambda_1)s_2 & 0 & 0\\ \tilde\alpha(\lambda_2-\lambda_1)r_1r_2s_2^{-1} & \tilde\alpha\lambda_2r_1+\tilde\beta\lambda_1r_2 & 0 & 0\end{pmatrix}.\tag{2.15}$$

1_2^1) $\tilde\beta=0\ \ (\tilde\gamma=0,s_1=0)$. Тогда система (2.15) $=\tilde\alpha r_1^2\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ (\lambda_2-\lambda_1)r_2s_2^{-1} & \lambda_2 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
При $r_2=0,\ s_2=1,\ r_1=(\tilde\alpha|\lambda_2|)^{-1/2}$ – это $CF_3^{2,2,=,>}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_2,\ u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq 1$.

1_2^2) $\tilde\beta\neq 0$.

1_2^{2a}) $\lambda_1=-\lambda_2\ \Leftrightarrow p_1+q_2=0$. Тогда при $r_1=\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_2$ система (2.15) $=$
$4\tilde\gamma r_2^2\lambda_2\begin{pmatrix}0 & r_2^{-1}s_2 & 0 & 0\\ r_2s_2^{-1} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_2,s_2=(4\tilde\gamma|\lambda_2|)^{-1/2}$ – это $CF_{7,+1}^{2,2,=,>}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_2$.

1_2^{2b}) $\lambda_1\neq-\lambda_2$. Тогда при $r_1=0$ система (2.15) $=\tilde\gamma r_2^2\begin{pmatrix}\lambda_2 & (\lambda_2-\lambda_1)r_2^{-1}s_2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
При $r_2=(\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2},\ s_2=\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)^{-1}(\tilde\gamma|\lambda_1|)^{-1/2}$ эта система – $NSF_7^{3,2,=,>}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_1$, $u=\lambda_1^{-1}\lambda_2\neq\pm 1$.

В системе (2.15) можно еще сделать $\breve{b}_2 = 0$ или $\breve{a}_1 = 0$, получая $SF_{12}^{3,2}$ или $SF_{a,18}^{3,2}$, которым $CF_7^{3,2,=,>}$ предшествует согласно СП2.

2) $D = (p_1 - q_2)^2 + 4p_2q_1 = 0$, т. е. $\lambda_1, \lambda_2 = \nu = (p_1 + q_2)/2 \neq 0$ (см. прил. [3, 3.4.2]).

2_1) Из ($2.1^=$) с $\gamma = \beta^2$ при $q_1 \neq 0$ заменой J_{2a}^2 получена система (2.10) с $\tilde\alpha = 4\beta^2$, $\tilde\beta = -2\beta((p_1 - q_2)\beta - 2q_1)$, $\tilde\gamma = ((p_1 - q_2)\beta - 2q_1)^2$ согласно (2.10_a), а при $q_1 = 0, p_2 \neq 0$ ($q_2, p_1 = \nu$) заменой J_{2b}^2 – (2.10) с $\tilde\alpha = 1$, $\tilde\beta = \beta p_2$, $\tilde\gamma = (\beta p_2)^2$ согласно (2.10_b).

Пусть замена (1.5) при условии (2.14) сводит систему (2.10) к системе (2.12), у которой коэффициенты $\breve{P}_0$ определены в (2.13).

2_1^1) $\tilde\alpha = 0$ $(\tilde\gamma > 0)$. Тогда система (2.12) $= \tilde\gamma r_2 \begin{pmatrix} r_1 + \nu r_2 & s_1 & 0 & 0 \\ -r_1^2 s_1^{-1} & \nu r_2 - r_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = 0$, $r_2 = (\tilde\gamma|\nu|)^{-1/2}$, $s_1 = \nu r_2$ $(s_2 = 0)$ – это $CF_7^{3,2,=,=}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $u = 1$.

В системе (2.12) помимо $\breve{a}_2 = 0$ можно получить $\breve{b}_2 = 0$ или $\breve{a}_1 = 0$, что превратит ее в $SF_{12}^{3,2}$ или $SF_{a,18}^{3,2}$, которым $CF_7^{3,2,=,=}$ предшествует согласно СП2.

2_1^2) $\tilde\alpha = [\,4\beta^2 \vee 1\,] > 0$. Тогда система (2.12) имеет вид

$$\breve{A} = (r_1 + \tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_2) \begin{pmatrix} (\tilde\alpha\nu r_1 + \tilde\beta) r_1 + \tilde\beta\nu r_2 & -\tilde\alpha^{-1}\tilde\beta^2 s_2 & 0 & 0 \\ \tilde\alpha r_1^2 s_2^{-1} & (\tilde\alpha\nu r_1 - \tilde\beta) r_1 + \tilde\beta\nu r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.16)$$

2_1^{2a}) $\tilde\beta = 0$ $(s_1 = 0) \Leftrightarrow [\,\varpi_3 = 0 \vee \beta = 0\,]$. Тогда (2.16) $= \tilde\alpha r_1^2 \begin{pmatrix} \nu & 0 & 0 & 0 \\ r_1 s_2^{-1} & \nu & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = (\tilde\alpha|\nu|)^{-1/2}$, $r_2 = 0$, $s_2 = \nu^{-1} r_1$ – это $CF_{a,13}^{3,2,=,=}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\nu$. И – перенумерация (1.9).

2_1^{2b}) $\tilde\beta \neq 0$ $(\tilde\gamma > 0)$. Тогда при $r_1 = 0$ система (2.16) $= \tilde\gamma r_2^2 \begin{pmatrix} \nu & -\tilde\beta^{-1}\tilde\gamma r_2^{-1} s_2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_2 = (\tilde\gamma|\nu|)^{-1/2}$, $s_2 = -\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\nu r_2$ $(s_1 = \nu r_2)$ – это $CF_7^{3,2,=,=}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $u = 1$.

Случаи 2_1^1) и 2_1^{2b}) для $q_1 \neq 0$ ($\beta = 0$ и $\beta \neq 0$) объединены в формулировке теоремы. Из (2.16) можно также получить $SF_{12}^{3,2}$ и $SF_{a,18}^{3,2}$, которым $CF_7^{3,2,=,=}$ предшествует.

2_2) $q_1 = 0$, $p_2 = 0$ $(q_2 = p_1)$, т. е. в самой системе ($2.1^=$) H – диагональная матрица. Замена (1.5) с $r_1 = |p_1|^{-1/2}$, $s_1 = -\beta$, $r_2 = 0$, $s_2 = 1$ сводит ($2.1^=$) к $CF_3^{2,2,=,=}$ $(u = 1)$ с $\sigma = \operatorname{sign} p_1$.

3) $D < 0$ $(p_2 q_1 < 0)$, (см. прил. [3, 3.4.3]). Из системы ($2.1^=$) заменой J_3^2 получена система (2.11) с

$$\tilde\alpha = -D, \quad \tilde\beta = \sqrt{-D}\,\varpi_6, \quad \tilde\gamma = \varpi_6^2.$$

Пусть замена (1.5) при условии (2.14) сводит систему (2.11) к системе (2.12), у которой коэффициенты $\breve{P}_0$ определены в (2.13). Тогда (2.12) имеет вид

$$(r_1 + \tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_2) \begin{pmatrix} (\tilde\alpha\nu + \tilde\beta\mu) r_1 + (\tilde\beta\nu - \tilde\alpha\mu) r_2 & -\tilde\alpha^{-1}(\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2)\mu s_2 & 0 & 0 \\ \mu(r_1^2 + r_2^2) s_2^{-1} & (\tilde\alpha\nu - \tilde\beta\mu) r_1 + (\tilde\beta\nu + \tilde\alpha\mu) r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.17)$$

3_1) $\nu = 0 \Leftrightarrow q_2 = -p_1$, при этом $\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2 = -4Dp_2\varpi_4 \neq 0$, так как дискриминант ϖ_4 равен D, а $D = 4(p_1^2 + p_2 q_1)$. Тогда при $r_2 = \tilde\alpha^{-1}\tilde\beta r_1$ система (2.17) $= \tilde\alpha^{-3}(\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2)^2 \mu r_1^2 \times$ $\begin{pmatrix} 0 & -r_1^{-1} s_2 & 0 & 0 \\ r_1 s_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1, s_2 = \tilde\alpha^{3/2}(\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2)^{-1}\mu^{-1/2}$ – это $CF_{7,-1}^{2,2,=,<}$ с $\sigma = 1$.

3_2) $\nu \neq 0 \Leftrightarrow p_1 + q_2 \neq 0$, при этом $\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2 \neq 0$. Тогда в системе (2.17) при $r_1 = \tilde\alpha^{1/2}(\tilde\alpha\mu + \tilde\beta\nu)\rho$, $r_2 = \tilde\alpha^{1/2}(\tilde\beta\mu - \tilde\alpha\nu)\rho$, $s_2 = \tilde\alpha^{3/2}(\nu^2 + \mu^2)(2\nu)^{-1}\rho$, где $\rho = |2\nu|^{-1/2}\mu^{-1}(\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2)^{-1}$, элемент $\breve{b}_2 = 0$ и – это $CF_{12}^{3,2,=,<}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $u = -(\nu^2 + \mu^2)(2\nu)^{-2} < -1/4$.

В системе (2.17) можно также сделать $\breve{a}_1 = 0$, получая SF с бóльшим индексом. $\square$

В результате оказалась доказанной полнота списка 2.2 $CF_i^{m,2,=}$ при нулевом дискриминанте общего множителя P_0^2 и их линейная неэквивалентность друг другу.

Приведем теперь линейные неособые замены, которые для CF из списка 2.2 позволят выделить минимальные канонические множества, введенные в определении 1.12.

Утверждение 2.3. *Только в $CF_{7,\kappa}^{2,2,=}$ и $CF_7^{3,2,=,>}$ из списка 2.2 удается ограничить значения параметров $cs_7^{m,2,=,}$ а именно: в $CF_{7,\kappa}^{2,2,=}$ нормировка* (1.8) *с $r_1, -s_2 = 1$ изменяет знак σ; в $CF_7^{3,2,=,>}$ при $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$ и замена с $r_1 = |\tilde u|^{-1/2}$, $s_1 = 0$, $r_2 = (1-\tilde u)|\tilde u|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde u|\tilde u|^{-1/2}$ дает $\sigma = \tilde\sigma \operatorname{sign}\tilde u$, $u = \tilde u^{-1}$.*

Следствие 2.4. *Согласно определению 1.13 имеем: $acs_{7,\kappa}^{2,2,=} = \{\sigma = -1\}$, $acs_7^{3,2,=,>} = \{|u| > 1\}$; у остальных канонических форм из списка 2.2 $mcs^{m,2,=,*} = cs^{m,2,=,*}$.*

Замечание 2.3. В $NSF_{12}^{3,2,=,<}$ в отличие от $NSF_{12}^{3,2,=}$ элемент $b_1 < 0$, так как $u < -1/4$. Поэтому НП2 выполняется и можно осуществить лучшую согласно НП3 нормировку, получая $NSF_{12,new}^{3,2,=,<} = \sigma \begin{pmatrix} v & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ с $D = v^2 - 4$, а значит, $ps_{12,new}^{3,2,=,<} = \{|v| < 2\}$. При этом $NSF_{12}^{3,2,=,<}$ нормировкой с $r_1 = (-u)^{-1/4}$, $s_2 = (-u)^{-3/4}$ сводится к $NSF_{12,new}^{3,2,=,<}$ с $v = (-u)^{-1/2} \in (0, 2)$.

2.5. Построение $\mathbf{CF^{m,2}}$ при положительном дискриминанте $\mathbf{P_0^2}$.

Система (2.1) с положительным дискриминантом многочлена $P_0^2(x)$, имеет вид

$$\dot x = P_0^2(x)Hx, \quad \begin{matrix} P_0^2 = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1x_2 + \gamma x_2^2, \\ \alpha = 1 \text{ или } \alpha,\gamma = 0,\, 2\beta = 1; \end{matrix} \quad D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma > 0 \quad (\det H = \delta_{pq} \neq 0). \quad (2.1^>)$$

Выделим из списка 2.1 нормированные формы до $NSF_{23}^{4,2}$ включительно, относящиеся к случаю $D_0 > 0$, таких форм – 9.

Выясним, какие $NSF^{m,2,>}$ оказываются каноническими формами, и докажем, что приведенный ниже список содержит все возможные канонические формы системы $(2.1^>)$ со своими каноническими множествами из определения 1.11.

Список 2.3. Семь $CF_i^{m,2,>}$ и их $cs_i^{m,2,>}$ $(\sigma, \kappa = \pm 1,\ u, v \neq 0)$:

$$CF_4^{2,2,>,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} cs_4^{2,2,>,>} = \{u \neq 1\}, \\ cs_4^{2,2,>,=} = \{u = 1\}; \end{matrix}$$

$$CF_{8,\kappa}^{2,2,>,\gtrless} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} cs_{8,\kappa}^{2,2,>,>} = \{\kappa = 1\}, \\ cs_{8,\kappa}^{2,2,>,<} = \{\kappa = -1\}; \end{matrix}$$

$$CF_{10}^{3,2,>,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} cs_{10}^{3,2,>,>} = \{u \neq 1\}, \\ cs_{10}^{3,2,>,=} = \{u = 1\}; \end{matrix}$$

$$CF_{16}^{3,2,>,*} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} cs_{16}^{3,2,>,>} = \{u > -1/4\}, \\ cs_{16}^{3,2,>,=} = \{u = -1/4\}, \\ cs_{16}^{3,2,>,<} = \{u < -1/4\}; \end{matrix}$$

$$CF_{8,-1}^{4,2,>,>} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & -u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad cs_{8,-1}^{4,2,>,>} = \{u \neq \pm 1\};$$

$$CF_{a,14,-1}^{4,2,>,>} = \sigma \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & u & 0 \end{pmatrix}, \quad cs_{14,-1}^{4,2,>,>} = \{u \neq -1, -2, -3\};$$

$$CF_{23}^{4,2,>,*} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & v & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{array}{l} cs_{23}^{4,2,>,>} = \{u \neq 1,\ v > -(1-u)^2/4,\ v \neq u,\ (2u-1)/4,\ u(2-u)/4\}, \\ cs_{23}^{4,2,>,=} = \{u \neq -1,\ v = -(1-u)^2/4\}, \\ cs_{23}^{4,2,>,<} = \{v < -(1-u)^2/4\}. \end{array}$$

Утверждение 2.4. *Только* $NSF_7^{4,2,>} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $NSF_{12}^{4,2,>} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 0 & -u \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *не являются* $CF^{m,2,>}$, *т. е. при всех допустимых значениях параметров заменами* (1.5) *сводятся согласно СП1 к предшествующим структурным формам.*

Доказательство. $NSF_7^{4,2,>}$ заменой с $s_1 = -s_2$, $r_2 = 0$ сводится к $SF_{10}^{3,2}$ или $SF_4^{2,2}$, а $NSF_{12}^{4,2,>}$ той же заменой сводится к $SF_{10}^{3,2}$ или $SF_4^{2,2}$. Непосредственной проверкой установлено, что остальные $NSF^{m,2,>}$ являются $CF^{m,2,>}$. □

Набор 2.3. Константы и замены, используемые в дальнейшем в разделе 2.5:

$\varphi_1 = \tilde\eta^2\lambda_1 - \tilde\alpha\tilde\gamma\lambda_2$, $\varphi_2 = \tilde\eta^2\lambda_2 - \tilde\alpha\tilde\gamma\lambda_1$, $\varphi_3{}^{\pm} = 2\tilde\tau\nu\,\sigma_\beta \pm \tilde\gamma$, $\varphi_4{}^{\pm} = 2\tilde\tau\nu\,\sigma_\beta \pm (\tilde\alpha + \tilde\gamma)\mu$;
$L_4^{2,2,>,>} = \{r_1 = 1,\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = (2\tilde\beta\lambda_2)^{-1}\}$;
$L1_{10}^{3,2,>,>} = \{r_1 = -|\tilde\gamma|^{1/2}D^{1/4}(2\tilde\beta\lambda_2)^{-1}\sigma_0\sigma_\gamma,\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = 0,\ s_2 = |\tilde\gamma|^{-1/2}D^{-1/4}\}$,
$L2_{10}^{3,2,>,>} = \{r_1 = 0,\ s_1 = |\tilde\alpha|^{-1/2}D^{-1/4},\ r_2 = |\tilde\alpha|^{1/2}D^{1/4}(2\tilde\beta\lambda_1)^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha,\ s_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}s_1\}$;
$L_{8,+1}^{2,2,>,>} = \{r_1 = |4\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,\ s_2 = |4\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}\}$;
$L_8^{4,2,>,>} = \{-r_1, s_1 = v^{1/4}(1+v^{1/2})^{-1/2},\ r_2, s_2 = v^{-1/4}(1+v^{1/2})^{-1/2}\}$;
$L1_{16}^{3,2,>,>} = \{r_1 = \tilde\phi^2\tilde\eta|\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,\ s_2 = \tilde\alpha(2\tilde\beta)^{-1}r_1\}$,
$L2_{16}^{3,2,>,>} = \{r_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-1}r_2,\ r_2 = \tilde\phi^2\tilde\eta|\tilde\gamma\lambda_2|^{-1/2},\ s_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}s_1\}$;
$L1_{23}^{4,2,>,>} = \{r_1 = |2\tilde\alpha|^{-1/2}D^{-1/4},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,$
$s_2 = -|\tilde\alpha|^{1/2}D^{1/4}(-2\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-1/2}(2\nu)^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha\}$,
$L2_{23}^{4,2,>,>} = \{r_1 = \tilde\phi|\tilde\eta|^{1/2}|\tilde\alpha|^{-1/2}D^{-1/4},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,$
$s_2 = \tilde\phi|\tilde\eta|^{3/2}|\tilde\alpha|^{1/2}D^{1/4}\varphi_2^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha\sigma_\beta\}$;
$L1_{14,-1}^{4,2,>,>} = \{r_1, s_1 = 1,\ r_2 = 0,\ s_2 = -2\}$,
$L2_{14,-1}^{4,2,>,>} = \{r_1 = 0,\ s_1 = (\tilde u - 2)s_2/2,\ r_2, s_2 = 2|\tilde u(\tilde u - 2)|^{-1/2}\}$;
$L_4^{2,2,>,=} = \{r_1 = \tilde\eta,\ s_1 = \tilde\phi^4\tilde\gamma(p_1\tilde\eta)^{-1},\ r_2 = -\tilde\alpha,\ s_2 = \tilde\phi^4p_1^{-1}\}$;
$L_{10}^{3,2,>,=} = \{r_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}r_2,\ s_1 = |2\tilde\beta|^{-1/2},\ r_2 = \nu^{-1}s_1,\ s_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}s_1\}$;
$L1_{16}^{3,2,>,=} = \{r_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}r_2,\ s_1 = -\tilde\phi/2,\ r_2 = -\tilde\phi\tilde\eta\tilde\gamma^{-1}\,\sigma_\beta,\ s_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}s_1\}$,
$L2_{16}^{3,2,>,=} = \{r_1 = \tilde\phi,\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,\ s_2 = \tilde\phi\tilde\eta(2\tilde\gamma)^{-1}\,\sigma_\beta\}$;
$L_{23}^{4,2,>,=} = \{r_1 = \tilde\phi,\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,\ s_2 = \tilde\phi\tilde\eta(\varphi_3^-)^{-1}\,\sigma_\beta\}$;
$L_{8,-1}^{2,2,>,=} = \{r_1, s_2 = |\tilde\eta|^{1/2}(\tilde\alpha^2 + \tilde\beta^2)^{-1}\mu^{-1/2},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1\}$;
$L1_{16}^{3,2,>,<} = \{r_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde\phi(\tilde\gamma^2 + \tilde\eta^2)^{1/2}(\tilde\alpha + \tilde\gamma)^{-1}(4\mu)^{-1/2},$
$r_2 = \tilde\phi\tilde\eta((\tilde\gamma^2 + \tilde\eta^2)\mu)^{-1/2},\ s_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}s_1\}$,
$L2_{16}^{3,2,>,<} = \{r_1 = \tilde\phi\tilde\eta((\tilde\alpha^2 + \tilde\eta^2)\mu)^{-1/2},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,$
$r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,\ s_2 = \tilde\phi(\tilde\alpha^2 + \tilde\eta^2)^{1/2}(\tilde\alpha + \tilde\gamma)^{-1}(4\mu)^{-1/2}\}$;
$L_{23}^{4,2,>,<} = \{r_1 = \tilde\phi\tilde\eta((\tilde\alpha^2 + \tilde\eta^2)\mu)^{-1/2},\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2,\ r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1,\ s_2 = \tilde\phi((\tilde\alpha^2 + \tilde\eta^2)\mu)^{1/2}/\varphi_4^-\}$.

Утверждение 2.5. *Только следующие формы из списка 2.3 с указанными значениями параметров сводятся к предшествующим согласно СП структурным формам:*

1) $NSF_{8,-1}^{4,2,>,>}$: *a) при* $u = -1$ *заменой с* $r_2 = -r_1$ $s_1 = s_2$ *сводится к* $SF_8^{2,2}$;
b) $NSF_{8,-1}^{4,2,>,=}$ $(u = 1)$ *той же заменой сводится к* $SF_4^{2,2}$;
2) $NSF_{14,-1}^{4,2,>,>}$: *a) при* $u = -3$ *заменой с* $r_1 = 0$, $s_1 = -2s_2$ *сводится к* $SF_8^{4,2}$;
b) при $u = -2$ *заменой с* $r_2 = -r_1$, $s_2 = 0$ *сводится к* $SF_{10}^{3,2}$;
c) $NSF_{14,-1}^{4,2,>,=}$ $(u = -1)$ *той же заменой сводится к* $SF_{16}^{3,2}$;
3) $NSF_{23}^{4,2,>,>}(\tilde\sigma, \tilde u, \tilde v)$: *a) при* $\tilde u = 1$ $(\tilde v > 0,\ \tilde v \neq 1)$ *заменой* $L_{8,-1}^{4,2,>,>}$ *сводится к* $CF_{8,-1}^{4,2,>,>}$ *с* $\sigma = -\tilde\sigma$, $u = (1 - \tilde v^{1/2})(1 + \tilde v^{1/2})^{-1} \in (-1, 1)$ $(|u| < 1)$;

b) при $\tilde u \neq 1$, $\tilde v = (2\tilde u - 1)/4$ $(\tilde u \neq \pm 1/2)$ *заменой* $L1^{4,2,>,>}_{14,-1}$ *сводится к* $CF^{4,2,>,>}_{14,-1}$ *с* $u = -2\tilde u - 1$ $(u \neq -1, -2, -3)$;
c) при $\tilde u \neq 1$, $\tilde v = \tilde u(2 - \tilde u)/4$ $(\tilde u \neq \pm 2)$ *заменой* $L2^{4,2,>,>}_{14,-1}$ *сводится к* $CF^{4,2,>,>}_{14,-1}$ *с* $\sigma = -\tilde\sigma\,\mathrm{sign}(\tilde u(\tilde u - 2))$, $u = -(\tilde u + 2)\tilde u^{-1}$ $(u \neq -1, -2, -3)$.

