ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГУ)
Кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц
Направление «Физика»

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ: АНАЛИЗ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПАРАМЕТРАХ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ

Магистерская диссертация студента

____________________ **Николаева Алексея Владимировича**

Научный руководитель:
___________________________ к.ф.-м.н., доц. **Головнёв А.В.**

Рецензент:
___________________________ к.ф.-м.н., с.н.с **Кудрявцев В.А.**

Санкт–Петербург
2017

Оглавление

Глава 1

Введение

Теория относительности Эйнштейна за более чем сто лет широко признана научным сообществом и является одной из основных теоретических концепций современной физики. Она подтверждена множеством экспериментов, таких как гравитационное отклонение света Солнцем [1], изменение перигелия Меркурия [2], гравитационное красное смещение [3], [4] расширение Вселенной [5] и др. Не так давно одно из следствий общей теории относительности – существование гравитационных волн, – было подтверждено [6].

Однако, по сей день находятся проблемы, которые не могут быть объяснены силами ОТО, основные заключаются в области тёмной материи и тёмной энергии [7], [8], а также в объяснении инфляции [9], [10]. Поэтому интересны попытки ее модифицировать. Они не всегда имеют большой успех, однако есть методы, позволяющие найти решение и модифицировать теорию относительности для большего соответствия наблюдениям и экспериментальным данным.

Один из таких способов – введение нелинейной скалярной функции в действие [11]. При таком рассмотрении могут появляться как новые степени свободы, так и фантомные состояния. Эти методы несовершенны, но на них возлагаются определённые надежды, тем более что их достоверность подтверждается в экспериментах [12], [13].

Актуальность работы состоит в исследовании гибридной теории гравитации [14], [15], т.к. она представляется как наиболее эффективная теория, расширяющая общую теорию относительности путём введения нелинейной скалярной функции в действие. Большая часть посвящена обзору для большей наглядности различий теорий.

Структура работы выглядит следующим образом. В первой главе даётся обзор $f(R)$-гравитации в двух формализмах: метрическом и Палатини, выводятся уравнения поля. Отдельное внимание уделено гибридной теории гравитации, в особенности в скаляр-тензорной формулировке, даны уравнения поля как в общем виде, так и при конкретных f. Вторая глава посвящена $f(T)$-гравитации. Дана теория с ненулевым кручением.

Глава 2

Описание $f(R)$ теорий гравитации

2.1 $f(R)$ теория гравитации

Есть два вариационных принципа, применимых к действию Эйнштейна-Гильберта, для получения уравнений Эйнштейна: метрический [16], [17], [18] и принцип Палатини [19]. В конце концов, оба принципа эквивалентны и приводят к одинаковым уравнениям поля в случае лагранжиана, линейного по R. Однако, это неверно в более общих случаях. Таким образом, существует две разные версии $f(R)$ гравитации: метрическая $f(R)$-гравитация и Палатини $f(R)$-гравитация. Также, есть более общая формулировка метрически-аффинной $f(R)$-гравитации, которая сводится к двум предыдущим при определённых допущениях, её особенности и отличия от в приложении к основной теме диссертации несущественны. Далее обсуждаются первые две формулировки.

2.1.1 Метрический формализм

Рассмотрим действие в метрической $f(R)$-гравитации:

$$S_{metric} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}f(R) + S^{(m)}. \tag{2.1}$$

Из вариации действия по $g^{\mu\nu}$ можем получить полевые уравнения:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\alpha f'(R) = \kappa^2 T^{(m)}_{\mu\nu}. \tag{2.2}$$

∇_ν - ковариантная производная Леви-Чивитовской связи метрики. Тензор энергии-импульса материи определяется как

$$T^{(m)}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}^{(m)}\right)}{\delta\left(g^{\mu\nu}\right)}. \tag{2.3}$$

После взятия следа уравнения (1.3) получаем

$$3\Box f'(R) + Rf'(R) - 2f(R) = \kappa^2 T, \tag{2.4}$$

Отсюда видно, что R зависит от $T = T^\alpha_\alpha$ дифференциально, а не алгебраически, как в ОТО. Это свидетельствует о том, что решений в $f(R)$-теориях больше, чем в Эйнштейновской теории. Отдельно скажем про максимально симметричные решения. Для их нахождения скаляр Риччи должен быть постоянен. При $R = const$ и $T_{\mu\nu} = 0$ уравнение приходит к виду

$$Rf'(R) - 2f(R) = 0, \tag{2.5}$$

что является для фиксированной функции $f(R)$ алгебраическим уравнением на R. Если корень уравнения $R = 0$, то уравнение (1.5) сводится к $R_{\mu\nu} = 0$, что является максимально симметричным решением в пространстве-времени Минковского. Если же корень $R = C$, где C —константа, из того же уравнения получаем $R_{\mu\nu} = \frac{Cg_{\mu\nu}}{4}$, что является максимально симметричным решением в пространстве де Ситтера либо анти-де Ситтера, в зависимости от знака C. Уравнения поля (1.5) могут быть переписаны в форме уравнений Эйнштейна с эффективным тензором энергии-импульса:

$$G_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} + T^{eff}_{\mu\nu}\right), \tag{2.6}$$

