Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Миннигалеева Римма Ильшатовна

Магистерская диссертация

Аксиоматизация решений ТП-игр

Направление 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Магистерская программа: Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Лежнина Е.А.

Санкт-Петербург, 2017

Оглавление

Введение

Теория игр – раздел математики, основным предметом которого является поиск оптимальных стратегий в ситуациях, когда две или более сторон ведут борьбу за реализацию своих интересов. Такие ситуации называются играми. В каждой игре игроки следуют определенной стратегии, которая приведет каждого к проигрышу или выигрышу. При выборе стратегии каждому игроку необходимо опираться не только на максимизацию своего выигрыша, но и учитывать поведение другого игрока. Методам теории игр находят применение в экономике (наиболее частое применение), медицине, психологии, социологии, политологи, военном деле и т.д.

Выделяют кооперативную и некооперативную теорию игр. Отличием кооперативной теории игр от некооперативной является то, что она изучает поведение игроков, объединённых в коалиции. Внутри игры существуют обязывающие соглашения, которые безоговорочно соблюдаются всеми игроками, что и объединяет игроков в коалиции. Одной из задач кооперативной теории игр является изучение методов справедливого распределения дохода или затрат, которые будут удовлетворять всех участников игры. Справедливость метода гарантируется определенными свойствами, определенный набор которых задает то или иное решение. Описанный подход к формированию решений кооперативных игр является аксиоматическим

Объектом изучения в данной работе являются различные решения игр с трансферабельной полезностью, особое внимание будет уделено изучению и описанию *MSC*. Методологической и теоретической основой являютсятруды зарубежных и отечественных авторов по теории игр, посвященных процессу аксиоматизации.

Работа состоит следующих частей:

- обзор литературы по различным аксиоматизациям решений игр с трансферабельной полезностью (ТП-игр);
- описание свойств решений ТП-игр;
- исследование свойств для *MSC*;
- доказательство независимости аксиом для *MSC*;
- программная реализация подхода выбора оптимального одноточечного решения.

Описание принципов является актуальной задачей, так как не существует абсолютной оптимальности, у каждого игрока свое понимание. Для практического применения рассматриваемого решения традиционно описывается его аксиоматизация. Следовательно, актуальность данной работы состоит в том, что после изучения свойств для *MSC* появится возможность использования данного решения в практических задачах.

Глава 1. Постановка задачи. Основные свойства решений для игр с трансферабельной полезностью

1.1. Обзор литературы

Процесс аксиоматизации какого-либо решения представляет собой сложную задачу, основой которой является обобщение определенных свойств с целью определения класса для рассматриваемого решения. Стоит отметить, что для каждого известного решения теории игр существует целый ряд аксиоматизаций, которым посвящено множество научных работ.

Основной целью данной работы является получение аксиоматической характеризации *MSC*-вектора, который является селектором *SC*–ядра. Впервые *MSC*-вектор был введен в статье В.В.Захарова и А.Ганьковой «Comparing solutions in joint implementation projects»**[11]**.

Также одной из целей данной работы является изучение существующих аксиоматизаций и создание обзора для решений ТП-игр. Для этого были изучены работы нескольких авторов. B. Peleg в своей работе "Introduction to the theory of cooperative games" **[13]** собрал всевозможные аксиоматизации, определения и теоремы, связанные с решениями в кооперативной теории игр. Наиболее подробно были изучены главы, посвященные вектору Шепли, пред *n*-ядру, пред *k*-ядру, *c*-ядру. В частности, для пред *n*-ядра приведены теоремы Соболева и Оршана, в которых определены свойства данного решения на играх с различным количеством игроков. Для пред *k*-ядра проведена аксиоматизация с использованием свойства эффективности, что является более общим свойством, по сравнению с Парето оптимальностью. Стоит отметить, что данная работа была написана в 2007 году, поэтому в ней нет описания *SM*-ядра, которое было введено С. И. Тарашниной в том же году в статье "The simplified modified nucleolus of a cooperative TU-game " **[15]** и *SC* - ядра, о котором было сказано выше. *SC* –

ядро было введено В.В. Захаровым в 1997 году. Свойство согласованности по Дэвису-Машлеру для данного решения было доказано позже, в 2003 году, в статье "Согласованность *SC* – ядра и задача о минимальной редукции" **[2].**

Также была получена аксиоматическая характеризация наименьшего и нормированного *c*-ядра при помощи свойств согласованности и подтверждения. Данный результат описан Е.А.Лежниной в работе "Аксиоматизация некоторых решений кооперативных игр" **[5]**. Также приведена аксиоматизация для нормированного пред *n*-ядра, которая является аналогом характеризации для пред *n*-ядра, полученной А.Соболевым.

Работа Е.Б.Яновской "Совместная аксиоматизация пред *n*-ядра и решения Дутты-Рэя для выпуклых игр" **[9]** посвящена ослаблению свойства ковариантности, которому удовлетворяет решение Дутты-Рэя. С применением этого свойства, названного самоковариантностью, приводится две аксиоматические характеризации пар решений для класса выпуклых игр: решения Дутты-Рэя и пред *n*-ядра, и решения Дутты-Рэяи значения вектора Шепли. Стоит добавить, что в работе приведены 2 варианта редуцированных игр: по Дэвису-Машлеру и по Харту-Мас-Колеллу. Также в данной работе определены все свойства, которые применимы для описания решений, как одноточечных, так и множественных.