Теорема 2.3. *Любая система* (1.4) *с* $l = 2$, *записанная в виде* ($2.1^>$) *согласно* (2.2), *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей канонической формы из списка 2.3. Ниже для каждой* $CF^{m,2,>,*}_i$ *приведены: a) условия на коэффициенты системы* ($2.1^>$), *b) замены* (1.5), *преобразующие правую часть системы* ($2.1^>$) *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения множителя* σ *и параметров из* $cs^{m,2,>,*}_i$:

$CF^{2,2,>,>}_4$: *a)* $D > 0$, *в* (2.9) $\tilde\alpha = 0$, $\tilde\gamma = 0$, *b)* J^2_1, $L^{2,2,>,>}_4$, *c)* $\sigma = 1$, $u = \lambda_1\lambda_2^{-1}$;

$CF^{3,2,>,>}_{10}$: *a)* $D > 0$, *в* (2.9) $[\,\tilde\alpha = 0,\ \tilde\gamma \neq 0 \vee \tilde\alpha \neq 0,\ \tilde\gamma = 0\,]$, *b)* J^2_1, $[\,L1^{3,2,>,>}_{10} \vee L2^{3,2,>,>}_{10}\,]$, *c)* $\sigma = [\,-\sigma_0\sigma_\gamma \vee \sigma_0\sigma_\alpha\,]$, $u = [\,\lambda_1\lambda_2^{-1} \vee \lambda_1^{-1}\lambda_2\,]$;

$CF^{2,2,>,>}_{8,+1}$: *a)* $D > 0$, *в* (2.9) $\tilde\beta = 0$, $\nu = 0$, *b)* J^2_1, $L^{2,2,>,>}_{8,+1}$, *c)* $\sigma = \sigma_0\sigma_\alpha$;

$CF^{4,2,>,>}_{8,-1}$: *a)* $D > 0$, *в* (2.9) $\tilde\beta = 0$, $\nu \neq 0$, *b)* J^2_1, $L1^{4,2,>,>}_{23}$, $L^{4,2,>,>}_{8,-1}$ *с* $v = D(2\nu)^{-2}$, *c)* $\sigma = -\sigma_0\sigma_\alpha$, $u = (|2\nu| - D^{1/2})(|2\nu| + D^{1/2})^{-1}$;

$CF^{3,2,>,>}_{16}$: *a)* $D > 0$, *в* (2.9) $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma \neq 0$, $2\tilde\tau\nu = [\,\sigma_0 D^{1/2}|\tilde\beta| \vee -\sigma_0 D^{1/2}|\tilde\beta|\,]$, *b)* J^2_1, $[\,L1^{3,2,>,>}_{16} \vee L2^{3,2,>,>}_{16}\,]$, *c)* $\sigma = [\,\sigma_\alpha \mathrm{sign}\,\lambda_1 \vee \sigma_\gamma \mathrm{sign}\,\lambda_2\,]$, $u = -\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}$;

$CF^{4,2,>,>}_{14,-1}$: *a)* $D > 0$, *в* (2.9) $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma \neq 0$, $2\tilde\tau\nu \neq \pm D^{1/2}|\tilde\beta|$, $4\tilde v = [\,2\tilde u - 1 \vee \tilde u(2 - \tilde u)\,]$, *где* $\tilde u = \varphi_1\varphi_2^{-1}$, $\tilde v = -D\tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^2\varphi_2^{-2}$, *b)* J^2_1, $L2^{4,2,>,>}_{23}$, $[\,L1^{4,2,>,>}_{14,-1} \vee L2^{4,2,>,>}_{14,-1}\,]$, *c)* $\sigma = [\,\sigma_0\sigma_\alpha \vee \sigma_0\sigma_\alpha \mathrm{sign}(\tilde u(2 - \tilde u))\,]$, $u = [\,-(1 + 2\tilde u)^{-1} \vee -\tilde u(\tilde u + 2)^{-1}\,]$;

$CF^{4,2,>,>}_{23}$: *a)* $D > 0$, *в* (2.9) $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma \neq 0$, $2\tilde\tau\nu \neq \pm D^{1/2}|\tilde\beta|$, $4\tilde v \neq \tilde u(2 - \tilde u), (2\tilde u - 1)$, *где* $\tilde u = \varphi_1\varphi_2^{-1}$, $\tilde v = -D\tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^2\varphi_2^{-2}$, *b)* J^2_1, $L2^{4,2,>,>}_{23}$, *c)* $\sigma = \sigma_0\sigma_\alpha$, $u = \tilde u$, $v = \tilde v$;

$CF^{2,2,>,=}_4$: *a)* $D = 0$, $q_1, p_2 = 0$, *b)* $L^{2,2,>,=}_4$, *c)* $\sigma = 1$;

$CF^{3,2,>,=}_{10}$: ($2.1^>$) *при* $D = 0$, $[\,q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0,\ p_2 \neq 0\,]$, *в* $[\,(2.10_a) \vee (2.10_b)\,]$ $\tilde\gamma = 0$ *заменами* $[\,J^2_{2a} \vee J^2_{2b}\,]$, $L^{3,2,>,=}_{10}$ *сводится к* $CF^{3,2,>,=}_{10}$ *с* $\sigma = \sigma_\beta$;

$CF^{3,2,>,=}_{16}$: 1) *a)* $D = 0$, $[\,q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0,\ p_2 \neq 0\,]$, *в* $[\,(2.10_a) \vee (2.10_b)\,]$ $\tilde\gamma \neq 0$, $\varphi_3^+ = 0$, *b)* $[\,J^2_{2a} \vee J^2_{2b}\,]$, $L1^{3,2,>,=}_{16}$, *c)* $\sigma = -\sigma_\beta$;
2) *a)* $D = 0$, $[\,q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0,\ p_2 \neq 0\,]$, *в* $[\,(2.10_a) \vee (2.10_b)\,]$ $\tilde\gamma \neq 0$, $\varphi_3^- = 0$, *b)* $[\,J^2_{2a} \vee J^2_{2b}\,]$, $L2^{3,2,>,=}_{16}$, *c)* $\sigma = \sigma_\beta$;

$CF^{4,2,>,=}_{23}$: *a)* $D = 0$, $[\,q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0,\ p_2 \neq 0\,]$, *в* $[\,(2.10_a) \vee (2.10_b)\,]$ $\tilde\gamma \neq 0$, $\varphi_3^\pm \neq 0$, *b)* $[\,J^2_{2a} \vee J^2_{2b}\,]$, $L^{4,2,>,=}_{23}$, *c)* $\sigma = \sigma_\beta$, $u = \varphi_3^+(\varphi_3^-)^{-1}$, $v = -\tilde\gamma^2(\varphi_3^-)^{-2}$;

$CF^{2,2,>,<}_{8,-1}$: *a)* $D < 0$, $\nu = 0$, *в* (2.11) $\tilde\alpha + \tilde\gamma = 0$, *b)* J^2_3, $L^{2,2,>,<}_{8,-1}$, *c)* $\sigma = \sigma_\beta$;

$CF^{3,2,>,<}_{16}$: *a)* $D < 0$, $\nu \neq 0$, *в* (2.11) $[\,\varphi_4^+ = 0 \vee \varphi_4^- = 0\,]$, *b)* J^2_3, $[\,L1^{3,2,>,<}_{16} \vee L2^{3,2,>,<}_{16}\,]$, *c)* $\sigma = [\,-\sigma_\beta \vee \sigma_\beta\,]$;

$CF^{4,2,>,<}_{23}$: *a)* $D < 0$, *в* (2.11) $\nu^2 + (\tilde\alpha + \tilde\gamma)^2 \neq 0$, $\varphi_4^\pm \neq 0$, *b)* J^2_3, $L^{4,2,>,<}_{23}$, *c)* $\sigma = \sigma_\beta$, $u = \varphi_4^+(\varphi_4^-)^{-1}$, $v = -\mu^2(\tilde\alpha^2 + \tilde\eta^2)(\tilde\gamma^2 + \tilde\eta^2)\tilde\eta^{-2}(\varphi_4^-)^{-2}$.

Доказательство. В зависимости от знака дискриминанта D из (2.3) система ($2.1^>$) с $\beta^2 > \alpha\gamma$ одной из замен J^2_1, J^2_{2a} или J^2_{2b}, J^2_3 сведена соответственно к системе (2.9), (2.10), (2.11) с жордановой матрицей $\widetilde H$ и общим множителем $\widetilde P^2_0$. При этом $\tilde\tau, |\tilde\eta| > 0$ в силу (2.6).

Далее, в каждой из полученных систем делается произвольная замена (1.5), преобразующая ее в систему (2.12), из которой и будут выделяться канонические формы.

Следует иметь ввиду замечание 1.2 при сравнении замен из набора 2.3 и замен получаемых в ходе доказательства, когда в конце делается перенумерация. Она переставляет столбцы замены.

В системе (2.12) коэффициенты $\breve\alpha$, $\breve\gamma$ общего множителя $\breve P_0^2$ всегда можно сделать нулевыми, в результате чего $\breve A$ из (2.12) будет иметь элементы $\breve a_1, \breve a_2 = 0$ и $\breve d_1, \breve d_2 = 0$.

Для этого в замене (1.5) достаточно зафиксировать следующие две связи:

$$s_1 = -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}s_2, \quad r_2 = -\tilde\alpha\tilde\eta^{-1}r_1 \qquad (\,\tilde\tau = (\tilde\beta^2 - \tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}, \;\; \tilde\eta = \tilde\beta + \sigma_\beta\tilde\tau, \;\; \mathrm{sign}\,0 = 1), \quad (2.18)$$

при выполнении которых $\delta = r_1s_2 - r_2s_1 = 2\tilde\tau\tilde\eta^{-1}\sigma_\beta r_1s_2$, в системе (2.12) $\breve\beta = 2\tilde\tau^2\tilde\eta^{-1}\, r_1s_2$ и, если $\tilde\alpha\tilde\gamma = 0$, то $\tilde\tau = |\tilde\beta| \neq 0$, а если $\tilde\beta = 0$, то $\tilde\tau = \tilde\eta = (-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2} > 0$.

Однако, никакими заменами при условии (2.18) не получить $NSF^{4,2,>}_{8,-1}$, $NSF^{4,2,>}_{a,14,-1}$ из списка 2.3. Но эти формы предшествуют только $NSF^{4,2,>}_{23}$ и именно из нее будут получены согласно утв. 2.5,3) в п.п. 1_2^{1b} и 1_2^{2c} соответственно.

1) $D > 0$ $(\lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1 - \lambda_2 = \sigma_0\sqrt{D} \neq 0)$, (см. прил. [3, 3.5.1]). Из системы $(2.1^>)$ заменой J_1^2 получена система (2.9), которую любая замена (1.5) при условии (2.18) сводит к системе (2.12) вида

$$2\tilde\tau\,\sigma_\beta \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^{-2}\lambda_2)r_1s_2 & -\tilde\gamma\tilde\eta^{-1}(\lambda_1-\lambda_2)s_2^2 & 0 \\ 0 & \tilde\alpha\tilde\eta^{-1}(\lambda_1-\lambda_2)r_1^2 & (\lambda_2 - \tilde\alpha\tilde\gamma\tilde\eta^{-2}\lambda_1)r_1s_2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.19)$$

$1_1)$ $\tilde\alpha\tilde\gamma = 0$ $(\tilde\beta \neq 0,\ \tilde\tau = |\tilde\beta|,\ \tilde\eta = 2\tilde\beta)$.

$1_1^1)$ $\tilde\alpha, \tilde\gamma = 0$ $(r_1, s_2 = 0)$. Тогда (2.19) $= \begin{pmatrix} 0 & 2\tilde\beta\lambda_1r_1s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tilde\beta\lambda_2r_1s_2 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = 1$, $s_2 = (2\tilde\beta\lambda_2)^{-1}$ – это $CF_4^{2,2,>,>}$ с $\sigma = 1$, $u = \lambda_1\lambda_2^{-1} \neq 1$.

$1_1^2)$ $\tilde\alpha = 0$, $\tilde\gamma \neq 0$. Тогда система (2.19) $= \begin{pmatrix} 0 & 2\tilde\beta\lambda_1r_1s_2 & -\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)s_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tilde\beta\lambda_2r_1s_2 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = -|\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)|^{1/2}(2\tilde\beta\lambda_2)^{-1}\sigma_0\sigma_\gamma$, $s_2 = |\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)|^{-1/2}$ – это $CF_{10}^{3,2,>,>}$ с $\sigma = -\sigma_0\,\mathrm{sign}\,\tilde\gamma$, $u = \lambda_1\lambda_2^{-1} \neq 1$.

$1_1^3)$ $\tilde\gamma = 0$, $\tilde\alpha \neq 0$. Тогда система (2.19) $= \begin{pmatrix} 0 & 2\tilde\beta\lambda_1r_1s_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)r_1^2 & 2\tilde\beta\lambda_2r_1s_2 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = |\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{-1/2}$, $s_2 = |\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{1/2}(2\tilde\beta\lambda_1)^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha$ – это $CF_{a,10}^{3,2,>,>}$ с $u = \lambda_1^{-1}\lambda_2 \neq 1$, $\sigma = \sigma_0\sigma_\alpha$. Перенумерация (1.9) сведет ее к $CF_{10}^{3,2,>,>}$ с теми же σ, u.

$1_2)$ $\tilde\alpha \neq 0, \tilde\gamma \neq 0$ $(\tilde\tau \neq |\tilde\beta|)$. Тогда системе (2.19) $\breve c_1\breve b_2 \neq 0$.

$1_2^1)$ $\tilde\beta = 0$, тогда $\tilde\alpha\tilde\gamma < 0$ и $\tilde\eta, \tilde\tau = (-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}$. Поэтому система (2.19) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 2(-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}(\lambda_1+\lambda_2)r_1s_2 & -2\tilde\gamma(\lambda_1-\lambda_2)s_2^2 & 0 \\ 0 & 2\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)r_1^2 & 2(-\tilde\alpha\tilde\gamma)^{1/2}(\lambda_1+\lambda_2)r_1s_2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.20)$$

$1_2^{1a})$ $\lambda_2 = -\lambda_1 \Leftrightarrow q_2 = -p_1$. Тогда система (2.20) при $r_1 = |4\tilde\alpha\lambda_1|^{-1/2}$, $s_2 = |4\tilde\gamma\lambda_1|^{-1/2}$ – это $CF_{8,+1}^{2,2,>,>}$ с $\sigma = \mathrm{sign}(\tilde\alpha\lambda_1)$ $(= \sigma_\alpha\sigma_0 = \sigma_\alpha\mathrm{sign}\,p_1 = -\sigma_0\sigma_\gamma)$.

$1_2^{1b})$ $\lambda_2 \neq -\lambda_1$. Тогда (2.20) при $s_2 = -|\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{1/2}(-2\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-1/2}(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha$, $r_1 = |2\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2)|^{-1/2}$ – это $NSF_{23}^{4,2,>,>}$ с $\sigma = \mathrm{sign}(\tilde\alpha(\lambda_1-\lambda_2))$ $(= \sigma_0\sigma_\alpha)$, $u = 1$, $v = D(\lambda_1+\lambda_2)^{-2}$ $(v > 0\ , v \neq 1)$. По утв. 2.5,3) она – неканоническая и сводится к $CF_{8,-1}^{4,2,>,>}$.

$1_2^2)$ $\tilde\beta \neq 0$. Тогда $\breve b_1^2 + \breve c_2^2 \neq 0$.

1_2^{2a}) $\breve{c}_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\eta}^{-2}\lambda_1 \Leftrightarrow \tilde{\tau}(\lambda_1+\lambda_2) = |\tilde{\beta}|(\lambda_1-\lambda_2)$, так как $\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} = (\tilde{\beta}-\sigma_\beta\tilde{\tau})\tilde{\eta}$. Тогда (2.19) $= \begin{pmatrix} 0 & 8\tilde{\beta}\tilde{\tau}^2\tilde{\eta}^{-2}\lambda_1 r_1 s_2 & -4\tilde{\gamma}\tilde{\tau}^2\tilde{\eta}^{-2}\lambda_1 s_2^2 & 0 \\ 0 & 4\tilde{\alpha}\tilde{\tau}^2\tilde{\eta}^{-2}\lambda_1 r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = \tilde{\eta}(2\tilde{\tau})^{-1}|\tilde{\alpha}\lambda_1|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{\eta}\tilde{\alpha}(4\tilde{\beta}\tilde{\tau})^{-1}|\tilde{\alpha}\lambda_1|^{-1/2}$ – это $CF_{16}^{3,2,>,>}$ с $\sigma = \sigma_\alpha \operatorname{sign}\lambda_1$, $u = -\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}(2\tilde{\beta})^{-2} > -1/4$.

1_2^{2b}) $\breve{b}_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\eta}^{-2}\lambda_2 \Leftrightarrow \tilde{\tau}(\lambda_1+\lambda_2) = -|\tilde{\beta}|(\lambda_1-\lambda_2)$. Тогда система (2.19) $= 4\tilde{\tau}^2\tilde{\eta}^{-2}\lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{\gamma}s_2^2 & 0 \\ 0 & -\tilde{\alpha}r_1^2 & 2\tilde{\beta}r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = \tilde{\eta}\tilde{\gamma}(4\tilde{\beta}\tilde{\tau})^{-1}|\tilde{\gamma}\lambda_2|^{-1/2}$, $s_2 = \tilde{\eta}(2\tilde{\tau})^{-1}|\tilde{\gamma}\lambda_2|^{-1/2}$ получаем $CF_{a,16}^{3,2,>,>}$ с $\sigma = \sigma_\gamma \operatorname{sign}\lambda_2$, $u = -\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}(2\tilde{\beta})^{-2}$. И далее – перенумерация (1.9).

1_2^{2c}) $\breve{b}_1, \breve{c}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{\tau}(\lambda_1+\lambda_2) \pm |\tilde{\beta}|(\lambda_1-\lambda_2) \neq 0$. Тогда система (2.19) при $r_1 = |\tilde{\eta}|^{1/2}|\tilde{\alpha}(\lambda_1-\lambda_2)|^{-1/2}\tilde{\phi}$, $s_2 = |\tilde{\eta}|^{3/2}|\tilde{\alpha}(\lambda_1-\lambda_2)|^{1/2}\tilde{\phi}\varphi_2^{-1}\sigma_0\sigma_\alpha\sigma_\beta$ – это $NSF_{23}^{4,2,>,>}$ с $\sigma = \sigma_0\sigma_\alpha$, $u = \varphi_1\varphi_2^{-1}$ $(u \neq 1)$, $v = -\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\eta}^2(\lambda_1-\lambda_2)^2\varphi_2^{-2}$ $(v \neq u,\ 4v > -(1-u)^2)$.

Теперь при $v = (2u-1)/4$ или $v = u(2-u)/4$ полученная $NSF_{23}^{4,2,>,>}$ не является канонической, так как согласно утверждению 2.5,3) сводится к $CF_{14,-1}^{4,2,>,>}$.

А если $v \neq (2u-1)/4,\ u(2-u)/4$, то $NSF_{23}^{4,2,>,>} = CF_{23}^{4,2,>,>}$.

2) $D = 0$ $(\lambda_1, \lambda_2 = \nu = (p_1+q_2)/2 \neq 0)$, (см. прил. [3, 3.5.2]).

2_1) $q_1 \neq 0$ или $q_1 = 0$, $p_2 \neq 0$ $(q_2 = p_1 = \nu)$. Из $(2.1^>)$ заменой J_{2a}^2 или J_{2b}^2 получена система (2.10), которую любая замена (1.5) при условии (2.18) сводит к (2.12) вида

$$2\tilde{\tau}\begin{pmatrix} 0 & \varphi_3^+\tilde{\eta}^{-1}r_1 s_2 & -\tilde{\gamma}^2\tilde{\eta}^{-2}\sigma_\beta s_2^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta r_1^2 & \varphi_3^-\tilde{\eta}^{-1}r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\varphi_3^\pm = 2\tilde{\tau}\nu\,\sigma_\beta \pm \tilde{\gamma}). \tag{2.21}$$

2_1^1) $\tilde{\gamma} = 0$ $(\tilde{\tau} = |\tilde{\beta}|,\ \tilde{\eta} = 2\tilde{\beta})$. Тогда система (2.21) $= 2\tilde{\beta}\begin{pmatrix} 0 & \nu r_1 s_2 & 0 & 0 \\ 0 & r_1^2 & \nu r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = |2\tilde{\beta}|^{-1/2}$, $s_2 = \nu^{-1}r_1$ – это $CF_{a,10}^{3,2,>,=}$ с $\sigma = \sigma_\beta$, $u = 1$. И – перенумерация (1.9).

2_1^2) $\tilde{\gamma} \neq 0$. Тогда в системе (2.21) $\breve{b}_2\breve{c}_1 \neq 0$, $\breve{b}_1^2 + \breve{c}_2^2 \neq 0$.

2_1^{2a}) $\breve{b}_1 = 0 \Leftrightarrow \varphi_3^+ = 0$. Тогда система (2.21) $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\tilde{\tau}\tilde{\gamma}^2\tilde{\eta}^{-2}\sigma_\beta s_2^2 & 0 \\ 0 & 2\tilde{\tau}\,\sigma_\beta r_1^2 & -4\tilde{\tau}\tilde{\gamma}\tilde{\eta}^{-1}r_1 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = -\tilde{\phi}/2$, $s_2 = -\tilde{\phi}\tilde{\eta}\tilde{\gamma}^{-1}\sigma_\beta$ – это $CF_{a,16}^{3,2,>,=}$ с $\sigma = -\sigma_\beta$, $u = -1/4$. И – (1.9).