где эффективный тензор энергии-импульса

$$T^{eff}_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{f(R) - Rf'(R)}{2}g_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\alpha f'(R)\right). \tag{2.7}$$

2.1.2 Формализм Палатини

Уравнения Эйнштейна можно получать в формализме Палатини, т.е. независимо варьировать по независимым связям и метрике. Формально, действие приобретает аналогичный вид, но тензор Римана и, следовательно, тензор Риччи зависят уже от независимых связей. Обозначим такой тензор Риччи $\mathcal{R}_{\mu\nu}$, а соответсвующий тензор Риччи $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$. Тогда действие будет записано следующим образом:

$$S_{Palatini} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}f(\mathcal{R}) + S^{(m)}. \tag{2.8}$$

Варьируя действие (1.8) независимо по метрике и связям, и используя равенство $\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} = \hat{\nabla}_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \hat{\nabla}_\nu \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}$, где $\hat{\nabla}_\nu$ —ковариантная производная, определяемая через независимые связи $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, получаем следующие уравнения:

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f(\mathcal{R})g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \tag{2.9}$$

$$-\hat{\nabla}_\lambda\left(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{\mu\nu}\right) + \hat{\nabla}_\sigma\left(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{\sigma(\mu}\right)\delta^{\nu)}_\lambda = 0. \tag{2.10}$$

$T_{\mu\nu}$ определяется по формуле (1.3), а $(\mu\nu)$ —симметризация по соответствующим индексам. Взяв след от послденего уравнения, получаем

$$\hat{\nabla}_\sigma\left(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{\sigma\mu}\right) = 0, \tag{2.11}$$

что означает, что полевые уравнения можно переписать в более компактной форме:

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f(\mathcal{R})g_{\mu\nu} = \kappa^2 G T_{\mu\nu} \tag{2.12}$$

$$\hat{\nabla}_\lambda\left(\sqrt{-g}f'(\mathcal{R})g^{\mu\nu}\right) = 0. \tag{2.13}$$

Теперь легко увидеть, что теория сводится к ОТО при $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$: тогда $f'(\mathcal{R}) = 1$, а уравнение (1.13) определяет изначально независимые связи как связи Леви-Чивиты относительно метрики $\tilde{g}^{\mu\nu} = f'(\mathcal{R})g^{\mu\nu}$. Также, $\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}, \mathcal{R} = R$ и уравнение (1.12) сводится к уравнению Эйнштейна.

2.2 Гибридная теория гравитации

В гибридной теории гравитации действие Эйнштейн-Гильберта дополнено слагаемыми, сконструированными по принципу Палатини [14]. Таким образом, можно получить простое расширение ОТО с интересными свойствами. Возможность применения скаляр-тензорного подхода упрощает анализ этих теорий. Далее представлен как анализ в метрической, так и в скаляр-тензорной формулировке, а также рассмотрены некоторые особенности обеих формулировок.

2.2.1 Метрическая формулировка

Запишем действие в гибридной $f(X)$-теории без материи:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,(R + f(\mathcal{R})), \tag{2.14}$$

где скаляр Риччи – это кривизна Палатини, и зависит от независимых связей $\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$ следующим образом:

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(\partial_\alpha\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu\hat{\Gamma}^\alpha_{\alpha\mu} + \hat{\Gamma}^\alpha_{\alpha\lambda}\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^\alpha_{\lambda\mu}\hat{\Gamma}^\lambda_{\alpha\nu}) \tag{2.15}$$

Соответственно, тензор Риччи:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \partial_\alpha\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu\hat{\Gamma}^\alpha_{\alpha\mu} + \hat{\Gamma}^\alpha_{\alpha\lambda}\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^\alpha_{\lambda\mu}\hat{\Gamma}^\lambda_{\alpha\nu}. \tag{2.16}$$

Варьируя действие (1.16) по метрике, получаем уравнение гравитационного поля:

$$G_{\mu\nu} + f'(\mathcal{R})\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(\mathcal{R})g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \tag{2.17}$$

где тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ записывается по фрмуле (1.3). Варьируя по независимым связям, можно увидеть, что решение получившегося уравнения движения описывается метрикой $f'(\mathcal{R})g_{\mu\nu}$, т.е. метрикой, конформно связанной с $g_{\mu\nu}$ с конформным фактором $f'(\mathcal{R})$. Это значит, что тензор Риччи можно записать как