В данной работе рассматриваются игры с трансферабельными полезностями. Данный раздел включает в себя игры с ограниченными и с неограниченными коалициями, и в каждом из них проведены аксиоматизации для наиболее популярных решений. Дело в том, что одни и те же свойства на различных классах игр могут различаться. Данные различия обусловлены тем, что необходимо каким-либо образом переопределить ранее доказанные свойства на новый класс игр. В статье Е .Б. Яновской, И. В. Кацева **[4]** "Пред *n*-ядра в играх с ограниченной кооперацией" подробно расписаны всевозможные обобщения данного решения в рассматриваемом классе решений. Было показано, что в отличие от вектора Шепли для пред n-ядра не существует проблем при его определении в случае произвольной коалиции.Также было отмечено, что данное решение может быть перефомулировано для более общей ситуации, чем классическая ТП-игра.

Итак, одной из задач теории игр является определение оптимального выигрыша. Предположим, что в игре получено не одно, а несколько решений, из которых необходимо выбрать такое, которое будет удовлетворять всех игроков. Одним из подходов для решения данного вопроса является использование весовых коэффициентов. В **[11]** описывается алгоритм для сравнения одноточечных решений, в основе которого лежит введение в задачу весовых коэффициентов и их применение при сравнении нормированных эксцессов. Использование вектора весов широко применяется в задачах многокритериального оценивания, в связи с этим, были изучены статьи, посвященные данной проблеме. В работе Хованова Н.В. «Анализ и синтез показателей при информационном дефиците» **[8]** рассмотрены математические модели неопределенности, возникающие при многокритериальном оценивании. Также проблема многокритериального оценивания и подход к решению данного вопроса раскрыты в статье Лещинского Б.С. «Нечеткий многокритериальный выбор объектов недвижимости» **[6]**.

1.2. Постановка задачи

Аксиоматизация решения является сложной теоритической задачей. Для того, чтобы провести процедуру аксиоматической характеризации селектора SC - ядра будет проведена работа, состоящая из нескольких этапов, описанных ниже.

В первой части представленной работы рассмотрены и изучены существующие аксиоматизации решений ТП-игр. Так как *MSC* является одноточечным решением, то подробно описаны аксиоматизации наиболее используемых одноточечных решений: предn-ядра и вектора Шепли. Также описана аксиоматическая характеризация C-ядра, так как данное множественное решение является одним основных в теории игр.

Главной задачей является описание свойств *MSC*. Проверка основных свойств является вторым этапом при выполнении данной работы. Далее проведен анализ и сравнение свойств *MSC* и прочих одноточечных решений (в частности, вектора Шепли, пред n-ядра и *SM* - ядра). Результатом выполнения задачи является доказательство независимости аксиом, описывающих данное решение.

Заключительным шагом в данной работе является программная реализация примера задачи многокритериального выбора оптимального одноточечного решения в кооперативной игре.

1.3. Основные определения и свойства теоретико – игровых решений

Класс кооперативных игр с трансферабельной полезностью является одним из самых изученных классов игр в коалиционной форме. Ниже представлено классическое определение ТП - игр.

Определение 1 (Neumann and Morgenstern, 1944) Под кооперативной игрой с трансферабельной полезностью понимается упорядоченная тройка (N, v, R), где N - конечное множество $N = \{1,2, \dots, n\}$ $n \geq 2$, R - множество вещественных чисел, v - характеристическая функция, которая является отображением $v: 2^N \to R, 2^N = \{S | S \subseteq N\}$ - множество всех подмножеств множества N. Полагаем, что $v(\emptyset) = 0$.

Элементы множества N называются игроками, непустое множество S - коалицией, само N - большой коалицией. Характеристическая функция описывает величину выгоды, которую могут получить игроки, при объединении в коалицию. Характеристическая функция подчиняется следующим свойствам:

1. монотонность: $S \subseteq N \Rightarrow v(S) \leq v(N)$;
2. супераддитивность: $S \subseteq N, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset \Rightarrow v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$;
3. выпуклость: $v(S \cap T) + v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

Вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется дележом. Именно дележ описывает исход игры. Каждая компонента вектора подчиняется следующим условиям:

1. $x_i \geq v(\{i\})$ – условие индивидуальной рациональности;
2. $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$– условие коллективной рациональности.

Первое условие означает, что в результате дележа игрок получает выигрыш не меньше того, что он мог бы получить, действуя самостоятельно. Второе условие соответствует тому, что делится весь возможный суммарный выигрыш. Объединение в коалицию бессмысленно, если сумма элементов дележа меньше суммарного выигрыша.

При сравнении дележей используется принцип, устанавливающий доминирование дележей. Дележ x доминирует над дележомy, если выполняются следующие условия:

- $x_i > y_i, i \in S$ – условие единогласия;
- $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$ – условие реализуемости.

Далее перечислим основные свойства теоретико-игровых решений, используемые в виде аксиом в различных характеризациях. Данные свойства взяты из работ **[9]** и **[5]**. Рассмотрим решение σ из произвольного класса решений $\mathcal{G}_N$. Решение является:

- *не пустым*, если $\sigma(N,v) \neq \emptyset$ для всех $(N,v) \in \mathcal{G}_N$;
- *эффективным*, если $\sum_{i \in N} x_i(N,v) = v(N)$ для любого $x \in \sigma(N,v)$ и для любой игры $(N,v) \in \mathcal{G}_N$;
- *анонимным*. Пусть $(N,v) \in \mathcal{G}_N, \pi: N \to N$ – произвольная перестановка игроков. Обозначим $\pi(N,v) = (N,\pi v)$, где $\pi v(S) = v(\pi S)$.Свойство выполняется, если$\sigma(N,\pi v) = \pi\sigma(N,v), \forall(N,v) \in \mathcal{G}_N, \forall\pi$. На разных классах игр данную аксиому можно усилить и постулировать независимость решений от наименования игроков;
- *симметричным*. Игроки i и jимеют равные возможности, то есть выполняется $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall S \subset N, i,j \notin S$, тогда $x_i = x_j$. Фактически это свойство означает, что игроки взаимозаменяемы, так как распределение дележей для них является равным. Стоит отметить, что для одноточечных решений из анонимности следует симметричность, для множественных решений такой вывод не всегда верен;
- *одноточечным*, если для $\forall(N,v) \in \mathcal{G}_N |\sigma(N,v) = 1|$. Физический смысл данного свойства заключается в том, что для всех игр решение состоит из единственного вектора выигрышей. В данном случае полученным результатом является значение игры. Стоит отметить, что для одноточечных решений из одноточечности следует эффективность;
- *положительно однородным*, если для $\forall\alpha > 0, (N,v) \in \mathcal{G}_N$ выполняется $(N,\alpha v) \in \mathcal{G}_N, \sigma(N,\alpha v) = \alpha\sigma(N,v)$;
- решение удовлетворяет *инвариантности относительно сдвига*, если для $\forall(N,v) \in \mathcal{G}_N$ и числа $b[N,v+b] \in \mathcal{G}_N$ выполняется$x \in \sigma(N,v) \Rightarrow x \in \sigma(N,v+b)$, где $(v+b)(S) = v(S) + b \; \forall S \subset N, S \neq N, (v+b)(N) = v(N)$;

- *ковариантным*, если оно однородно и инвариантно относительно сдвига;
- *слабо ковариантным,* если оно положительно однородно и инвариантно относительно сдвига на любой вектор b с равными координатами;
- *макс-инвариантным*, если для любых игр $(N, v) \in \mathcal{G}_N$, $(N, w) \in \mathcal{G}_N$, таких что $v(N) = w(N)$, из$x \in \sigma(N, v) \cap \sigma(N, w) \Rightarrow x \in \sigma(N, \max\{v, w\})$, где $\max\{v, w\}(S) = \max\{v(S), w(S)\}, \forall S \subset N$;
- *согласованным*, если $\forall(N, v) \in \mathcal{G}_N, \forall T \subset N, x \in \sigma(N, v)$ ее *редуцированная игра*, то есть $\left(N \backslash T, v_{N \backslash T}^{x}\right)$, полученная после ухода игроков из коалиции T с выигрышами $x_i, i \in T$, также принадлежит классу $\mathcal{G}_N$ и $x = \left(x_{N \backslash T}, x_T\right) \in \sigma(N, v) \Rightarrow x_{N \backslash T} \in \sigma\left(N \backslash T, v_{N \backslash T}^{\phi}\right)$. Стоит отметить, что редуцированная игра не определяется однозначным образом видом решения или исходной игрой. Существуют различные определения для того, чтобы получить редуцированную игру, в связи с этим можно получить различные аксиоматические характеристики для одного и того же исходного решения;
- *билатерально согласованным,* если предыдущее свойство выполняется только для редуцированных игр двух лиц *(*$|N \backslash T| = 2$*);*
- *выполняется свойство подтверждения:* если из $x \in \sigma(N, v)$, $y_{N \backslash S} \in \sigma(N \backslash S, v^{x_s}) \Rightarrow (x_s, y_{N \backslash S}) \in \sigma(N, v)$, где v^{x_s} - характеристическая функция редуцированной игры на множество $N \backslash S$ относительно вектора выигрышей *x*. При выполнении свойств согласованности и подтверждения решение является сильно согласованным. Одноточечные согласованные решения являются сильно согласованными. При аксиоматической характеризации множественных для проверки свойства сильной

согласованности необходимо отдельно проверить каждое из свойств.

Глава 2. Решения ТП-игр и их аксиоматизации

2.1. Вектор Шепли

Одним из наиболее известных принципов распределения выигрыша между игроками в кооперативной теории игр является вектор Шепли.

Определение 2.1.1 Вектор Шепли – принцип оптимальности распределения выигрыша между игроками в задачах кооперативной теории игр. Является распределением, в котором выигрыш каждого игрока равен среднему вкладу игрока в общий выигрыш всей коалиции:

$$\varphi_i = \sum_{i \epsilon S} \frac{(|N| - |S|)!\,(|S| - 1)!}{|N|!}(v(S) - v(S/i))$$

Вектор Шепли удовлетворяет следующим свойствам:

- одноточечности (следовательно, выполняется и эффективность);
- непустоты;
- аддитивности;
- анонимности (следовательно, выполняется и симметричность);
- ковариантности;
- аксиоме болвана;
- согласованности по Харту-Мас-Колеллу;
- подтверждения.

Наиболее известная аксиоматизация вектора Шепли представлена ниже:

Теорема 2.1.1 (Shapley, 1953) Значение вектора Шепли является единственным одноточечным решением, обладающим свойствами аддитивности, симметричности, эффективности и свойством "болвана".

Определение 2.1.2 Нулевым игроком, или "болваном", называется такой игрок, который ничего не приносит ни в какую коалицию, то есть верно:

$$m_i^S(N, v) = 0, \forall S \subseteq N \backslash \{i\},$$

где $m_i^S(N, v)$ - маргинальный вклад игрока $i \in N$в коалицию $S \subseteq N$.

H.P. Young в 1985 году провел аксиоматизацию вектора Шепли при помощи свойств монотонности и Парето оптимальности.

Определение 2.1.3 Одноточечное решение σ для любой коалиции $S \subseteq N$ является строго-монотонным, если для $u, v \in S, \forall i \in N$ выполняется:

$$u(S \cup \{i\}) - u(S) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

Определение 2.1.4 Пусть $X(N, v) = \{x \in R^N | x(N) = v(N)\}$- множество преддележей или Парето оптимальное множество, тогда решение σ является Парето оптимальным, если: $\sigma(N, v) \subseteq X(N, v)$.