2_1^{2b}) $\breve{c}_2 = 0 \Leftrightarrow \varphi_3^- = 0$. Тогда система (2.21) $= \begin{pmatrix} 0 & 4\tilde{\tau}\tilde{\gamma}\tilde{\eta}^{-1}r_1 s_2 & -2\tilde{\tau}\tilde{\gamma}^2\tilde{\eta}^{-2}\sigma_\beta s_2^2 & 0 \\ 0 & 2\tilde{\tau}\,\sigma_\beta r_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При $r_1 = \tilde{\phi}$, $s_2 = \tilde{\phi}\tilde{\eta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\sigma_\beta$ – это $CF_{16}^{3,2,>,=}$ с $\sigma = \sigma_\beta$, $u = -1/4$.

2_1^{2c}) $\breve{b}_1\breve{c}_2 \neq 0 \Leftrightarrow \varphi_3^\pm \neq 0$.

При $r_1 = \tilde{\phi}$, $s_2 = \tilde{\phi}\tilde{\eta}(\varphi_3^-)^{-1}\sigma_\beta$ система (2.21) – это $CF_{23}^{4,2,>,=}$ с $\sigma = \sigma_\beta$, $u = \varphi_3^+(\varphi_3^-)^{-1}$, $v = -\tilde{\gamma}^2(\varphi_3^-)^{-2}$ $(u \neq \pm 1,\ 4v = -(1-u)^2)$, так как по утверждению 2.5 $NSF_{23}^{4,2,>,=}$ не может быть сведена к $NSF_{8,-1}^{4,2,>,=}$ или $NSF_{14,-1}^{4,2,>,=}$.

2_2) $q_1 = 0,\ p_2 = 0$, т. е. в самой системе $(2.1^>)$ H – диагональная матрица с диагональю (p_1, p_1). Тогда замена (1.5) с $r_1 = \tilde{\eta},\ s_1 = \tilde{\phi}^4\tilde{\gamma}(p_1\tilde{\eta})^{-1},\ r_2 = -\tilde{\alpha},\ s_2 = \tilde{\phi}^4 p_1^{-1}$ сводит $(2.1^>)$ к $CF_4^{2,2,>,=}$ с $\sigma = 1$ $(u = 1)$.

3) $D = (p_1-q_2)^2 + 4p_2q_1 < 0$ $(p_2q_1 < 0)$, (см. прил. [3, 3.5.3]). Из системы $(2.1^>)$ получена система (2.11), которую любая замена (1.5) при условии (2.18) сводит к системе

(2.12) вида

$$\frac{2\tilde\tau\sigma_\beta}{\tilde\eta^2}\cdot\begin{pmatrix}0 & \tilde\eta\varphi_4^+ r_1 s_2 & -(\tilde\gamma^2+\tilde\eta^2)\mu s_2^2 & 0\\ 0 & (\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)\mu r_1^2 & \tilde\eta\varphi_4^- r_1 s_2 & 0\end{pmatrix}\quad (\varphi_4^\pm = 2\tilde\tau\nu\sigma_\beta + (\tilde\alpha+\tilde\gamma)\mu). \tag{2.22}$$

3_1) $\nu = 0$ ($\Leftrightarrow p_1+q_2=0$), $\tilde\alpha+\tilde\gamma=0$. Тогда $\tilde\tau=(\tilde\alpha^2+\tilde\beta^2)^{1/2}$ и (2.22) имеет вид $\begin{pmatrix}0 & 0 & -4\tilde\tau^2\tilde\eta^{-1}\mu\, s_2^2 & 0\\ 0 & 4\tilde\tau^2\tilde\eta^{-1}\mu\, r_1^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1, s_2 = \tilde\phi^2|\tilde\eta|^{1/2}\mu^{-1/2}$ – это $CF^{2,2,>,<}_{8,-1}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde\beta$.

3_2) $\nu^2+(\tilde\alpha+\tilde\gamma)^2\neq 0$, тогда $\breve b_1^2+\breve c_2^2\neq 0$.

3_2^1) $\breve b_1 = 0 \Leftrightarrow \varphi_4^+=0$ $(\nu(\tilde\alpha+\tilde\gamma)\neq 0)$. Тогда система (2.22) имеет вид $\dfrac{2\tilde\tau\mu\sigma_\beta}{\tilde\eta^2}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & -(\tilde\gamma^2+\tilde\eta^2)s_2^2 & 0\\ 0 & (\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)r_1^2 & -2\tilde\eta(\tilde\alpha+\tilde\gamma)r_1 s_2 & 0\end{pmatrix}$. При $r_1=\tilde\phi(\tilde\gamma^2+\tilde\eta^2)^{1/2}(\tilde\alpha+\tilde\gamma)^{-1}(4\mu)^{-1/2}$, $s_2=\tilde\phi\tilde\eta((\tilde\gamma^2+\tilde\eta^2)\mu)^{-1/2}$ – это $CF^{3,2,>,<}_{a,16}$ с $\sigma=-\sigma_\beta$, $u=-(\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)(\tilde\gamma^2+\tilde\eta^2)(2\tilde\eta(\tilde\alpha+\tilde\gamma))^{-2}<-1/4$. И далее – перенумерация (1.9).

3_2^2) $\breve c_2 = 0 \Leftrightarrow \varphi_4^-=0$ $(\nu(\tilde\alpha+\tilde\gamma)\neq 0)$. Тогда система (2.22) имеет вид $\dfrac{2\tilde\tau\mu\sigma_\beta}{\tilde\eta^2}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\tilde\eta(\tilde\alpha+\tilde\gamma)r_1 s_2 & -(\tilde\gamma^2+\tilde\eta^2)s_2^2 & 0\\ 0 & (\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)r_1^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$. При $s_2=\tilde\phi(\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)^{1/2}(\tilde\alpha+\tilde\gamma)^{-1}(4\mu)^{-1/2}$, $r_1=\tilde\phi\tilde\eta((\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)\mu)^{-1/2}$ – это $CF^{3,2,>,<}_{16}$ с $\sigma=\sigma_\beta$ и u из 3_2^1).

3_2^3) $\breve b_1\breve c_2\neq 0 \Leftrightarrow \varphi_4^\pm\neq 0$.

При $r_1=\tilde\phi\tilde\eta((\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)\mu)^{-1/2}$, $s_2=\tilde\phi((\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)\mu)^{1/2}(\varphi_4^-)^{-1}$система (2.22) – это $CF^{4,2,>,<}_{23}$ с $\sigma=\sigma_\beta$, $u=\varphi_4^+(\varphi_4^-)^{-1}$, $v=-\mu^2(\tilde\alpha^2+\tilde\eta^2)(\tilde\gamma^2+\tilde\eta^2)\tilde\eta^{-2}(\varphi_4^-)^{-2}$ $(4v<-(1-u)^2)$, так как по утверждению 2.5 $NSF^{4,2,>,<}_{23}$ не может быть сведена к $NSF^{4,2,>,<}_{8,-1}$ или $NSF^{4,2,>,<}_{14,-1}$. $\square$

Приведем теперь линейные неособые замены, которые для CF из списка 2.3 позволят выделить канонические минимальные множества, введенные в определении 1.12.

Утверждение 2.6. *Только для следующих $CF^{m,2,>}$ из списка 2.3 удается ограничить значения параметров в $cs^{m,2,>}$, а именно:*

1) в $CF^{2,2,>}_4$ нормировка (1.8) с $r_1,-s_2=1$ изменяет знак σ; при $\tilde u=u$, $|\tilde u|>1$ замена с $r_1,s_2=0$, $s_1=1$, $r_2=\tilde u^{-1}$ дает $u=\tilde u^{-1}$;

2) в $CF^{2,2,>}_{8,-1}$ перенумерация (1.9), а в $CF^{4,2,>,>}_{14,-1}$ при $u=1$ замена с $-r_1,r_2,s_2=3^{-1/2}$, $s_1=2s_2$ изменяют знак σ;

3) в $CF^{4,2,>,>}_{8,-1}$ при $\tilde\sigma=\sigma$, $\tilde u=u$, $|\tilde u|>1$ замена с $r_1,s_2=0$, $s_1,r_2=|\tilde u|^{-1/2}$ дает $\sigma=-\tilde\sigma\operatorname{sign}\tilde u$, $u=\tilde u^{-1}$;

4) в $CF^{4,2,>,>}_{23}$ при $\tilde\sigma=\sigma$, $\tilde u=u$, $|\tilde u|>1$, $\tilde v=v$ замена с $r_1,s_2=0$, $s_1=|\tilde v|^{3/2}(\tilde u\tilde v)^{-1}$, $r_2=|\tilde v|^{-1/2}$ дает $\sigma=\tilde\sigma\operatorname{sign} v$, $u=\tilde u^{-1}$, $v=\tilde u^{-2}\tilde v$.

Следствие 2.5. *Согласно определению 1.13 имеем:*
$acs^{2,2,>,>}_4=\{|u|>1,\ \sigma=-1\}$, $acs^{2,2,>,=}_4=\{\sigma=-1\}$, $acs^{2,2,>,<}_{8,-1}=\{\sigma=-1\}$,
$acs^{4,2,>,>}_{8,-1}=\{|u|>1\}$, $acs^{4,2,>,>}_{14,-1}=\{\sigma=-1$ *при* $u=1\}$, $acs^{4,2,>,>}_{23}=\{|u|>1\}$;
у остальных канонических форм из списка 2.3 $mcs^{m,2,>,*}=cs^{m,2,>,*}$.

2.6. Построение $\mathbf{CF^{m,2}}$ при отрицательном дискриминанте $\mathbf{P_0^2}$.

2.6.1. Выделение $NSF^{m,2,<}$. Система (2.1) с отрицательным дискриминантом многочлена $P_0^2(x)$ имеет вид

$$\dot x = P_0^2(x)Hx,\quad \begin{matrix}P_0^2=x_1^2+2\beta x_1x_2+\gamma x_2^2,\\ D_0=\beta^2-\gamma<0\ \ (\alpha=1),\end{matrix}\quad H=\begin{pmatrix}p_1 & q_1\\ p_2 & q_2\end{pmatrix},\ \ \delta_{pq}=\det H\neq 0, \tag{2.1$^<$}$$

Выделим из списка 2.1 нормированные структурные формы до $NSF_2^{7,2}$ включительно, относящиеся к случаю $D_0<0$ (см. опр. 2.1), таких форм – 17.

Список 2.4. Семнадцать $NSF^{m,2,<,*}$ со своими $ps^{m,2,<}$ и D $(\sigma=\pm1,\ u,v,w\neq 0)$.

$I.$ $NSF_{8,+1}^{4,2,<,\geqslant}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&u&0\\0&1&0&+1\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}(u-1)^2,\\ tps_{8,+1}^{4,2,<};\end{matrix}$ $NSF_{34,+1}^{4,2,<,\gtreqless}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&u\\1&0&+1&0\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}4u,\\ tps_{34,+1}^{4,2,<};\end{matrix}$

$NSF_7^{5,2,<,\geqslant}=\sigma\begin{pmatrix}u&-u&u&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}(u-1)^2,\\ tps_7^{5,2,<};\end{matrix}$ $NSF_{22}^{5,2,<,*}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&-u&u\\1&0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}4u+1,\\ tps_{22}^{5,2,<};\end{matrix}$

$NSF_1^{6,2,<,\geqslant}=\sigma\begin{pmatrix}u&u&uv&0\\0&1&1&v\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}(u-1)^2,\\ ps_1^{6,2,<}=\{v>1/4\};\end{matrix}$

$NSF_3^{6,2,<,\geqslant}=\sigma\begin{pmatrix}u&u(1-v)&0&-uv^2\\0&1&1&v\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}(u-1)^2,\\ ps_3^{6,2,<}=\{v>1/4,\ v\neq 1\};\end{matrix}$

$NSF_{4,+1}^{6,2,<,\geqslant}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&u&v\\0&1&0&+1\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}(u-1)^2,\\ tps_{4,+1}^{6,2,<};\end{matrix}$

$NSF_6^{6,2,<,*}=\sigma\begin{pmatrix}u&u(v^{-2}-v)&0&uv^{-3}\\1&0&v^{-1}-v^2&1\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}(u-v)^2+4uv^{-2},\\ ps_6^{6,2,<}=\{v\in(0,\sqrt[3]{4}),\ v\neq 1\};\end{matrix}$

$NSF_7^{6,2,<,*}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&-v&u+v\\1&0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}(u+1)^2+4v,\\ ps_7^{6,2,<}=\{v\neq -u\};\end{matrix}$

$NSF_{11,+1}^{6,2,<,*}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&u&v\\1&0&+1&0\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}u^2+4v,\\ tps_{11,+1}^{6,2,<};\end{matrix}$

$NSF_2^{7,2,<,*}=\sigma\begin{pmatrix}u&w&uv^{-1}-v(uv+w)&u+wv^{-1}\\1&0&v^{-1}-v^2&1\end{pmatrix}$, $(u+v)^2+4w,$ $ps_2^{7,2,<}=\{v\in(0,\sqrt[3]{4}),\ v\neq 1,\ w\neq -uv,-u(v-v^{-2})\};$

$II.$ $NSF_5^{6,2,<,\geqslant}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&u(v-1)&-uv\\0&1&1&v\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}(u-1)^2,\\ ps_5^{6,2,<}=\{v>1/4,\ v\neq 1\};\end{matrix}$

$NSF_{12}^{6,2,<,*}=\sigma\begin{pmatrix}0&-uv&u&-uv^2\\1&0&v-v^{-2}&1\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}v^{-2}-4uv,\\ ps_{12}^{6,2,<}=\{v>4^{-1/3},\ v\neq 1\};\end{matrix}$

$NSF_{13}^{6,2,<,*}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&uv&uv^2(1+v)\\1&1&0&v(1+v)^2\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}(u+v+1)^2-4u,\\ ps_{13}^{6,2,<}=\{v\notin[-4/3,0]\};\end{matrix}$

$NSF_{15}^{6,2,<,*}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&uv&uv(v-1)\\1&1&0&-v(v-1)^2\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}(v-1)^2+4u,\\ ps_{15}^{6,2,<}=\{v\notin[0,4/3]\};\end{matrix}$

$NSF_{16}^{6,2,<,\gtreqless}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&u&uv\\1&1&v&0\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}4u,\\ ps_{16}^{6,2,<}=\{v>1/4\};\end{matrix}$

$NSF_1^{7,2,<,\geqslant}=\sigma\begin{pmatrix}u&w&uv-u+w&v(w-u)\\0&1&1&v\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}(u-1)^2,\\ ps_1^{7,2,<}=\{v>1/4,\ w\neq u,u(1-v)\}.\end{matrix}$

Замечание 2.4. 1. $NSF_{8,+1}^{4,2,<}=CF_{8,+1}^{4,2,<}$, поскольку предшествующие формы с $D_0<0$ отсутствуют, и канонические множества имеют вид $cs_{8,+1}^{4,2,<,>}=\{u\neq 1\}$, $cs_{8,+1}^{4,2,<,=}=\{u=1\}$.

2. В списке 2.4 только у $CF_{8,+1}^{4,2,<}$ и $CF_1^{6,2,<}$ матрица H диагональна (см. сп. 2.1).

3. Будет показано, что все NSF из списка 2.4_I – канонические, а из 2.4_{II} – нет.

2.6.2. Случай $D\geq 0$. Итак, будем предполагать сначала, что в системе $(2.1^<)$ матрица H имеет вещественные собственные числа λ_1,λ_2.

Набор 2.4. Константы и замены, используемые далее в разделе 2.6.2:

$\psi_1(u)=(u^2-3u+3)^{1/2}(u-3)^{-1}$, $\psi_2(u)=(3u^2-3u+1)(3u-1)^{-2}$,

$\psi_3(u)=(u^2+3u+3)(3u^2+3u+1)(3u^2+8u+3)^{-2}$; $\psi_4=\tilde v(\tilde v-(\tilde v^2-1)^{1/2})/2$;
$L^{4,2,<,>}_{8,+1}=\{r_1=(\tilde\alpha|\lambda_2|)^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=(\tilde\gamma|\lambda_2|)^{-1/2}\}$;
$L^{4,2,<,>}_{34,+1}=\{r_1=-v^{1/2}r_2,\ s_1=(v(4v-1))^{1/4}(2v^{1/2}+1)^{-1},\ r_2=(v(4v-1))^{-1/4},\ s_2=v^{-1/2}s_1\}$;
$L1^{5,2,<,>}_7=\{r_1=(\tilde u^2-3\tilde u+3)^{1/2}(1-\tilde u)^{-1},\ s_1=0,\ r_2=(1-\tilde u)^{-1}s_2,\ s_2=\psi_1^{-1}(\tilde u)\}$;
$L2^{5,2,<,>}_7=\{r_1=\tilde u^{1/3}|\tilde u|^{1/6}(\tilde u-1)^{-1},\ s_1=|\tilde u|^{-1/2},\ r_2=(3\tilde u-1)\tilde u^{-1}r_1,\ s_2=0\}$;
$L^{5,2,<,>}_{22}=\{r_1=-(\tilde u^2+3\tilde u+3)^{1/2}(\tilde u-1)^{-1}|\tilde u+1|^{-1/2},\ s_1=\tilde u(\tilde u+1)^{-1}r_1,$
$r_2=-(3\tilde u^2+8\tilde u+3)(\tilde u^2+3\tilde u+3)^{-1}r_1,\ s_2=(\tilde u+1)^{-1}r_2\}$;
$L^{6,2,<,>}_1=\{r_1=(\tilde\alpha|\lambda_2|)^{-1/2},\ s_1,r_2=0,\ s_2=\tilde\alpha(2\tilde\beta)^{-1}r_1\}$;
$L^{4,2,<,=}_{8,+1}=\{r_1=-\beta r_2,\ s_1=|p_1|^{-1/2},\ r_2=|p_1|^{-1/2}(\gamma-\beta^2)^{-1/2},\ s_2=0\}$;
$L^{5,2,<,=}_7=\{r_1=1/2,\ s_1=-1,\ r_2=\mp\sqrt3/2,\ s_2=0\}$;
$L^{5,2,<,=}_{22}=\{r_1=\pm\sqrt{14}/7,\ s_1=\mp5\sqrt{14}/28,\ r_2=\sqrt{42}/14,\ s_2=\sqrt{42}/28\}$;
$L^{6,2,<,=}_3=\{r_1=1,\ s_1=1/2,\ r_2=0,\ s_2=-(\tilde v+(\tilde v^2-1)^{1/2})/2\}$;
$L^{6,2,<,=}_{4,+1}=\{r_1=0,\ s_1=\tilde\gamma^{1/2}|\nu|^{-1/2}\tilde\varsigma^{-1},\ r_2=|\tilde\gamma\nu|^{-1/2},\ s_2=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}s_1\}$.

Из системы $(2.1^<)$ с $\gamma-\beta^2>0$:
1) при $D>0$ $(\lambda_1,\lambda_2\neq0,\ \lambda_1-\lambda_2=\sigma_0\sqrt D\neq0)$ заменой J_1^2 из набора 2.1 получена система (2.9), в которой согласно (2.5) и (2.6) $\tilde\alpha,\tilde\gamma>0$ и $\tilde\varsigma=(\tilde\alpha\tilde\gamma-\tilde\beta^2)^{1/2}>0$;
2) при $D=0$ $(\lambda_1,\lambda_2=\nu=(p_1+q_2)/2\neq0)$ и $[q_1\neq0\vee q_1=0,\,p_2\neq0]$ заменой $[J^2_{2a}\vee J^2_{2b}]$ из набора 2.1 получена система (2.10) с $\tilde\alpha,\tilde\gamma,\tilde\varsigma>0$.
Наконец, система $(2.1^<)$ с $\gamma-\beta^2>0$ при $D=0$ и $q_1,p_2=0$ сразу имеет вид (2.9), но с $\lambda_1,\lambda_2=\nu$, так как в этом случае H диагональна и в ней $p_1,q_2=\nu\neq0$.

Лемма 2.1.
1) (2.9) при: 1_1) $\tilde\beta=0$ *заменой* $L^{4,2,<,>}_{8,+1}$ *сводится к* $CF^{4,2,<,>}_{8,+1}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_2,\ u=\lambda_1\lambda_2^{-1}$;
1_2) $\tilde\beta\neq0$ *заменой* $L^{6,2,<,>}_1$ *сводится к* $NSF^{6,2,<,>}_1$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\lambda_2,\ u=\lambda_1\lambda_2^{-1},\ v=\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}$;
2_1) *(2.10) заменой* $L^{6,2,<,=}_{4,+1}$ *сводится к* $NSF^{6,2,<,=}_{4,+1}$ $(u=1)$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\nu,\ v=\tilde\gamma(\nu\tilde\varsigma)^{-1}$;
2_2) $(2.1^<)$ *при* $D,q_1,p_2=0$ *заменой* $L^{4,2,<,=}_{8,+1}$ *сводится к* $CF^{4,2,<,=}_{8,+1}$ $(u=1)$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}p_1$.