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3}{2f'(\mathcal{R})^2}\partial_\mu\left(f'(\mathcal{R})\right)\partial_\nu\left(f'(\mathcal{R})\right) - \frac{1}{f'(\mathcal{R})}\left(\nabla_\mu\left(\partial_\nu f'(\mathcal{R})\right) + \frac{g_{\mu\nu}}{2}\nabla^\alpha\nabla_\alpha f'(\mathcal{R})\right). \tag{2.18}$$

Кривизна Палатини $\mathcal{R}$ может быть получена из следа уравнения поля (1.17):

$$\mathcal{R}f'(\mathcal{R}) - 2f(\mathcal{R}) = \kappa^2 T + R = X. \tag{2.19}$$

Таким образом, $\mathcal{R}$ алгебраически выражается в терминах X, если $f(\mathcal{R})$ допускае таналитические решения. По сути, переменная X показывает, насколько теория отличается от уравнения ОТО $R = -\kappa^2 T$. Именно поэтому иногда гибридную теорию гравитации называют $f(X)$-теорией. Можно выразить уравнения поля (1.17) через X:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}f(X)g_{\mu\nu} - f'(X)R_{\mu\nu} + f''(X)\nabla_\mu\left(\partial_\nu X\right) + \frac{1}{2}\left(f''(X)\nabla^\alpha\nabla_\alpha X + f'''(X)(\partial X)^2\right)g_{\mu\nu} + \tag{2.20}$$

$$+\left(f'''(X) - \frac{3}{2}\frac{f''(X)^2}{f'(X)}\right)\partial_\mu X\partial_\nu X + \kappa^2 T. \tag{2.21}$$

След полевого уравнения тогда

$$f''(X)\nabla^\alpha\nabla_\alpha X + \left(f'''(X) - \frac{1}{2}\frac{f''(X)^2}{f'(X)}\right)(\partial X)^2 + \frac{1}{3}\left(X + 2f(X) - f'(X)R\right) = 0, \tag{2.22}$$

также связь между метрической кривизной и кривизной Палатини

$$\mathcal{R}(X) = R + \frac{3}{2}\left(\left(\frac{f''(X)}{f'(X)}\right) - 2\frac{\nabla^\alpha\nabla_\alpha f'(X)}{f'(X)}\right). \tag{2.23}$$

2.2.2 Скаляр-тензорная формулировка

Введением вспомогательного поля A можно преобразовать теорию в скаляр-тензорную. Тогда действие (1.14) будет выглядеть следующим образом:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(R + f(A) + f_A(\mathcal{R} - A)\right) \tag{2.24}$$

Переобозначив $\phi = f_A(A), V(\phi) = \phi A - f(A)$ получаем

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(R + \phi\mathcal{R} - V(\phi)\right). \tag{2.25}$$

При варьировании (1.25) по $\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$ получаем $\hat{\nabla}_\alpha(\sqrt{-g}\phi g_{\mu\nu}) = 0$. Это значит, что $\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$ —связи Леви-Чивиты относительно метрики $\hat{g}_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}$. Можем выразить независимые связи через $g_{\mu\nu}$:

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\hat{g}^{\alpha\beta}\left(\partial_\nu\hat{g}_{\beta\mu} + \partial_\mu\hat{g}_{\beta\nu} - \partial_\beta\hat{g}_{\mu\nu}\right) =$$

$$= \frac{g^{\alpha\beta}}{2\phi}\left((\partial_\nu\phi)g_{\beta\mu} + (\partial_\mu\phi)g_{\beta\nu} - (\partial_\beta\phi)g_{\mu\nu} + \phi(\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu})\right) \tag{2.26}$$

Их можно выразить через $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$:

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \frac{g^{\alpha\beta}}{2\phi}((\partial_\nu\phi)g_{\beta\mu} + (\partial_\mu\phi)g_{\beta\nu} - (\partial_\beta\phi)g_{\mu\nu}) \tag{2.27}$$

Тогда соответствующий тензор Риччи запишется в следующем виде:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3}{2\phi^2}\left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial_\nu\phi\right) - \frac{1}{\phi}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \frac{g_{\mu\nu}}{2}\nabla^\alpha\nabla_\alpha\phi\right) \tag{2.28}$$

Действие в скаляр-тензорной теории:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left((1+\phi)R + \frac{3g_{\mu\nu}}{2\phi}\left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial_\nu\phi\right) - V(\phi)\right) \tag{2.29}$$

Далее можно применить конформное преобразование к метрике, дабы избавиться от множителя $(1+\phi)$ перед скаляром кривизны. Введём новый метрический тензор $\tilde{g}_{\mu\nu}$ такой, что $g_{\mu\nu} = \frac{1}{(1+\phi)}\tilde{g}_{\mu\nu}$.Тогда тензор Риччи, выраженный через новую метрику, будет выглядеть так (без учёта поверхностных слагаемых):

