

Санкт-Петербургский государственный университет  
Факультет прикладной математики – процессов управления

Широколобова Анастасия Павловна

Магистерская диссертация

**Оценка матрицы корреспонденций как задача обратная  
равновесному распределению потоков**

Направление 01.04.02

прикладная математика и информатика

магистерская программа «Математическое и информационное обеспечение  
экономической деятельности»

Руководитель магистерской программы,  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор

Захаров В. В.

Научный руководитель,  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент

Крылатов А. Ю.

Рецензент,  
кандидат технических наук,  
ведущий научный сотрудник  
ИПТ им. Соломенко РАН

Шаталова Н. В.

Санкт-Петербург

2017

# Содержание

Введение . . . . .	2
Глава 1. Обзор литературы . . . . .	14
1.1. Методы оценки матриц корреспонденций . . . . .	15
1.2. Оценка матрицы корреспонденций при помощи информации с датчиков . . . . .	20
Глава 2. Математическая модель оценки матрицы корреспонденций на сети из параллельных маршрутов . . . . .	31
2.1. Распределение транспортных потоков в прямой и двойственной постановке . . . . .	33
2.2. Оценка матрицы корреспонденций как задача обратная к равновесному распределению потоков . . . . .	37
Глава 3. Математическая модель оценки матрицы корреспонденций на сети произвольной топологии . . . . .	41
3.1. Распределение транспортных потоков в прямой и двойственной формулировке . . . . .	41
3.2. Двухуровневая задача оценки матрицы корреспонденций на основе информации с датчиков фиксации номерных знаков . . . . .	44
Глава 4. Эксперимент на транспортной сети Санкт-Петербурга . . . . .	47
Заключение . . . . .	51
Список литературы . . . . .	53

# Введение

В современном мире мы все чаще сталкиваемся с проблемами на дорогах: автомобильные пробки, снижение скорости сообщения, растущее число дорожно-транспортных происшествий, резкое увеличение количества автомобилей, которое в свою очередь приводит к нехватке мест для парковки и загрязнению окружающей среды (рис.1). Решение этих проблем требует реорганизации дорожного движения и модернизации улично-дорожной сети (УДС) города. В мировой практике активно применяется, например, ограничение въезда в центр города, взимание платы за стоянку в определенной городской зоне, строительство перехватывающих парковок и платных участков дорог, ограничение владения личным транспортом, использование интеллектуальных транспортных систем (ИТС) и т.д. Однако результативность таких подходов не везде одинакова [6].

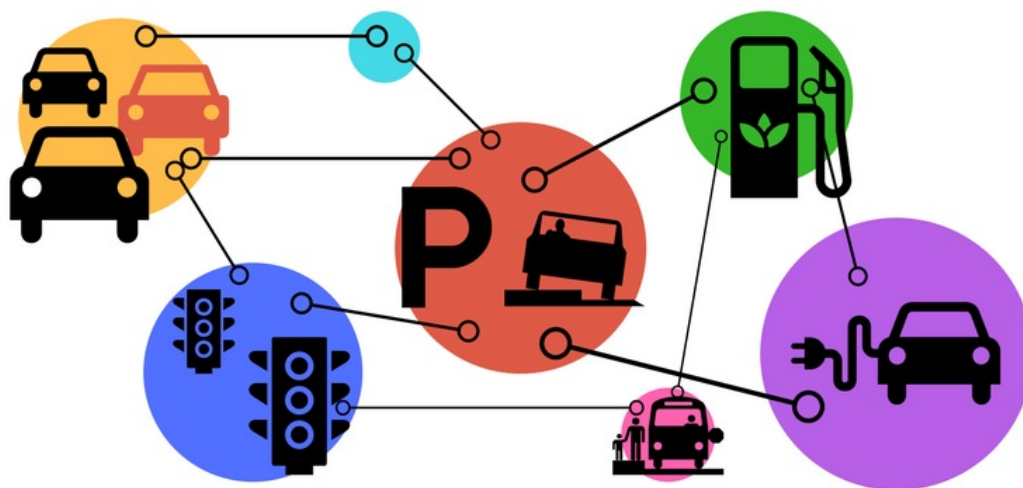


Рис. 1. Проблемы на транспортной сети

Одной из наиболее острых проблем, препятствующих устойчивому развитию транспортной системы нашей страны, является резкое повышение уровня загрузки автомобильных дорог транспортными потоками, в первую очередь, на территории крупных городов и на подходах к ним. Следствием

этого являются перечисленные ранее проблемы.

По данным Федерального дорожного агентства около 30% автомобильных дорог федерального значения работают в режиме перегрузки (в первую очередь — на подходах к крупным городам). Наиболее остро проблема перегруженности проявляется в крупнейших и сверхкрупных городах, в которых уровень автомобилизации давно перешагнул уровень 300 автотранспортных средств (АТС) на 1000 жителей. Средние скорости сообщения в городах неуклонно снижаются, и нередко достигают 8–10 км/час, при оптимальных 30–35 км/час. Согласно имеющимся оценкам, суммарные дополнительные издержки, связанные с перегрузкой дорожной сети, достигают в России 4–9% ВВП в год [11].

Исследования проблемной области в отечественной и зарубежной литературе говорят о том, что развитие современных методов организации дорожного движения (ОДД), основанных на применении интеллектуальных транспортных технологий и математических моделей, напрямую влияет на возможности повышения пропускной способности дорожных сетей и уровня безопасности дорожного движения. При системной реализации математического подхода к ОДД и совершенствованию транспортной сети можно резко повысить эффективность управления дорожным движением, значительно улучшить ситуацию на дорогах, улучшить устойчивость работы транспортной системы в целом и качество жизни населения в городах.

Опыт передовых зарубежных стран свидетельствует, что эффект от внедрения в городах современных сетевых проектных решений по ОДД, разрабатываемых с использованием математических моделей транспортных потоков, выражается в сокращении числа ДТП на величину около 15%, увеличении пропускной способности дорожных сетей до 20%, снижении потребления топлива на величину до 20%. Косвенные экономические эффекты, связанные с предотвращением транспортных заторов и обеспечением

устойчивой работы автомобильного транспорта, включают прирост ВВП (до 10%) и повышение занятости населения [11].

Как сказано ранее, оптимальное планирование транспортных сетей в смысле улучшения организации дорожного движения требует применения аппарата математического моделирования, на основе которого возможно определение и прогноз всех параметров функционирования УДС. В самом общем смысле можно выделить три класса математических моделей, применимых для анализа транспортных сетей [14]:

- прогнозные модели;
- имитационные модели;
- оптимизационные модели.

Построение математической модели требует формализации транспортной сети. Дорожная сеть представляется в виде графа, узлы которого соответствуют перекресткам, а дуги — участкам улиц. Изучаемый город или район делится на некоторое условное число районов отправления и прибытия (фиксированное множество узлов графа). Общий объем перемещений между районами отправления и прибытия (ОП-парами) в определенный период времени называется *межрайонной корреспонденцией* в этот период. Получив все значения межрайонных корреспонденций, можно составить матрицу корреспонденций. На рисунке 2 представлен пример формализации транспортной сети в виде графа, а на рисунке 3 — пример составления матрицы корреспонденций в виде таблицы, где на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца стоит объем транспортных средств, передвигающихся из района  $i$  в район  $j$  в определенный период времени.

Прогнозные модели предполагают, что известны топология, характеристики транспортной сети и расположение потокообразующих объектов в городе и необходимо определить, какими будут транспортные потоки между этими объектами [14]. Такие модели позволяют прогнозировать послед-

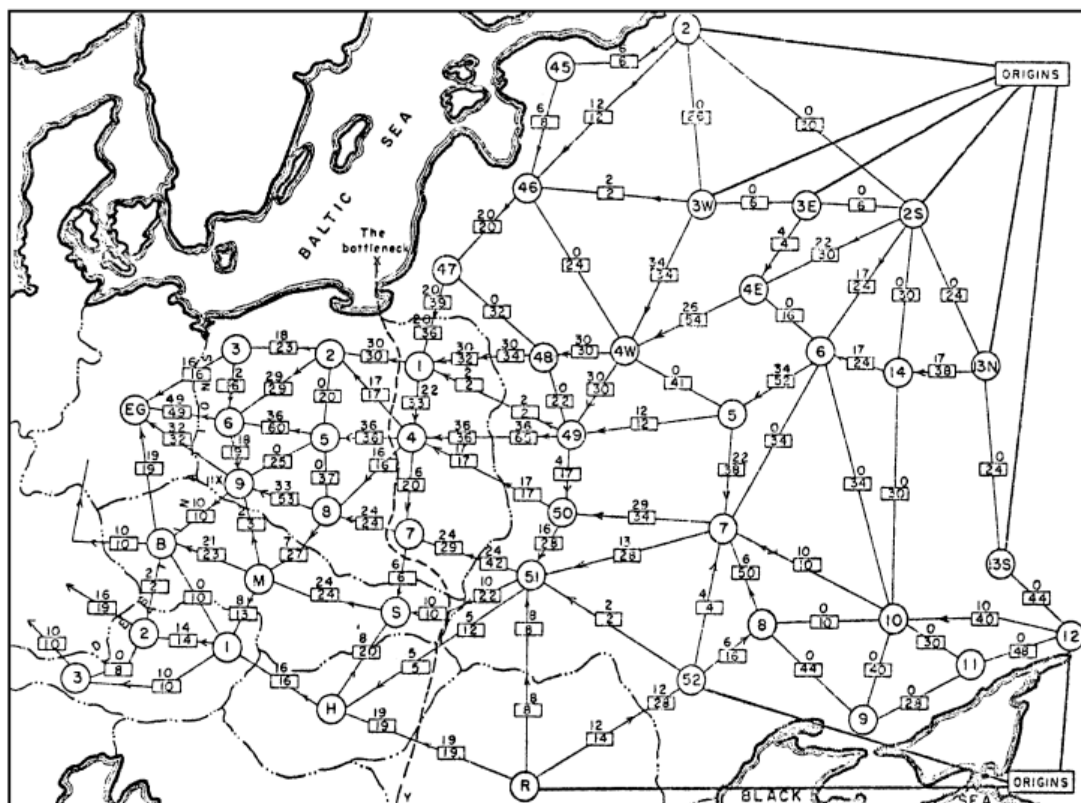


Рис. 2. Пример формализации транспортной сети в виде графа

ствия изменений в транспортной сети или в размещении объектов. В свою очередь имитационное моделирование воспроизводит все детали движения, в том числе развитие процесса во времени. При этом усредненные значения потоков и распределения по путям заранее известны. Отличие этих двух моделей можно кратко сформулировать следующим образом. Прогнозные модели отвечают на вопрос: «сколько и куда» будут ехать в данной сети. Имитационные модели отвечают на вопрос: как в деталях будет происходить движение, если известно в среднем, «сколько и куда» [14]. Прогнозные и имитационные модели ставят своей целью адекватное воспроизведение транспортных потоков, в то время как оптимизационные модели отвечают на вопросы оптимизации функционирования транспортных сетей. Рассмотрим эти три класса моделей более подробно.

<i>Отправление/Прибытие</i>	1	...	i	...	n
1	$x_{11}(k)$	...	$x_{1i}(k)$	...	$x_{1n}(k)$
⋮	⋮		⋮		⋮
j	$x_{j1}(k)$	...	$x_{ij}(k)$	...	$x_{jn}(k)$
⋮	⋮		⋮		⋮
m	$x_{m1}(k)$	...	$x_{mi}(k)$	...	$x_{mn}(k)$

Рис. 3. Представление матрицы корреспонденций в виде таблицы

## Прогнозные модели

Общую схему прогнозных моделей можно свести к следующим трем взаимосвязанным задачам [13]:

- расчет общих объемов передвижения между районами города или агломерации (расчет матриц межрайонных корреспонденций);
- распределение корреспонденций по конкретным путям в транспортной сети;
- расчет загрузки всех элементов сети транспортными потоками.

К числу наиболее распространенных моделей расчета корреспонденций относятся гравитационные, энтропийные, модели конкурирующих и промежуточных возможностей Стауффера [14].

Загрузка транспортной сети определяется количеством транспортных средств, которые используют для своего передвижения элементы сети. Загрузка элементов моделируется посредством распределения межрайонных корреспонденций по конкретным путям, соединяющим пары районов. Входные данные для такой модели — матрица корреспонденций, а ее цель — определение для каждой пары районов отправления-прибытия набора путей, используе-

мых для перемещения между этими районами.