Теорема 2.1.2 (Young, 1985) Вектор Шепли является единственным одноточечным решением, которое удовлетворяет свойствам строгой монотонности, Парето оптимальности и симметричности.

Для использования свойства согласованности необходимо определить редуцированную игру. Наиболее часто используется редукция по Дэвису-Машлеру. В **[9]** приведена еще одна редукция игры по Харту-Мас-Колеллу.

Определение 2.1.5 Редуцированной игрой в определении Харта и Мас-Колелла(S, v_S^{φ}) игры (N, v) на множество игроков S относительно значения φ называется игра со следующей характеристической функцией:

$$v_S^x(T) = \begin{cases} v(N) - x(N \backslash S), T = S \\ v\big(T \cup (N \backslash S)\big) - \sum_{i \in N \backslash S} \varphi_i(T \cup (N \backslash S), v), T \subset S, T \neq S \end{cases}$$

где $(T \cup (N \backslash S), v)$ - подигра игры (N, v).

Теорема 2.1.3 (Hart, Mas-Colell) В классе всех ТП-игр с произвольным универсальным множеством игроков единственным значением, удовлетворяющим аксиомам непустоты, стандартности для игр двух лиц и согласованности по Харту-Мас-Колеллу, является вектор Шепли.

Определение 2.1.6 Одноточечное решение σ для любой коалиции $S \subseteq N$ является совместимым, если для любого $i \in S$ выполняется:

$$\sigma^i\left(S, v_{S,\sigma}\right) = \sigma^i(N, v),$$

где $v_{S,\sigma}(T) = v\left(T \cup (N \backslash S)\right) - \sum_{i \in N \backslash S} \sigma^i(T \cup (N \backslash S), v),\ \emptyset \neq T \subseteq S.$

Теорема 2.1.4 Вектор Шепли является единственным одноточечным решением, которое удовлетворяет свойствам симметричности, совместимости, Парето оптимальности и ковариантности.

Однако, для вектора Шепли была также определена редуцированная игра по следующему правилу:

$$v^{SH}_{N\backslash\{i\},x}(T) = \frac{|T|}{|N|-1}\left(v(T \cup \{i\}) - x^i\right) + \frac{|N|-|T|-1}{|N|-1}, T \subseteq N\backslash\{i\} (2.1.1)$$

При таком определении редуцированной игры была описана следующая аксиоматизация для вектора Шепли, которая тесно связана с теоремой Соболева (1975).

Определение 2.1.7 Одноточечное решение σ удовлетворяет свойству согласованности в силу редуцированной игры по правилу 2.1.1 на множестве Γ, если $\left(S, v^{SH}_{S,x}\right) \in \Gamma, x^S \in \sigma(S, v^{SH}_{S,x})$ для $\forall x \in \sigma(N, v), \forall \emptyset \neq S \subseteq N$.

Теорема 2.1.5 Вектор Шепли является единственным решением, который удовлетворяет свойствам согласованности в силу редуцированной игры в смысле определения 2.1.7, эффективности, ковариантности и симметричности.

2.2. Пред n-ядро

Помимо решений, которые показывают распределение выигрыша между игроками, существуют решения, которые основаны на степени неудовлетворенности выигрышем коалиций. Пред n-ядро является одним из таких решений. Но прежде чем будет дано его определение, необходимо ввести понятия эксцесса, который и показывает степень неудовлетворенности игроков.

Определение 2.2.1 Вектором эксцессов коалиции S относительно вектора выигрышей x называется разность $e(v, S, x) = v(S) - x(S)$. Для простоты будем использовать $e(S, x) = e(x)$.

Смысл эксцесса состоит в том, что при его положительности коалиция получает меньше, чем должна. Если же значение эксцесса отрицательно, то это означает, что результат является приемлемым для игроков, однако они должны быть заинтересованы в том, чтобы минимизировать это значение.

Обозначим через $\theta e(x)$ вектор эксцессов, компоненты которого упорядочены в порядке убывания. Вектор x^*называется пред n-ядром.

Определение 2.2.2 Вектор x^* называется пред n-ядром игры *(N,v)* (обозначается *PN(N,v))*, если:

$$\theta e(x^*) \prec_{Lex} \theta e(x), \forall x \in X(N, v) \backslash x^*$$

или

$$e(x^*) \prec_{lexmin} e(x), \forall x \in X(N, v) \backslash x^*$$

То есть, пред n-ядро - вектор, который доставляет лексикографический минимум упорядоченному вектору эксцессов.

Перед тем, как перейти к перечислению существующих аксиоматизаций пред n-ядра, необходимо перечислить те общеизвестные свойства, которым данное решение удовлетворяет. Ниже перечислены данные аксиомы:

- одноточечность (следовательно, и эффективность);
- анонимность (следовательно, и симметричность);
- согласованность по Дэвису-Машлеру;
- подтверждение (следовательно, и сильная согласованность по Дэвису-Машлеру);
- ковариантность.

Наиболее известная аксиоматизация пред n-ядра принадлежит А. Соболеву. В данной теореме используется свойство согласованности в смысле Дэвиса-Машлера.

Теорема 2.2.1 Если множество игроков бесконечно, то существует единственное решение, которое удовлетворяет свойствам эффективности, ковариантности, анонимности и согласованности в смысле Дэвиса-Машлера - пред n-ядро.

В **[13]** Оршан показал, что свойство анонимности можно опустить и использовать вместо него свойство симметричности, тем самым аксиоматика была усилена.