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{3\tilde{g}_{\mu\nu}}{2(1+\phi)^2}\left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial_\nu\phi\right). \tag{2.30}$$

Тогда конечное действие может быть записано в следующем виде:

$$S = \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\left(\tilde{R} + \frac{3}{2}\frac{(1-\phi)}{\phi(1+\phi)}\tilde{g}_{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial_\nu\phi\right) - V(\phi)\right) \tag{2.31}$$

Пусть $\tilde{g}_{\mu\nu} = a^2(t)\eta_{\mu\nu}$. Проварьируем действие по метрике:

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\left(\frac{3}{2}\frac{(1-\phi)}{\phi(1+\phi)}\left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial_\nu\phi\right)\right)\delta\tilde{g}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}_{\mu\nu}\left(\frac{3}{2}\frac{(1-\phi)}{\phi(1+\phi)}\tilde{g}^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha\phi\right)\left(\partial_\beta\phi\right) - V(\phi)\right)\delta\tilde{g}^{\mu\nu} \tag{2.32}$$

Тензор энергии-импульса тогда выглядит так:

$$T_{\mu\nu} = \left(\frac{3}{4}\frac{(1-\phi)}{\phi(1+\phi)}\left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial_\nu\phi\right) + \frac{1}{2}a^2(t)\eta_{\mu\nu}V(\phi)\right) \tag{2.33}$$

Его компоненты:

$$T_{00} = \frac{1}{2}a^2(t)V(\phi) + \frac{3}{4}\frac{(1-\phi)}{\phi(1+\phi)}\dot{\phi}^2 \tag{2.34}$$

$$T_{ij} = \left(\frac{1}{2}a^2(t)V(\phi) - \frac{3}{4}\frac{(1-\phi)}{\phi(1+\phi)}\dot{\phi}^2\right)\eta_{ij} \tag{2.35}$$

Тензор Эйнштейна вычисляется по формуле $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}R$. Можно найти его компоненты, выразив явно $R_{\mu\nu}$ через $a^2(t)$. Запишем ненулевые компоненты $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$:

$$\Gamma^0_{ij} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\eta_{ij} \tag{2.36}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\delta^i_j \tag{2.37}$$

Компоненты тензора Риччи и скаляр Риччи:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}a - (\dot{a})^2}{a^2} \tag{2.38}$$

$$R_{ij} = -\left(\frac{\ddot{a}a - (\dot{a})^2}{a^2} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)\eta_{ij} \tag{2.39}$$

$$R = -6\frac{\ddot{a}}{a} \tag{2.40}$$

Из этого можно получить следующие уравнения в терминах $H = \frac{\dot{a}}{a}$:

$$3H^2 = \frac{1}{2}a^2(t)V(\phi) + \frac{3}{4}\frac{(1-\phi)}{\phi(1+\phi)}\dot{\phi}^2 \tag{2.41}$$

$$2\dot{H} + H^2 = \frac{1}{2}a^2(t)V(\phi) - \frac{3}{4}\frac{(1-\phi)}{\phi(1+\phi)}\dot{\phi}^2 \tag{2.42}$$

Путём несложных преобразований, можно получить уравнения, связывающие $\phi(t)$ и $a(t)$:

$$\frac{(1-\phi)}{\phi(1+\phi)}\dot{\phi}^2 = \frac{4}{3}\left(H^2 - \dot{H}\right) \tag{2.43}$$

$$V(\phi) = \frac{2}{a^2}\left(2H^2 + \dot{H}\right) \tag{2.44}$$

Положим $a = \sqrt{1+\phi}$, чтобы метрика $g_{\mu\nu}$ была плоской. Тогда $H = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{1+\phi}\right)$, $\dot{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{\phi}}{1+\phi} - \left(\frac{\dot{\phi}}{1+\phi}\right)^2\right)$. Уравнения (1.43) и (1.44) в этом случае получаем следующего вида:

$$\frac{(1-\phi)}{\phi(1+\phi)}\dot{\phi}^2 = -\frac{2}{3}\left(2\frac{\ddot{\phi}}{1+\phi} - \left(\frac{\dot{\phi}}{1+\phi}\right)^2\right) \tag{2.45}$$

$$V(\phi) = 2\left(\frac{\ddot{\phi}}{(1+\phi)^2}\right). \tag{2.46}$$

Получаем уравнение на $\phi(t)$:

$$\ddot{\phi} + \left(-3 + \frac{3}{\phi} - \frac{2}{1+\phi}\right)\dot{\phi}^2 = 0. \tag{2.47}$$

Это нелинейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, нахождение его общего решения представляется интересной задачей для последующих исследований. Учитывая, что $\phi = f_A(A)$, для конкретных функций f это уравнение может быть решено. В данной работе ограничимся записью уравнений, т.е. найдём дифференциальные уравнения для $\phi = \phi(A)$ и $V(\phi) = V(A)$.