Следствие 2.6. *Все шесть* $NSF^{m,2,<}$ *из списка* 2.4_{II} *при* $D>0$ *и* $D=0$ *канонические структурными формами не являются.*

Утверждение 2.7. *Только следующие* $NSF^{m,2,<}$ *из списка* 2.4_I *с указанными значениями параметров сводятся к предшествующим согласно СП структурным формам (см. прил. [3, 3.6.1, 3.6.2, 3.6.3]):*

1) $NSF^{4,2,<,>}_{34,+1}$ *с* $ps^{4,2,<,>}_{34,+1}=\{u>0\}$ *при* $u=1$ *заменой* (1.5) *с* $s_1=s_2,\ r_2=-r_1$ *сводится к* $SF^{4,2}_8$;

2) $NSF^{5,2,<,>}_7$ *с* $ps^{5,2,<,>}_7=\{u\neq1\}$:
a) при $u=3$ *заменой с* $r_1=0,\ s_1=2s_2$ *сводится к* $SF^{4,2}_8$;
b) при $u=-1$ *заменой с* $s_1=s_2(1+\sqrt7)/3,\ r_2=-r_1(1+\sqrt7)/2$ *сводится к* $SF^{4,2}_{34}$;

3) $NSF^{5,2,<,>}_{22}$ *с* $ps^{5,2,<,>}_{22}=\{u>-1/4\}$:
a) при $u=3/2$ *заменой с* $r_1=-r_2(\sqrt7+1)/2,\ s_1=s_2(\sqrt7-1)/2$ *сводится к* $SF^{4,2}_8$;
b) при $u=[\,6\vee4\mp\sqrt{13}\,]$ *заменой с* $r_1=[\,4r_2/3\vee(-1\pm\sqrt{13})r_2/6\,],\ s_2=[\,-3s_1\vee(-1\mp\sqrt{13})s_1/6\,]$ *сводится к* $SF^{5,2}_7$;

4) $NSF^{6,2,<,>}_1(\tilde\sigma,\tilde u,v)$ *с* $ps^{6,2,<,>}_1=\{\tilde u\neq1,\ v>1/4\}$:
a) при $\tilde u=-1$ *заменой* $L^{4,2,<,>}_{34,+1}$ *сводится к* $NSF^{4,2,<,>}_{34,+1}$ *с* $\sigma=\tilde\sigma,\ u=(2v^{1/2}-1)(2v^{1/2}+1)^{-1}$;
b) при $\tilde u\neq-1,[3\vee1/3],\ v=[\psi_1^2(\tilde u)\vee\psi_2(\tilde u)]$ *заменой* $[L1^{5,2,<,>}_7\vee L2^{5,2,<,>}_7]$ *сводится к* $NSF^{5,2,<,>}_7$ *с* $\sigma=[\tilde\sigma\vee\tilde\sigma\operatorname{sign}\tilde u],\ u=[\tilde u\vee\tilde u^{-1}]$;
c) при $\tilde u\neq-1,\ v=\psi_3(\tilde u)$ *заменой* $L^{5,2,<,>}_{22}$ *сводится к* $NSF^{5,2,<,>}_{22}$ *с* $\sigma=\tilde\sigma\operatorname{sign}(\tilde u+1)$, $u=-\tilde u(\tilde u+1)^{-2}$;

5) $NSF_3^{6,2,<,=}$ *с* $ps_3^{6,2,<,=} = \{u=1,\ v>1/4,\ v\neq 1\}$:
a) при $v=1/3$ *заменой с* $r_2=-3r_1,\ s_2=0$ *сводится к* $NSF_7^{5,2,<,=}$;
b) при $v=(49\mp7\sqrt{46})/6$ *заменой с* $r_1=r_2(11\mp2\sqrt{46})/6,\ s_1=s_2(-38\pm5\sqrt{46})/6$ *сводится к* $NSF_{22}^{5,2,<,=}$;

6) $NSF_{4,+1}^{6,2,<,=}(\tilde\sigma,1,\tilde v)$ *с* $ps_{4,+1}^{6,2,<,=}=\{u=1\}$:
a) при $v=\pm2/\sqrt3$ *заменой* $L_7^{5,2,<,=}$ *сводится к* $CF_7^{5,2,<,=}$ $(u=1)$ *с* $\sigma=\tilde\sigma$;
b) при $v=\mp7/\sqrt3$ *заменой* $L_{22}^{5,2,<,=}$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,=}$ $(u=-1/4)$ *с* $\sigma=\tilde\sigma$;
c) при $|\tilde v|\geq1$ *заменой* $L_3^{6,2,<,=}$ *сводится к* $NSF_3^{6,2,<,=}$ $(u=1)$ *с* $\sigma=\tilde\sigma,\ v=\psi_4(\tilde v)$.

Полученные результаты позволяют в случае $l=2,\ D_0<0,\ D\geq0$ выписать все канонические формы со своими каноническими множествами.

Список 2.5. Пять $CF_i^{m,2,<,>}$, пять $CF_i^{m,2,<,=}$ и их $cs^{m,2,<,\geqslant}$ $(\sigma=\pm1,\ u,v\neq0)$.

$$CF_{8,+1}^{4,2,<,\geqslant}=\sigma\begin{pmatrix}u&0&u&0\\0&1&0&+1\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}cs_{8,+1}^{4,2,<,>}=\{u\neq1\},\\ cs_{8,+1}^{4,2,<,=}=\{u=1\};\end{matrix}$$

$$CF_{34,+1}^{4,2,<,>}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&u\\1&0&+1&0\end{pmatrix},\quad cs_{34,+1}^{4,2,<,>}=\{u>0,\ u\neq1\};$$

$$CF_7^{5,2,<,\geqslant}=\sigma\begin{pmatrix}u&-u&u&0\\1&0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}cs_7^{5,2,<,>}=\{u\neq\pm1,3\},\\ cs_7^{5,2,<,=}=\{u=1\};\end{matrix}$$

$$CF_{22}^{5,2,<,\geqslant}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&-u&u\\1&0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}cs_{22}^{5,2,<,>}=\{u>-1/4,\ u\neq3/2,6,4\pm\sqrt{13}\},\\ cs_{22}^{5,2,<,=}=\{u=-1/4\};\end{matrix}$$

$$CF_1^{6,2,<,>}=\sigma\begin{pmatrix}u&u&uv&0\\0&1&1&v\end{pmatrix},\quad cs_1^{6,2,<,>}=\{u\neq\pm1,\ v>1/4,\ v\neq\psi_1^2(u),\psi_2(u),\psi_3(u)\};$$

$$CF_3^{6,2,<,=}=\sigma\begin{pmatrix}u&u(1-v)&0&-uv^2\\0&1&1&v\end{pmatrix},\quad cs_3^{6,2,<,=}=\{u=1,\ v>1/4,\ v\neq1/3,1,(49\mp7\sqrt{46})/6\};$$

$$CF_{4,+1}^{6,2,<,=}=\sigma\begin{pmatrix}u&v&u&v\\0&1&0&+1\end{pmatrix},\quad cs_{4,+1}^{6,2,<,=}=\{u=1,\ |v|<1\}.$$

Теорема 2.4. *Любая система* (1.4) *с* $l=2$, *записанная в виде* $(2.1^<)$ *согласно* (2.2) *и имеющая* $D\geq0$, *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей канонической формы из списка 2.5. Ниже для каждой* $CF_i^{m,2,<,>}$ *и* $CF_i^{m,2,<,=}$ *приведены: a) условия на коэффициенты системы* $(2.1^<)$, *b) замены* (1.5), *преобразующие правую часть системы* $(2.1^<)$ *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения множителя* σ *и параметров из* $cs_i^{m,2,<,>}$ *или* $cs_i^{m,2,<,=}$:

$CF_{8,+1}^{4,2,<,>}$: *a)* $D>0$, *в* (2.9)$\tilde\beta=0$; *b)* $J_1^2,\ L_{8,+1}^{4,2,<,>}$; *c)* $\sigma=\text{sign}\lambda_2,\ u=\lambda_1\lambda_2^{-1}$;

$CF_{34,+1}^{4,2,<,>}$: *a)* $D>0$, *в* (2.9) $\tilde\beta\neq0,\ \nu=0$; *b)* $J_1^2,\ L_1^{6,2,<,>},\ L_{34,+1}^{4,2,<,>}$ *с* $v=\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}$; *c)* $\sigma=\text{sign}\lambda_2,\ u=(\tilde\alpha\tilde\gamma-|\tilde\beta|)(\tilde\alpha\tilde\gamma+|\tilde\beta|)^{-1}$;

$CF_7^{5,2,<,>}$: *a)* $D>0$, *в* (2.9) $\tilde\beta\neq0,\ \tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}=[\,\psi_1^2(\tilde u)\vee\psi_2(\tilde u)\,]$, *где* $\tilde u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq-1,[3\vee1/3]$; *b)* $J_1^2,\ L_1^{6,2,<,>},\ [\,L1_7^{5,2,<,>}\vee L2_7^{5,2,<,>}\,]$; *c)* $\sigma=[\,\text{sign}\lambda_2\vee\text{sign}\lambda_1\,],\ u=[\,\tilde u\vee\tilde u^{-1}\,]$;

$CF_{22}^{5,2,<,>}$: *a)* $D>0$, *в* (2.9) $\tilde\beta\neq0,\ \tilde u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq-1,(-5\pm\sqrt{13})/6,(-5\mp\sqrt{13})/2,(-4\pm\sqrt7)/3,-3/2,-2/3,\ \tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}=\psi_3(\tilde u)$; *b)* $J_1^2,L_1^{6,2,<,>},L_{22}^{5,2,<,>}$; *c)* $\sigma=\text{sign}\,\nu,u=-\delta_{pq}(2\nu)^{-2}$;

$CF_1^{6,2,<,>}$: *a)* $D>0$, *в* (2.9) $\tilde\beta\neq0,\ \tilde u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq-1,\ \tilde v=\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}\neq\psi_1^2(\tilde u),\psi_2(\tilde u),\psi_3(\tilde u)$; *b)* $J_1^2,\ L_1^{6,2,<,>}$; *c)* $\sigma=\text{sign}\lambda_2,\ u=\tilde u,\ v=\tilde v$;

$CF_{8,+1}^{4,2,<,=}$: *a)* $D=0,\ q_1=0,\ p_2=0$; *b)* $L_{8,+1}^{4,2,<,=}$; *c)* $\sigma=\text{sign}\,p_1$;

$CF_7^{5,2,<,=}$: *a)* $D=0,\ [q_1\neq0\vee q_1=0,p_2\neq0],\ \tilde\gamma(\nu\varsigma)^{-1}=\pm2/\sqrt3$, *где* $\tilde\alpha,\ \tilde\beta,\ \tilde\gamma$ –

из $[(2.10_a) \vee (2.10_b)]$; *b)* $[J^2_{2a} \vee J^2_{2b}]$, $L^{6,2,<,=}_{4,+1}$, $L^{5,2,<,=}_{7}$; *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\nu$;

$CF^{5,2,<,=}_{22}$: *a)* $D = 0$, $[q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0,\, p_2 \neq 0]$, $\tilde\gamma(\nu\varsigma)^{-1} = \pm 7/\sqrt{3}$, *где* $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$, $\tilde\gamma$ – *из* $[(2.10_a) \vee (2.10_b)]$; *b)* $[J^2_{2a} \vee J^2_{2b}]$, $L^{6,2,<,=}_{4,+1}$, $L^{5,2,<,=}_{22}$; *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\nu$;

$CF^{6,2,<,=}_{3}$: *a)* $D = 0$, $[q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0,\, p_2 \neq 0]$, $|\tilde v| \geq 1$, $|\tilde v| \neq 2/\sqrt{3},\, 7/\sqrt{3}$, *где* $\tilde v = \tilde\gamma(\nu\varsigma)^{-1}$, $\tilde\alpha, \tilde\beta, \tilde\gamma$ – *из* $[(2.10_a) \vee (2.10_b)]$; *b)* $[J^2_{2a} \vee J^2_{2b}]$, $L^{6,2,<,=}_{4,+1}$, $L^{6,2,<,=}_{3}$; *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $v = \psi_4$;

$CF^{6,2,<,=}_{4,+1}$: *a)* $D = 0$, $[q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0,\, p_2 \neq 0]$, $|\tilde v| < 1$, *где* $\tilde v = \tilde\gamma(\nu\varsigma)^{-1}$, $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$, $\tilde\gamma$ – *из* $[(2.10_a) \vee (2.10_b)]$; *b)* $[J^2_{2a} \vee J^2_{2b}]$, $L^{6,2,<,=}_{4,+1}$; *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $v = \tilde v$.

Доказательство. I. $D > 0$ (см. прил. [3, 3.6.2]). По лемме 2.1, 1_2) при $\tilde\beta \neq 0$ система (2.9), полученная из $(2.1^<)$ заменой J^2_1, всегда сводится к $NSF^{6,2,<,>}_1(\tilde\sigma, \tilde u, \tilde v)$ с $\tilde\sigma = \operatorname{sign}\lambda_2$, $\tilde u = \lambda_1\lambda_2^{-1}$, $v = \tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2} > 1/4$. А эта $NSF^{6,2,<,>}_1$ согласно утверждению 2.7, 4) может быть сведена к одной из трех предшествующих $NSF^{m,2,<,>}$ из списка 2.5.

Остается уточнить ограничения, гарантирующие сведение к $CF^{m,2,<,>}$.

4_a) При $\tilde u = -1 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\lambda_1 \Leftrightarrow \nu = 0$ получена $CF^{4,2,<,>}_{34,+1}$ с $\sigma = \tilde\sigma$, $u = (2v^{1/2} - 1)(2v^{1/2} + 1)^{-1} = (\tilde\alpha\tilde\gamma - |\tilde\beta|)(\tilde\alpha\tilde\gamma + |\tilde\beta|)^{-1}$. При этом $0 < u < 1$, и ограничений нет, так как $NSF^{4,2,<,>}_{34,+1}$ согласно утверждению 2.7,1) сводится к $SF^{4,2}_8$ только при $u = 1$.

4_b) При $\tilde u \neq -1, [3 \vee 1/3]$, $v = [\,\psi^2_1(\tilde u) \vee \psi_2(\tilde u)\,]$ получена $CF^{5,2,<,>}_7$ с $\sigma = [\tilde\sigma \vee \tilde\sigma \operatorname{sign}\tilde u]$ ($\tilde\sigma \operatorname{sign}\tilde u = \operatorname{sign}\lambda_1$), $u = [\tilde u \vee \tilde u^{-1}]$. При этом $u \neq -1, 3$, и ограничений нет, так как $NSF^{5,2,<,>}_7$ согласно 2.7,2) сводится к предшествующим формам только при $u = -1, 3$.

4_c) При $\tilde u \neq -1 \Leftrightarrow \nu \neq 0$, $v = \psi_3(\tilde u)$ получена $NSF^{5,2,<,>}_{22}$ с $\sigma = \tilde\sigma \operatorname{sign}(\tilde u + 1) = \operatorname{sign}\nu$, $u = -\tilde u(\tilde u + 1)^{-2} = -\delta_{pq}(2\nu)^{-2}$. Кроме того $\tilde u \neq (-4 \pm \sqrt{7})/3$, иначе $u = 3/2$, $\tilde u \neq -3/2$, $-2/3$, иначе $u = 6$, $\tilde u \neq (-5 \pm \sqrt{13})/6$, $(-5 \mp \sqrt{13})/2$, иначе $u = 4 \mp \sqrt{13}$, так как $NSF^{5,2,<,>}_{22}$ согласно утверждению 2.7,3) сводится к предшествующим формам при таких u.

II. $D = 0$ (см. прил. [3, 3.6.3]). По лемме 2.1, 2_1) при $[\,q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0,\, p_2 \neq 0]$ система (2.10), полученная из $(2.1^<)$ заменой $[J^2_{2a} \vee J^2_{2b}]$, всегда сводится к $NSF^{6,2,<,=}_{4,+1}(\tilde\sigma, 1, \tilde v)$ с $\tilde\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $\tilde v = \tilde\gamma(\nu\varsigma)^{-1}$. А эта $NSF^{6,2,<,=}_{4,+1}$ согласно утв. 2.7,6) может быть сведена к одной из трех предшествующих ей $CF^{m,2,<,=}$ из списка 2.5.

В частности, в 6_c) при $|\tilde v| \geq 1$ и, дополнительно, $|\tilde v| \neq 2/\sqrt{3}, 7/\sqrt{3}$ получена $CF^{6,2,<,=}_3$ с $\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $v = \psi_4(\tilde v)$, так как $\tilde v = -2/\sqrt{3} \Leftrightarrow v = 1$ и $v = 1/3$ при $\tilde v = 2/\sqrt{3}$, $v = (49 \pm 7\sqrt{46})/6$ при $\tilde v = \mp 7/\sqrt{3}$, а $NSF^{6,2,<,=}_3$ согласно утверждению 2.7,5) сводится к предшествующим формам только при таких значениях v.
Остальные результаты теоремы в достаточной степени очевидны. □

2.6.3. Случай $D < 0$. Будем предполагать теперь, что в системе $(2.1^<)$ матрица H имеет комплексно сопряженные собственные числа λ_1, λ_2.

Набор 2.5. Константы, интервалы и замены, используемые далее в разделе 2.6.3:
$\psi_5 = 4\hat v^6(\hat u - 1)^2 + 4\hat v^3(2\hat u + 1) + 1$, $\psi_6 = \hat v^3(1 - \hat u) - 1 + \psi_5^{1/2}$; $\psi^{\pm}_7 = (v^3 - 2 \pm 2(1 - v^3)^{1/2})v^{-2}$;
$\psi_8 = \tilde\gamma\nu + \tilde\beta\mu$, $\psi_9 = \tilde\gamma^2\nu^2 + 2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu + (9\tilde\alpha\tilde\gamma - 8\tilde\beta^2)\mu^2$, $\psi_{10} = 2\tilde\gamma\nu - \tilde\beta\mu$,
$\psi_{11} = \tilde\gamma^3\nu^3 + 3\tilde\gamma(\tilde\gamma^2 + 2\tilde\alpha\tilde\gamma - 2\tilde\beta^2)\nu\mu^2 + \tilde\beta(4\tilde\beta^2 - 3\tilde\alpha\tilde\gamma + 3\tilde\gamma^2)\mu^3$, $\underline{\theta_1} \in \mathbb{R}^1$ – нуль $\psi_{11}(\nu, 1)$,
$\psi_{12} = \tilde\gamma^2\nu^2 - 4\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu + (4\tilde\beta^2 + 9\tilde\gamma^2)\mu^2$, $\psi_{13} = \tilde\gamma^2\nu^2 + 2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu - (3\tilde\alpha\tilde\gamma - 4\tilde\beta^2)\mu^2$, $\psi^{\pm}_{14} = -\tilde\beta \pm \sqrt{3}\varsigma$,
$\psi^{\pm}_{15} = 2\varsigma \pm \sqrt{3}\tilde\beta$, $\psi_{16} = 4\tilde\alpha\tilde\gamma - 3\tilde\beta^2$, $\psi_{17} = \tilde v^2 - 3\tilde v + 9$, $\psi_{18} = 4\tilde v^2 - 3\tilde v + 9 + (4\tilde v + 3)\psi_{17}^{1/2}$,
$\psi_{19} = -(\tilde v^6 + 6\tilde v^{9/2} + 13\tilde v^3 + 12\tilde v^{3/2} + 4)(\tilde v^6 - 5\tilde v^3 + 4)^{-1}$, $\psi^{\mp}_{20} = \tilde u(3\tilde u \mp \sqrt{3})(2 \mp \sqrt{3}\tilde u)^{-1}$,
$\psi_{21} = (\tilde v - 3 + (\tilde v^2 - 3\tilde v + 9)^{1/2})^2(3\tilde v)^{-1}$; $\psi_{22} = \tilde v^2\tilde w^2 - 5\tilde v^4\tilde w + 2\tilde v\tilde w + 4\tilde v^6 + 4\tilde v^3 + 1$,
$\psi_{23} = 2\tilde v\tilde w - 5\tilde v^3 + 2 + 2\psi_{22}^{1/2}$, $\psi_{24} = \tilde v^3 - \tilde u\tilde v^2 + \tilde u^2\tilde v - 3$, $\underline{\theta_2(u)} > 0$ – нуль $\psi_{24}(u, \theta)$,
$\psi^{\pm}_{25} = (\tilde v^2 \pm (12\tilde v - 3\tilde v^4)^{1/2})(2\tilde v)^{-1}$, $\psi_{26} = 2\tilde v^3 + \tilde u\tilde v^2 - \tilde u^2\tilde v - 9$, $\underline{\theta_3(u)} \in \mathbb{R}^1 - \forall$ нуль $\psi_{26}(u, \theta)$,
$\psi_{27} = 4\tilde v^2\tilde w^2 - 4\tilde v\tilde w(2\tilde v^3 - 3\tilde u\tilde v^2 - 2) + (\tilde v^3 - 3\tilde u\tilde v^2 + 2)^2$, $\psi_{28} = 2\tilde v\tilde w - 2\tilde v^3 + 3\tilde u\tilde v^2 + 2 - \psi_{27}^{1/2}$,

$\psi_{29} = \tilde u\tilde v^2 - \tilde u^2\tilde v - 1$, $\psi_{30} = \theta_3^2(\tilde u)(2\tilde u - \theta_3(\tilde u))^2\psi_{29}^{-1}(\tilde u, \theta_3(\tilde u))(8\theta_3^3(\tilde u) - 5\psi_{29}(\tilde u, \theta_3(\tilde u)) - 32)^{-1}$,
$\psi_{31} = -\psi_{29}(\tilde u, \theta_3(\tilde u))(3\tilde w + 4\tilde u^2 + 2\theta_3(\tilde u)\tilde u - 2\theta_3^2(\tilde u))(\theta_3(\tilde u)(2\tilde u - \theta_3(\tilde u))\tilde w)^{-1}$,
$\psi_{32} = 3(\tilde u^3 - 3\tilde u^2 + 6\tilde u + 1)(\tilde u^2 - \tilde u + 1)((\tilde u - 2)(2\tilde u - 1)(\tilde u + 1))^{-1}$,
$\psi_{33} = 3(\tilde u\tilde v^6 - 2\tilde u^2\tilde v^5 + (4\tilde u^3 - 1)\tilde v^4 - \tilde u(4\tilde u^3 + 1)\tilde v^3 + \tilde u^2(\tilde u^3 - 6)\tilde v^2 + (6\tilde u^3 + 2)\tilde v + 5\tilde u)(\tilde v(2\tilde u - \tilde v)\psi_{24})^{-1}$,
$\psi_{34} = (\tilde v^4 - \tilde u\tilde v^3 + 3\tilde u^2\tilde v^2 - \tilde u^3\tilde v - 2\tilde v - 5\tilde u)\psi_{29}^{-1}$,
$\psi_{35} = (2\tilde u - \theta_2(\tilde u))(3\theta_2(\tilde u)\tilde u^3 - 3\theta_2^2(\tilde u)\tilde u^2 + \theta_2^3(\tilde u)\tilde u - \tilde u + \theta_2^4(\tilde u) - 4\theta_2(\tilde u))$,
$\psi_{36} = -(3\psi_{26}(\tilde u, \theta_3(\tilde u))\tilde w + 2(2\tilde u - \theta_3(\tilde u))(3\theta_3(\tilde u)\tilde u^3 - 6\theta_3^2(\tilde u)\tilde u^2 + 5(\theta_3^3(\tilde u) - 1)\tilde u + 2\theta_3^4(\tilde u) - 11\theta_3(\tilde u)))((8\theta_3^3(\tilde u) - 5\psi_{29}(\tilde u, \theta_3(\tilde u)) - 32)\tilde w)^{-1}$;