Теорема 2.2.2 (Orshan, 1993) На бесконечном множестве игроков пред n-ядро является единственным решением, которое удовлетворяет аксиомам эффективности, ковариантности, согласованности и симметричности.

Из данного результата Оршаном и Зюдхолтером в **[12]** была получена аксиоматизация n-ядра с использованием свойства подтверждения, а не согласованности.

Определим понятие нормированного эксцесса, которое является основой для определения нормированного пред n-ядра:

$$e^n(v,S,x) = \frac{v(S) - x(S)}{S}$$

Такое представление эксцесса позволяет более адекватно оценить значения эксцессов для различных коалиций. Соответственно, можно вывести аналогичное определение для нормированного пред n-ядра - $PN^n(N,v)$.

Определение 2.2.3 Для того, чтобы использовать свойство согласованности, необходимо определить редуцированную игру следующим образом:

$$\frac{v_S^T(T) - x(T)}{|T|} = \begin{cases} 0, T = S \\ \max\limits_{Q \subset N \setminus S} \left(\dfrac{v(T \cup Q) - x(T \cup Q)}{|T \cup Q|} \right), T \neq Q \end{cases}$$

То есть, значение характеристической функции для редуцированной игры будет вычисляться следующим образом:

$$v_S^T(T) = \frac{q}{q+t} x(T) + \max_{Q \subset N \setminus S} \big(v(T \cup Q) - x(Q) \big), |T| = t, |S| = s$$

Теорема ниже является аналогом аксиоматизации, полученной А. Соболевым в **[7]** для классического пред n-ядра.

Теорема 2.2.3 На классе игр с бесконечным множеством игроков нормированное пред n-ядро является единственным решением, которое удовлетворяет свойствам ковариантности, анонимности и согласованности в силу определения 2.2.3.

Данный результат был описан в работе **[5].**

2.3. *SM*-ядро

SM-ядро является еще одним видом решений, которое определено через понятие эксцесса. Пусть $X^0 = \{x \in R^N | \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}$ - множество эффективно рациональных распределений в игре *(N,v)*.

Определение 2.3.1 Биэксцессом $\bar{e}(x, S, v)$ коалиции S для вектора $x \in X^0$ в игре *(N,v)* называется величина

$$\bar{e}(x, S, v) = e(x, S, v) - e(x, N \backslash S, v) .$$

Фактически, биэксцесс показывает, насколько выгодно (или невыгодно) находиться в коалиции.

Определение 2.3.2 *SM*-ядро игры *(N,v)* – множество векторов $X_{SM} \subset X^0$, таких, что для каждого $x \in X_{SM}$ вектор $\theta(\{\bar{e}(x, S, v)\}_{S \subseteq N})$ является лексикографически наименьшим:

$$X_{SM}(N, v) = \{x \in X^0 : \theta(\{\bar{e}(x, S, v)\}_{S \subseteq N})\} \preccurlyeq_{lex} \theta(\{\bar{e}(y, S, v)\}_{S \subseteq N}), \forall y \in X^0\}$$

Смысл данного решения состоит в том, что *SM*-ядро предлагает в качестве решения игры вектор, который сводит к минимуму расхождения между любыми множествами *S* и *N\S*. В **[15]** показано, что *SM*-ядро удовлетворяет свойствам разумности, непустоты, эффективности, анонимности, ковариантности и индивидуальной рациональности. Также показано, что при *N*=3, значение *SM*-ядра совпадает со значением вектора Шепли.

На сегодняшний день для *SM*-ядра не была проведена аксиоматизация. Однако, при сравнении свойств (см.2.5.6) было отмечено, что можно показать логическую независимость свойств непустоты, одноточечности и анонимности.

2.4. *C*-ядро

Определение 2.4.1 *C*-ядро - принцип оптимальности в теории кооперативных игр, представляющий собой множество эффективных распределений выигрыша. То есть, это множество дележей, для которых не существует доминирующих их дележей:

1. $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$;
2. $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S),\ \forall S \subseteq N$.

C-ядро является одним из немногих решений, которое изучено достаточно подробно. Известно, что оно удовлетворяет следующим свойствам:

- индивидуальная рациональность;
- эффективность;
- если с-ядро непусто, то является замкнутым выпуклым многогранником;
- ковариантность;
- анонимность;
- антимонотонность: $v(S) \leq v'(S) \Longrightarrow$ для $\forall S \subset N, S \neq N, v(N) = v'(N) \Longrightarrow C(N, v') \subset C(N, v)$;
- аксиома болвана;
- сильная согласованность;
- макс-инвариантность.

Несмотря на то, что *C*-ядро является множественным решением, его аксиоматизация также будет показана в данной главе, так как данное решение является одним из центральных в теории игр.

Теорема 2.4.1 (Бондарева, Шепли) *C*-ядро непусто тогда и только тогда, когда игра сбалансирована, то есть, чтобы для любого сбалансированного набора коалиций ***S*** выполнялось:

$$\sum_{S \in \boldsymbol{S}} \lambda_S v(S) \le v(N)$$

Игра является полностью сбалансированной, если каждая ее подигра также сбалансирована.

Теорема 2.4.2 (Peleg, Sudholter) На классе полностью сбалансированных игр *C*-ядро является единственным решением, которое удовлетворяет свойствам непустоты, индивидуальной рациональности, супераддитивности,WRGP, CRGP.

При введении в игру коалиции усложняется структура игры. В связи с этим необходима аксиоматизация для *C*-ядра в случае коалиционных игр. Представленные выше теоремы используются в более общем случае.