Существует классификация моделей загрузки транспортной сети, основанная на следующих признаках [14]:

- модели, основанные на нормативном (нацеленном на поиск системного оптимума) и дескриптивном (определяющем результат пользовательской оптимизации маршрутов) подходе;
- статические и динамические модели.

Для определения объемов загрузки УДС необходимо выявить правила, по которым водители выбирают тот или иной маршрут следования. Поведенческие принципы пользователей были окончательно сформулированы в работе [48] в виде двух принципов:

- пользователи сети независимо друг от друга выбирают маршруты следования, соответствующие их минимальным транспортным расходам,
- пользователи сети выбирают маршруты следования, исходя из минимизации общих транспортных расходов в сети,

которые получили названия соответственно *первого* и *второго принципа Вардрона* [2].

Распределение транспортных потоков согласно первому принципу Вардрона соответствует конкурентному бескоалиционному равновесию, предполагающему совершенный эгоизм участников дорожного движения — каждый стремится достигнуть конечного пункта своей поездки как можно быстрее и из имеющихся возможных вариантов следования выбирает тот маршрут, по которому будет нести минимальные затраты (временные, финансовые, моральные и т.п.) на проезд. Этот принцип в полной мере учитывает фактор взаимного влияния пользователей. Поэтому его также называют *конкурентным равновесием* (user equilibrium). Суть этого принципа кратко можно сформулировать так: при равновесном распределении загрузки



ни один из участников движения не может изменить свой путь так, чтобы уменьшить свое индивидуальное время поездки. Вторым принципом Вардропы предполагается централизованное управление движением в сети. Соответствующее ему распределение транспортных потоков называют *системным оптимумом* (system optimum). Примером пользователей, передвигающихся согласно второму принципу, служат водители маршрутизированного транспорта.

## Имитационные модели

К классу имитационных по их функциональной роли можно отнести широкий спектр моделей, известных под названием модели динамики транспортного потока. В моделях этого класса может применяться разная техника — от имитации движения каждого отдельного автомобиля до описания динамики функции плотности автомобилей на дороге. При этом для динамических моделей характерна значительно большая детализация движения и, соответственно, потребность в больших вычислительных ресурсах. Применение этих моделей позволяет оценить динамику скорости движения, задержки на перекрестках, длины и динамику образования «очередей» или «заторов» и другие характеристики движения. Основные области практического применения динамических имитационных моделей — улучшение организации движения, оптимизация светофорных циклов и др. В настоящее время актуальной задачей является разработка систем автоматизированного оперативного управления движением, работающих в режиме реального времени. Однако помимо практического применения, развитие динамических моделей представляет большой научный интерес в связи с изучением транспортного потока как физического явления со сложными и нетривиальными свойствами. Среди таких свойств — спонтанная потеря устойчивости,

явления самоорганизации и коллективного поведения и многие другие.

Большинство существующих моделей динамики транспортных потоков может быть приблизительно разделено на три класса:

- макроскопические модели;
- микроскопические модели;
- стохастические модели.

В *макроскопических* моделях движение транспортных средств уподобляется какому-либо физическому потоку (гидро- и газодинамические модели). В *микроскопических* моделях существенно предположение о наличии связи между перемещением ведомого и головного автомобиля. По мере развития теории в моделях этой группы учитывалось время реакции водителей, исследовалось движение на многополосных дорогах, изучалась устойчивость движения. Этот класс моделей также называют моделями следования за лидером. В *стохастических* моделях транспортный поток рассматривается как результат взаимодействия транспортных средств на элементах транспортной сети. В связи с жестким характером ограничений сети и массовым характером движения в транспортном потоке складываются отчетливые закономерности формирования очередей, интервалов, загрузок по полосам дороги и т. п. Эти закономерности носят существенно вероятностный характер.

Модели динамики транспортных потоков дают достаточно простые устойчивые решения в случае малой загрузки дорог (свободное движение при избыточном ресурсе). Однако решения для случая высокой плотности потоков чрезвычайно чувствительны к малейшим флуктуациям параметров дорог и особенностей поведения участников движения.

## Оптимизационные модели

В классе оптимизационных моделей решаются задачи оптимизации маршрутов пассажирских и грузовых перевозок, выработки оптимальной конфигурации сети и другие. В частности, рассматриваются задачи оптимизации работы дорожной системы на участке протяжённостью несколько километров с движением автомобилей в одном направлении. При разработке планов оптимизации указанной системы используются модели двух типов [3]. Первой из них является модель для оценки транспортной загрузки у узкого места, а второй — модель линейного программирования. В обоих случаях в качестве контрольного параметра используется полная пропускная способность дороги и делается попытка в каждом узком месте поддерживать транспортную нагрузку меньше пропускной способности. Транспортная нагрузка у узкого места дороги образуется за счёт автомобилей, въезжающих на магистраль с примыкающих въездов, расположенных перед узким местом. Если известна интенсивность каждого такого потока, то можно оценить транспортную нагрузку у данного узкого места.

Для анализа и планирования работы дорожной системы в установившемся режиме могут использоваться различные модели линейного программирования. В простейшем случае модель имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^n X_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n A_{jk} X_j \leq B_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$X_j \leq D_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

В данной модели  $X_j$  — интенсивность  $j$ -го входящего потока;  $D_j$  — транспортная нагрузка на  $j$ -м въезде;  $B_k$  — пропускная способность  $k$ -го узкого места, а  $A_{jk}$  — вероятность того, что автомобиль, попадающий на магистраль с  $j$ -го въезда, пройдет через  $k$ -ое узкое место. Построенная модель максимизирует выходящий поток системы. Первая система ограничений требует, чтобы в каждом узком месте дороги транспортная нагрузка не превышала полной пропускной способности в данном направлении. Вторая система ограничений требует, чтобы интенсивность входящего потока не превышала транспортной нагрузки при любом входящем потоке. Третья система ограничений гарантирует возможность решения.

В этой модели могут быть использованы и другие ограничения: ограничения, устанавливающие максимальную длину очереди на всех регулируемых въездах; ограничения, гарантирующие, что транспортная нагрузка не превысит пропускной способности узкого места дороги на наиболее ответственной полосе движения.

*Задача поиска матриц корреспонденций* явно входит только в прогнозные модели. Однако, без решения этой задачи невозможно представить себе эффективной реализации и адекватного применения имитационных и оптимизационных моделей на реальных транспортных сетях. В самом деле, практическое применение результатов математического моделирования в конечном счете сводится к мероприятиям по реорганизации дорожного движения или изменению инфраструктуры транспортной сети, эффективная

реализация которых невозможна без достоверной информации о трафике, точность и своевременность которой зависят от технических возможностей расчета *матриц корреспонденций* между выделенными на транспортной сети районами отправления-прибытия [2].

В связи с этим важно отметить, что получать данные о межрайонных корреспонденциях можно не только при помощи описанных выше математических моделей, но и другими способами: натурными замерами, проведением социологических опросов, при помощи счетчиков. Однако, стоит отметить, что такие способы крайне трудозатратны и малоэффективны. На сегодняшний день существуют и другие способы получения информации для матрицы корреспонденций, например, при помощи различных датчиков, установленных на транспортной сети, и RFID-меток. RFID-метка, например, передает радиосигнал с транспортного средства на пульт управления, что позволяет проследить весь путь его следования и однозначным образом построить матрицу корреспонденций. К сожалению, на сегодняшний день RFID-система не получила широкого распространения, но является крайне перспективной с точки зрения полноты получаемых данных.

В то же время датчики регистрации транспортных средств уже сегодня активно используются на дорогах. Эти датчики обладают различными функциями, какие-то из них многофункциональны. Некоторые из них фиксируют потоки, собирают статистическую информацию об интенсивности движения, количестве автомобилей (петлевые детекторы [41]), некоторые могут фиксировать номерные знаки (датчики фиксации номерных знаков) или скорость движущихся транспортных средств.

Датчики регистрации номерных знаков в своем большинстве установлены для фиксации нарушений правил дорожного движения, но могут быть активно использованы для получения информации о межрайонных корреспонденциях или о времени движения по участку дороги. Распознавая но-

номерной знак транспортного средства на разных элементах сети в последовательные моменты времени, мы получим однозначную картину маршрута, по которому это транспортное средство двигалось, или времени, за которое транспортное средство преодолевает конкретный участок. Кроме того, проанализировав маршруты движения всех транспортных средств, можно получить межрайонные корреспонденции и саму матрицу корреспонденций. Однако не всегда есть возможность сделать наблюдаемыми все дуги транспортной сети. Количество датчиков может быть ограничено бюджетом, выделяемым на их закупку и установку. Тогда появляется задача восстановления потоков на ненаблюдаемых дугах, а соответственно и задачи оценки и восстановления матрицы корреспонденций. Получив время движения потоков по дугам транспортной сети, возникает вопрос: можно ли по этим данным оценить корреспонденции? В следующих главах будет продемонстрировано, что решить задачу оценки матрицы корреспонденций можно и при помощи информации о времени движения транспортных средств по участкам УДС.

Данная работа организована следующим образом. В Главе 1 рассматривается обзор литературы по теме оценки матрицы корреспонденций. Глава 2 описывает разработанный подход к оценке матрицы корреспонденций, как к решению двойственной задачи распределения транспортных потоков по первому принципу Вардропа на сети, состоящей из одной пары районов отправления-прибытия и параллельных маршрутов между ними. Двойственная постановка задачи к равновесному распределению потоков на сети произвольной топологии рассматривается в Главе 3, как и двухуровневая задача оценки матрицы корреспонденций на основе информации с датчиков фиксации номерных знаков. В Главе 4 описан эксперимент, проведенный на транспортной сети Санкт-Петербурга. В Заключение даются выводы об эффективности разработанной модели.

# Глава 1. Обзор литературы

Задача оценки и восстановления матрицы корреспонденций получила свое развитие еще в начале 60-х годов XX века и актуальна по сей день. В настоящей работе задача оценки и восстановления матрицы корреспонденций будет решена как обратная к задаче поиска конкурентного равновесия Вардропа на транспортной сети. При решении задачи будет использована информация с датчиков фиксации номерных знаков. Представляется, что датчики фиксации номерных знаков — крайне эффективный инструмент для оценки корреспонденций. В отличие от других датчиков, такие технические приспособления позволяют не только оценить количество транспортных средств, движущихся по сети, но и однозначно установить маршрут следования конкретного транспортного средства и оценить время его движения по участку дорожной сети и, соответственно, между парой районов отправления и прибытия. Как будет показано в данной работе, такая информация позволит оценить матрицу корреспонденций при помощи решения двойственной задачи к распределению потоков по первому принципу Вардропа.

В данной работе непосредственно затрагиваются темы распределения транспортных потоков на основе теории равновесия, оценки матрицы корреспонденций и использования информации с датчиков фиксации номерных знаков. В связи с этим обзор литературы подготовлен следующим образом. Рассматриваются два основных направления для данной работы, по которым была проанализирована соответствующая литература:

- моделирование транспортных потоков на основе теории равновесия, основные подходы к оценке матрицы корреспонденций;
- оценка матрицы корреспонденций при помощи информации с датчиков, особенности установки и разновидности датчиков.

## 1.1. Методы оценки матриц корреспонденций

Теория конкурентного бескоалиционного равновесия достаточно адекватно описывает механизм функционирования УДС. При моделировании и исследовании транспортных потоков часто пользуются именно таким распределением. В данной работе так же будем опираться на теорию равновесного распределения потоков согласно первому принципу Вардропа. Поскольку основную нагрузку на УДС создают легковые автомобили, совершающие, как правило маятниковые перемещения (из дома на работу и обратно), преследующие личные цели уменьшения времени в пути, то такое поведение явно соответствует конкурентному равновесию Вардропа. Как говорилось ранее, для эффективного планирования и развития транспортной сети, необходимо владеть информацией о межрайонных корреспонденциях.

Задача оценки и восстановления матрицы корреспонденций является крайне сложной и актуальной проблемой в теории транспортных потоков, работа над которой ведется с 1960-х годов. Одной из первых математических моделей оценки матриц корреспонденций является двухуровневая модель, разработанная в конце XX века [51]. Однако, несмотря на многочисленные публикации, данная задача до сих пор остается насущным научным вопросом, требующим дальнейших исследований.