$\hat a_1^* = ((\hat u^2\hat v^6 - 2\hat v^3(\hat v^3 - 1)\hat u + \hat v^6 + 10\hat v^3 - 2)\psi_5^{1/2} + 2\hat u^3\hat v^9 - 6\hat v^6(\hat v^3 - 1)\hat u^2 + 6\hat v^3(\hat v^3 - 1)^2\hat u - 2(\hat v^3 - 1)^3)(9\hat v^3\psi_6)^{-1}$, $\hat b_1^* = ((\hat v^3\hat u^2 - (10\hat v^3 - 4)\hat u + 9\hat v^3)\psi_5^{1/2} + 2\hat v^6\hat u^3 + \hat v^3(14\hat v^3 + 1)\hat u^2 - 2(\hat v^3 - 1)(17\hat v^3 - 2)\hat u + 9\hat v^3(2\hat v^3 + 1))(6\psi_6)^{-1}$, $\hat a_2^* = -((4\hat v^9\hat u^3 - 3\hat v^6(4\hat v^3 - 3)\hat u^2 + 6\hat v^6(2\hat v^3 + 1)\hat u - (4\hat v^3 - 1)(\hat v^3 + 2)^2)\psi_5^{1/2} + 8\hat v^12\hat u^4 - 2\hat v^9(16\hat v^3 - 13)\hat u^3 + 3\hat v^6(16\hat v^6 - 6\hat v^3 + 5)\hat u^2 - 2\hat v^3(\hat v^3 - 1)(16\hat v^6 + 37\hat v^3 - 8)\hat u + (2\hat v^3 + 1)(4\hat v^3 - 1)(\hat v^3 + 2)^2)(54\hat v^3\psi_6)^{-1}$, $\hat c_2^* = ((9\hat v^6\hat u^2 - 2\hat v^3(5\hat v^3 - 8)\hat u + (\hat v^3 + 2)^2)\psi_5^{1/2} - 18\hat v^9\hat u^3 + \hat v^6(34\hat v^3 - 49)\hat u^2 - 2\hat v^3(7\hat v^6 - 5\hat v^3 + 16)\hat u - (2\hat v^3 + 1)(\hat v^3 + 2)^2)(6\hat v^3\psi_6)^{-1}$;

$\tilde a_1^* = (\tilde v^3 - 4)(\tilde u + \tilde v)((2\tilde v\tilde w - 2\tilde v^3 + 3\tilde u\tilde v^2 + 2)\psi_{27} - 4\tilde v^2\tilde w^2 - 4\tilde v(-2\tilde v^3 + 3\tilde u\tilde v^2 + 2)\tilde w - 2\tilde v^6 + 7\tilde u\tilde v^5 - 7\tilde u^2\tilde v^4 + 8\tilde u\tilde v^2 - 8\tilde u^2\tilde v - 4)(2\tilde v)^{-1}\psi_{28}^{-2}$, $\tilde b_1^* = (\tilde v^3 - 4)((\tilde v\tilde w - \tilde u\tilde v^2 + \tilde u^2\tilde v + 1)\psi_{27} - 2\tilde v^2\tilde w^2 + \tilde v(3\tilde v^3 - 5\tilde u\tilde v^2 + 2\tilde u^2\tilde v - 4)\tilde w + (\tilde v^3 - 3\tilde u\tilde v^2 + 2)(\tilde u\tilde v^2 - \tilde u^2\tilde v - 1))\tilde v^{-2}(2\tilde v - 4\tilde u)^{-1}\psi_{28}^{-1}$, $\tilde a_2^* = (\tilde v - 2\tilde u)(\tilde v^3 - 4)((4\tilde v\tilde w^2 - (7\tilde v^3 - 12\tilde u\tilde v^2 - 4)\tilde w + (2\tilde v^3 + 1)(\tilde v - 2\tilde u)^2)\psi_{27} - 8\tilde v^2\tilde w^3 + 2\tilde v(11\tilde v^3 - 18\tilde u\tilde v^2 - 8)\tilde w^2 - (15\tilde v^6 - 55\tilde u\tilde v^5 + 52\tilde u^2\tilde v^4 - 8\tilde v^3 + 4\tilde u\tilde v^2 + 8\tilde u^2\tilde v + 8)\tilde w + (2\tilde v^3 + 1)(\tilde v^3 - 3\tilde u\tilde v^2 + 2)(\tilde v - 2\tilde u)^2)\psi_{28}^{-3}/2$,
$\tilde c_2^* = \psi_{28}^2(\tilde v(\tilde v - 2\tilde u)^2(4 - \tilde v^3))^{-1}\tilde a_2^*$;

$I_* = (-1, \theta_*) \cup (1/2, 2)$, где $\theta_* \approx -0.17$ – нуль $14\theta^5 - 47\theta^4 + 113\theta^3 - 103\theta^2 + 61\theta + 14$;
$I_1^+ = (-7 - \sqrt{37}, -2) \cup (-7 + \sqrt{37}, 0)$, $I_1^- = (0, 7 - \sqrt{37}) \cup (2, 7 + \sqrt{37})$, $I_2^+ = (0, 1)$, $I_2^- = (0, 7^{2/3}13^{-1/3})$, $I_3 = (-13 \cdot 7^{-1/3}, -7^{-1/3})$, $I_4 = (-\infty, -1) \cup (5 \cdot 91^{-1/3}, +\infty)$;
$L1_{34,+1}^{4,2,<,<} = \{r_1, s_2 = 0,\ s_1 = -\tilde\gamma(\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2 = (\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-1/2}\mu^{-1/2}\}$;
$L1_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = 0,\ s_1 = \tilde\gamma|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2 = -\tilde\beta|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2},\ s_2 = r_2/2\}$;
$L1_6^{6,2,<,<} = L1_2^{7,2,<,<}$ с $\nu = \theta_1\mu$;
$L1_7^{6,2,<,<} = \{r_1 = 0,\ s_1 = 3^{3/4}\tilde\gamma(2\tilde\varsigma)^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2 = \mp 3^{1/4}(2\tilde\varsigma)^{-1/2}\mu^{-1/2}$,
$s_2 = 3^{1/4}(-\sqrt{3}\tilde\beta \pm \tilde\varsigma)(2\tilde\varsigma\mu)^{-3/2}\mu^{-1/2}\}$;
$L1_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{r_1 = 0,\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\varsigma^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2 = \tilde\varsigma^{-1/2}\mu^{-1/2},\ s_2 = -\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}s_1\}$;
$L\hat 1_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{r_1 = (2\hat v^3(1 + \hat u) + 1 - \psi_5^{1/2})(2\hat v^3(1 - \hat u) - 2 - \psi_5^{1/2})(6\hat v(4\hat v^3 - 1))^{-1}r_2$,
$s_1 = (2\hat v^3(1 - \hat u) - 1 + \psi_5^{1/2})(2\hat v)^{-1}s_2,\ r_2 = (\hat a_2^*\hat c_2^*)^{-1/4},\ s_2 = (\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/4}/\hat c_2^*\}$;
$L1_{12}^{6,2,<,<} = \{r_1 = 0,\ s_1 = 2\tilde\gamma(|\tilde\beta|\mu\psi_{16})^{-1/2},\ r_2 = -(2\tilde\beta)^{1/3}(|\tilde\beta|\mu)^{-1/2}\psi_{16}^{-1/6}$,
$s_2 = -\tilde\beta(|\tilde\beta|\mu\psi_{16})^{-1/2}\}$;
$L1_2^{7,2,<,<} = \{r_1 = 0,\ s_1 = 3^{3/2}\tilde\gamma\mu(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/2},\ r_2 = -3^{1/2}(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/6}\operatorname{sign}\psi_8$,
$s_2 = (\tilde\gamma\nu - 2\tilde\beta\mu)(3\tilde\gamma\mu)^{-1}s_1\}$;
$L2_{34,+1}^{4,2,<,<} = \{r_1 = (\tilde v + \psi_{17}^{1/2})r_2/3,\ s_1 = (\tilde v - \psi_{17}^{1/2})s_2/3,\ r_2 = 3(\psi_{17}\psi_{18}(3 - \tilde v + \psi_{17}^{1/2}))^{-1/4}$,
$s_2 = \psi_{17}^{-1/4}\psi_{18}^{1/4}(3 - \tilde v + \psi_{17}^{1/2})^{-3/4}\}$;
$L3_{34,+1}^{4,2,<,<} = \{r_1 = -\tilde v^{-1/2}r_2,\ s_1 = -\tilde v^{1/4}(2 - \tilde v^{3/2} - \tilde v^3)^{1/4}(2 - 3\tilde v^{3/2} + \tilde v^3)^{-3/4}$,
$r_2 = \tilde v^{3/4}(2 - \tilde v^{3/2} - \tilde v^3)^{-1/4}(2 - 3\tilde v^{3/2} + \tilde v^3)^{-1/4},\ s_2 = \tilde v^{1/2}s_1\}$;
$L4_{34,+1}^{4,2,<,<} = \{r_1 = \tilde v(\tilde v\tilde w - \tilde v^3 - 5 - \psi_{22}^{1/2})\psi_{23}^{-1}r_2,\ s_1 = (\tilde v\tilde w - \tilde v^3 + 1 - \psi_{22}^{1/2})\tilde v^{-2}s_2/3$,
$r_2 = (\tilde a_2^*(\tilde\varrho)\tilde c_2^*(\tilde\varrho))^{-1/4}, s_2 = (\tilde a_2^*(\tilde\varrho)\tilde c_2^*(\tilde\varrho))^{1/4}/\tilde c_2^*(\tilde\varrho)\}$, где $(\tilde\varrho) = (-\tilde v, \tilde v, \tilde w)$;
$L2_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = \mp\tilde u s_2,\ s_1 = -(2\tilde u \mp \sqrt{3})s_2,\ r_2 = -(2 \mp \sqrt{3}\tilde u)\tilde u^{-1}r_1$,
$s_2 = (\tilde u^2 \mp \sqrt{3}\tilde u + 1)^{-1/2}(\pm 4\tilde u)^{-1/2}\}$;
$L3_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = (\tilde u + 2)\tilde u^{-1}r_2,\ s_1 = -r_2,\ r_2 = -\tilde u((\tilde u + 1)(\tilde u^2 + 2\tilde u + 4))^{-1/2},\ s_2 = 2\tilde u^{-1}r_2\}$;
$L4_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = -s_2,\ s_1 = (\tilde u + 3)s_2,\ r_2 = (\tilde u + 2)s_2,\ s_2 = ((-\tilde u - 1)(\tilde u^2 + 5\tilde u + 7))^{-1}\}$;
$L5_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = -2^{1/3}r_2,\ s_1 = 2^{1/3}((\sqrt{5} \pm 1)/5)^{1/2},\ r_2 = \pm((\sqrt{5} \mp 1)/5)^{1/2}$,
$s_2 = (2(\sqrt{5} \mp 2)/5)^{1/2}\}$;

$L6_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = -7^{-1/3}r_2,\ s_1 = -3r_1,\ r_2 = 7^{1/2}(-7^{1/3}\tilde{u}-1)^{-1/2}/3,\ s_2 = 0\};$
$L7_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = \tilde{u}r_2,\ s_1 = (\theta_2(\tilde{u})-\tilde{u})s_2,\ r_2 = |\theta_2(\tilde{u})(\tilde{u}+\theta_2(\tilde{u}))^{-1}\psi_{29}^{-1}|^{1/2},\ s_2 = r_2\};$
$L8_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = \tilde{v}r_2/2,\ s_1 = \psi_{25}^{-}s_2,\ r_2 = -2s_2,\ s_2 = (12-3\tilde{v}^3)^{-1/2}\};$
$L9_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = \psi_{25}^{\mp}r_2,\ s_1 = \psi_{25}^{\pm}s_2,\ r_2 = (4-\tilde{v}^3)^{-1/2}(\mp(\tilde{v}^{-1}\psi_{25}^{\pm}+1))^{-1/2},\ s_2 = r_2\};$
$L2_{6}^{6,2,<,<} = \{r_1 = -(\tilde{u}^2+3)(2\tilde{u})^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde{u}s_2,\ r_2 = (2\tilde{u})^{4/3}(\tilde{u}^2+9)^{-2/3}s_2,$
$s_2 = (-\tilde{u}^2+3)^{1/2}(\tilde{u}^2+1)^{-1}|2\tilde{u}|^{-1/2}\};$
$L3_{6}^{6,2,<,<} = \{r_1 = -(\tilde{u}^2-2\tilde{u}+3)(2\tilde{u}-1)^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde{u}s_2,\ r_2 = (2\tilde{u}-1)^{4/3}(\tilde{u}^2-\tilde{u}+7)^{-2/3}s_2,$
$s_2 = |(\tilde{u}-2)(\tilde{u}+1)|^{1/2}|2\tilde{u}-1|^{-1/2}(\tilde{u}^2-\tilde{u}+1)^{-1}\};$
$L4_{6}^{6,2,<,<} = \{r_1 = -(2\tilde{u}\tilde{v}^2-\tilde{u}^2\tilde{v}-3)(\tilde{v}(\tilde{v}-2\tilde{u}))^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde{u}s_2,$
$r_2 = \tilde{v}^{2/3}(\tilde{v}-2\tilde{u})^{4/3}\psi_{26}^{-2/3}s_2,\ s_2 = -\tilde{v}^{1/2}|\psi_{24}|^{1/2}\psi_{29}^{-1}|\tilde{v}-2\tilde{u}|^{-1/2}\};$
$L2_{7}^{6,2,<,<} = \{r_1 = \psi_{25}^{\mp}r_2,\ s_1 = \psi_{25}^{\pm}s_2,\ r_2 = 3^{1/4}\tilde{v}^{1/4}(4-\tilde{v}^3)^{-1/4}(-\tilde{w})^{-1/2},\ s_2 = r_2\};$
$L3_{7}^{6,2,<,<} = \{r_1 = \tilde{u}r_2,\ s_1 = (\theta_2(\tilde{u})-\tilde{u})s_2,\ r_2 = |\theta_2(\tilde{u})(2\tilde{u}-\theta_2(\tilde{u}))\psi_{29}^{-1}(\tilde{u},\theta_2(\tilde{u}))\tilde{w}^{-1}|^{1/2},\ s_2 = r_2\};$
$L2_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{r_1 = (2\tilde{v}^2\tilde{w}-\tilde{v}^4+\tilde{u}\tilde{v}^3-2\tilde{v}+8\tilde{u}-\tilde{v}\psi_{27}^{1/2})(2\psi_{28})^{-1}r_2,$
$s_1 = (2\tilde{v}\tilde{w}-\tilde{v}^3+\tilde{u}\tilde{v}^2+2-\psi_{27}^{1/2})(2\tilde{v}(\tilde{v}-2\tilde{u}))^{-1}s_2, r_2 = (\tilde{a}_2^*\tilde{c}_2^*)^{-1/4}, s_2 = (\tilde{a}_2^*\tilde{c}_2^*)^{1/4}/\tilde{c}_2^*\};$
$L3_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{r_1 = \tilde{v}r_2/2,\ s_1 = (\tilde{w}r_2)^{-1},\ r_2 = \sqrt{2}\tilde{v}^{1/4}(-\tilde{w})^{-1/2}(4-\tilde{v}^3)^{-1/4},\ s_2 = 0\};$
$L4_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{r_1 = \tilde{u}r_2,\ s_1 = (2\theta_3(\tilde{u})-\tilde{u})s_2/3,\ r_2 = \sqrt{2}\psi_{30}^{1/4}(-\tilde{w})^{-1/2},$
$s_2 = -3\sqrt{2}\psi_{30}^{3/4}\psi_{29}(\tilde{u},\theta_3(\tilde{u}))(\theta_3(\tilde{u})(2\tilde{u}-\theta_3(\tilde{u})))^{-1}(-\tilde{w})^{-1/2}\}.$

Из системы ($2.1^<$) с $\gamma-\beta^2>0$ при $D<0$ $(p_2q_1<0,\ \nu^2+\mu^2=\delta_{pq},\ \mu>0)$ заменой J_3^2 получена система (2.11), в которой согласно (2.5) и (2.6) $\tilde{\alpha},\tilde{\gamma}>0$ и $\tilde{\varsigma}=(\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2)^{1/2}>0$.

Осуществим разбиение элементов $\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\nu,\mu$ системы (2.11) на непересекающиеся множества, в каждом из которых (2.11) сводится к определенной форме из списка 2.4.

Лемма 2.2. *Система* (2.11) *сводится:*

1_1) *при* $\nu=-\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1}\mu,\ \tilde{\beta}=0$ *заменой* $L1_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *к* $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *с* $\sigma=1,\ u=\tilde{\gamma}^2\tilde{\varsigma}^{-2}$;
1_2) *при* $\nu=-\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1}\mu,\ \tilde{\beta}\neq 0$ *заменой* $L1_{11,+1}^{6,2,<,<}$ *к* $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma=1,\ u=-2\tilde{\beta}\tilde{\varsigma}^{-1}$, $v=-(\tilde{\beta}^2+\tilde{\gamma}^2)\tilde{\varsigma}^{-2}$;
2_1) *при* $\nu=\tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu,\ \tilde{\beta}=0$ *– это случай* 1_1);
2_2^a) *при* $\nu=\tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu,\ \tilde{\beta}\neq 0,\ \tilde{\alpha}=7\tilde{\beta}^2(4\tilde{\gamma})^{-1}$ *заменой* $L1_{22}^{5,2,<,<}$ *к* $NSF_{22}^{5,2,<,<}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde{\beta}$, $u=-(\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}^2)(2\tilde{\beta})^{-2}$;
2_2^b) *при* $\nu=\tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu,\ \tilde{\beta}\neq 0,\ \tilde{\alpha}\neq 7\tilde{\beta}^2(4\tilde{\gamma})^{-1}$ *заменой* $L1_{12}^{6,2,<,<}$ *к* $NSF_{12}^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde{\beta}$, $u=(\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}^2)\psi_{16}^{-1},\ v=\psi_{16}^{1/3}(2\tilde{\beta})^{-2/3}$;
3) *при* $\nu=\theta_1\mu$ *заменой* $L1_{6}^{6,2,<,<}$ *к* $NSF_{6}^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, *где* $(\cdot)=(\theta_*\mu,\mu)$, $u=2(2\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{-1/3}\psi_{10}(\cdot),\ v=-(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}^{-1/3}(\cdot)$;
4_1) *при* $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde{\gamma}^{-1}\mu,\ \psi_{15}^{\mp}=0\ (\tilde{\beta}\neq 0)$ *– это случай* 2_2^a);
4_2) *при* $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde{\gamma}^{-1}\mu,\ \psi_{15}^{\mp}\neq 0$ *заменой* $L1_{7}^{6,2,<,<}$ *к* $NSF_{7}^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma=\pm 1,\ u=\psi_{15}^{\mp}\tilde{\varsigma}^{-1}$, $v=-3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde{\gamma}^2)(2\tilde{\varsigma})^{-2}$;
5) *при* $\nu\neq-\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1}\mu,\ \theta_1\mu,\ \psi_{14}^{\pm}\tilde{\gamma}^{-1}\mu,\ \tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu$ *заменой* $L1_{2}^{7,2,<,<}$ *к* $NSF_{2}^{7,2,<,<}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8$, $u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10},\ v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3},\ w=-9\tilde{\gamma}^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}\delta_{pq}$.

Доказательство. Любая замена (1.5), в которой

$$r_1=0,\quad s_2=(\tilde{\gamma}\nu-2\tilde{\beta}\mu)(3\tilde{\gamma}\mu)^{-1}s_1\quad(s_1,r_2\neq 0), \tag{2.23}$$

сводит (2.11) к системе

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_1 & \hat{b}_1 & \hat{c}_1 & \hat{d}_1\\ \hat{a}_2 & 0 & \hat{c}_2 & \hat{d}_2\end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

у которой, в частности, $\hat{a}_2=-\tilde{\gamma}\mu r_1^3 s_1^{-1}\neq 0,\ \hat{d}_2=2(\tilde{\gamma}\mu)^{-2}\psi_8\psi_9 s_1^2/27$.

В $\hat d_2$ однородный квадратный многочлен $\psi_9(\nu,\mu)=\tilde\gamma^2\nu^2+2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu+(9\tilde\alpha\tilde\gamma-8\tilde\beta^2)\mu^2>0$, так как имеет нули $\nu_{1,2}=(-\tilde\beta\pm 3\varsigma\mathrm{i})\tilde\gamma^{-1}\mu$. Поэтому $\hat d_2=0\Leftrightarrow\psi_8=\tilde\gamma\nu+\tilde\beta\mu=0$.

1) $\psi_8=0\Leftrightarrow\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu$. При $s_1=-\tilde\gamma\tilde\varsigma^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2=\tilde\varsigma^{-1/2}\mu^{-1/2}$, $s_2=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}s_1$ – замена $L1^{6,2,<,<}_{11,+1}$ – система (2.24)$=\begin{pmatrix}-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1} & -(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2} & -2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1} & -(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

1_1) $\tilde\beta=0\Rightarrow\nu=0$. При $s_1=-\tilde\gamma(\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2=(\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-1/2}\mu^{-1/2}$ – замена $L1^{4,2,<,<}_{34,+1}$ с учетом (2.23) – получена $CF^{4,2,<,<}_{34,+1}$ с $\sigma=1$, $u=-\tilde\alpha^{-1}\tilde\gamma\ (=D/4<0)$.

1_2) $\tilde\beta\neq0$, тогда получена $NSF^{6,2,<,<}_{11,+1}$ с $\sigma=1$, $u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}$, $v=-(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}<0$.