$f = \alpha R^2$

$$\phi = 2\alpha A, \tag{2.48}$$
$$\dot{\phi} = 2\alpha \dot{A}, \tag{2.49}$$
$$\ddot{\phi} = 2\alpha \ddot{A}. \tag{2.50}$$

Уравнения поля выглядят следующим образом:

$$\ddot{A} + 2\alpha\left(-3 + \frac{3}{2\alpha A} - \frac{2}{1+2\alpha A}\right)(\dot{A})^2 = 0, \tag{2.51}$$
$$V(A) = \frac{4\alpha}{1+2\alpha A}\ddot{A}. \tag{2.52}$$

$f = \beta \frac{1}{R}$

$$\phi = -\beta\frac{1}{A^2}, \tag{2.53}$$
$$\dot{\phi} = 2\beta\frac{1}{A^3}\dot{A}, \tag{2.54}$$
$$\ddot{\phi} = 2\beta\left(-3\frac{1}{A^4}(\dot{A})^2 + \frac{1}{A^3}\ddot{A}\right). \tag{2.55}$$

Уравнения поля:

$$\ddot{A} - 2\beta\left(\frac{3}{A^3} + \left(6\beta + \frac{3}{\beta} + \frac{2}{A^2-\beta}\right)\frac{1}{A}\right)(\dot{A})^2 = 0, \tag{2.56}$$
$$V(A) = 4\beta\left(\frac{1}{A(A^2-\beta)}\ddot{A} - \frac{3}{A^2(A^2-\beta)}(\dot{A})^2\right). \tag{2.57}$$

2.2.3 Предел слабого поля

Далее, посмотрим на метрику с флуктуациями $\tilde{g}_{\mu\nu} = a^2(t)\left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right)$, обратная, соответственно, $\tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2(t)}\left(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}\right)$. Скаляр Риччи можно записать в следующем виде:

$$R = \tilde{g}^{\mu\nu}(R^{(1)}_{\mu\nu} + R^{(2)}_{\mu\nu}) = \frac{1}{a^2(t)}(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})R^{(1)}_{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu}R^{(2)}_{\mu\nu}, \tag{2.58}$$

где $R^{(1)}_{\mu\nu}$ и $R^{(2)}_{\mu\nu}$ —тензор Риччи в первом и втором порядке разложения по $h_{\mu\nu}$ соответственно. Для получения тензора Риччи сначала запишем связи:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}\right)\left(\partial_\nu h_{\beta\mu} + \partial_\mu h_{\beta\nu} - \partial_\beta h_{\mu\nu}\right) \tag{2.59}$$

Запишем отдельно выражения вида $\partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}$:

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = {}& \frac{1}{2}\left(\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}\right)\left(\partial_\alpha\partial_\nu h_{\beta\mu} + \partial_\alpha\partial_\mu h_{\beta\nu} - \partial_\alpha\partial_\beta h_{\mu\nu}\right)\\ & -\frac{1}{2}\partial_\alpha h^{\alpha\beta}\left(\partial_\nu h_{\beta\mu} + \partial_\mu h_{\beta\nu} - \partial_\beta h_{\mu\nu}\right) =\\ & = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha\partial_\nu h^{\alpha}_{\mu} + \partial_\alpha\partial_\mu h^{\alpha}_{\nu} - \partial_\alpha\partial^\alpha h_{\mu\nu}\right)\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} = {}& \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\left(\partial_\lambda h_{\beta\mu} + \partial_\mu h_{\beta\lambda} - \partial_\beta h_{\lambda\mu}\right)\eta^{\lambda\rho}\left(\partial_\nu h_{\alpha\rho} + \partial_\alpha h_{\rho\nu} - \partial_\rho h_{\alpha\nu}\right) =\\ & = \frac{1}{4}\left(\partial_\lambda h^{\alpha}_{\mu} + \partial_\mu h^{\alpha}_{\lambda} - \partial^\alpha h_{\lambda\mu}\right)\left(\partial_\nu h^{\lambda}_{\alpha} + \partial_\alpha h^{\lambda}_{\nu} - \partial^\lambda h_{\alpha\nu}\right)\end{aligned} \tag{2.61}$$

Таким образом, первый и второй порядок разложения тензора Риччи выглядят следующим образом:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \partial_\nu h_\mu^\alpha + \partial_\alpha \partial_\mu h_\nu^\alpha - \partial_\alpha \partial^\alpha h_{\mu\nu}\right) - \partial_\mu \partial_\nu h_\alpha^\alpha =$$
$$= \partial_\alpha \partial_\nu h_\mu^\alpha - \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \partial^\alpha h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h_\alpha^\alpha\right) \tag{2.62}$$