В общем, задачи оценки и восстановления матрицы корреспонденций являются разными задачами и решения этих двух задач могут сильно различаться [31]. Когда речь идет о восстановлении матрицы корреспонденций, предполагается наличие возможности однозначного определения межрайонных корреспонденций и их распределения по имеющимся маршрутам (рис. 4). Но на одних и тех же дугах могут быть наблюдаться потоки, принадлежащие разным парам районов отправления и прибытия. Получается,



такая возможность существует не всегда, так как требует наблюдаемости всех элементов транспортной сети. На самом деле, далеко не все дуги и узлы являются наблюдаемыми и на ненаблюдаемых элементах потоки необходимо оценивать. В таком случае возникает задача оценки матрицы корреспонденций.

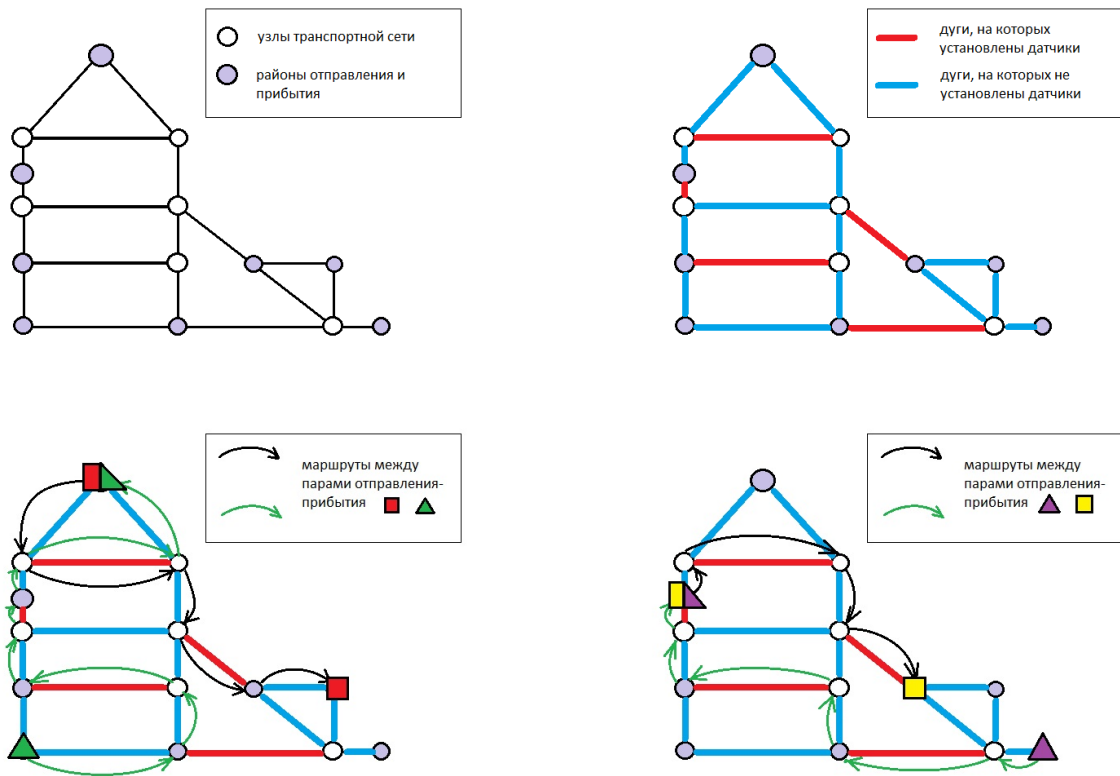


Рис. 4. Оценка потоков на дугах

В этом смысле наиболее наглядной моделью оценки матриц корреспонденций является гравитационная модель, опишем ее подробнее.

Рассмотрим систему, состоящую из некоторого множества  $R$  районов отправления-прибытия, соединённых между собой путями на транспортной сети. Исходными данными к расчёту корреспонденций являются:  $O_i$  — объём отправления из района  $i \in R$ ,  $D_j$  — объём прибытия в район  $j \in R$ . Предполагается выполнение балансного соотношения, которое говорит о

равенстве объемов отправления и прибытия:

$$\sum_{i \in R} O_i = \sum_{j \in R} D_j.$$

Гравитационная модель [14] основана на следующем простом предположении: корреспонденция из района  $i$  в район  $j$  пропорциональна общему объёму отправления из центра  $i$ , общему объёму прибытия в центр  $j$  и некоторой функции  $C(t_{ij})$ , зависящей от транспортного расстояния  $t_{ij}$  между центрами  $i$  и  $j$ . Транспортное расстояние отражает степень близости районов с учётом скорости и удобства передвижений, предоставляемых транспортной сетью. Способ определения этой величины может различаться в разных вариантах модели.

Обозначим через  $F_{ij}$  корреспонденцию из района  $i$  в район  $j$ . Тогда гравитационная модель может быть сформулирована в виде:

$$F_{ij} = A_i O_i D_j C(t_{ij}), \quad i, j \in R,$$

где коэффициенты определяются из условий:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in R} F_{ij} &= O_i, \quad i \in R, \\ \sum_{i \in R} F_{ij} &= D_j, \quad j \in R, \\ F_{ij} &\geq 0, \quad i, j \in R. \end{aligned}$$

Функция  $C(t)$  называется *функцией тяготения*. Выбор этой функции осуществляется в ходе калибровки модели на основе сопоставления выходного модельного распределения дальностей с данными обследования. При практических расчётах часто используется следующая аппроксимация:

$$C(t) = \exp(-\alpha t^\beta), \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0.$$

Для трудовых корреспонденций в крупных городах подходящими являются значения параметров  $\alpha \approx 0,065$ ,  $\beta \approx 1$ .

Еще одной распространенной математической моделью оценки матрицы корреспонденций является энтропийная модель, идея которой основана на втором законе термодинамики. Транспортную систему объединяет с физической наличие очень большого числа неуправляемых элементов. Проблема определения корреспонденций в такой модели ставится как задача максимизации энтропии в транспортной системе [49].

Применение метода линейного программирования может приводить как к оценке матриц корреспонденций с некоторой точностью, так и к восстановлению матриц корреспонденций в зависимости от количества наблюдаемых дуг. Поскольку задача оценки матрицы корреспонденций налагает ряд линейных соотношений, описываемых системой  $AX = Y$ , где  $A$  — матрица-индикатор принадлежности дуги к маршруту,  $X$  — матрица межрайонных корреспонденций,  $Y$  — вектор потоков на дугах,  $w$  — весовой коэффициент, то основная задача может быть сформулирована в виде линейной оптимизационной программы [35]:

$$\max \sum_{j=1}^c w_j X_j,$$

где  $c$  — количество ОП-пар (пар районов отправления-прибытия),  $w_j$  — веса ОП-пары  $j$  при ограничениях

$$\sum_{j=1}^c A_{lj} X_j \leq Y_l, \quad \forall l = \overline{1, r},$$

и условиях сохранения потока

$$\sum_{l=(i,j)} Y_l a_{lk} - \sum_{l=(j,i)} Y_l a_{lk} = \begin{cases} X_k, & \text{если } j \text{ — источник } k, \\ -X_k, & \text{если } i \text{ — сток } k, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где  $k$  — период измерения.

Данная модель может быть расширена при помощи введения статистических гипотез относительно компонент матрицы корреспонденций и специфических механизмов оценки параметров корреспонденций, а вместо заданной матрицы  $A$  может быть использована произвольная матрица соответствующей размерности. В таком случае данная модель становится статистической. Другим расширением линейной модели может быть применение байесовского подхода. Его суть состоит в том, чтобы вычислить условное распределение вероятностей  $p(X | Y)$  всех корреспонденций  $X$ , учитывая число дуг  $Y$ . В случае избыточности данных возникает проблема переопределения системы линейных уравнений, которую можно составить для датчиков на транспортной сети [23,25].

Авторами статьи [12] рассматриваются методы вычисления матриц корреспонденций, основанные на марковских цепях, байесовских оценках и методах максимального правдоподобия для матриц переходных вероятностей на основе агрегированных и неагрегированных данных. Результаты расчетов в сравнении с применением гравитационной модели показали, что статистические методы вполне конкурентны в плане вычислительной сложности.

Исследователи из разных стран предлагают методы восстановления матриц корреспонденций по замерам интенсивности движения. Среди отечественных авторов можно отметить работу [9], в которой оценка матриц корреспонденций проводится по данным интенсивности движения и проводится анализ устойчивости методов оценки матриц корреспонденций. В работе установлено, что методика оценки матриц корреспонденций по данным интенсивности движения может быть сведена к задаче линейного программирования со смешанными ограничениями. Такие методы оценки требуют значительно меньше затрат, но точность полученных матриц может

снижаться с увеличением рассматриваемого участка улично-дорожной сети. Это связано с тем, что замеры интенсивности могут выполняться в разные дни и часы.

## 1.2. Оценка матрицы корреспонденций при помощи информации с датчиков

Для применения математических моделей оценки матриц корреспонденций необходима актуальная информация о трафике. Кроме того, традиционные подходы к оценке матрицы корреспонденций, основанные на исследованиях транспортной сети (натурные замеры и другие способы сбора информации о перемещениях) очень дорогостоящие. Поэтому исследователи разрабатывают более экономичные подходы к оценке ОП-матрицы, основанные, например, на информации с дорожных датчиков. В таком подходе к оценке МК большое значение имеет местоположение этих датчиков. Мы в своем исследовании сфокусируемся на особом виде датчиков — датчиках фиксации номерных знаков. Обсудим информацию, собираемую такими датчиками и ее качество в зависимости от расположения датчиков на сети.

Обычные счетчики определяют объем транспортных средств на дуге, в то время как датчики фиксации номерных регистрационных номеров помимо определения объема проезжающих транспортных средств определяют еще и потоки, относящиеся к разным комбинациям датчиков. Например, если на трех дугах А, В и С установлены датчики фиксации номерных регистрационных знаков, то объемы передвигающихся по этим дугам транспортных средств наблюдаемы. Количество транспортных средств, которые пересекли дугу А, дугу В и не пересекли дугу С тоже известно. Аналогично, известно количество транспортных средств, проехавших по дуге В, потом по дуге А и не проехавших по дуге С. Соответственно, объемы корре-

спонденций для всех возможных комбинаций датчиков также наблюдаемы и известны: А, В, С, АВ, ВА, АС, СА, ВС, СВ, АВС, АСВ, ВАС, ВСА, САВ, и СВА. Хотя большинство этих комбинаций бесполезны на практике и их соответствующие объемы равны нулю, количество комбинаций превышает количество датчиков. Поэтому наблюдения с датчиков идентификации автомобиля (фиксации номерного регистрационного знака) может быть чрезвычайно информативным по сравнению с традиционными счетчиками, особенно в больших сетях. Как правило, в данных, собираемых такими датчиками, прослеживаются три атрибута: идентификационный код транспортного средства, время фиксации транспортного средства датчиком, информация о дуге, на которой этот датчик установлен. Такая информация позволяет успешно применять модифицированные математические модели для оценки потоков на маршрутах или корреспонденций.

Тема оценки и восстановления матрицы корреспонденций получила очень широкое распространение в кругах зарубежных авторов и, к сожалению, пока не очень активно обсуждается среди отечественных ученых [12, 14]. Среди англоязычных статей стоит особо отметить работу [21], в которой используется информация о номерных знаках, полученная с датчиков сканирования. Авторы предлагают достаточно эффективный метод оценки матрицы корреспонденций. Однако вопрос оптимального расположения датчиков с точки зрения максимального покрытия основных транспортных потоков ими не рассматривается. В то же время для высокопроизводительной работы предлагаемого метода требуется сбор данных хорошего качества.

Как правило, для оценки потоков минимизируют сумму квадратов разницы между априорными (заранее найденными) потоками и искомыми потоками [19, 24]. Априорные потоки получают любыми возможными способами: подсчетами посредством альтернативных методов, ранее проведенных замеров и т.п. Рассмотрим двухуровневую модель оценки матрицы корреспонден-

денций, которая была одной из первых, предложенных в этой области. Будем моделировать транспортную сеть посредством графа  $G = \langle N, A \rangle$ , где  $N$  — множество вершин,  $A$  — множество дуг. Будем считать, что  $R \subset N$  — множество районов отправления, а  $S \subset N$  — множество районов прибытия;  $R \cap S = \emptyset$ . Введем следующие обозначения:  $K^{rs}$  — множество маршрутов из  $r$  в  $s$ ,  $r \in R, s \in S$ ;  $F^{rs}$  — транспортный спрос между районами отправления и прибытия  $r-s$ ;  $F = \{F^{rs}\}^{r,s}$ ;  $\bar{F}^{rs}$  — априорный транспортный спрос (ранее оцененный) между районами отправления и прибытия  $r-s$ ;  $\bar{F} = \{\bar{F}^{rs}\}^{r,s}$ ;  $f_k$  — поток по  $k$ -му маршруту,  $k \in K^{rs}$ ,  $f = \{f_k\}_{k \in K^{rs}}$ ;  $\bar{f}_k$  — априорный поток по  $k$ -му маршруту,  $k \in K^{rs}$ ,  $\bar{f} = \{\bar{f}_k\}_{k \in K^{rs}}$ ;  $x_a$  — поток по дуге  $a \in A$ ,  $x = (\dots, x_a, \dots)$ ;  $\bar{x}_a$  — наблюдаемый поток по дуге  $a \in A$ ,  $\bar{x} = (\dots, \bar{x}_a, \dots)$ ;  $t_a(x_a)$  — время движения потока  $x_a$  по дуге  $a \in A$ ;  $U, V$  — весовые матрицы;  $\delta_{a,k}^{rs}$  — индикатор, равный единице, если дуга  $a$  содержится в пути  $k \in K^{rs}$ , и нулю в противном случае.