2) $\psi_8=\tilde\beta\mu+\tilde\gamma\nu\neq0$. При $s_1=3^{3/2}\tilde\gamma\mu(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/2}$, $r_2=-3^{1/2}(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/6}\operatorname{sign}\psi_8$ – замена $L_2^{7,2,<,<}$ с учетом (2.23) – система (2.24) принимает вид

$$\hat\sigma\begin{pmatrix}2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10} & -9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}\delta_{pq} & 3(\psi_8\psi_9)^{-1}\psi_{11} & -(2\psi_8)^{-4/3}\psi_9^{-1/3}\psi_{12}\\ 1 & 0 & -3(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}\psi_{13} & 1\end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

где $\hat\sigma=\operatorname{sign}\psi_8$, однородные многочлены $\psi_{10}(\nu,\mu)=2\tilde\gamma\nu-\tilde\beta\mu$, $\psi_{11}(\nu,\mu)=\tilde\gamma^3\nu^3+3\tilde\gamma(\tilde\gamma^2+2\tilde\alpha\tilde\gamma-2\tilde\beta^2)\nu\mu^2+\tilde\beta(4\tilde\beta^2-3\tilde\alpha\tilde\gamma+3\tilde\gamma^2)\mu^3$, $\psi_{12}(\nu,\mu)=\tilde\gamma^2\nu^2-4\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu+(4\tilde\beta^2+9\tilde\gamma^2)\mu^2$, $\psi_{13}(\nu,\mu)=\tilde\gamma^2\nu^2+2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu-(3\tilde\alpha\tilde\gamma-4\tilde\beta^2)\mu^2$. При этом $\psi'_{11}(\nu,1)=\tilde\gamma(\tilde\gamma^2(\nu^2+1)+2(\tilde\alpha\tilde\gamma-\tilde\beta^2)>0$, поэтому θ_1 – единственный вещественный нуль $\psi_{11}(\nu,1)$; $\psi_{12}(\nu,\mu)>0$, поскольку имеет нули $\nu_{1,2}=(2\tilde\beta\pm3\tilde\gamma\mathrm{i})\tilde\gamma^{-1}\mu$; $\psi_{13}(\nu,\mu)$ имеет нули $\nu_{1,2}=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\psi_{14}^{\pm}=-\tilde\beta\pm\sqrt3\tilde\varsigma$.

2_1) $\hat a_1=0\Leftrightarrow\psi_{10}=0\Leftrightarrow\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$.

2_1^1) $\tilde\beta=0$, тогда $\psi_{10}=0\Leftrightarrow\psi_8=0$ $(\nu=0)$ и попадаем в случай 1_1).

2_1^2) $\tilde\beta\neq0$. При $s_1=2\tilde\gamma(|\tilde\beta|\mu\psi_{16})^{-1/2}$, $r_2=-(2\tilde\beta)^{1/3}(|\tilde\beta|\mu)^{-1/2}\psi_{16}^{-1/6}$ $(4\tilde\alpha\tilde\gamma-3\tilde\beta^2>0)$ – замена $L1^{6,2,<,<}_{12}$ с учетом (2.23) – система (2.25) принимает вид

$$\operatorname{sign}\tilde\beta\begin{pmatrix}0 & -(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta\psi_{16})^{-2/3} & (\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1} & -(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta)^{-4/3}\psi_{16}^{-1/3}\\ 1 & 0 & (4\tilde\alpha\tilde\gamma-7\tilde\beta^2)(2\tilde\beta\psi_{16})^{-2/3} & 1\end{pmatrix}.$$

2_1^{2a}) $\hat c_2=0\Leftrightarrow\tilde\alpha=7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}$. При $s_1=\tilde\gamma|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2=-\tilde\beta|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2}$ – замена $L1^{5,2,<,<}_{22}$ с учетом (2.23)– получена $NSF^{5,2,<,<}_{22}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde\beta$, $u=-(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta)^{-2}<-1/4$.

2_1^{2b}) $4\tilde\alpha\tilde\gamma-7\tilde\beta^2\neq0$, тогда получена $NSF^{6,2,<,<}_{12}$ с $\sigma=\operatorname{sign}\tilde\beta$, $u=(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1}$, $v=\psi_{16}^{1/3}(2\tilde\beta)^{-2/3}$.

2_2) $\hat c_1=0\Leftrightarrow\psi_{11}=0\Leftrightarrow\nu=\theta_1\mu$, где $\theta_1\in\mathbb R^1-\forall$ нуль $\psi_{11}(\nu,1)$. Тогда система (2.25) при $\nu=\theta_1\mu$ – это $NSF^{6,2,<,<}_6$ с $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, $u=2(2\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{-1/3}\psi_{10}(\cdot)$, $v=-(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}(\cdot)^{-1/3}$, $(\cdot)=(\theta_1\mu,\mu)$, так как $v\neq1$ и $\psi_{10}(\cdot)$, $\psi_{12}(\cdot)\neq0$. А приводящая к $NSF^{6,2,<,<}_6$ замена $L1^{6,2,<,<}_6$ – это $L_2^{7,2,<,<}$ с $\nu=\theta_1\mu$.

2_3) $\hat c_2=0\Leftrightarrow\psi_{13}=0\Leftrightarrow\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu$. Система (2.25) при $s_1=3^{3/4}\tilde\gamma(2\tilde\varsigma)^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2=\mp3^{1/4}(2\tilde\varsigma\mu)^{-1/2}$ – замена $L1^{6,2,<,<}_7$ с учетом (2.23) – принимает вид

$$\pm\begin{pmatrix}\psi_{15}^{\mp}\tilde\varsigma^{-1} & -3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2} & 3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2} & -((\tilde\varsigma\mp\sqrt3\tilde\beta)^2+3\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2}\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2_3^1) $\hat a_1=0\Leftrightarrow\psi_{15}^{\mp}=0$ $(\tilde\beta\neq0)\Leftrightarrow\{\operatorname{sign}\tilde\beta=\pm1,\ \tilde\alpha=7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}\}\Rightarrow$ попадаем в 2_1^{2a}).

2_3^2) $\psi_{15}^{\mp}\neq0\Rightarrow$ получена $NSF^{6,2,<,<}_7$ с $\sigma=\pm1$, $u=\psi_{15}^{\mp}\tilde\varsigma^{-1}$, $v=-3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2}$.

2_4) $\hat a_1,\hat c_1,\hat c_2\neq0\Leftrightarrow\psi_{10},\psi_{11},\psi_{13}\neq0$, тогда (2.25) – это $NSF^{7,2,<,<}_2$ с $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8$, $u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $w=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)<0$, $v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}>0$. $\square$

В списке 2.4_{II} имеются четыре $NSF^{m,2,<}$, у которых дискриминант D может быть отрицателен. Покажем, что все они не являются $CF^{m,2,<,<}$ (см. опр. 1.11).

Утверждение 2.8. *$NSF_{12}^{6,2,<,<}, NSF_{13}^{6,2,<,<}, NSF_{15}^{6,2,<,<}$ при всех допустимых значениях параметров заменами (1.5) сводятся к предшествующей согласно СП $SF_{11}^{6,2}$, а $NSF_{16}^{6,2,<,<}$ – к $SF_{34}^{4,2}$ (см. прил. [3, 3.6.4]).*

Доказательство. 1) Любая замена (1.5) при $r_1 = (s_1 - 2\hat{v}^2 s_2)(2\hat{v}s_1 - s_2)^{-1} r_2$ сводит $NSF_{12}^{6,2,<,<}(\hat{\sigma}, \hat{u}, \hat{v})$, $ps_{12}^{6,2,<,<} = \{\hat{v} > 4^{-1/3},\ \hat{v} \neq 1,\ 4\hat{u} > \hat{v}^{-3}\}$ с $\hat{u} = -(\hat{v}s_1 + s_2)(s_1 - 2\hat{v}^2 s_2)(\hat{v}^2(2\hat{v}s_1 - s_2)s_2)^{-1}$ именно к $SF_{11}^{6,2}$ при $(\hat{u}, \hat{v}) \in ps_{12}^{6,2,<,<}$ и $\delta_{rs} \neq 0$.

Равенство для $\hat{u}$ является квадратным уравнением относительно s_1 и имеет корни $s_1^{\pm} = (2\hat{v}^3(1-\hat{u}) - 1 \pm \psi_5^{1/2})(2\hat{v})^{-1} s_2 \in \mathbb{R}^1$, так как дискриминант $\psi_5(\hat{u}) = 4\hat{v}^6\hat{u}^2 - 8\hat{v}^3(\hat{v}^3 - 1)\hat{u} + (2\hat{v}^3 + 1)^2$ отрицателен. Кроме того, $\psi_6 = \hat{v}^3(1-\hat{u}) - 1 + \psi_5^{1/2} \neq 0\,(\Leftrightarrow \delta_{rs} \neq 0)$.

В результате замена, в которой, например, $r_1 = (2\hat{v}^3(1+\hat{u}) + 1 - \psi_5^{1/2})(2\hat{v}^3(1 - \hat{u}) - 2 - \psi_5^{1/2})(6\hat{v}(4\hat{v}^3 - 1))^{-1} r_2$, $s_1 = (2\hat{v}^3(1-\hat{u}) - 1 + \psi_5^{1/2})(2\hat{v})^{-1} s_2$ сводит $NSF_{12}^{6,2,<,<}$ к $SF_{11}^{6,2} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1^* r_2^2 & \hat{b}_1^* r_2 s_2 & \hat{c}_1^* s_2^2 & \hat{d}_1^* r_1^{-1} s_2^3 \\ \hat{a}_2^* r_2^3 s_2^{-1} & 0 & \hat{c}_2^* r_2 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. Теперь при $r_2 = (\hat{a}_2^*\hat{c}_2^*)^{-1/4}$, $s_2 = (\hat{a}_2^*\hat{c}_2^*)^{1/4}/\hat{c}_2^*$ – замена $L\hat{1}_{11,+1}^{6,2,<,<}$ – получаем $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ с $\sigma = \hat{\sigma}$, $u = \hat{a}_1^*(\hat{a}_2^*\hat{c}_2^*)^{1/2}$, $v = \hat{b}_1^*/\hat{c}_2^*$.
Здесь следует иметь в виду, что в силу инвариантности степени общего множителя l и знаков дискриминантов D_0, D ($l = 2$, $D_0, D < 0$) должны выполняться трудно проверяемые из-за объема формул соотношения $\hat{a}_2^*\hat{c}_2^* > 0$, $\hat{c}_1^* = \hat{a}_1^*\hat{c}_2^*/\hat{a}_2^*$, $\hat{d}_1^* = \hat{b}_1^*\hat{c}_2^*/\hat{a}_2^*$.

2) Любая замена (1.5) при $r_2 = (2s_1 - vs_2)(s_1 - 2(v+1)s_2)^{-1} v^{-1} r_1$ сводит $NSF_{13}^{6,2,<,<}$ с $u = v(s_1 + (v+1)s_2)(s_1 - 2(v+1)s_2)(s_1 + vs_2)^{-1}(2s_1 - vs_2)^{-1}$ к $SF_{11}^{6,2}$ при $(u, v) \in ps_{13}^{6,2,<,<} = \{v < -4/3,\ 4u > (u + v + 1)^2\}$ и $\delta_{rs} \neq 0$. Здесь $v > 0$ не вошло в $ps_{13}^{6,2,<,<}$, так как $D < 0$.

Равенство для u имеет вещественные корни $s_1^{\pm} = (v(u + v + 1) \pm \varrho^{1/2})(2v - 4u)^{-1} s_2$, так как $\varrho(u) = 9v^2u^2 - 2v(9v^2 + 15v + 8)u + 9v^2(1+v)^2 > 0$ в силу того, что дискриминант $27v^3 + 72v^2 + 60v + 16$ этого многочлена, имея нули $-4/3, -2/3, -2/3$, отрицателен. Тогда замена, например, с $s_1 = (v(u+v+1) + \varrho^{1/2})(2v - 4u)^{-1} s_2$, $r_2 = (3uv + v + \varrho^{1/2})(8u - 3v + 9uv - 3v^2 - \varrho^{1/2})(2uv(3v+4)(3v+2)(2u - v))^{-1} r_1$ сводит $NSF_{13}^{6,2,<,<}$ к $SF_{11}^{6,2}$.

3) Любая замена (1.5) при $r_2 = (2s_1 + vs_2)(s_1 + 2(v-1)s_2)^{-1} v^{-1} r_1$ сводит $NSF_{15}^{6,2,<,<}$ с $u = -v(s_1 - (v-1)s_2)(s_1 + 2(v-1)s_2)s_2^{-1}(2s_1 + vs_2)^{-1}$ именно к $SF_{11}^{6,2}$ при $(u, v) \in ps_{15}^{6,2,<,<} = \{v \notin [0, 4/3],\ 4u < -(v-1)^2\}$ и $\delta_{rs} \neq 0$.

Равенство для u является квадратным уравнением относительно s_2 и имеет корни $s_1^{\pm} = (v - v^2 - 2u) \pm \varrho^{1/2})(2v)^{-1} s_2 \in \mathbb{R}^1$, так как многочлен $\varrho(u) = 4u^2 - 4uv + 9v^2(v-1)^2 > 0$ в силу того, что его дискриминант $-(9v^2 - 18v + 8) < 0$ при $v \notin [2/3, /4/3]$. Тогда замена, например, с $s_1 = (v - v^2 - 2u + \varrho^{1/2})(2v)^{-1} s_2$, $r_2 = (2u - v - \varrho^{1/2})(2u + 3v - 3v^2 + \varrho^{1/2})(2uv^2(3v - 4))^{-1} r_1$ сводит $NSF_{15}^{6,2,<,<}$ к $SF_{11}^{6,2}$.

4) Любая замена (1.5) с $s_1 = -(u + v + ((u+v)^2 - u)^{1/2}) s_2$, $r_1 = -(u + v - ((u+v)^2 - u)^{1/2}) r_2$ сводит $NSF_{16}^{6,2,<,<}$ к $SF_{34}^{4,2}$, поскольку $ps_{16}^{6,2,<,<} = \{v > 1/4,\ u < 0\}$. $\square$

Рассмотрим $NSF^{m,2,<,<}$ из списка 2.4_I. Непосредственной проверкой устанавливается, что $NSF_{22}^{5,2,<,<}$ является $CF_{22}^{5,2,<,<}$, а у остальных форм $ps^{m,2,<,<} \neq cs^{m,2,<,<}$.

Утверждение 2.9. *Только следующие формы из списка 2.4 с указанными значениями параметров сводятся к предшествующим согласно СП структурным формам (см. прил. [3, 3.6.5, 3.6.6]):*

1) $NSF_6^{6,2,<,<}(\tilde{\sigma}, \tilde{u}, \tilde{v})$ с $ps_6^{6,2,<,<} = \{\tilde{v} \in (0,1),\ \tilde{u} \in (\psi_7^-(\tilde{v}), \psi_7^+(\tilde{v}))\ (\psi_7^- < -1, \psi_7^+ \in (-1, 0))\}$:
a) при $\tilde{u} = -\tilde{v}$ заменой $L3_{34,+1}^{4,2,<,<}$ сводится к $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ с $\sigma = \tilde{\sigma}$, $u = \psi_{19}(\tilde{v})$;
b) при $\tilde{u} = -2^{-5/3}(3 \pm \sqrt{5})$, $\tilde{v} = 2^{-2/3}$ заменой $L5_{22}^{5,2,<,<}$ – к $CF_{22}^{5,2,<,<}$ с $\sigma = \mp\tilde{\sigma}$, $u = -3$;
2) $NSF_7^{6,2,<,<}(\tilde{\sigma}, \tilde{u}, \tilde{v})$ с $ps_7^{6,2,<,<} = \{\tilde{v} \neq -\tilde{u},\ 4\tilde{v} < -(\tilde{u} + 1)^2)\}$:
a) при $\tilde{u} = -1$ заменой $L2_{34,+1}^{4,2,<,<}$ сводится к $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ с $\sigma = \tilde{\sigma}$, $u = \psi_{21}(\tilde{v})$;

b) при $\tilde v = [\,-3(\tilde u+1),\ \tilde u\in(-1,11)\vee 3(\tilde u+1)(\tilde u+2)^{-1},\ \tilde u\in(-2,-1)\,]$ *заменой* $[L3^{5,2,<,<}_{22}\vee L4^{5,2,<,<}_{22}]$ *сводится к* $CF^{5,2,<,<}_{22}$ *с* $\sigma=[\tilde\sigma\vee-\tilde\sigma]$, $u=[-3(\tilde u+1)^{-1}\vee 3((\tilde u+1)(\tilde u+2))^{-1}]$;
c) при $\tilde v=\psi_{32}(\tilde u)$, $\tilde u\in I_*$, *заменой* $L3^{6,2,<,<}_{6}$ *сводится к* $NSF^{6,2,<,<}_{6}$ *с* $\sigma=\tilde\sigma\,\mathrm{sign}\,(1-2\tilde u)$, $u=-(\tilde u^3-3\tilde u^2+6\tilde u+1)(\tilde u^2-\tilde u+1)^{-1}((\tilde u^2-\tilde u+7)(2\tilde u-1))^{-1/3}$, $v=(2\tilde u-1)^{2/3}(\tilde u^2-\tilde u+7)^{-1/3}$;
3) $NSF^{6,2,<,<}_{11,+1}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ *с* $ps^{6,2,<,<}_{11,+1}=\{4\tilde v<-\tilde u^2\}$:
a) при $\tilde v=\psi^{\mp}_{20}$, $\sqrt3\tilde u\in I^{\mp}_1$ *заменой* $L2^{5,2,<,<}_{22}$ *сводится к* $CF^{5,2,<,<}_{22}$ *с* $\sigma=\pm\tilde\sigma$, $u=\psi^{\mp}_{20}\tilde u^{-2}$;
b) при $\tilde v=3(\tilde u^2+5)(\tilde u^2+1)(2(\tilde u^2-3))^{-1}$, $\tilde u\in(-\sqrt3,\sqrt3)$ *заменой* $L2^{6,2,<,<}_{6}$ *сводится к* $NSF^{6,2,<,<}_{6}$ *с* $\sigma=-\tilde\sigma\,\mathrm{sign}\,\tilde u$, $u=-(\tilde u^2+5)\tilde u^{2/3}(2(\tilde u^2+1)(\tilde u^2+9))^{-1/3}$, $v=(2\tilde u)^{2/3}(\tilde u^2+9)^{-1/3}$;
4) $NSF^{7,2,<,<}_{2}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v,\tilde w)$ *с* $ps^{7,2,<,<}_{2}=\{\tilde v\in(0,1)\cup(1,\sqrt[3]{4}),\ \tilde w\neq-\tilde u(\tilde v-\tilde v^{-2}),\ 4\tilde w<-(\tilde u+\tilde v)^2\}$:
a) при $\tilde u=-\tilde v$, *заменой* $L4^{4,2,<,<}_{34,+1}$ – *к* $CF^{4,2,<,<}_{34,+1}$ *с* $\sigma=\tilde\sigma$, $u=\tilde b^*_1(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)/\ \tilde c^*_2(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)$;
b^1) *при* $\tilde v=[7^{-1/3}\vee\theta_2(\tilde u)]$, $\tilde w=[3(7^{-1/3}\tilde u+7^{-2/3})\vee(\tilde u+\theta_2(\tilde u))(\theta_2(\tilde u)-2\tilde u)]$, $\tilde u\in[I_3\vee I_4]$, *заменой* $[L6^{5,2,<,<}_{22}\vee L7^{5,2,<,<}_{22}]$ *сводится к* $CF^{5,2,<,<}_{22}$ *с* $\sigma=[-\tilde\sigma\vee\mathrm{sign}\,(\tilde u+1)]$, $u=[3(7^{1/3}\tilde u+1)^{-1}\vee(2\tilde u-\theta_2(\tilde u))(\tilde u+\theta_2(\tilde u))^{-1}]$;
b^2) *при* $\tilde u=[-4\tilde v\vee\psi^{\mp}_{25}]$, $\tilde w=[3\tilde v(4\tilde v+\psi^-_{25})/2\vee 3(\tilde v\psi^{\pm}_{25}-2\tilde v^{-1})]$, $\tilde v\in[(0,(2/7)^{2/3})\vee I^{\pm}_2]$ *заменой* $[L8^{5,2,<,<}_{22}\vee L9^{5,2,<,<}_{22}]$ *сводится к* $CF^{5,2,<,<}_{22}$ *с* $\sigma=[-\tilde\sigma\vee\mp\tilde\sigma]$, $u=[(4+\psi^-_{25}\tilde v^{-1})/6\vee(4-\tilde v^3)(\tilde v^2\psi^{\pm}_{25}-2)^{-1}]$;
c) при $\tilde w=\psi_{33}(\tilde u,\tilde v)$ *заменой* $L4^{6,2,<,<}_{6}$ *сводится к* $NSF^{6,2,<,<}_{6}$ *с* $\sigma=\tilde\sigma\,\mathrm{sign}((2\tilde u-\tilde v)\psi_{24})$, $u=(\tilde v(2\tilde u-\tilde v)^{-1}\psi^{-1}_{26})^{1/3}\psi_{34}$, $v=-(\tilde v(2\tilde u-\tilde v)^2\psi^{-1}_{26})^{1/3}$;
d) при $[\tilde u=\psi^{\mp}_{25}\vee\tilde v=\theta_2(\tilde u)\neq2^{2/3}]$ *заменой* $[L2^{6,2,<,<}_{7}\vee L3^{6,2,<,<}_{7}]$ *сводится к* $NSF^{6,2,<,<}_{7}$ *с* $\sigma=[\mp\tilde\sigma\vee\tilde\sigma\mathrm{sign}\,(\tilde u-2^{-1/3})]$, $u=[-(\tilde v\tilde w-3\tilde v^2\psi^{\pm}_{25}+6)(\tilde v\tilde w)^{-1}\vee-(\tilde w+2\tilde u^2+\theta_2(\tilde u)\tilde u-\theta^2_2(\tilde u))\tilde w^{-1}]$, $v=[3(4-\tilde v^3)(\tilde v\tilde w)^{-1}\vee-(\psi_{24}(\tilde u,\theta_2(\tilde u))\tilde w+\psi_{35})(\psi_{29}(\tilde u,\theta_2(\tilde u))\tilde w)^{-1}]$;
e^1) *при* $\psi_{27}\geq0$, $\tilde u\neq\tilde v/2$ *заменой* $L2^{6,2,<,<}_{11,+1}$ *сводится к* $NSF^{6,2,<,<}_{11,+1}$ *с* $\sigma=\tilde\sigma$, $u=\tilde a^*_1(\tilde a^*_2\tilde c^*_2)^{-1/2}$, $v=\tilde b^*_1/\tilde c^*_2$;
e^2) *при* $[\tilde u=\tilde v/2\vee\tilde v=\theta_3(\tilde u)]$ *заменой* $[L3^{6,2,<,<}_{11,+1}\vee L4^{6,2,<,<}_{11,+1}]$ *сводится к* $NSF^{6,2,<,<}_{11,+1}$ *с* $\sigma=\tilde\sigma$, $u=[-3(4\tilde v-\tilde v^4)^{1/2}(4\tilde w)^{-1}\vee-\psi^{1/2}_{30}\psi_{31}]$, $v=[(4-\tilde v^3)(4\tilde v\tilde w)^{-1}\vee\psi_{36}]$.