Теорема 2.4.3 На классе коалиционных игр *C*-ядро является единственным решением, которое удовлетворяет аксиомам непустоты, индивидуальной рациональности, супераддитивности иWRGP.

Наиболее поздним результатом является полученная в 2000 году аксиоматизация *C*-ядра на классе игр, которые могут содержать несбалансированные игры.

Теорема 2.4.4 (Hwang**,** Sudholter) *C*-ядро удовлетворяет свойствам анонимности, ковариантности, WRGP, CRGP, обоснованности снизу и свойству подтверждения.

Глава 3. Исследование *MSC*

3.1. Исследование свойств теоретико-игровых решений для *MSC*

SC- ядро было впервые введено В.В.Захаровым в **[17]**.

Пусть $X^0(N,v)$ множество решений задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} min \sum_{i=1}^{n} \xi_i \\ \sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S), S \subset N, S \neq N \end{cases} \tag{1}$$

Определение 3.1.1 Множество

$$SC(v,\xi^0) = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) | \xi_i \geq \xi_i^0, \sum_{i \in N} \xi_i = v(N)\}$$

называется *SC* - ядром кооперативной игры *(N,v)* относительно точки $\xi^0 \in X^0(N,v)$, а $X^0(N,v)$ называется основанием *SC* - ядра. Большим *SC* - ядром называется объединение всех *SC* - ядер.

Одной из особенностей данного решения является то, что оно удовлетворяет свойству согласованности в смысле Дэвиса-Машлера. Дэвис и Машлер предложили вариант, при котором игроки, покидающие игру, оставляют свои стратегически возможности оставшимся игрокам.

Определение3.1.2 Решение *M* называется согласованным, если для любого решения $\xi \in M(N,v)$ верно $\xi_{N \setminus R} \in M(N, v_\xi^R)$. Здесь $(N \setminus R, v_\xi^R)$ - редуцированная игра.

По редукции Дэвиса-Машлера игра определяется следующим образом:

$$v_{\xi}^{R}(S) = \begin{cases} 0, & S = \emptyset \\ v(N) - \sum_{i \in R} \xi_i & , S = N \backslash R \\ \max_{T \subseteq R}\{v(S \cup T) - \sum_{i \in T} \xi_i\}, \text{в ост. случаях} \end{cases}$$

Подробное доказательство этого свойства для *SC* - ядра приведено в работе **[2]**. Стоит заметить, что в данном случае была введена измененная редуцированная игра, в которой компоненты вектора дележа заменялись на соответствующие компоненты вектора из основания *SC* - ядра. Редуцированная игра определяется следующим образом:

$$v_{\xi^0}^{R}(.) = v_{\xi^0}^{R}(S, \xi_R) = \begin{cases} 0, & S = \emptyset \\ v(N) - \sum_{i \in R} \xi_i & , S = N \backslash R \\ \max_{T \subseteq R}\{v(S \cup T) - \sum_{i \in T} \xi_i^0\}, & \text{в ост. случаях} \end{cases}$$

Следовательно, задача линейного программирования также будет переписана:

$$\begin{cases} \min \sum_{i \in N \backslash R} x_i \\ \sum_{i \in S} x_i \geq v_{\xi^0}^{R}(S, \xi_R), \forall S \subset N \backslash R, S \neq N \backslash R \end{cases} \quad (2)$$

В работе **[11]** введен селектор *SC* - ядра - вектор *MSC*.

Определение 3.1.3 Предельным элементом *SC* - ядра является вектор $MSC(N, v, \xi^0) \in R^N$, компоненты которого удовлетворяют

$$MSC_i(N, v, \xi^0) = \xi_i^0 + \alpha_i^{MSC}(v(N) - \sum_{j \in N} \xi_j^0)$$

$$\alpha_i^{MSC} = \frac{\sum_{S \subset N\{i\}}(v(S \cup \{i\}) - v(S))}{\sum_{j \in N} \sum_{S \subset N \backslash \{j\}}(v(S \cup \{j\}) - v(S))}, i = 1, \dots, n$$

Физический смысл данного решения состоит в том, что каждому игроку будет поставлен в соответствие взвешенный выигрыш, так как весовой коэффициент показывает вклад игрока i в коалицию S в сравнении с тем вкладом, который внесли остальные участники коалиции. Использование весовых коэффициентов делает задачу распределения дележа более конструктивной, так как в таком случае выигрыш игрока зависит от того, какой вклад внес данный участник в выигрыш всей коалиции.

- **Свойство одноточечности**

  Доказательство данного свойства следует из определения решения. Данное решение является вектором, следовательно, свойство одноточечности очевидно.

- **Свойство эффективности**

  Как говорилось ранее, если решение является одноточечным, то автоматически выполняется свойство эффективности.

- **Свойство непустоты**

  Так как вектор *MSC* является частью *SC* - ядра, то он удовлетворяет свойству непустоты, если данному свойству удовлетворяет *SC* - ядро. В **[3],[15],[16]** было показано, что условие сбалансированности кооперативной игры эквивалентно свойству непустоты большого *SC* - ядра, то есть, вектор *MSC* удовлетворяет данному свойству.

- **Свойство согласованности**

  Ранее в **[2]** было доказано свойство согласованности для *SC* - ядра. В доказательстве было показано, что для любых векторов из основания *SC* - ядра и любого вектора дележей будет выполняться свойство согласованности в смысле Дэвиса-Машлера.