Двухуровневая модель оценки матрицы корреспонденций [51] получается из комбинации условия минимизации суммы квадратов между наблюдаемыми и оцениваемыми значениями транспортного спроса и потоками на дугах и условия конкурентного равновесия Вардропа:

$$\min_F Z(F, x) = \min_F (\bar{F} - F)^T V^{-1} (\bar{F} - F) + (\bar{x} - x)^T U^{-1} (\bar{x} - x),$$

где  $x \geq 0$  и удовлетворяет условию конкурентного равновесия

$$\min_x \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(x) dx$$

при

$$\sum_{k \in K^{rs}} f_k = F^{rs},$$

$$f_k \geq 0, \quad \forall k \in K^{rs},$$

где

$$x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K^{rs}} f_k \delta_{a,k}^{rs}.$$

Данная модель применима в случае использования датчиков фиксации номерных знаков или других счетчиков. Целевой функционал верхнего уровня может быть интерпретирован как мера расстояния от оцениваемой матрицы корреспонденций  $F$  до ранее полученной  $\bar{F}$  и от оцениваемого потока  $x$  до полученного со счетчиков  $\bar{x}$ . Следует отметить, что после того как датчики расставлены на сети, мы точно фиксируем потоки на соответствующих дугах, а на дугах без датчиков данные о потоках необходимо аппроксимировать. Второе слагаемое в целевой функции верхнего уровня имеет именно такой смысл.

Кастилло [21] изменил двухуровневую модель введя дополнительное ограничение на верхнем уровне, которое отменяет необходимость во втором слагаемом в целевом функционале верхнего уровня двухуровневой модели, а, следовательно, и необходимость в нижнем уровне. Дополнительно им вводятся ограничения, связанные с датчиками сканирования номерных знаков. Введем дополнительные обозначения:  $v_k \in V$  — вес маршрута  $k$ ;  $\nu \in W$  — номер последовательности дуг с датчиками, сканирующими номерные знаки;  $\eta_{\nu k}^{rs}$  — индикатор, равный единице, если путь  $k$  между районами отправления-прибытия  $r-s$  содержит все дуги из последовательности с номером  $\nu$ , и нулю в противном случае;  $\bar{w}_\nu$  — количество пользователей, зафиксированных на  $\nu$ -ой последовательности дуг. Таким образом, имеем

$$\min_f Z = \min_f \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k_1, k_2 \in K^{rs}} (f_{k_1} - \bar{f}_{k_1}) v_k (f_{k_2} - \bar{f}_{k_2})$$

при условии

$$\bar{w}_\nu = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K^{rs}} f_k \eta_{\nu k}^{rs} \quad \forall \nu \in W, \quad (1.1)$$



$$\bar{x}_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K^{rs}} f_k \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall a \in \bar{A},$$

$$f_k \geq 0 \quad \forall k \in K^{rs}, \quad \forall r, s.$$

Эффективность работы данной модели напрямую зависит от расположения датчиков, сканирующих номерные знаки транспортных средств, о чем свидетельствует ограничение (1.1). Следовательно, имеет смысл ставить вопрос об эффективном расположении датчиков для восстановления матрицы корреспонденций. В работе [10] был рассмотрен вопрос оптимального расположения датчиков на транспортной сети для эффективного применения вышеописанной модели.

Как обсуждалось ранее, оценку матрицы корреспонденций, требующую большого количества данных исследований, можно производить при помощи менее затратных подходов, основанных на данных с разнообразных дорожных датчиков [24]. При оценке МК посредством наблюдения транспортных потоков, проблема расположения датчиков на транспортной сети ставится довольно остро. Вопрос выбора местоположения включает в себя выбор конкретных дуг или вершин для датчиков. Такие модели, как правило, минимизируют количество датчиков и максимизируют качество и надежность окончательно рассчитанных целевых потоков. В данном случае целевые потоки — это те, которые мы собираемся оценивать. Помимо ОП-потоков (значений в МК), эти целевые потоки могут быть потоками на маршруте или на дуге [21, 22, 29, 39]. Авторы [29] произвели обзор литературы и представили общую картину моделей расположения датчиков. Они разделили модели расположения датчиков на две основные категории:

- Модели расположения датчиков для наблюдения за потоками: эти модели устанавливают определенные условия расположения датчиков, так что целевые потоки являются уникальными.

- Модели расположения датчиков для оценки потоков: эти модели устанавливают определенные условия расположения датчиков, так что дают наилучшую оценку целевых потоков.

Кроме того авторы [29] определили 4 категории датчиков: обычные счетчики, датчики идентификации маршрута, датчики изображения и датчики, сканирующие номерные регистрационные знаки транспортного средства. Такие датчики, помимо оценки потоков, могут быть использованы в различных исследованиях для разнообразных целей, например, для замера времени движения. Причем некоторые из исследований используют счетчики [34, 46], а другие — датчики фиксации номерных знаков [37, 44]. Мы же в своем обзоре не будем останавливаться на других задачах кроме оценки целевых потоков.

Всю литературу по оценке потоков при помощи датчиков, можно разделить на 12 категорий по типу датчика (4 вида) и по выбираемым целевым потокам (корреспонденция, поток на маршруте, поток на дуге). Некоторые из этих категорий получили больше внимания исследователей, чем остальные:

- Оценка корреспонденции по информации со счетчиков транспортных средств [24–27, 47, 50, 52].
- Оценка потока на дуге при помощи счетчиков [16, 22, 32, 38, 39].
- Оценка потоков на дугах при помощи датчиков изображения [17].
- Оценка потоков на маршруте при помощи датчиков идентификации пути [28].
- Оценка корреспонденций при помощи по информации с датчиков идентификации транспортного средства [21, 36, 53].
- Оценка потоков на маршруте при помощи датчиков идентификации транспортного средства [20, 21, 36].

Некоторые работы рассматривают одновременное использование информации со счетчиков и датчиков определения транспортного средства для оценки целевых потоков и соответствующей проблемы расположения датчиков [53].

В работе [21] рассматривается задача об удешевлении получения данных при помощи комбинирования информации со счетчиков автомобилей и датчиков фиксации номерных знаков. Естественно, при этом модель должна обладать способностью анализировать такие данные. В этой же работе рассматривается задача адекватной дезагрегации потоков на дугах. Понятие дезагрегации потоков на дуге является ключевым при построении моделей оценки и восстановления матриц корреспонденций. Дезагрегация потоков на дугах по маршрутам может быть произведена одним из следующих способов:

1. В моделях, основанных на нумерации маршрутов, после определения вероятности выбора маршрута  $p_i^k$ , где  $k$  относится к маршруту, а  $i$  к ОП-паре, легко рассчитать дезагрегацию потока используя формулу

$$v_{ai} = t_i \sum_{k \in P_i} p_k^i \delta_{ak}^i,$$

где  $t_i, v_{ai}, P_i$  — ОП-потоки, потоки через дугу  $a$  и набор маршрутов ОП-пары  $i$  соответственно;  $\delta$  принимает значение один, если дуга  $a$  принадлежит маршруту  $k$  ОП-пары  $i$ , и ноль в противном случае.

2. В моделях без нумерации маршрутов дезагрегация потока реализуется куда сложнее. После того как потоки на дугах и время движения были подсчитаны, необходимо определить маршруты для каждой ОП-пары. В этом случае дезагрегированные потоки  $v_{ia}$ , связанные с ОП-парой  $i$  и равны

$$v_{ai} = \sum_{k \in P_i} v_{ik} \delta_{ak}^i.$$

3. В качестве альтернативы можно вычислять ОП-потоки на дуге пропорционально общему потоку на этой дуге

$$v_{ai} = t_i \xi_{ai},$$

где  $\xi_{ai}$  — пропорция потока дуги  $t_i$ , едущих через дугу  $a$ . Аналогично можно использовать формулу пропорциональной дезагрегации

$$t_{ik} = t_i p_k^i,$$

где  $t_{ik}$  — поток, принадлежащий маршруту  $k$  ОП-пары  $i$ .

Отметим, что дезагрегация потоков на дугах по маршрутам или ОП-парам является важным инструментом для эффективной оценки потоков. В частности, дезагрегация необходима при работе с датчиками сканирования номерных знаков.

В работе [30] делается акцент на порядок фиксации транспортного средства датчиками. Никакие из ранее рассматриваемых моделей не учитывают подобную информацию, хотя содержат ее. Когда порядок датчиков принимается во внимание, существующие модели больше не дают минимального количества датчиков, необходимого для полной наблюдаемости целевых потоков. В зависимости от целей, авторы рассматривают различные модели расположения датчиков фиксации номерных знаков на транспортной сети с учетом их порядка. В зависимости от ограничений и целевых функционалов, среди прочих авторы выделяют и рассматривают следующие четыре модели при условии наличия информации о порядке расположения датчиков:

- задействовать минимальное количество датчиков, чтобы обеспечить единственность потоков на маршруте;
- достичь максимального количества наблюдаемых маршрутов при бюджетном ограничении;

- при минимальном количестве датчиков обеспечить максимальную уникальность ОП-потоков;
- достичь максимального количества наблюдаемых ОП-потоков при бюджетном ограничении на датчики.

В работе [50] рассматривается проблема ненаблюдаемых дуг и исследуется надежность оцененной матрицы корреспонденций по отношению к количеству датчиков и местам их расположения на сети на основе максимально возможной относительной погрешности (MPRE). MPRE является показателем точности или надежности оценки матрицы корреспонденций с разумным теоретическим обоснованием. Этот индекс может быть использован либо для определения местоположения датчика, либо для оценки МК. В статье [52] были предложены четыре конкретных правила для выбора количества и местоположения датчиков с учетом меры MPRE. Согласно этим правилам, расположение датчиков должно удовлетворять следующим правилам:

1. для каждой ОП-пары датчик должен быть установлен как минимум на одной значимой дуге (дуге, которая содержит больше, чем часть этой корреспонденции);
2. для каждой ОП-пары покрываемая часть потока должна быть максимальной;
3. наблюдаемый сетевой поток (сумма потоков на маршрутах минимум с одним датчиком) должен быть максимальным;
4. датчики, установленные на дугах, должны быть линейно независимы друг от друга.

Другим автором [27] была предложена модифицированная формулировка введенной ранее MPRE-меры, которую назвали ожидаемой относительной погрешностью (ERE) между оцениваемой и априорной матрицей корреспонденций. Другими словами, MPRE — это расстояние между оцененной

матрицей корреспонденций и самой отдаленной возможной МК, тогда как ERE является ожидаемым расстоянием между оцененной корреспонденцией и случайной возможной МК.

Автор статьи [18] разработал новую модель, основанную на общей шкале спроса (Total Demand Scale — TDS), которую используют в качестве меры качества для оцененных потоков. Пусть  $V$  — набор вершин;  $E$  — дуги;  $\hat{E}$  набор  $r$  дуг, на которых известны потоки, то есть дуги, на которых возможно наблюдение потоков;  $q$  — поток на каждой паре ОП;  $v = A(q)$  — поток на дуге из множества  $E$ , рассчитанный согласно модели;  $v_{\hat{E}}(q)$  — набор, в который входят только потоки, соответствующие дугам из  $\hat{E}$ ;  $\hat{v}$  — заданный вектор наблюдаемых потоков,  $q$  — матрица корреспонденций;  $p_i$  — маршрут ОП-пары  $i$ ;  $L$  — матрица принадлежности дуг маршруту;  $C$  — матрица выбора маршрута;  $A = LC$  — модель;  $A(q) = Aq$  — модель;  $q^*$  — оцененная матрица корреспонденций;  $\hat{A}$  — матрица, составленная из матрицы  $A$ , соответствующей  $\hat{E}$ ;  $\Phi(q^*, \hat{A})$  — общая шкала спроса.