Доказательство. 1) $NSF^{6,2,<,<}_{6}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ в a) заменой с $r_1=-\tilde v^{-1/2}r_2$, $s_2=\tilde v^{1/2}s_1$ сводится к $SF^{4,2}_{34}$, в b) заменой с $r_1=-2^{1/3}r_2$, $s_1=2^{-2/3}(3\pm\sqrt5)s_2$ сводится к $SF^{5,2}_{22}$;

2) $NSF^{6,2,<,<}_{7}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ в a) заменой с $r_1=(\tilde v\pm\psi^{1/2}_{17})r_2/3$, $s_1=(\tilde v\mp\psi^{1/2}_{17})s_2/3$ сводится к $SF^{4,2}_{34}$, в b) заменой с $r_1=[\,(\tilde u+2)\tilde u^{-1}r_2\vee-(\tilde u+2)^{-1}r_2\,]$, $s_1=[\,-\tilde us_2/2\vee(\tilde u+3)s_2\,]$ сводится к $SF^{5,2}_{22}$, в c) заменой с $r_1=-(\tilde u^2-2\tilde u+3)(2\tilde u-1)^{-1}r_2$, $s_1=\tilde us_2$ сводится к $SF^{6,2}_{6}$;

3) $NSF^{6,2,<}_{11,+1}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ в a) заменой с $s_1=-(2\tilde u\mp\sqrt3)s_2$, $r_2=-(2\mp\sqrt3\tilde u)\tilde u^{-1}r_1$ сводится к $SF^{5,2}_{22}$, в b) заменой с $r_1=-(\tilde u^2+3)(2\tilde u)^{-1}r_2$, $s_1=\tilde us_2$ сводится к $SF^{6,2}_{6}$.

4) Подробнее рассмотрим получение предшествующих форм из

$$NSF^{7,2,<,<}_{2}=\tilde\sigma\begin{pmatrix}\tilde u&\tilde w&\tilde u\tilde v^{-1}-\tilde v(\tilde u\tilde v+\tilde w)&\tilde u+\tilde w\tilde v^{-1}\\1&0&\tilde v^{-1}-\tilde v^2&1\end{pmatrix}\quad(\tilde u+\tilde w\tilde v^{-1}\neq0).$$

a) При $\tilde u=-\tilde v$, $\tilde w=(3\tilde v^2s_1^2+2(\tilde v^3-1)s_1s_2-\tilde v(\tilde v^3+2)s_2^2)(\tilde vs_2(2s_1-\tilde vs_2))^{-1}$ $NSF^{7,2,<,<}_{2}$ любой заменой (1.5) с $r_1=(\tilde v^2s_1-2s_2)(\tilde v(2s_1-\tilde vs_2))^{-1}r_2$ сводится к $SF^{4,2}_{34}$. Равенство для $\tilde w$ является квадратным уравнением относительно s_1 и имеет вещественные корни $s^{\pm}_1=(\tilde v\tilde w-\tilde v^3+1\pm\psi^{1/2}_{22})\tilde v^{-2}s_2/3$, так как $\psi_{22}=(\tilde v\tilde w+1)^2+\tilde v^3(4\tilde v^3-5\tilde v\tilde w+4)>0$ в силу того, что $\tilde w<0$. Кроме того, $\psi_{23}\neq0\Leftrightarrow 2s_1-\tilde vs_2\neq0$.

Замена с $r_1=\tilde v(\tilde w\tilde v-\tilde v^3-5-\psi^{1/2}_{22})\psi^{-1}_{23}r_2$, $s_1=(\tilde w\tilde v-\tilde v^3+1-\psi^{1/2}_{22})\tilde v^{-2}s_2/3$ сводит $NSF^{7,2,<,<}_{2}$ к $SF^{4,2}_{34}=\begin{pmatrix}0&\tilde b^*_1(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)r_2s_2&0&\tilde d^*_1r_1^{-1}s_2^3\\\tilde a^*_2(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)r_2^3s_2^{-1}&0&\tilde c^*_2(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)r_2s_2&0\end{pmatrix}$.
Выбор нормировки и связанные с ней вопросы приведены в утверждении 2.8, 1).

В b^1) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1=[-7^{-1/3}r_2\vee\tilde{u}r_2]$, $[s_2=0\vee s_1=(\theta_2(\tilde{u})-\tilde{u})s_2]$ сводится к $SF_{22}^{5,2}$.

В b^2) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1=[\tilde{v}r_2/2\vee\psi_{25}^{\mp}r_2]$, $s_1=[\psi_{25}^{-}s_2\vee\psi_{25}^{\pm}s_2]$ сводится к $SF_{22}^{5,2}$; случай $\tilde{u}=-4\tilde{v}$, $\tilde{w}=3\tilde{v}(4\tilde{v}+\psi_{25}^{+})/2$ невозможен, так как в нем $D>0$.

В c) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1=-(2\tilde{u}\tilde{v}^2-\tilde{u}^2\tilde{v}-3)(\tilde{v}(\tilde{v}-2\tilde{u}))^{-1}r_2$, $s_1=\tilde{u}s_2$ сводится к $SF_6^{6,2}$. При этом $\psi_{26}\neq 0$, так как является нормировочным множителем.

В d) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1=[\psi_{25}^{\mp}r_2\vee\tilde{u}r_2]$, $s_1=[\psi_{25}^{\pm}s_2\vee(\theta_2(\tilde{u})-\tilde{u})s_2]$ сводится к $SF_7^{6,2}$; если $2\tilde{u}=\theta_2(\tilde{u})\Leftrightarrow\tilde{u}=2^{-1/3}$, то $\delta_{rs}=0$, при этом $\operatorname{sign}(\tilde{u}-2^{-1/3})=\operatorname{sign}((2\tilde{u}-\theta_2(\tilde{u}))\psi_{29}^{-1}(\tilde{u},\theta_2(\tilde{u})))$.

e^1) При $\tilde{w}=(\tilde{v}(\tilde{v}-2\tilde{u})s_1^2+(\tilde{v}^3-\tilde{u}\tilde{v}^2-2)s_1s_2+\tilde{v}(\tilde{u}\tilde{v}^2-2)s_2^2)(\tilde{v}s_2(2s_1-\tilde{v}s_2))^{-1}$ $NSF_2^{7,2,<,<}$ любой заменой (1.5) с $r_1=(\tilde{v}^2s_1-2s_2)(\tilde{v}(2s_1-\tilde{v}s_2))^{-1}r_2$ сводится к $SF_{11}^{6,2}$. Равенство для $\tilde{w}$ является квадратным уравнением относительно s_1 и имеет вещественные корни $s_1^{\pm}=(2\tilde{v}\tilde{w}-\tilde{v}^3+\tilde{u}\tilde{v}^2+2\pm\psi_{27}^{1/2})(2\tilde{v}(\tilde{v}-2\tilde{u}))^{-1}s_2$ при $\psi_{27}\geq 0$ и $\tilde{u}\neq\tilde{v}/2$. Кроме того, $\psi_{28}\neq 0\Leftrightarrow 2s_1-\tilde{v}s_2\neq 0$. В результате замена, например, с $r_1=(2\tilde{v}^2\tilde{w}-\tilde{v}^4+\tilde{u}\tilde{v}^3-2\tilde{v}+8\tilde{u}-\tilde{v}\psi_{27}^{1/2})(2\psi_{28})^{-1}r_2$, $s_1=(2\tilde{v}\tilde{w}-\tilde{v}^3+\tilde{u}\tilde{v}^2+2-\psi_{27}^{1/2})(2\tilde{v}(\tilde{v}-2\tilde{u}))^{-1}s_2$ сводит $NSF_2^{7,2,<,<}$ к $SF_{11}^{6,2}=\begin{pmatrix}\tilde{a}_1^*r_2^2 & \tilde{b}_1^*r_2s_2 & \tilde{c}_1^*s_2^2 & \tilde{d}_1^*r_1^{-1}s_2^3\\ \tilde{a}_2^*r_2^3s_2^{-1} & 0 & \tilde{c}_2^*r_2s_2 & 0\end{pmatrix}$. И далее, как в утверждении 2.8, 1).

В e^2) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1=[\tilde{v}r_2/2\vee\tilde{u}r_2]$, $[s_2=0\vee s_1=(2\theta_3(\tilde{u})-\tilde{u})s_2/3]$ сводится к $SF_{11}^{6,2}$. При этом $\psi_{30}>0$, так как является нормировочным множителем.

Наконец, $NSF_2^{7,2,<,<}$ возможно при определенных условиях сводится к предшествующим ей $NSF_i^{6,2,<,<}$ $(i=12,13,15,16)$ из списка 2.4, которые, в свою очередь, сводятся к $SF_{11}^{6,2}$ или $SF_{34}^{4,2}$ – это сделано в утверждении 2.8. А все прямые замены к $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ и $NSF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ уже найдены выше. □

Полученные результаты позволяют в случае $l=2$, $D_0<0$, $D<0$ выписать все канонические формы со своими каноническими множествами.

Список 2.6. Шесть $CF_i^{m,2,<,<}$ и их $cs_i^{m,2,<,<}$ $(\sigma=\pm 1,\ u,v,w\neq 0)$.

$$CF_{34,+1}^{4,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}0 & u & 0 & u\\ 1 & 0 & +1 & 0\end{pmatrix},\quad cs_{34,+1}^{4,2,<,<}=\{u<0\};$$

$$CF_{22}^{5,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}0 & u & -u & u\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad cs_{22}^{5,2,<,<}=\{u<-1/4\};$$

$$CF_6^{6,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}u & u(v^{-2}-v) & 0 & uv^{-3}\\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{array}{l}cs_6^{6,2,<,<}=\{v\in(0,1),\ u\in(\psi_7^-(v),\psi_7^+(v)),\\ u\neq -v,\ (u,v)\neq(-2^{-5/3}(3\pm\sqrt{5}),\ 2^{-2/3})\};\end{array}$$

$$CF_7^{6,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}u & v & -v & u+v\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{array}{l}cs_7^{6,2,<,<}=\{4v<-(u+1)^2,\ u\neq -1,\\ v\neq -u,\ -3(u+1),\ 3(u+1)(u+2)^{-1},\ \psi_{32}(u)\};\end{array}$$

$$CF_{11,+1}^{6,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}u & v & u & v\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad cs_{11,+1}^{6,2,<,<}=\{4v<-u^2,\ v\neq\psi_{20}^{\mp}(u),\ 3(u^2+5)(u^2+1)(2(u^2-3))^{-1}\};$$

$$CF_2^{7,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}u & w & uv^{-1}-v(uv+w) & u+wv^{-1}\\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{array}{r}cs_2^{7,2,<,<}=\{v\in(0,\sqrt[3]{4}),\ v\neq 1,-u,2u,\theta_3(u),\\ w\neq -uv,-u(v-v^{-2}),\psi_{33}(u,v),\\ 4w<-(u+v)^2,\ \psi_{27}(u,v,w)<0,\end{array}$$

$(u,w)\neq([-4v\vee\psi_{25}^{\mp}(v)],\ [3v(4v+\psi_{25}^{-}(v))/2\vee 3(v\psi_{25}^{\pm}(v)-2v^{-1})]),$
$(v,w)\neq([7^{-1/3}\vee\theta_2(u)],\ [3(7^{-1/3}u+7^{-2/3})\vee(u+\theta_2(u))(\theta_2(u)-2u)])\}.$

Теорема 2.5. *Любая система* (1.4) *с* $l=2$, *записанная в виде* $(2.1^<)$ *согласно* (2.2) *и имеющая* $D<0$, *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей канонической формы из списка 2.6. Ниже для каждой*

$CF_i^{m,2,<,<}$ *приведены: a) условия на коэффициенты системы* $(2.1^<)$, *b) замены* (1.5), *преобразующие правую часть* $(2.1^<)$ *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения множителя* σ *и параметров из* $cs_i^{m,2,<,<}$:

A. $CF^{4,2,<,<}_{34,+1}$: $1_a)$ $\nu=0,\ \tilde\beta=0,$ $1_b)$ $J_3^2,\ L1^{4,2,<,<}_{34,+1}$, $1_c)$ $\sigma=1,\ u=\tilde\gamma^2\varsigma^{-2}$;
$2_a)$ $\nu=\theta_1\mu,\ \psi_8^2(\cdot)\psi_9(\cdot))=2\psi_{10}^2(\cdot)\psi_{12}(\cdot)$, *где* $(\cdot)=(\theta_1\mu,\mu)$, $2_b)$ $J_3^2, L1_6^{6,2,<,<}, L3^{4,2,<,<}_{34,+1}$, $2_c)$ $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, $u=\psi_{19}(\tilde v)$, *где* $\tilde v=-(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}^{-1/3}(\cdot)$;
$3_a)$ $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \psi_{15}^{\mp}=-\varsigma$, $3_b)$ J_3^2, $L1_7^{6,2,<,<}$, $L2^{4,2,<,<}_{34,+1}$, $3_c)$ $\sigma=\pm1$, $u=\psi_{21}(\tilde v)$, *где* $\tilde v=-3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\varsigma)^{-2}$;
$4_a)$ $\nu=0,\ \tilde\beta,\ 4\tilde\beta^2-3\tilde\alpha\tilde\gamma,\ 4\tilde\beta^2-3\tilde\alpha\tilde\gamma+3\tilde\gamma^2\neq0$, $4_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, $L4^{4,2,<,<}_{34,+1}$, $4_c)$ $\sigma=\operatorname{sign}\tilde\beta$, $u=\tilde b_1^*(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)/\tilde c_2^*(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)$, *где* $\tilde v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $\tilde w=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)$;

B. $CF^{5,2,<,<}_{22}$: $1_a)$ $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $\tilde\beta\neq0$, $\tilde\alpha=7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}$, $1_b)$ J_3^2, $L1^{5,2,<,<}_{22}$, $1_c)$ $\sigma=\operatorname{sign}\tilde\beta$, $u=-(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta)^{-2}$;
$2_a)$ $\nu=\theta_1\mu$, $2^{7/3}\psi_{10}(\cdot)=-(3\pm\sqrt5)(\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{1/3}$, $\psi_{12}(\cdot)=-8\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot)$ $((\cdot)=(\theta_1\mu,\mu))$, $2_b)$ J_3^2, $L1_6^{6,2,<,<}$, $L5^{5,2,<,<}_{22}$, $2_c)$ $\sigma=\mp\operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, $u=-3$;
$3_a)$ $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\psi_{15}^{\mp}\varsigma^{-1}=[\,-3(\tilde u+1),\ \tilde u\in(-1,11)\vee3(\tilde u+1)(\tilde u+2)^{-1},\ \tilde u\in(-2,-1)\,]$, *где* $\tilde v=-3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\varsigma)^{-2}$, $3_b)$ J_3^2, $L1_7^{6,2,<,<}$, $[L3^{5,2,<,<}_{22}\vee L4^{5,2,<,<}_{22}]$, $3_c)$ $\sigma=[\pm1\vee\mp1]$, $u=[-3(\tilde u+1)^{-1}\vee3((\tilde u+1)(\tilde u+2))^{-1}]$;
$4_a)$ $\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\tilde\beta\neq0$, $-(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\varsigma^{-2}=\psi_{20}^{\mp}(\tilde u)$, $\tilde u=-2\tilde\beta\varsigma^{-1}$, $\sqrt3\tilde u\in I_1^{\mp}$, $4_b)$ J_3^2, $L1^{6,2,<,<}_{11,+1}$, $L2^{5,2,<,<}_{22}$, $4_c)$ $\sigma=\pm1$, $u=-2\tilde\beta\varsigma^{-1}$,
$5_a)$ $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $\tilde\beta\neq0$, $\tilde\alpha\neq7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}$, $\hat b_1^*/\hat c_2^*=\psi_{20}^{\mp}(\tilde u)$, $\sqrt3\tilde u\in I_1^{\mp}$, $\tilde u=\hat a_1^*(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/2}$, $\hat u=\hat a_1^*(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/2}$, $\hat v=\hat b_1^*/\hat c_2^*$, $5_b)$ $J_3^2, L1^{6,2,<,<}_{12}, L\hat1^{6,2,<,<}_{11,+1}, L2^{5,2,<,<}_{22}$, $5_c)$ $\sigma=\pm\operatorname{sign}\tilde\beta$, $u=\psi_{20}^{\mp}(\tilde u)\tilde u^{-2}$;
$6_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \theta_1\mu,\ \psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $[7^{-1/3}\vee\theta_2(\tilde u)]=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $[3(7^{-1/3}\tilde u+7^{-2/3})\vee(\theta_2(\tilde u)-2\tilde u)(\tilde u+\theta_2(\tilde u))]=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)$, $\tilde u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}\in[I_3\vee I_4]$, $6_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}\,[L6^{5,2,<,<}_{22}\vee L7^{5,2,<,<}_{22}]$, $6_c)$ $\sigma=[-\operatorname{sign}\psi_8\vee\operatorname{sign}\tilde u]$, $u=[3(7^{1/3}\tilde u+1)^{-1}\vee(2\tilde u-\theta_2(\tilde u))(\tilde u+\theta_2(\tilde u))^{-1}]$;
$7_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \theta_1\mu,\ \psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $[-4\tilde v\vee\psi_{25}^{\mp}]=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $[3\tilde v(4\tilde v+\psi_{25}^{-})/2\vee3(\tilde v\psi_{25}^{\pm}-2\tilde v^{-1})]=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)$, $\tilde v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}\in[(0,(2/7)^{2/3})\vee I_2^{\pm}]$, $7_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, $[L8^{5,2,<,<}_{22}\vee L9^{5,2,<,<}_{22}]$, $7_c)$ $\sigma=[-\operatorname{sign}\psi_8\vee\mp\operatorname{sign}\psi_8]$, $u=[(4+\psi_{25}^{-}\tilde v^{-1})/6\vee(4-\tilde v^3)(\tilde v^2\psi_{25}^{\pm}-2)^{-1}]$;

C. $CF_6^{6,2,<,<}$: $1_a)$ $\nu=\theta_1\mu$, $\neg(A2_a,B2_a)$, $1_b)$ J_3^2, $L1_6^{6,2,<,<}$, $1_c)$ $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, $u=2(2\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{-1/3}\psi_{10}(\cdot)$, $v=-(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}^{-1/3}(\cdot)$, $(\cdot)=(\theta_1\mu,\mu)$;
$2_a)$ $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu$, $-3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\varsigma)^{-2}=\psi_{32}(\tilde u)$, $\tilde u=\psi_{15}^{\mp}\varsigma^{-1}\in I_*$, $\neg(B3_a)$, $2_b)$ J_3^2, $L1_7^{6,2,<,<}$, $L3_6^{6,2,<,<}$, $2_c)$ $\sigma=\pm\operatorname{sign}(1-2\tilde u)$, $u=-(\tilde u^3-3\tilde u^2+6\tilde u+1)(\tilde u^2-\tilde u+1)^{-1}((\tilde u^2-\tilde u+7)(2\tilde u-1))^{-1/3}$, $v=(2\tilde u-1)^{2/3}(\tilde u^2-\tilde u+7)^{-1/3}$;
$3_a)$ $\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\tilde\beta\neq0$, $-2(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\varsigma^{-2}=3(\tilde u^2+5)(\tilde u^2+1)(\tilde u^2-3)^{-1}$, $\tilde u=-2\tilde\beta\varsigma^{-1}\in(-\sqrt3,\sqrt3)$, $\neg(B4_a)$, $3_b)$ $J_3^2, L1^{6,2,<,<}_{11,+1}, L2_6^{6,2,<,<}$, $3_c)$ $\sigma=-\operatorname{sign}\tilde u$, $2u=-(\tilde u^2+5)(\tilde u^2+1)^{-1/3}v$, $v=(2\tilde u)^{2/3}(\tilde u^2+9)^{-1/3}$;
$4_a)$ $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $\tilde\beta\neq0$, $\tilde\alpha\neq7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}$, $\hat b_1^*/\hat c_2^*=3(\tilde u^2+5)(\tilde u^2+1)(2(\tilde u^2-3))^{-1}$, $\tilde u=\hat a_1^*(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/2}\in(-\sqrt3,\sqrt3)$, $\hat u=(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1}$, $\hat v=\psi_{16}^{1/3}(2\tilde\beta)^{-2/3}$, $\neg(B5_a)$, $4_b)$ $J_3^2, L1^{6,2,<,<}_{12}$, $L\hat1^{6,2,<,<}_{11,+1}, L2_6^{6,2,<,<}$, $4_c)$ $\sigma=-\operatorname{sign}(\tilde\beta\tilde u)$, $2u=-(\tilde u^2+5)(\tilde u^2+1)^{-1/3}v$, $v=(2\tilde u)^{2/3}(\tilde u^2+9)^{-1/3}$;
$5_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \theta_1\mu,\ \psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)=\psi_{33}(\tilde u,\tilde v)$, $\tilde u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $\tilde v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $\neg(A4_a,B6_a,B7_a)$, $5_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, $L4_6^{6,2,<,<}$, $5_c)$ $\sigma=\operatorname{sign}((2\tilde u-\tilde v)\psi_8\psi_{24})$, $u=(\tilde v(2\tilde u-\tilde v)^{-1}\psi_{26}^{-1})^{1/3}\psi_{34}$, $v=-(\tilde v(2\tilde u-\tilde v)^2\psi_{26}^{-1})^{1/3}$;