  Для доказательства была поставлена новая ЗЛП (2), решением которой будет множество

$$SC^R\left(v^R_{\xi^0}, \eta^0\right) = \{\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s) | \eta_i \geq \eta_i^0, \sum_{s \in N \setminus R} \eta_i = v^R_{\xi^0}(N \setminus R)\}$$

Новый вид $MSC^R = (MSC_1^R, \dots, MSC_s^R)$, где

$$MSC_l^R = \eta_l^0 + \alpha_l^{MSC^R}\left(v_{\xi^0}^R(N\backslash R) - \sum\nolimits_{r\in N\backslash R}\eta_r^0\right), l = \overline{1,s}$$

$$\alpha_l^{MSC^R} = \frac{\sum_{S\subset(N\backslash R)\backslash\{l\}}(v_{\xi^0}^R(S\cup\{l\}) - v_{\xi^0}^R(S))}{\sum_{r\in N\backslash R}\sum_{S\subset(N\backslash R)\backslash\{j\}}(v_{\xi^0}^R(S\cup\{r\}) - v_{\xi^0}^R(S))}, l = \overline{1,s}$$

Для MSC выполнение свойства согласованности следует из следующих выводов :

- компонентами MSC являются компоненты η^0. Из **[2]** известно, что выполняется:

$$\textstyle\sum_{i\in N\backslash R}\eta_i^0 \geq v(N\backslash R),$$

то есть решение определено для редуцированной игры по Дэвису-Машлера;

- $MSC \subset SC$, то есть можно говорить о наследовании свойств.

Аксиома болвана

Пусть вклад i-ого игрока в коалицию будет равен 0: $v(\{i\}) = 0$. Необходимо показать, что при нулевом вкладе игрока он получит нулевой выигрыш. В нашем случае необходимо показать $MSC_i(N, v, \xi^0) = 0$.

Во-первых, весовой коэффициент для i-ого игрока будет равен 0, так как

$$\sum_{S\subset N\{i\}}(v(S\cup\{i\}) - v(S)) = \sum_{S\subset N\{i\}}(v(S) - v(S)) = 0$$

Если покажем равенство нулю компоненты ξ_i^0, то свойство будет доказано.

По определению компоненты вектора дележа удовлетворяют свойству индивидуальной рациональности:

$$\xi_i \geq v(\{i\}) \ ,$$

а $\xi^0 \in X^0(N, v)$ по определению. По определению вектора дележа и по решению ЗЛП (1) нельзя сказать однозначно о равенстве нулю ξ_i^0. То есть, в общем случае, аксиома болвана не выполняется.

- **Свойство анонимности**

 Физический смысл свойства анонимности состоит в том, что при перестановке игроков их выигрыш не меняется. Из утверждения в **[5]** следует, что из свойства анонимности следует свойство симметричности для одноточечных решений.

 При произвольной перестановке игроков компонента α_i^{MSC} для каждого из игроков будет постоянной, так как ее значение не зависит от порядкового номера игроков, а зависит только от вклада игроков в коалицию. Следовательно, второе слагаемое $\alpha_i^{MSC}(v(N) - \sum_{j\in N} \xi_j^0)$ не изменит своей величины при перестановке.

 Пусть в игре была совершена перестановка: $\pi: N \to N$. Тогда получим новую ЗЛП:

$$\begin{cases} \min \sum_{i\in N} \pi\xi_i \\ \sum_{i\in \pi S} \pi\xi_i \geq \pi v(S) = v(\pi S) \end{cases}$$

$$\pi(SC(v, \xi^0)) = \{\pi\xi = \pi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) | \pi\xi_i \geq \pi\xi_i^0, \sum_{i\in N} \pi\xi_i = v(\pi N)\}$$

$$\pi(MSC_i(N, v, \xi^0)) = \pi\xi_i^0 + \alpha_i^{\pi MSC}(v(\pi N) - \sum_{j\in N} \pi\xi_j^0)$$

$$\alpha_i^{\pi MSC} = \frac{\sum_{\pi S\subset \pi(N\setminus\{i\})}(v(\pi S \cup \{i\}) - v(\pi S))}{\sum_{j\in \pi N} \sum_{\pi S\subset \pi(N\setminus\{j\})}(v(\pi S \cup \{j\}) - v(\pi S))}, i = 1, \dots, n$$

 При перестановке игроков, получаем новую ЗЛП, следовательно, получаем новое решение MSC. В общем случае, данное свойство не выполняется. Свойство будет выполнено в частном случае, когда при перестановке игроков ЗЛП новой и исходной задач будут совпадать.

- **Свойство подтверждения**

  Рассматриваемое решение является одноточечным. В работе **[5]** сказано, что для одноточечных решений при выполнении свойства согласованности выполняется свойство сильной согласованности, то есть для *MSC* выполняется свойство подтверждения.

- **Свойство симметричности**

  Свойство симметричности говорит о том, что при равных вкладах игроков в коалицию, игроки получат равные по значению дележи. Пусть : $v(\{i\}) = v(\{j\})$, тогда $\alpha_i^{MSC} = \alpha_j^{MSC}$. Необходимо показать, что $\xi_i^0 = \xi_j^0$.

  Аналогично рассуждениям из предыдущего пункта заметим, что игроки с равными вкладами могут входить в различные коалиции, поэтому в данном случае получим, что $\xi_i^0 \neq \xi_j^0$, то есть свойство симметричности не выполняется.