Общая шкала спроса — это мера, объединяющая два условия:

$$\begin{aligned}\hat{A}q &= v_{\hat{E}}^*, \\ q &\geq 0.\end{aligned}$$

При выполнении этих условий общая шкала спроса определяется как

$$\Phi(q^*, \hat{A}) = \phi_{max} - \phi_{min},$$

$$\phi_{min} = \min_q q^T e,$$

$$\phi_{max} = \max_q q^T e,$$

где  $e$  — единичный вектор.

Авторами [47] был проведен расширенный обзор моделей расположения датчиков. Этот обзор более свежий, чем у [29] и охватывает некоторые

более новые статьи. Существуют и другие подходы к измерению качества матрицы корреспонденций и расположения датчиков, не будем останавливаться на всех. Хороший обзор на эту тему можно найти в статье [30].

## Глава 2. Математическая модель оценки матрицы корреспонденций на сети из параллельных маршрутов

С тех пор как Бэкман [15] в 1956 году математически формализовал первый и второй принцип Вардропа, было разработано множество математических моделей равновесного распределения потоков. Эти задачи были сформулированы как оптимизационные программы, вариационные неравенства, задачи о дополнителности и проблемы неподвижной точки [40]. Среди этих функциональных форм парадигма оптимизации имеет самую давнюю историю математического инструмента для построения, анализа и решения проблемы равновесного распределения потоков. Остановимся на такой формулировке.

В большинстве случаев оптимизационные задачи распределения транспортных потоков рассматриваются исключительно как чистая математическая конструкция без всякого экономического или поведенческого смысла. Отчасти именно по этой причине итоговые оптимизационные задачи, полученные для различных задач распределения транспортных потоков, были представлены в большом количестве разных форм. Целевые функции в разных представлениях обладают различными свойствами и могут быть, как ограниченными, так и неограниченными, как гладкими, так и негладкими, как выпуклыми, так и вогнутыми. На данный момент никаких теоретических оснований для создания единой методологии для формулирования задачи распределения транспортных потоков в виде оптимизационной задачи не существует.

Задача распределения транспортных потоков в условиях первого принципа Вардропа формулируется как задача математического нелинейного про-



граммирования — отыскание экстремума функции при ограничениях. Такой задаче нелинейного программирования соответствует множество двойственных задач, позволяющие перейти к новым переменным и, например, форме безусловной оптимизации. При существовании седловой точки функции Лагранжа прямой задачи, будет выполняться соотношение двойственности: если  $(x_0, y_0)$  — седловая точка функции Лагранжа, то  $x_0$  — решение прямой задачи,  $y_0$  — решение двойственной задачи. В принципе, идея использования теории двойственности в применении к задачам распределения транспортных потоков не нова. И множество авторов ставили и решали двойственные задачи преследуя разные цели. В зависимости от вида, в котором сформулирована задача равновесного распределения потоков, наличия расширений, желания автора могут быть различные виды постановок двойственных задач [40]. Формулировка задачи в виде двойственной в некоторых случаях, например, позволяет избавиться от ограничений и перейти к новой задаче безусловной оптимизации и, соответственно, к другим методам расчета, в некоторых случаях позволяет лаконично математическим языком представить задачу.

В данной работе акцент сделан на такую формулировку двойственной задачи, в которой множитель Лагранжа является оптимальным временем движения по маршруту между ОП-парой. При помощи датчиков фиксации номерных регистрационных знаков, можно получать информацию о времени движения по маршруту между ОП-парой или участку УДС. Воспользовавшись этой информацией, можно оценить матрицу корреспонденций, о чем речь пойдет в следующих разделах.

## 2.1. Распределение транспортных потоков в прямой и двойственной постановке

Рассмотрим транспортную сеть, представленную ориентированным графом с одной парой исток-сток и  $n$  параллельными дугами, соединяющими исток и сток (рис. 5). Будем ассоциировать пару исток-сток на графе с парой районов отправления-прибытия (ОП-парой), а параллельные дуги — с параллельными (независимыми) маршрутами между ОП-парой. Введем следующие обозначения:  $F$  — транспортный спрос между ОП-парой;  $f_i$  — транспортный поток по маршруту  $i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $\sum_{i=1}^n f_i = F$ ;  $t_i(f_i) = a_i + b_i f_i$  — время движения по загруженной дуге  $i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . В настоящем разделе мы моделируем время проезда по загруженной дуге (время задержки) линейной функцией.

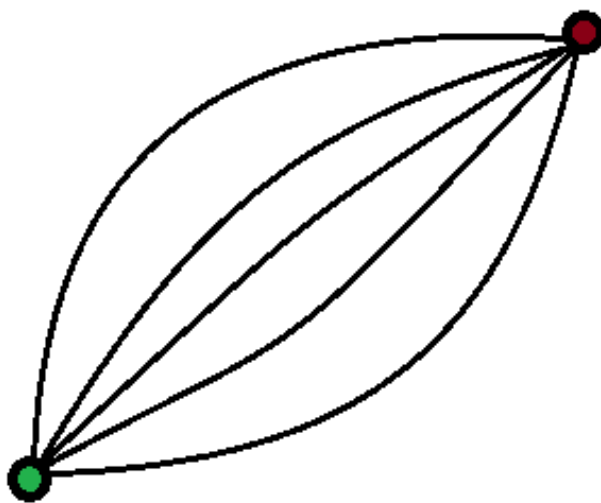


Рис. 5. Транспортная сеть, состоящая из одной ОП-пары и параллельных маршрутов

Сформулируем задачу поиска конкурентного равновесия Вардропа на сети из параллельных маршрутов в виде оптимизационной программы [43]

$$z(f^*) = \min_f z(f) = \min_f \sum_{i=1}^n \int_0^{f_i} t_i(u) du, \quad (2.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n f_i = F, \quad (2.2)$$

$$f_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (2.3)$$

По определению, конкурентным равновесием (user-equilibrium) в сети из параллельных маршрутов является такое распределение потока  $F$  по имеющимся дугам  $f^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ , что время передвижения между ОП-парой одинаково для каждой используемой дуги и меньше времени свободного движения по любой неиспользуемой дуге [48]:

$$\begin{cases} t_i(f_i^*) = t^* > 0 & \text{при } f_i^* > 0, \\ t_i(f_i^*) > t^* & \text{при } f_i^* = 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, при оценке распределения транспортного потока по улично-дорожной сети между конкретной ОП-парой используют идею конкурентного равновесия. Другими словами, предполагают, что водители, составляющие поток  $F$ , самостоятельно распределяются по альтернативным маршрутам так, чтобы их собственное время движения было не больше, чем у других водителей, движущихся между той же ОП-парой. Соответственно, в задаче поиска конкурентного равновесия величина потока  $F$  считается заданной, а время движения между ОП-парой  $t^*$  — одной из искомым величин [5].

В настоящей главе показано, что для сети из параллельных маршрутов можно явно решить обратную задачу: по заданному значению времени передвижения между ОП-парой  $t^*$  восстановить величину потока  $F$  (спроса на перемещение между ОП-парой).

Без умаления общности будем считать, что маршруты перенумерованы следующим образом

$$a_1 \leq \dots \leq a_n, \quad (2.4)$$

в таком случае справедлива

**Теорема 1.** При выполнении условия (2.4) для сети из параллельных маршрутов величина потока  $F$  между ОП-парой может быть однозначно восстановлена, если известно время передвижения  $t^*$  по любому используемому маршруту

$$F = t^* \sum_{s=1}^k \frac{1}{b_s} - \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{b_s}, \quad (2.5)$$

где величина  $k$  такова, что

$$a_1 \leq \dots a_k < t^* \leq a_{k+1} \dots \leq a_n. \quad (2.6)$$

*Доказательство.* Покажем, что время перемещения по используемым каналам при конкурентном равновесии  $t^*$  является множителем Лагранжа, соответствующего ограничению (2.2) оптимизационной задачи (2.1)–(2.3) [8,40].

Поскольку целевая функция (2.1) является выпуклой, условия Куна-Такера являются необходимыми и достаточными. Введем множитель Лагранжа  $\mu$  для потокового ограничения (2.2) и множитель  $\eta_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  для (2.3). Тогда Лагранжиан для оптимизационной задачи (2.1)–(2.3) будет выглядеть следующим образом:

$$L = \sum_{i=1}^n \int_0^{f_i} t_i(u) du + \mu \left( F - \sum_{i=1}^n f_i \right) + \sum_i \eta_i (-f_i). \quad (2.7)$$

Согласно условиям Куна-Такера, производная Лагранжиана (2.7) по переменной  $f_i$  должна быть равна нулю:

$$\mu = t_i(f_i) - \eta_i.$$

Условия дополняющей нежесткости дают дополнительное соотношение  $\eta_i \cdot f_i = 0$ . Это соотношение выполняется когда хотя бы одна из переменных равна нулю. Таким образом, если  $f_i > 0$ , то  $\eta_i = 0$  и

$$\mu = t_i(f_i) = a_i + b_i f_i. \quad (2.8)$$

В то же время, если  $f_i = 0$ , то  $\eta_i \geq 0$  и

$$\mu = t_i(f_i) - \eta_i = a_i - \eta_i.$$

Получается, что если  $a_i \geq \mu$ , то  $f_i = 0$ . С другой стороны, если мы выразим  $f_i$  через  $\mu$  из (2.8) мы получим

$$f_i = \frac{\mu - a_i}{b_i}.$$

Таким образом, если  $f_i > 0$ , то

$$\mu > a_i.$$

Получается, что можно определить множество используемых маршрутов (это будут дуги с ненулевыми потоками):

$$f_i = \begin{cases} \frac{\mu - a_i}{b_i} & \text{when } a_i < \mu, \\ 0, & \text{when } a_i \geq \mu, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.9)$$

Без умаления общности, можно перенумеровать маршруты в следующем порядке:  $a_1 \leq \dots \leq a_k < \mu \leq a_{k+1} \leq \dots \leq a_n$ . Тогда, согласно соотношению (2.2) и (2.9) мы получаем

$$\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{s=1}^k \frac{\mu - a_s}{b_s} = F$$

и, следовательно,

$$F = \sum_{s=1}^k \frac{\mu - a_s}{b_s}. \quad (2.10)$$

В итоге, поскольку  $\mu$  равен  $t^*$  по определению, то имеет место следующее соотношение для соответствующего множителя Лагранжа:

$$t^* = \frac{F + \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{b_s}}{\sum_{s=1}^k \frac{1}{b_s}},$$

и из (2.10) при таком равенстве напрямую следует (2.5), причем  $k$  из соотношения таково, что должно выполняться (2.6). Теорема доказана.  $\square$

Получаем, что если удалось на сети из параллельных каналов зафиксировать время движения транспортных средств по любому из альтернативных маршрутов, то транспортный поток между ОП-парой может быть однозначно восстановлен благодаря формулам (2.5) и (2.6). Таким образом, полученные результаты говорят о перспективности дальнейшего развития подобных методов восстановления матрицы корреспонденций. В основе этих методов лежит идея о том, что если удалось измерить время движения транспортных средств по любому из множества маршрутов, соединяющих конкретную ОП-пару, то можно считать, что по всем остальным используемым маршрутам время движения должно быть таким же. Последнее позволяет решать задачу оценки и восстановления матрицы корреспонденции как обратную к задаче поиска конкурентного равновесия Вардропа на транспортной сети.

## 2.2. Оценка матрицы корреспонденций как задача обратная к равновесному распределению потоков

Вообще говоря, время  $t^*$  движения между любой парой районов отправления и прибытия на реальной транспортной сети можно с легкостью определить. Существуют, к примеру, онлайн-сервисы, которые собирают информацию о средней скорости движения потока на участках городской транс-

портной сети. Зная информацию о скорости и длину участка, на котором эта скорость измерена, можно получить время движения. Кроме того, как уже говорилось ранее, можно замерять время движения при помощи датчиков фиксации номерных знаков. Фиксируя одно и то же транспортное средство на разных участках дорожной сети в последовательные моменты времени (или в районе отправления и районе прибытия), можно определить время движения между ОП-парой.