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{4}\partial_\lambda h_\alpha^\alpha \left(\partial_\nu h_\mu^\lambda + \partial_\mu h_\nu^\lambda - \partial^\lambda h_{\mu\nu}\right) -$$
$$-\frac{1}{4}\left(\partial_\lambda h_\mu^\alpha + \partial_\mu h_\lambda^\alpha - \partial^\alpha h_{\lambda\mu}\right)\left(\partial_\nu h_\alpha^\lambda + \partial_\alpha h_\nu^\lambda - \partial^\lambda h_{\alpha\nu}\right) \tag{2.63}$$

Подставив выражения (18) и (19) в формулу (14), получим первый и второй порядки разложения скаляра Риччи:

$$R^{(1)} = \frac{1}{a^2(t)}\eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{a^2(t)}\left(\partial_\alpha \partial^\mu h_\mu^\alpha - \partial_\alpha \partial^\alpha h\right) = 0 \tag{2.64}$$

$$R^{(2)} = \frac{1}{a^2(t)}\left(-h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} + \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)}\right) \tag{2.65}$$

Рассмотрим слагаемые в $R^{(2)}$ отдельно:

$$-h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} = \partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial_\nu h_\mu^\alpha - \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha h^{\mu\nu} \partial^\alpha h_{\mu\nu} + \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h_\alpha^\alpha\right) \tag{2.66}$$

$$\eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{4}\partial_\lambda h_\alpha^\alpha \left(\partial^\mu h_\mu^\lambda + \partial_\mu h^{\lambda\mu} - \partial^\lambda h_\mu^\mu\right) -$$
$$-\frac{1}{4}\left(\partial_\lambda h_\mu^\alpha + \partial_\mu h_\lambda^\alpha - \partial^\alpha h_{\lambda\mu}\right)\left(\partial^\mu h_\alpha^\lambda + \partial_\alpha h^{\lambda\mu} - \partial^\lambda h_\alpha^\mu\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\partial^\alpha h_{\lambda\mu} \partial_\alpha h^{\lambda\mu} - 2\partial_\lambda h_\mu^\alpha \partial_\alpha h^{\lambda\mu} + 2\partial_\lambda h_\alpha^\alpha \partial^\mu h_\mu^\lambda - \partial_\lambda h_\alpha^\alpha \partial^\lambda h_\mu^\mu\right) \tag{2.67}$$

Также

$$\frac{1}{2}h_\beta^\beta \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\alpha h_\beta^\beta \partial^\mu h_\mu^\alpha - \partial_\alpha h_\beta^\beta \partial^\alpha h_\gamma^\gamma\right) \tag{2.68}$$

Если сложить последние три формулы, получится следующее:

$$\left(\frac{1}{2}h_\beta^\beta \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}\right) R_{\mu\nu}^{(1)} + \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)} = -\frac{1}{2}\left(\partial^\alpha h_{\lambda\mu} \partial_\alpha h^{\lambda\mu} - 2\partial_\lambda h_\mu^\alpha \partial_\alpha h^{\lambda\mu} + 2\partial_\lambda h_\alpha^\alpha \partial^\mu h_\mu^\lambda - \partial_\lambda h_\alpha^\alpha \partial^\lambda h_\mu^\mu\right) \tag{2.69}$$

Действие, квадратичное по флуктуациям, будет записано так:

$$S = -\int d^4x \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{2a^2(t)}\left(\partial^\alpha h_{\lambda\mu} \partial_\alpha h^{\lambda\mu} - 2\partial_\lambda h_\mu^\alpha \partial_\alpha h^{\lambda\mu} + 2\partial_\lambda h_\alpha^\alpha \partial^\mu h_\mu^\lambda - \partial_\lambda h_\alpha^\alpha \partial^\lambda h_\mu^\mu\right) +$$
$$+\int d^4x \sqrt{-\tilde{g}}\left(\frac{3}{2}\frac{(1-\phi)}{\phi(1+\phi)}a^2(t)\left(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right)\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial_\nu \phi\right) - V(\phi)\right) \tag{2.70}$$

Исследование альтернативных теорий гравитации в пределе слабого поля с порядком разложения большим двух представляет собой большой интерес, однако это требует отдельного рассмотрения, выходящего за рамки текущей работы. Этому будут посвящены последующие научные изыскания.

Глава 3

Описание $f(T)$ теорий гравитации

Теории, основанные на телепараллельной гравицией, исследуются как альтернатива инфляционным моделям [20], [21]. В $f(T)$-теориях используются связи Вейтенсбока, а не Леви-Чивиты. В них вместо кривизны исподьзуется кручение. Аналогично ОТО, где в действии стоит скаляр кривизны R, телепараллельная гравитация использует торсионный скаляр T. По аналогии с прежде рассматриваемыми $f(R)$-теориями, производится обобщение действия через $f(T)$. Одно из важных свойств состоит в том, что уравнения поля получаются второго порядка, в отличие от уравнений поля четвёртого порядка в $f(R)$-теории.