D. $CF_7^{6,2,<,<}$: $1_a)$ $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\psi_{15}^{\mp}\neq0,-\varsigma$, $\neg(B3_a,C2_a)$, $1_b)$ J_3^2, $L1_7^{6,2,<,<}$, $1_c)$ $\sigma=\pm1$, $u=\psi_{15}^{\mp}\varsigma^{-1}$, $v=-3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\varsigma)^{-2}$;
$2_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \theta_1\mu,\ \psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $[\tilde u=\psi_{25}^{\mp}\vee\tilde v=\theta_2(\tilde u)\neq2^{2/3}]$, $\tilde u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$,

$\tilde v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $\tilde w=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)$, $\neg(A4_a,B6_a,B7_a,C5_a)$, $2_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, $[L2_7^{6,2,<,<}\vee L3_7^{6,2,<,<}]$, $2_c)$ $\sigma=[\mp\operatorname{sign}\psi_8\vee\operatorname{sign}((\tilde u-2^{-1/3})\psi_8)]$, $u=[-(\tilde v\tilde w-3\tilde v^2\psi_{25}^{\pm}+6)(\tilde v\tilde w)^{-1}\vee -(\tilde w+2\tilde u^2+\theta_2(\tilde u)\tilde u-\theta_2^2(\tilde u))\tilde w^{-1}]$, $v=[3(4-\tilde v^3)(\tilde v\tilde w)^{-1}\vee(\psi_{24}(\tilde u,\theta_2(\tilde u))\tilde w+\psi_{35}]$;

E. $CF_{11,+1}^{6,2,<,<}$: $1_a)$ $\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\tilde\beta\neq 0$, $\neg(B4_a,C3_a)$, $1_b)$ J_3^2, $L1_{11,+1}^{6,2,<,<}$, $1_c)$ $\sigma=1$, $u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}$, $v=-(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}$;
$2_a)$ $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $\tilde\beta\neq 0$, $\tilde\alpha\neq 7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}$, $\neg(B5_a,C4_a)$, $2_b)$ J_3^2, $L1_{12}^{6,2,<,<}$, $L\hat 1_{11,+1}^{6,2,<,<}$, $2_c)$ $\sigma=\operatorname{sign}\tilde\beta$, $u=\hat a_1^*(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/2}$, $v=\hat b_1^*/\hat c_2^*$, *где* $\hat u=(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1}$, $\hat v=\psi_{16}^{1/3}(2\tilde\beta)^{-2/3}$;
$3_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\theta_1\mu$, $\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $[\tilde u\neq\tilde v/2,\ \psi_{27}\geq 0\vee\tilde u=\tilde v/2\vee\tilde v=\theta_3(\tilde u)]$, *где* $\tilde u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $\tilde v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $\tilde w=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)$, $\neg(A4_a,B6_a,B7_a,C5_a,D2_a)$, $3_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, $[L2_{11,+1}^{6,2,<,<}\vee L3_{11,+1}^{6,2,<,<}\vee L4_{11,+1}^{6,2,<,<}]$, $3_c)$ $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8$, $u=[\tilde a_1^*(\tilde a_2^*\tilde c_2^*)^{-1/2}\vee -3(4\tilde v-\tilde v^4)^{1/2}(4\tilde w)^{-1}\vee-\psi_{30}^{1/2}\psi_{31}]$, $v=[\tilde b_1^*/\tilde c_2^*\vee(4-\tilde v^3)(4\tilde v\tilde w)^{-1}\vee\psi_{36}]$;

F. $CF_2^{7,2,<,<}$: *a)* $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\theta_1\mu$, $\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $\neg(A4_a,B6_a,B7_a,C5_a,D2_a,E3_a)$, *b)* J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, *c)* $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8$, $u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $w=-9\tilde\gamma^2(\nu^2+\mu^2)(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}$.
Здесь везде запись $\neg(\dots)$ *означает, что не выполняются указанные в скобках условия.*

Доказательство. Состыкуем результаты леммы 2.2 и утверждений 2.8, 2.9, получая соответствующие пункты формулировки теоремы.

*A*1) из 2.2,1_1); *A*2) из 2.2,3), 2.9,1_a); *A*3) из 2.2,4_2), 2.9,2_a); *A*4) из 2.2,5), 2.9,4_a).
При этом в *A*4) $\tilde u=-\tilde v\Leftrightarrow 2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}+(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}=0\Leftrightarrow\psi_8+\psi_{10}=0\Leftrightarrow\nu=0$, следовательно $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\theta_1\mu$, $\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu\Leftrightarrow\theta_1\neq 0$ $(\psi_{11}(0,1)\neq 0)$, $\psi_{14}^{\pm}\neq 0\Leftrightarrow 4\tilde\beta^2-3\tilde\alpha\tilde\gamma\neq 0$, $\tilde\beta(4\tilde\beta^2-3\tilde\alpha\tilde\gamma+3\tilde\gamma^2)\neq 0$, а $\psi_8=\tilde\beta\mu$ и $\operatorname{sign}\psi_8=\operatorname{sign}\tilde\beta$.

*B*1) из 2.2,2_2^a); *B*2) из 2.2,3), 2.9,1_b); *B*3) из 2.2,4_2), 2.9,2_b); *B*4) из 2.2,1_2), 2.9,3_a); *B*5) из 2.2,2_2^b), 2.8,1), 2.9,3_a); *B*6) из 2.2,5), 2.9,4_b^1); *B*7) из 2.2,5), 2.9,4_b^2).

*C*1) из 2.2,3); *C*2) из 2.2,4_2), 2.9,2_c); *C*3) из 2.2,1_2), 2.9,3_b); *C*4) из 2.2,2_2^b), 2.8,1), 2.9,3_b); *C*5) из 2.2,5), 2.9,4_c).
При этом в *C*2) случай *A*3_a) ухода из $NSF_7^{6,2,<,<}$ невозможен, так как $\tilde u=-1$ при $\psi_{15}^{\mp}=-\tilde\varsigma$; в *C*3) и *C*4) получена именно $CF_6^{6,2,<,<}$, так как ее нельзя свести к $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ в силу того, что тогда бы была прямая замена, сводящая $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ к $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$.

*D*1) из 2.2,4_2); *D*2) из 2.2,5), 2.9,4_d).
*E*1) из 2.2,1_2); *E*2) из 2.2,2_2^b), 2.8,1); *E*3) из 2.2,5), 2.9,4_e). $\square$

Замечание 2.5. В $NSF_6^{6,2,<,<}$ в отличие от $NSF_6^{6,2,<}$ элемент $c_2=v^{-1}-v^2>0$, так как $v\in(0,1)$, поэтому можно осуществить лучшую согласно НПЗ нормировку и получить

$$NSF_{6,new}^{6,2,<,<}=\sigma\begin{pmatrix}uv & u & 0 & u(v^2+1)^2\\ 1 & 0 & 1 & v(v^2+1)\end{pmatrix},\quad p_0^2=(1,-v,1+v^2),\quad H=\sigma\begin{pmatrix}uv & u(v^2+1)\\ 1 & v\end{pmatrix}$$

с $D_0=-3v^2-4$, $D=v^2(u+1)^2+4u$. При этом $NSF_6^{6,2,<,<}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ из утверждения 2.9,1) заменой (1.8) с $r_1=\tilde v^{1/4}(1-\tilde v^3)^{-1/4}$, $s_2=r_1^3$ сводится к $NSF_{6,new}^{6,2,<,<}$ с $\sigma=\tilde\sigma$, $u=\tilde u\tilde v^{-1}$, $v=\tilde v^{3/2}(1-\tilde v^3)^{-1/2}>0$ и $ps_{6,new}^{6,2,<,<}=\{v^2+2-2(v^2+1)^{1/2}<-uv^2<v^2+2+2(v^2+1)^{1/2}\}$.

2.6.4. Выделение $mcs^{m,2,<}$. Продемонстрируем теперь линейные неособые замены, которые для некоторых полученных $CF^{m,2,<}$ позволят выделить канонические минимальные множества, введенные в определении 1.12.

Утверждение 2.10. *Только для следующих* $CF^{m,2,<}$ *из списков 2.5 и 2.6 удается ограничить значения параметров в* $cs^{m,2,<}$, *а именно:*
1) в $CF_{8,+1}^{4,2,<}$ *при* $\tilde\sigma=\sigma$, $\tilde u=u$ *замена с* $r_1,s_2=0$, $s_1,r_2=|\tilde u|^{-1/2}$ *дает* $\sigma=\tilde\sigma\operatorname{sign}\tilde u$,

$u=\tilde u^{-1}$;
2) в $CF^{4,2,<}_{34,+1}$ *нормировка* (1.8) *с* $r_1,-s_2=1$ *изменяет знак* σ; *при* $\tilde u=u$ *замена с* $s_1,r_2=|\tilde u|^{-1/2}$, $r_1,s_2=0$ *дает* $u=\tilde u^{-1}$ *без изменения* σ;
3) в $CF^{6,2,<,>}_1$ *при* $\tilde\sigma=\sigma$, $\tilde u=u$ *замена с* $r_1,s_2=0$, $s_1=v^{1/2}|\tilde u|^{-1/2}$, $r_2=v^{-1/2}|\tilde u|^{-1/2}$ *дает* $\sigma=\tilde\sigma\operatorname{sign}\tilde u$, $u=\tilde u^{-1}$ *без изменения* v;
4) в $CF^{6,2,<,=}_3$ $(u=1)$ *при* $\tilde v=v>1/2$ *замена с* $r_1=1$, $s_1=(2\tilde v-1)s_2$, $r_2=0$, $s_2=(4\tilde v-1)^{-1}$ *дает* $v=\tilde v(4\tilde v-1)^{-1}<1/2$ $(v>1/4)$;
5) в $CF^{6,2,<,=}_{4,+1}$ $(u=1)$ *при* $\tilde v=v<0$ *нормировка с* $r_1,-s_2=1$ *дает* $v=-\tilde v$;
6) в $CF^{6,2,<,<}_6$ $(u<0)$ *при* $\tilde\sigma=\sigma$, $\tilde u=u\le-1$ *замена с* $r_1,s_2=0$, $s_1=(-\tilde u)^{-1/2}$, $r_2=\tilde vs_1$ *дает* $\sigma=-\tilde\sigma$, $u=\tilde u^{-1}v^2>-1$;
7) в $CF^{6,2,<,<}_7$ $(v<0)$ *при* $\tilde\sigma=\sigma$, $\tilde u=u$, $\tilde v=v<-3$ *замена с* $r_1=-(2\tilde v+3\tilde u)\varrho$, $s_1=(\tilde v+3)\varrho$, $r_2=-s_1$, $s_2=-(\tilde v+3\tilde u-3)\varrho$, *где* $\varrho=(-\tilde v(\tilde v^2+3\tilde u\tilde v+3(\tilde u^2-\tilde u+1)))^{-1/2}$, *дает* $u=-(3\tilde u+\tilde v+3)\tilde v^{-1}$, $v=9\tilde v^{-1}>-3$ *без изменения* σ;
8) в $CF^{6,2,<,<}_{11,+1}$ $(v<0)$ *при* $\tilde\sigma=\sigma$, $\tilde u=u<0$, $\tilde v=v$ *нормировка с* $r_1,-s_2=1$ *дает* $\sigma=-\tilde\sigma$, $u=-\tilde u>0$ *без изменения* v; *при* $\tilde\sigma=\sigma$, $\tilde u=u$, $\tilde v=v<-1$ *замена с* $r_1,s_2=\tilde u\varrho$, $s_1=-r_2$, $r_2=(\tilde v+1)\varrho$, *где* $\varrho=(-\tilde v(\tilde u^2+(\tilde v+1)^2))^{-1/2}$, *дает* $u=-\tilde u\tilde v^{-1}, v=\tilde v^{-1}>-1$ *без изменения* σ.

Следствие 2.7. *Согласно соглашению 1.13 имеем:*
$acs^{4,2,<,>}_{8,+1}=\{|u|>1\}$, $acs^{4,2,<,>}_{34,+1}=\{\sigma=-1,\ u>1\}$, $acs^{4,2,<,<}_{34,+1}=\{\sigma=-1,\ u<-1\}$,
$acs^{6,2,<,>}_1=\{|u|>1\}$, $acs^{6,2,<,=}_3=\{v>1/2\}$, $acs^{6,2,<,=}_{4,+1}=\{v<0\}$,
$acs^{6,2,<,<}_6=\{u\le-1\}$, $acs^{6,2,<,<}_7=\{v<-3\}$, $acs^{6,2,<,<}_{11,+1}=\{u<0,\ v<-1\}$;
у остальных канонических форм из списка 2.5 $mcs^{m,2,<,*}=cs^{m,2,<,*}$.

2.7. Канонические формы и канонические множества при $\mathbf{l=2}$.

В заключение приведем общий список канонических форм системы (1.4) при $l=2$.

Список 2.7. Двадцать две $CF^{m,2}_i$ и их $cs^{m,2}_i$ $(\sigma,\kappa=\pm1,\ u,v,w\neq0)$.

$$CF^{2,2,=,\geqslant}_3=\sigma\begin{pmatrix}u&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_{[4]},\quad \begin{matrix}cs^{2,2,=,>}_3=\{u\neq1\},\\ cs^{2,2,=,=}_3=\{u=1\};\end{matrix}$$

$$CF^{2,2,>,\geqslant}_4=\sigma\begin{pmatrix}0&u&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_{[4]},\quad \begin{matrix}cs^{2,2,>,>}_4=\{u\neq1\},\\ cs^{2,2,>,=}_4=\{u=1\};\end{matrix}$$

$$CF^{2,2,=,\gtrless}_{7,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}0&\kappa&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{[6]},\quad \begin{matrix}cs^{2,2,=,>}_{7,\kappa}=\{\kappa=1\},\\ cs^{2,2,=,<}_{7,\kappa}=\{\kappa=-1\};\end{matrix}$$

$$CF^{2,2,>,\gtrless}_{8,\kappa}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&\kappa&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_{[6]},\quad \begin{matrix}cs^{2,2,>,>}_{8,\kappa}=\{\kappa=1\},\\ cs^{2,2,>,<}_{8,\kappa}=\{\kappa=-1\};\end{matrix}$$

$$CF^{3,2,=,\geqslant}_7=\sigma\begin{pmatrix}u&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}_{[6]},\quad \begin{matrix}cs^{3,2,=,>}_7=\{u\neq\pm1\},\\ cs^{3,2,=,=}_7=\{u=1\};\end{matrix}$$

$$CF^{3,2,>,\geqslant}_{10}=\sigma\begin{pmatrix}0&u&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}_{[7]},\quad \begin{matrix}cs^{3,2,>,>}_{10}=\{u\neq1\},\\ cs^{3,2,>,=}_{10}=\{u=1\};\end{matrix}$$

$$CF^{3,2,=,<}_{12}=\sigma\begin{pmatrix}1&u&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}_{[7]},\quad cs^{3,2,=,<}_{12}=\{u<-1/4\};$$

$$CF^{3,2,=,=}_{13}=\sigma\begin{pmatrix}0&0&u&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}_{[8]},\quad cs^{3,2,=,=}_{13}=\{u=1\};$$

$$CF^{3,2,>,*}_{16} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[8]}, \quad \begin{aligned} cs^{3,2,>,>}_{16} &= \{u > -1/4\}, \\ cs^{3,2,>,=}_{16} &= \{u = -1/4\}, \\ cs^{3,2,>,<}_{16} &= \{u < -1/4\}; \end{aligned}$$

$$CF^{4,2,\gtrless,>}_{8,\kappa} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & \kappa u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \kappa \end{pmatrix}_{[8]}, \quad \begin{aligned} cs^{4,2,>,>}_{8,-1} &= \{u \neq \pm 1\}, \\ cs^{4,2,<,>}_{8,+1} &= \{u \neq 1\}, \\ cs^{4,2,<,=}_{8,+1} &= \{u = 1\}; \end{aligned}$$

$$CF^{4,2,>,>}_{14,-1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{[9]}, \quad cs^{4,2,>,>}_{14,-1} = \{u \neq -1, -2, -3\};$$

$$CF^{4,2,>,*}_{23} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & v & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[10]}, \quad \begin{aligned} cs^{4,2,>,>}_{23} &= \{u \neq 1,\ v > -(1-u)^2/4,\ v \neq u, (2u-1)/4, u(2-u)/4\}, \\ cs^{4,2,>,=}_{23} &= \{u \neq -1,\ v = -(1-u)^2/4\}, \\ cs^{4,2,>,<}_{23} &= \{v < -(1-u)^2/4\}; \end{aligned}$$

$$CF^{4,2,<,\gtrless}_{34,+1} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{[12]}, \quad \begin{aligned} cs^{4,2,<,>}_{34,+1} &= \{u > 0,\ u \neq 1\}, \\ cs^{4,2,<,<}_{34,+1} &= \{u < 0\}; \end{aligned}$$

$$CF^{5,2,<,\geqslant}_{7} = \sigma \begin{pmatrix} u & -u & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[11]}, \quad \begin{aligned} cs^{5,2,<,>}_{7} &= \{u \neq \pm 1, 3\}, \\ cs^{5,2,<,=}_{7} &= \{u = 1\}; \end{aligned}$$

$$CF^{5,2,<,*}_{22} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[14]}, \quad \begin{aligned} cs^{5,2,<,>}_{22} &= \{u > -1/4,\ u \neq 3/2, 6, 4 \pm \sqrt{13}\}, \\ cs^{5,2,<,=}_{22} &= \{u = -1/4\}, \\ cs^{5,2,<,<}_{22} &= \{u < -1/4\}; \end{aligned}$$

$$CF^{6,2,<,>}_{1} = \sigma \begin{pmatrix} u & u & uv & 0 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{[12]}, \quad cs^{6,2,<,>}_{1} = \{u \neq \pm 1,\ v > 1/4,\ v \neq \psi^2_1(u), \psi_2(u), \psi_3(u)\};$$

$$CF^{6,2,<,=}_{3} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(1-v) & 0 & -uv^2 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}_{[13]}, \quad cs^{6,2,<,=}_{3} = \{u = 1,\ v > 1/4,\ v \neq 1/3, 1, (49 \mp 7\sqrt{46})/6\};$$

$$CF^{6,2,<,=}_{4,+1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}_{[14]}, \quad cs^{6,2,<,=}_{4,+1} = \{u = 1,\ |v| < 1\};$$

$$CF^{6,2,<,<}_{6} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(v^{-2}-v) & 0 & uv^{-3} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix}_{[14]}, \quad \begin{aligned} cs^{6,2,<,<}_{6} &= \{v \in (0,1),\ u \in (\psi^-_7(v), \psi^+_7(v)), \\ &u \neq -v,\ (u,v) \neq (-2^{-5/3}(3 \pm \sqrt{5}),\ 2^{-2/3})\}; \end{aligned}$$

$$CF^{6,2,<,<}_{7} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & -v & u+v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[15]}, \quad \begin{aligned} cs^{6,2,<,<}_{7} &= \{4v < -(u+1)^2,\ u \neq -1, \\ &v \neq -u,\ -3(u+1),\ 3(u+1)(u+2)^{-1},\ \psi_{32}(u)\}; \end{aligned}$$

$$CF^{6,2,<,<}_{11,+1} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}_{[16]}, \quad \begin{aligned} cs^{6,2,<,<}_{11,+1} &= \{4v < -u^2, \\ &v \neq \psi^{\mp}_{20}(u),\ 3(u^2+5)(u^2+1)(2(u^2-3))^{-1}\}; \end{aligned}$$

$$CF^{7,2,<,<}_{2} = \sigma \begin{pmatrix} u & w & uv^{-1} - v(uv+w) & u + wv^{-1} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix}_{[17]}, \quad \begin{aligned} cs^{7,2,<,<}_{2} = \{&v \in (0, \sqrt[3]{4}),\ v \neq 1, -u, 2u, \theta_3(u), \\ &w \neq -uv, -u(v-v^{-2}), \psi^{\mp}_{33}(u,v), \\ &4w < -(u+v)^2, \psi_{27}(u,v,w) < 0, \end{aligned}$$

$$(u,w) \neq ([-4v \vee \psi^{\mp}_{25}(v)],\ [3v(4v + \psi^-_{25}(v))/2 \vee 3(v\psi^{\pm}_{25}(v) - 2v^{-1})]),$$
$$(v,w) \neq ([7^{-1/3} \vee \theta_2(u)],\ [3(7^{-1/3}u + 7^{-2/3}) \vee (u + \theta_2(u))(\theta_2(u) - 2u)])\}.$$

Замечание 2.6. Только $CF^{4,2,\gtrless,>}_{8,\kappa}$ имеет канонические множества, соответствующие разным знакам дискриминанта D_0 и только в $CF^{3,2,>,*}_{16}$, $CF^{4,2,>,*}_{23}$, $CF^{5,2,<,*}_{22}$ реализуются все три возможных значения дискриминанта D.

3. Заключение.

Таким образом, полностью решены все поставленные в [1] задачи классификации для случая $l = 2$: в списке 2.7 представлены все канонические формы со своими каноническими множествами значений параметров; в теоремах 2.2 – 2.5 для каждой из канонических форм даны условия на коэффициенты исходной системы, замены, сводящие систему в соответствующую форму, получаемые значения коэффициентов формы; а в утверждениях 2.3, 2.6, 2.10 указаны минимальные канонические множества.

В настоящее время ведется работа по описанию случая $l = 1$ в столь же полном объеме. Так как после вынесения общего множителя в этом случае остается матрица коэффициентов 2x3, требуются как новые подходы для осуществления классификации так и новая программная основа для работы в Maple.

Список литературы

[1] *Басов В. В.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы – I // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.— 2016. Т. 3 (61). Вып. 2.— С. 181–195 (http://elibrary.ru/item.asp?id=26421300).

[2] *Басов В. В.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы – II // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.— 2016. Т. 3 (61). Вып. 3.— С. 355-371 (http://elibrary.ru/item.asp?id=26674443).

[3] *Басов В. В., Чермных А. С.* Канонические формы двумерных однородных кубических систем с квадратичным общим множителем // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2016. № 3. С. 66-190 (http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/basovch.pdf).