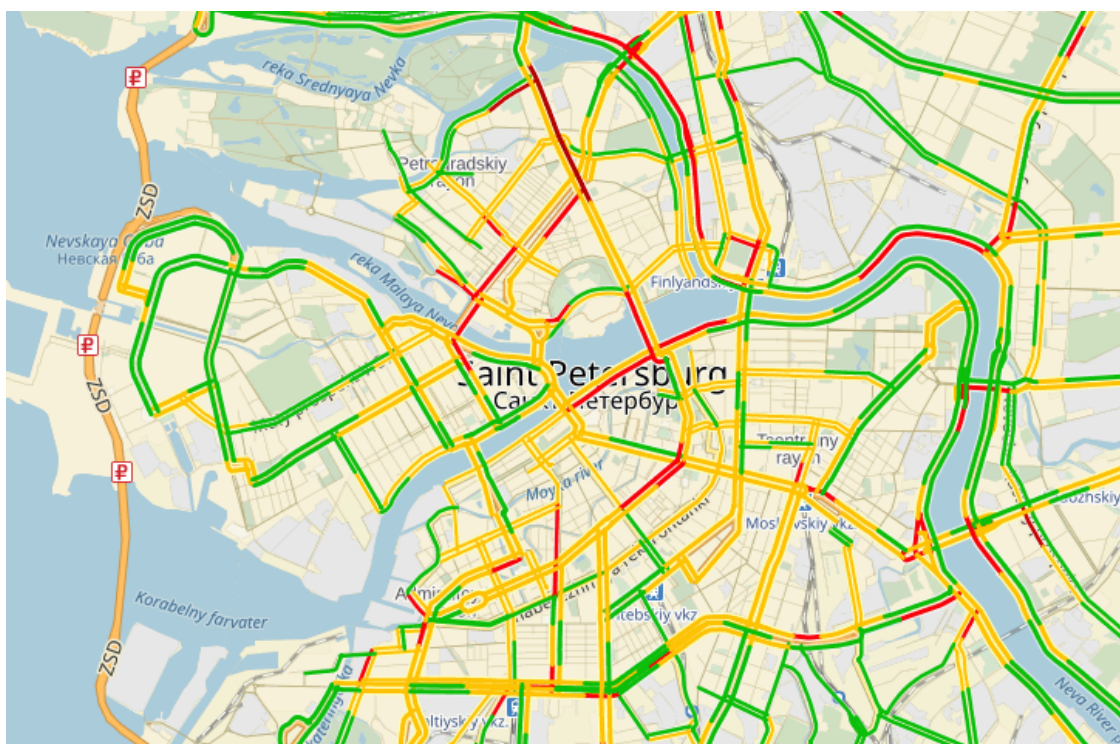


Рис. 6. Дорожная ситуация в Санкт-Петербурге

Так, например, сервис «Яндекс.Пробки» основанный на сервисе «Яндекс.Карты» отражает текущую дорожную ситуацию (рис.6). Благодаря большим базам статистических данных, этот сервис может делать прогноз для разных временных периодов и дней недели. Информация о средней скорости движения на любом участке дорожной сети находится в открытом доступе (рис.7) и собирается при помощи пользовательской активности.

Благодаря такому сервису можно с легкостью определить время движения по всему маршруту между любой парой районов отправления и прибытия

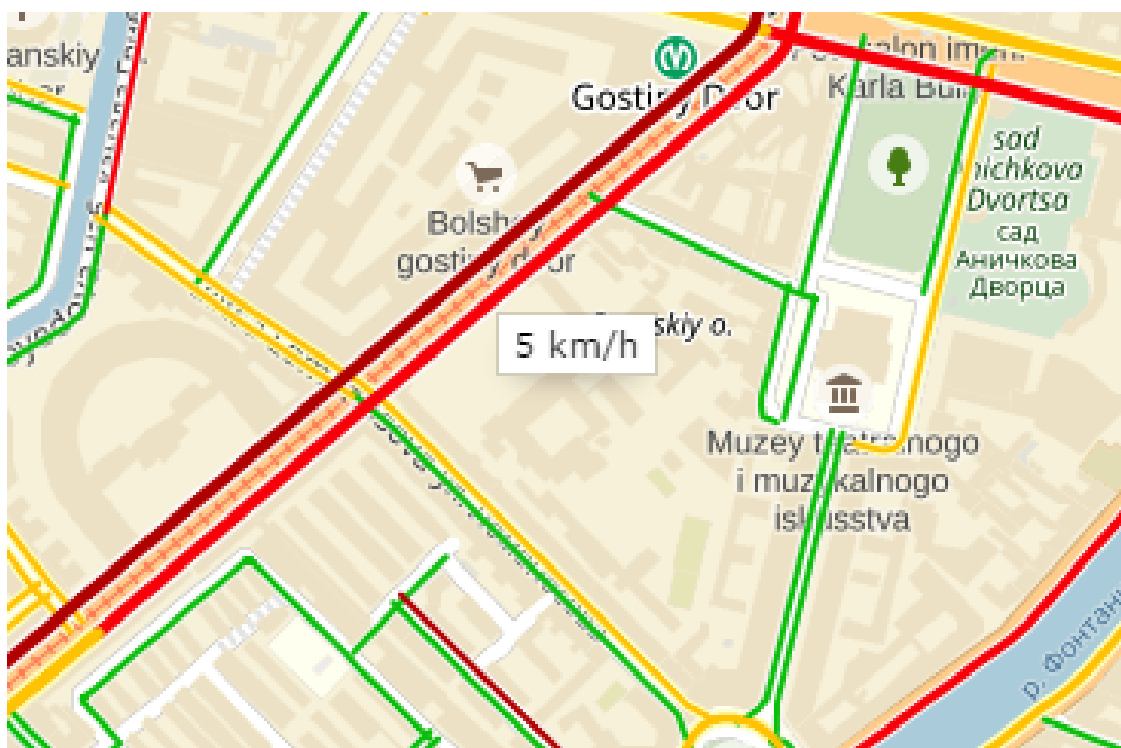


Рис. 7. Данные, доступные на Яндекс.Картах

тия по средней скорости движения на участках сети. Предполагается, что транспортные потоки распределяются на сети согласно первому принципу Вардропа. Тогда, если мы оценим время движения по кратчайшему маршруту между парой районов отправления-прибытия, то мы получим время  $t^*$  для этой пары районов. Заметим также, что такого рода информация о транспортной сети может быть полезна для оптимального распределения ресурсов другим компаниям и даже в других областях [42].

В самом деле, благодаря такой информации о равновесном времени движения между ОП-парой, мы можем оценить матрицу корреспонденций. Обратимся к двойственной теории математического программирования.

Введем двойственную переменную  $\eta$ , соответствующую потоковому ограничению (2.2) и определим задачу, двойственную к равновесному распределению транспортных потоков на сети из параллельных маршрутов и одной ОП-пары:



$$\max_{\eta} \sum_{i=1}^n \theta_i(\eta),$$

при ограничениях

$$\eta \geq 0, \quad \forall i = \overline{1, n},$$

где  $\theta_i(\eta)$  для всех  $i = \overline{1, n}$  удовлетворяет следующей оптимизационной задаче

$$\theta_i(\eta) = \sum_{i=1}^n \min_{f_i} \left( \int_0^{f_i} t_i(u) du - \eta(F - \sum_i f_i) \right),$$

при условии

$$f_i \geq 0.$$

Как было показано в предыдущем параграфе, множитель Лагранжа  $\eta$  является оптимальным временем движения  $t^*$  по маршруту между ОП-парой. И выражение для  $F$  в случае параллельной сети с одной ОП-парой можно получить в явном виде (2.5). Доказано, что задача равновесного распределения транспортных потоков для сети из параллельных маршрутов может быть сведена к поиску неподвижной точки и численно решена при помощи метода простой итерации [33]. Согласно рассуждениям прошлого раздела и тех, что будут приведены в следующей главе, вышеуказанная двухуровневая задача действительно является двойственной к равновесному распределению потоков. Теперь перейдем к сети произвольной топологии.

# Глава 3. Математическая модель оценки матрицы корреспонденций на сети произвольной топологии

## 3.1. Распределение транспортных потоков в прямой и двойственной формулировке

Рассмотрим транспортную сеть произвольной топологии, представленную в виде ориентированного графа  $G = (N, A)$ . Введем следующие обозначения:  $W$  — набор ОП-пар,  $w \in W$ ,  $W \in N$ ;  $K^w$  является множеством маршрутов, соединяющих ОП-пару  $w$ ;  $F^w$  представляет из себя объем транспортных средств, перемещающихся между ОП-парой  $w$ ,  $F = (F^1, \dots, F^{|W|})^T$ ;  $f_k^w$  — транспортный поток на маршруте  $k \in K^w$ ,  $\sum_{k \in K^w} f_k^w = F^w$ ;  $f^w = \{f_k^w\}_{k \in K^w}$  и  $f = \{f^w\}_{w \in W}$ ;  $x_a$  обозначает объем транспортных средств на дуге  $a \in A$ ,  $x = (\dots, x_a, \dots)$ ;  $t_a(x_a)$  — транспортные затраты на перемещение по дуге  $a \in A$ ;  $\delta_{a,k}^w$  представляет из себя бинарную функцию-индикатор, которая принимает следующие значения: 1 если дуга  $a$  входит в маршрут  $k$ , 0 в противном случае.

Конкурентное равновесие на транспортной сети  $G$  достигается таким вектором распределения потоков  $x^*$ , что

$$Z(x^*) = \min_x \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(u) du, \quad (3.1)$$

при условии

$$\sum_{k \in K^w} f_k^w = F^w, \quad \forall w \in W, \quad (3.2)$$

$$f_k^w \geq 0, \quad \forall w \in W, \quad (3.3)$$

при выполнении следующего соотношения

$$x_a = \sum_{w \in W} \sum_{k \in K^w} f_k^w \delta_{a,k}^w, \quad \forall a \in A. \quad (3.4)$$

Принцип равновесия Вардропа позволяет ввести такой параметр  $t_w^*$ , который обозначает оптимальное и равновесное время движения по используемым маршрутам для каждой ОП-пары  $w$ .

**Лемма.**  $t_w^*$  является множителем Лагранжа для оптимизационной программы (3.1)–(3.4) соответствующим ограничению (3.2).

*Доказательство.* Лагранжиан для задачи (3.1)–(3.4) представляет из себя

$$L = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(u) du + \sum_w \mu_w \left( F^w - \sum_{k \in K^w} f_k^w \right) + \sum_w \sum_{k \in K^w} \eta_k^w (-f_k^w),$$

где  $\mu_w$  и  $\eta_k^w \geq 0$  являются множителями Лагранжа, и дифференцирование Лагранжиана в силу метода множителей Лагранжа дает:

$$\frac{\partial L}{\partial f_k^w} = \sum_{a \in k} t_a(x_a) - \mu_w - \eta_k^w = 0.$$

Заметим, что в силу условий дополняющей нежесткости (условий Куна-Таккера)  $\eta_k^w f_k^w = 0$ . Таким образом, для  $f_k^w > 0$  следующее равенство будет выполнено

$$\sum_{a \in k} t_a(x_a) = \mu_w, \quad \forall k \in K^w, w \in W. \quad (3.5)$$

Обратим внимание, что левая часть (3.5) представляет из себя время движения по всем используемым маршрутам ( $f_k^w > 0$ ) между ОП-парой  $r$ . Таким образом, лемма доказана.  $\square$

В итоге, согласно Лемме, выполняется следующее равенство:

$$t_w^* = \sum_{a \in k} t_a(x_a) \quad \forall k \in K^w, w \in W.$$

Сформулируем следующее утверждение.

**Теорема 2.** Двойственной математической задачей к равновесному распределению потоков, формулируемому как (3.1)–(3.4), является следующая двухуровневая оптимизационная программа:

$$\max \theta(T) \quad (3.6)$$

где  $\theta(T)$  определяется как

$$\theta(T) = \min_{f \geq 0} \left\{ \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(s) ds + \sum_w t_w \left( F^w - \sum_{k \in K^w} f_k^w \right) \right\}, \quad (3.7)$$

при условии выполнения следующего соотношения

$$x_a = \sum_{w \in W} \sum_{k \in K^w} f_k^w \delta_{a,k}^w, \quad \forall a \in A, \quad (3.8)$$

при ограничении

$$f_k^w \geq 0. \quad (3.9)$$

*Доказательство.* Предположим, что  $x^*$  является решением задачи (3.1)–(3.4). Введем множители для поточных ограничений (3.2). Действительно, в соответствии с Леммой, мы можем использовать  $t_w^*$  как множитель Лагранжа для ограничений (3.2). Лагранжиан для задачи (3.1)–(3.4) представляет из себя

$$L(x_a, t_w) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(s) ds + \sum_w t_w \left( F^w - \sum_{k \in K^w} f_k^w \right).$$

В математическом программировании для построения теории двойственности используется понятие седловой точки. Для введенной функции Лагранжа рассматривается максиминная задача в предположении достижения точных верхних и нижних граней. Если  $L(x_a, t_w)$  имеет седловую точку  $(x_a^*, t_w^*)$  на допустимом множестве ( $f_k^w \geq 0$ ), то  $x_a^*$  является решением задачи (3.1)–(3.3), и  $t_w^*$  является решением следующей оптимизационной проблемы [1]:

$$\max_T L(x_a^*, t_w)$$

при условии

$$x_a = \sum_{w \in W} \sum_{k \in K^w} f_k^w \delta_{a,k}^w, \quad \forall a \in A,$$

где  $T = (t_1, \dots, t_{|W|})^T$ .