3.1 Формализм теорий с ненулевым кручением

Начнём с действия в $f(T)$-теории:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}f(T) + S^{(m)}, \tag{3.1}$$

где T —торсионный скаляр, $f(T)$ —дифференцируемая функция кручения, $S^{(m)}$ —часть действия, относящаяся к Лагранжиану материи. Торсиооный скаляр определён следующим равенством:

$$T = S_\rho^{\mu\nu}T^\rho_{\mu\nu}, \tag{3.2}$$

где

$$S^{\mu\rho\sigma} = \frac{1}{4}\left(T^{\mu\rho\sigma} + T^{\rho\mu\sigma} - T^{\sigma\mu\rho}\right) - \frac{1}{2}\left(g^{\mu\sigma}T_\lambda^{\lambda\rho} - g^{\rho\mu}T_\lambda^{\lambda\sigma}\right), \tag{3.3}$$

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = e_i^\lambda\left(\partial_\mu e^i_\nu - \partial_\nu e^i_\mu\right). \tag{3.4}$$

Здесь e^i_μ —компоненты тетрадного поля в координатном базисе. Метрика связана с тетрадным полем следующим равенством:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ij}e^i_\mu e^j_\nu. \tag{3.5}$$

η_{ij} —пространство Минковскогодля касательного пространства, $\eta_{ij} = diag(+1, -1, -1, -1)$. Для заданной метрики существует бесконечное количество тетрадных полей h_i, которые связаны следующим образом:

$$e^i_\mu e^\mu_j = \delta^i_j \tag{3.6}$$

$$e^i_\mu e^\nu_i = \delta^\nu_\mu. \tag{3.7}$$

Латинские значки используются для индексов касательного пространства, соответственно, греческие —для индексов пространства-времени. Вариация действия (2.1) п

$$\frac{1}{e}\left(\partial_\mu\left(eS_i^{\mu\nu}\right) + e_i^\lambda T^\rho_{\mu\lambda}S_\rho^{\nu\mu}\right)f_T + S_i^{\mu\nu}\partial_\mu(T)f_{TT} + \frac{1}{4}e_i^\nu f = \frac{1}{2}\kappa^2 e_i^\rho T_\mu^\nu. \tag{3.8}$$

Здесь $e = sqrt{-g}$, $f_T = \frac{df}{dT}$, $f_{TT} = \frac{d^2f}{dT^2}$, $S_i^{\mu\nu} = e_i^\rho S_\rho^{\mu\nu}$, T_μ^ν —тензор энергии-импульса. Запишем метрику Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2, \tag{3.9}$$

где t —космическое время. Для этой метрики

$$e^i_\mu = diag(1, a(t), a(t), a(t)), H = \frac{\dot{a}}{a}, T = -6H^2, \tag{3.10}$$

модифицированные уравнения Фридмана выглядят следующим образом:

$$-2Tf_T + f = 2\kappa^2\rho \tag{3.11}$$

$$-8\dot{H}Tf_{TT} + \left(2T - 4\dot{H}\right) f_T - f = 2\kappa^2 p \tag{3.12}$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \tag{3.13}$$

При $f(T) = T$ они превращаются в уравнения Фридмана в ОТО, так что (2.11)-(2.12) могут быть записаны так:

$$\frac{3}{\kappa^2}H^2 = \rho + \rho_T, \tag{3.14}$$

$$\frac{1}{\kappa^2}\left(2\dot{H} + 3H^2\right) = -\left(p + p_T\right), \tag{3.15}$$

где

$$\rho_T = \frac{1}{\kappa^2}\left(2Tf_T - f + 6H^2\right), \tag{3.16}$$

$$p_T = -\frac{1}{\kappa^2}\left(-8\dot{H}Tf_{TT} + \left(2T - 4\dot{H}\right) f_T - F + 4\dot{H} + 6H^2\right). \tag{3.17}$$

Скаляр-торсионная теория формулируется отсюда путём задания функций ϕ, V таким образом:

$$\epsilon\dot{\phi}^2 = -8\dot{H}Tf_{TT} - 4\dot{H}f_T, \tag{3.18}$$

$$V = 4\dot{H}Tf_{TT} - 2\left(T - \dot{H}\right) f_T + F. \tag{3.19}$$

Тогда подстановкой получаем следующие уравнения:

$$-2Tf_T + f = 2\kappa^2\left(\frac{1}{2}\epsilon\dot{\phi}^2 + V\right), \tag{3.20}$$

$$-8\dot{H}Tf_{TT} + 2\left(T - 2\dot{H}\right) f_T - f = 2\kappa^2\left(\frac{1}{2}\epsilon\dot{\phi}^2 - V\right), \tag{3.21}$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \epsilon\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \tag{3.22}$$