Это соотношение двойственности соблюдается при выполнении теоремы об эквивалентности [1]. Таким образом, двухуровневая оптимизационная программа (3.6)–(3.9) является двойственной к равновесному распределению потоков (3.1)–(3.4).  $\square$

## 3.2. Двухуровневая задача оценки матрицы корреспонденций на основе информации с датчиков фиксации номерных знаков

Датчики подсчета транспортных средств на сети предоставляют информацию о количестве транспортных средств на дуге. Датчики фиксации номерных знаков, установленные на конкретной дуге, определяют конкретный автомобиль из транспортного потока на этой дуге. Таким образом, когда какое-то транспортное средство пересекает дугу с расположенным на нем датчиком, датчик фиксирует номерной знак автомобиля и время его фиксации. В итоге накапливается база данных, состоящая из {номерного знака автомобиля, времени фиксации, номера датчика} [4]. При помощи такой базы данных, время движения между любой парой районов отправления-прибытия может быть напрямую оценено. Достаточно знать время фиксации транспортного средства в районе отправления и время фиксации этого же автомобиля в районе прибытия, чтобы определить  $t_w^*$  (как разницу между временем фиксации в районе отправления и прибытия) для любой пары  $w \in W$ . Формулировка задачи в виде двойственной позволяет избавиться

от ряда ограничений и перейти к новой задаче безусловной оптимизации и, соответственно, к другим методам расчета.

Следовательно, можно сформулировать следующую двухуровневую оптимизационную программу:

$$\min_F (\bar{F} - F)^T U^{-1} (\bar{F} - F) + (T^* - T)^T (T^* - T), \quad (3.10)$$

при условии

$$F \geq 0, \quad (3.11)$$

где  $T$  является решением

$$\max \theta(T), \quad (3.12)$$

при условии, что  $\theta(T)$  определяется как

$$\theta(T) = \min_{f \geq 0} \left\{ \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(s) ds + \sum_w t_w \left( F^w - \sum_{k \in K^w} f_k^w \right) \right\}, \quad (3.13)$$

при выполнении следующего соотношения

$$x_a = \sum_{w \in W} \sum_{k \in K^w} f_k^w \delta_{a,k}^w, \quad \forall a \in A, \quad (3.14)$$

при условии

$$f_k^w \geq 0. \quad (3.15)$$

В данном случае, (3.10) является оценкой обобщенным методом наименьших квадратов и  $\bar{F}$  является априорным объемом транспортных средств между ОП-парами, а  $U$  — весовая матрица, показывающая значимость корреспонденции, и подбираемая экспертным путем в ходе калибровки модели. Таким образом, двухуровневая оптимизационная задача (3.10)–(3.15) оценивает матрицу корреспонденций по известному оптимальному времени

движения  $t_w$  по маршрутам между ОП-парами. На нижнем уровне (3.12)–(3.15) при заданном распределении транспортных потоков ищется  $T$ , которое после используется на верхнем уровне (3.10)–(3.11). Выражение (3.10) по смыслу приближает значения найденных корреспонденций  $F$  к априорным  $\bar{F}$  при приближении найденного времени  $T$  к ранее определенному с датчиков фиксации номерных регистрационных знаков  $T^*$ .

## Глава 4. Эксперимент на транспортной сети Санкт-Петербурга

Рассмотрим дорожную сеть Санкт-Петербурга. Определим на ней семь ОП-пар из семи периферийных районов отправления  $\{1,2,3,4,5,6,7\}$  в центральный район прибытия  $\{8\}$ . Найдем кратчайшие маршруты между выбранными ОП-парами в смысле расстояния, которое необходимо пройти транспортному средству. Нанесем эти найденные кратчайшие маршруты на карту (рис. 8).



Рис. 8. Выбранные ОП-пары с кратчайшими маршрутами

Согласно сведениям ГИБДД, на сегодняшний день на дорожной сети Санкт-Петербурга установлено 253 датчика фиксации номерных регистрационных знаков (рис. 9). Как правило, они используются для фиксации на-



рушений правил дорожного движения, но могут быть использованы и для других целей.

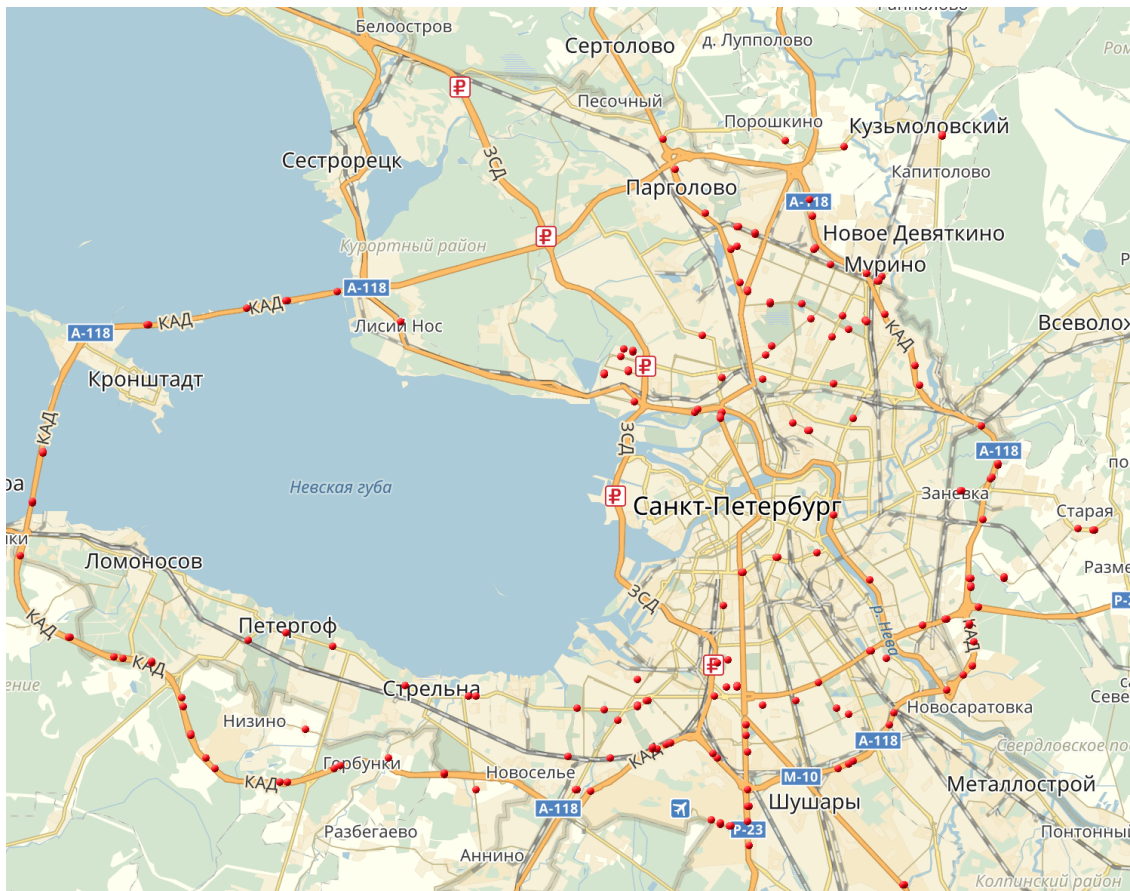


Рис. 9. Расположение датчиков на транспортной сети Санкт-Петербурга

Например, при помощи этих датчиков можно определить время движения между выбранной парой районов отправления-прибытия. Моделируемые нами данные приведены в таблице 1. Разработанный и представленный в предыдущей главе подход основан на принципе конкурентного равновесия Вардропа, который предполагает, что значение времени движения по кратчайшему пути будет являться и временем движение по любому в принципе используемому маршруту. Кроме того, можно вычислить априорные потоки  $\bar{F}$  при помощи, например, гравитационной модели [35] или какой-то другой методики. Весовую матрицу будем подбирать в ходе калибровки.

Воспользуемся этой информацией как входными данными к двухуровневой оптимизационной программе (3.10)–(3.14). Расчеты были произведены

Таблица 1. Время движения, полученное с датчиков фиксации номерных регистрационных знаков

Маршрут ОП-пары	Время движения $t^*/\text{min}$
1–8	89
2–8	80
3–8	83
4–8	78
5–8	45
6–8	57
7–8	36

в пакете прикладных программ MatLab при помощи алгоритмов решения двойственных задач. Результаты расчетов приведены в таблице 2. В таблице

Таблица 2. Сравнение модельных и априорных корреспонденций

ОП-пара	Априорный поток	Модельный поток
1–8	5523	5910
2–8	12232	11253
3–8	6827	6295
4–8	6938	7631
5–8	5534	5080
6–8	4254	4650
7–8	3395	3202

приведено сравнение результатов вычислений с априорными корреспонденциями. На графике 10 это сравнение найденных результатов с априорными потоками представлено визуально. Можно обратить внимание на то, что оценка априорных потоков, проведенная при помощи гравитационной моде-

ли, неплохо соотносится с полученными в результате вычислений данными. При условии, что двухуровневая математическая модель (3.10)–(3.14) предполагает, что найденное время  $T$  приближается к найденному с датчиков  $T^*$ . Таким образом, разработанный подход показывает себя состоятельным и востребованным.

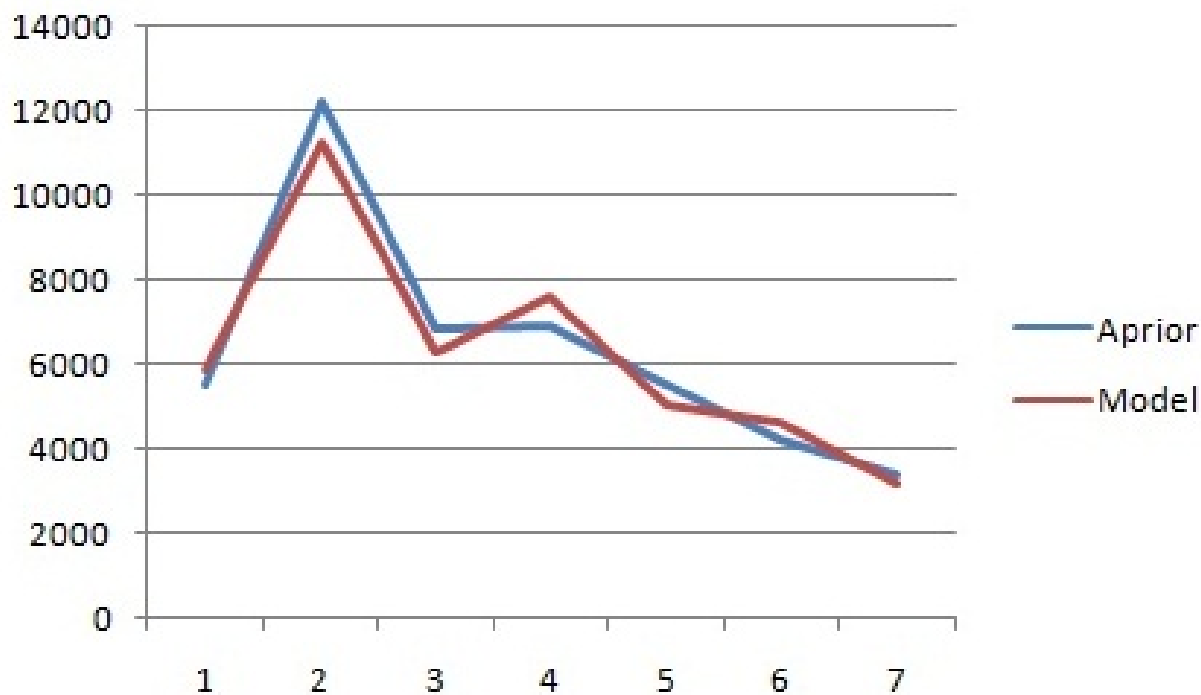


Рис. 10. Визуальное сравнение оцениваемых и априорных потоков

## Заключение

В данной работе представлен новый подход к оценке матрицы корреспонденций транспортной сети большого города. В основе предложенной математической модели лежит теория двойственных задач нелинейного программирования. Задача оценки матрицы корреспонденций рассматривается как задача, двойственная к задаче равновесного распределения транспортных потоков. Математическая модель составлена для упрощенной сети, состоящей из одной пары районов отправления и прибытия и параллельных маршрутов, соединяющих эту пару районов, и для сети произвольной топологии. Стоит отметить, что для сети из параллельных каналов, решения получены в явном виде. Произведены расчеты на примере транспортной сети города Санкт-Петербург в программной среде MatLab.