$\epsilon = 1$ в обычном случае, $\epsilon = -1$ для фантомного состояния. Сравнив с (2.11)-(2.12) получим, что

$$\rho = \frac{1}{2}\epsilon\dot{\phi}^2 + V, \tag{3.23}$$

$$p = \frac{1}{2}\epsilon\dot{\phi}^2 - V. \tag{3.24}$$

Глава 4

Заключение

В данной работе были освещены два наиболее популярных вида теорий, обобщающих ОТО при помощи введения нелинейной скалярной функции в действие. В обеих теориях были рассмотрены основные принципы, а также выведены уравнения поля. Предметом особого интереса в работе является $f(X)$-гравитация как наиболее близкая к ОТО теория, которая тем не менее даёт новые результаты. Большее внимание было уделено $f(R)$-гравитации, нежели телепараллельным теориям вследствие малого количества собственного материала по теме. Тем не менее, сравнение теорий на основе данной работы представляется возможным.

Данная работа является вводной для более подробного исследования альтернативных теорий гравитации в общем и $f(X)$-гравитации в частности, а также их расширений.

Литература

1. Frank W Dyson, Arthur S Eddington, and Charles Davidson. A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 220(571-581):291–333, 1920.

2. Albert Einstein. The foundation of the general theory of relativity. Annalen Phys. 49, 769-822, [Annalen Phys. 14, 517(2005)], 1916.

3. Robert V Pound and GA Rebka Jr. Gravitational red-shift in nuclear resonance. Physical Review Letters, 3(9):439, 1959.

4. Robert V Pound and GA Rebka Jr. Apparent weight of photons. Physical Review Letters, 4(7):337, 1960.

5. Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. Proceedings of the National Academy of Sciences, 15 (3):168–173, 1929.

6. BP Abbott, Richard Abbott, TD Abbott, MR Abernathy, Fausto Acernese, Kendall Ackley, Carl Adams, Thomas Adams, Paolo Addesso, RX Adhikari, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. Physical review letters, 116(6):061102, 2016.

7. Salvatore Capozziello and Mariafelicia De Laurentis. Extended theories of gravity. Physics Reports, 509(4):167–321, 2011.

8. Salvatore Capozziello and Valerio Faraoni. Beyond Einstein gravity: A Survey of gravitational theories for cosmology and astrophysics, volume 170. Springer Science and Business Media, 2010.

9. Alexei A Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. Physics Letters B, 91(1):99–102, 1980.

10. Alan H Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. Physical Review D, 23(2):347, 1981.

11. Salvatore Capozziello and Mariafelicia De Laurentis. Extended theories of gravity. Physics Reports, 509(4):167–321, 2011.

12. Artyom V Astashenok, Salvatore Capozziello, and Sergei D Odintsov. Extreme neutron stars from extended theories of gravity. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2015(01):001, 2015.

13. Aneta Wojnar and Hermano Velten. Equilibrium and stability of relativistic stars in extended theories of gravity. arXiv:1604.04257, 2016.

14. Nicola Tamanini and Christian G Boehmer. Generalized hybrid metric-palatini gravity. Physical Review D, 87(8):084031, 2013.

15. Salvatore Capozziello, Tiberiu Harko, Tomi S Koivisto, Francisco SN Lobo, and Gonzalo J Olmo. Hybrid metric-palatini gravity. Universe, 1(2):199– 238, 2015.

16. Tiberiu Harko, Tomi S Koivisto, Francisco SN Lobo, and Gonzalo J Olmo. Metric-palatini gravity unifying local constraints and late-time cosmic acceleration. Physical Review D, 85(8):084016, 2012.

17. Salvatore Capozziello, Tiberiu Harko, Francisco SN Lobo, Gonzalo J Olmo, and Stefano Vignolo. The cauchy problem in hybrid metric-palatini f(x)- gravity. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 11(05): 1450042, 2014.

18. Salvatore Capozziello, Tiberiu Harko, Tomi S Koivisto, Francisco SN Lobo, and Gonzalo J Olmo. Hybrid metric-palatini gravity. Universe, 1(2):199– 238, 2015.

19. Gonzalo J Olmo. Palatini approach to modified gravity: f(r) theories and beyond. International Journal of Modern Physics D, 20(04):413–462, 2011.

20. Alexey Golovnev, Tomi Koivisto, Marit Sandstad On covariantisation of teleparallel gravity. arXiv:1703.03335v1 2017.

21. K.K. Yerzhanov, Sh.R. Myrzakul, I.I. Kulnazarov, R. Myrzakulov. Accelerating cosmology in F(T) gravity with scalar field. arXiv:1006.3879, 2010