Определение значения  $t^*$  на реальной транспортной сети для выделенной ОП-пары не представляется сложной задачей, а в предположении распределения транспортных потоков по принципу конкурентного равновесия Вардропы эта информация играет существенную роль в задаче поиска межрайонных корреспонденций. В самом деле, многие аналитические онлайн системы, исследующие транспортные заторы, накапливают большие базы данных с информацией о средней скорости движения (а значит, и времени) по всем дугам транспортных сетей крупных городов. Полезным инструментом в данном вопросе выступают датчики фиксации номерных регистрационных знаков автомобилей, которые позволяют получить достоверную и уникальную информацию о движении транспортных средств и времени преодоления ими участков дорожной сети. В данной работе моделируемые данные основаны на информации с таких датчиков. Таким образом, разрабатываемый подход к оценке и восстановлению матрицы корреспонденций показывает себя крайне эффективным с практической точки зрения.

В дальнейшем планируется разработка новых эффективных подходов к оценке матрицы корреспонденций. Более того, представляет интерес расширить полученные результаты на случай конкурентной маршрутизации [4, 7].

## Список литературы

1. Белолипецкий А. А., Горелик В. А. Экономико-математические методы. Москва, Россия: Академия. 2010. 368 с.
2. Гасников А. В., Кленов С. Л., Нурминский Е. А., Холодов Я. А., Шамрай Н. Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / под ред. Гасникова А. В. М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 2010. 362 с.
3. Дрю Д. Теория транспортных потоков и управление ими / М.: Транспорт. 1972.
4. Захаров В. В., Крылатов А. Ю. Конкурентная маршрутизация транспортных потоков поставщиками услуг навигации // Управление большими системами: сборник трудов. 2014. № 49. С. 129–147.
5. Захаров В. В., Крылатов А. Ю. Конкурентное равновесие Вардропа на транспортной сети из параллельных неоднородных маршрутов // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1, № 1. С. 476–481.
6. Захаров В. В., Крылатов А. Ю. Современные проблемы использования интеллектуальной базы математического моделирования при борьбе с заторами в крупных городах России // Транспорт Российской Федерации. 2014. № 4 (53). С. 69–73.
7. Захаров В. В., Крылатов А. Ю. Системное равновесие транспортных потоков в мегаполисе и стратегии навигаторов: теоретико-игровой подход // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. № 4. С. 23–44.
8. Крылатов А. Ю. Оптимальные стратегии управления транспортными потоками на сети из параллельных каналов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 2. С. 121–130.

9. Лагерев Р. Ю. Методика оценки матриц корреспонденций транспортных потоков по данным интенсивности движения. Диссертация. Волгоград. 2007. 183 с.
10. Раевская А. П. Оптимальное расположение датчиков на транспортной сети для оценки матрицы корреспонденций. Дипломная работа. Санкт-Петербург. 2015. 83 с.
11. Сайт федерального дорожного агентства // [www.rosavtodor.ru](http://www.rosavtodor.ru)
12. Хабаров В. И., Молодцов Д. О., Хомяков С. Г. Марковская модель транспортных корреспонденций // Доклады ТУСУРа. № 1 (25), часть 1. 2012.
13. Швецов В. И. Алгоритмы распределения транспортных потоков / М.: Институт системного анализа РАН. 2009. С. 1–48.
14. Швецов В. И. Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2003. № 11. С. 3–46.
15. Beckman M., McGuire C. B., Winsten C. B. Studies in economics of transportation // RM-1488. Santa Monica: RAND Corporation. 1955.
16. Bianco L., Cerrone C., Cerulli R., Gentili M. Locating sensors to observe network arc flows: exact and heuristic approaches // Computers and Operation Research. 2014. No 46. P. 12–22.
17. Bianco L., Confessore G., Gentili M. Combinatorial aspects of the sensor location problem // Annals of Operations Research. 2006. No 144 (1). P. 201–234.
18. Bierlaire M. The total demand scale: a new measure of quality for static and dynamic origin–destination trip tables // Transportation Research Part B. 2002. No 36. P. 282–298.
19. Cascetta E. Estimation of trip matrices from traffic counts and survey data: a generalized least squares estimator // Transportation Research Part B. 1984. No 18. P. 289–299.

20. Castillo E., Gallego I., Menedez J. M., Rivas A. Optimal use of plate-scanning resources for route flow estimation in traffic networks // *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2010. No. 11 (2). P. 380–391.
21. Castillo E., Menedez J. M., Jimenez P. Trip matrix and path flow reconstruction and estimation based on plate scanning and link observations // *Transportation Research Part B*. 2008. No 42. P. 455–481.
22. Castillo E., Nogal M., Rivas A., Sanchez-Cambronero S. Observability of traffic networks. Optimal location of counting and scanning devices // *Transportmetrica B: Transport Dynamics*. 2013. No. 1 (1). P. 68–102.
23. Chootinan P., Chen A., Yang H. A bi-objective traffic location problem of origin-destination trip table estimation // *Transportmetrica*. 2005. No 1. P. 65–80.
24. Doblas J., Benitez F. G. An approach to estimating and updating origin-destination matrices based upon traffic counts preserving the prior structure of a survey matrix // *Transportation Research Part B: Methodological*. 2005. No 39 (7). P. 565–591.
25. Ehlert A., Bell M., Grosso S. The optimisation of traffic count locations in road networks // *Transportation Research Part B*. 2006. No 40. P. 460–479.
26. Eisenman S. M., Fei X., Zhou X., Mahmassani H. S. Number and location of Sensors for real-time network traffic estimation and prediction // *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*. 2006. No 1964. P. 253–259.
27. Gan L., Yang H., Wong S. C. Traffic counting location and error bound in origin-destination matrix estimation problems // *Journal of Transportation Engineering*. 2005. No 131 (7). P. 524–534.
28. Gentili M., Mirchandani P. B. Locating active sensors on traffic networks // *Annals of Operations Research*. 2005. No. 136 (1). P. 229–257.



29. Gentili M., Mirchandani P. Locating sensors on traffic networks: models, challenges and research opportunities // *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. 2012. No 24. P. 227–255.
30. Hadavi M., Shafahi Y. Vehicle identification sensor models for origin–destination estimation // *Transportation Research Part B*. 2016. No 89. P. 82–106.
31. Hazelton M. Inference for origin-destination matrices: estimation, prediction and reconstruction // *Transportation Research Part B*. 2001. No 35. P. 667–676.
32. Hu S.-R., Peeta S., Chu C.-H. Identification of vehicle sensor locations for link-based network traffic applications // *Transportation research Part B: Methodological*. 2009. No 43 (8). P. 873–894.
33. Krylatov A. Yu. Network flow assignment as a fixed point problem // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2016. No 10 (2). P. 243–256.
34. Li X., Ouyang Y. Reliable sensor deployment for network traffic surveillance // *Transportation Research Part B*. 2011. No 45. P. 218–231.
35. Medina A., Taft N., Salamatian K., Bhattacharyya S., Diot C. Traffic matrix estimation: existing techniques and new directions // *Computer Communication Review – Proceedings of the 2002 SIGCOMM conference*. 2002. No 32. P. 161–174.
36. Minguez R., Sanchez-Cambronero S., Castillo E., Jimenez P. Optimal traffic plate scanning location for OD trip matrix and route estimation in road networks // *Transportation Research Part B*. 2010. No 44. P. 282–298.
37. Mirchandani P. B., Gentili M., He Y. Location of vehicle identification sensors to monitor travel-time performance // *IET Intelligent Transport Systems*. 2009. No 3 (3). P. 289–303.
38. Ng M. Synergistic sensor location for link flow inference without path

- enumeration: a node-based approach // *Transportation Research Part B: Methodological*. 2012. No 46 (6). P. 781–788.
39. Ng M. Partial link flow observability in the presence of initial sensors: solution without path enumeration // *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. 2013. No 51. P. 62–66.
  40. Patriksson M. *The Traffic Assignment Problem: Models and Methods*. Utrecht, Netherlands: VSP. 1994. 223 p.
  41. Rajagopal R., Varaiya P. Health of California's loop detector system // *California PATH Research Report*. 2007.
  42. Shavidze G. G., Balykina Y. E., Lejnina E. A., Svirkin M. V. Mathematical Model of Ambulance Resources in Saint-Petersburg // *Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*. 2015. Vol. 1738.
  43. Sheffi Y. *Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods*. N.J.: Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, 1985. 416 p.
  44. Sherali H. D., Desai J., Rakha H. A discrete optimization approach for locating automatic vehicle identification readers for the provision of roadway travel times // *Transportation Research Part B: Methodological*. 2006. No 40 (10). P. 857–871.
  45. Simonelli F., Marzano V., Papola A., Vitello I. A network sensor location procedure accounting for o–d matrix estimate variability // *Transportation Research Part B*. 2012. No 46. P. 1624–1638.
  46. Viti F., Verbeke W., Tampere C. Sensor locations for reliable travel time prediction and dynamic management of traffic networks // *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*. 2008. No 2049 . P. 103–110.
  47. Viti F., Rinaldi M., Corman F., Tampere C.M. Assessing partial observability

- in network sensor location problems // *Transportation Research Part B: Methodological*. 2014. No 70. P. 65–89.
48. Wardrop J. G. Some theoretical aspects of road traffic research // *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*. 1952. Vol. 1, No 3. P. 325–362.
  49. Wilson A. G. A statistical theory of spatial distribution models // *Transportation Research*. 1967. Vol. 1. P. 253–270.
  50. Yang H., Iida Y., Sasaki T. An analysis of the reliability of an origin-destination trip matrix estimated from traffic counts // *Transportation Research Part B*. 1991. No 5. P. 351–363.
  51. Yang H., Sasaki T., Iida Y., Asakura Y. Estimation of origin-destination matrices from link traffic counts on congested networks // *Transportation Research Part B*. 1992. No 26 (6). P. 417–434.
  52. Yang H., Zhou J. Optimal traffic counting locations for origin-destination matrix estimation // *Transportation Research Part B*. 1998. No 32 (2). P. 109–126
  53. Zhou X., List G. F. An information-theoretic sensor location model for traffic origin–destination demand estimation applications // *Transportation Science*. 2010. No 44 (2). P. 254–273.
  54. Раевская А. П., Крылатов А. Ю. Восстановление матрицы корреспонденций как задача обратная равновесному распределению потоков // *Процессы управления и устойчивость*. 2016. Т. 3 (19). №1. С. 690–694.
  55. Раевская (Ширококолобова) А. П., Крылатов А. Ю. Задача оценки и восстановления матрицы корреспонденций // *Труды VIII Московской международной конференции по исследованию операций (ORM2016)*. Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН. М.: Издательство ФИЦ ИУ РАН. 2016. Т. 2. С. 248.
  56. Раевская А. П., Крылатов А. Ю. Методы оценки матрицы корреспонден-

денций в загруженных транспортных сетях // ИТВ СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2016. №1 (236). С. 31–40.

57. Широколобова А. П. Двойственная задача к равновесному распределению потоков на транспортной сети произвольной топологии // Материалы Юбилейной Международной научно-практической конференции «Транспорт России: проблемы и перспективы». 2016. Институт проблем транспорта им. Н.С. Соломенко РАН. Том 1. С. 223–227.
58. Krylatov A. Yu., Shirokolobova A. P., Zakharov V. V. OD-matrix Estimation Based on a Dual Formulation of Traffic Assignment Problem // Informatica. 2016. Vol. 40, No 4. P. 393–398.
59. Shirokolobova A. P., Krylatov A. Yu., Zakharov V. V. A dual formulation of traffic assignment problem for OD-matrix estimation // Proceedings of the International Conference on Applications in Information Technology (ICAIT-2016). The University of Aizu Press. 2016. P. 42–45.