- **Свойство положительной однородности**

  Так как *MSC* по определению является вектором, то применимо свойство умножения вектора на скалярное число, то есть выполняется положительная однородность:

  $$\alpha * MSC(N, v, \xi^0) = \alpha * (MSC_1(N, v, \xi^0), \dots, MSC_n(N, v, \xi^0))$$

- **Свойство инвариантности относительно сдвига**

  Напомним определение данного свойства: решение удовлетворяет *инвариантности относительно сдвига*, если для $\forall(N, v) \in \mathcal{G}_N$ и числа $b[N, v + b] \in \mathcal{G}_N$ выполняется $x \in \sigma(N, v) \Rightarrow x \in \sigma(N, v + b)$, где $(v + b)(S) = v(S) + b \; \forall S \subset N, S \neq N, (v + b)(N) = v(N)$

Соответственно, определение дележа для игры $(N, v+b)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\xi_i \geq v(\{i\}) + b$$

$$\sum_{i \in N} \xi_i = v(N) = (v+b)(N)$$

Тогда, ЗЛП (1) будет переписана следующим образом:

$$min \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

$$\sum_{i \in S} \xi_i \geq v(S) + b = (v+b)(S), S \subset N, S \neq N$$

Следовательно, будет получено новое $X^0(N, v)$ множество решений ЗЛП, то есть данное свойство выполняется.

- **Свойство ковариантности**

Так как решение удовлетворяет свойствам положительной однородности и инвариантности относительно сдвига, то оно является ковариантным. Стоит отметить тот факт, что большая часть одноточечных решений удовлетворяет свойству ковариантности относительно положительных линейных преобразований **[9]**.

3.2. Сравнение свойств одноточечных решений и аксиоматическая характеризация *MSC*

Итак, после исследования свойств для *MSC* проведем сравнительный анализ свойств следующих одноточечных решений: вектора Шепли, пред n - ядра, *SM* - ядра и *MSC*. Будут рассмотрены те свойства, которые были определены в главах ранее. Результаты данного анализа лягут в основу доказательства независимости аксиом, определяющих *MSC*. Стоит отметить, что в таблицу ниже не включены аксиомы, выполнение которых следует из выполнения других свойств, так называемые "избыточные аксиомы". Это аксиомы эффективности, инвариантности относительно сдвига и положительной однородности, сильной согласованности, симметричности.

Свойства/Виды решений	**Вектор Шепли**	**Пред *n* -ядро**	***SM*- ядро**	**MSC**
непустота	+	+	+	+
анонимность	+	+	+	
одноточечность	+	+	+	+
ковариантность	+	+	+	+
согласованность по Дэвису-Машлеру		+		+
аксиома болвана	+			
аддитивность	+			
подтверждение	+	+		+

Таблица 1

При сравнительном анализе свойств можно сделать вывод о том, что свойства непустоты и ковариантности выполняются для всех описанных выше решений. Уникальными свойствами, которому не удовлетворяют остальные решения, обладает только вектор Шепли. Это свойства аддитивности, нулевого игрока и согласованности по Харту-Мас-Колеллу.

Рассмотрим подробнее решения, определенные через эксцесс: пред n-ядро и SM - ядро. Аксиоматически они различаются только тем, что топред n-ядро согласованно в смысле Дэвиса-Машлера, из которого следует сильная согласованность по Дэвису-Машлеру. Однако в данной таблице не указано, что для SM - ядра определено свойство индивидуальной рациональности, данный результат показан в **[14]**. В **[1]** обоснованы алгоритмы для построения этих двух решений и показано, что данные алгоритмы не являются трудоемкими в реализации, так как в каждом из них решается задача ЗЛП. В случае игр для 3 игроков значения вектора Шепли совпадает со значением SM - ядра. Данный факт может облегчить задачу поиска распределения дележей в ТП-игре для исследователя, так как в ряде случаев вычисление вектора Шепли не составляет труда.

В то же время, пред n-ядро и *MSC* отличаются также только одним свойством, а именно для пред n-ядра выполняется свойство анонимности (следовательно, и симметричности). Данный результат является достаточно интересным, так как данные виды решений определяются абсолютно различными способами.

Было отмечено, что *MSC* не удовлетворяет свойству анонимности, но обладает свойством согласованности по Дэвису-Машлера или сильной согласованности, что отличает его от таких решений, как вектор Шепли и *SM* - ядро. Данное отличие от вектора Шепли является принципиальным, так как вектор Шепли является согласованным, но только в силу определения Харта-Мас-Колелла. Ранее говорилось, что различные определения редуцированных игр дают различные аксиоматизации.

Используя данные результаты можно выделить 2 возможных варианта аксиоматических характеризаций для *MSC* с использованием свойств согласованности и сильной согласованности:

1. Решение *MSC,* определенное на классе ТП-игр, может быть охарактеризовано при помощи следующего набора свойств: непустоты, одноточечности и согласованности по Дэвису-Машлеру.
2. Решение *MSC,* определенное на классе ТП-игр, может быть охарактеризовано при помощи следующего набора свойств: непустоты, одноточечности и сильной согласованности по Дэвису-Машлеру.

По аналогии с **[5]** покажем логическую независимость аксиом, характеризующих *MSC.*

Теорема 3.2.1 Следующие аксиомы, которые описывают решения ТП-игр, являются логически независимыми: непустоты, одноточечности согласованности в силу определения Дэвиса-Машлера.

Доказательство. Доказательство данной теоремы будет проведено при помощи приведения примеров непустых решений кооперативных игр, удовлетворяющих любым двум (кроме непустоты) из двух аксиом, заданных в формулировке.

1. Без свойства одноточечности: наименьшее *c*-ядро.
2. Без свойства согласованности по Дэвису-Машлеру: SM-ядро.

ч.т.д.

Аналогичный результат можно получить, используя свойство сильной согласованности:

Теорема 3.2.2 Следующие аксиомы, которые описывают решения ТП-игр, являются логически независимыми: непустоты, одноточечности и сильной согласованности в силу определения Дэвиса-Машлера.

Доказательство. Доказательство данной теоремы проводится аналогичным образом, как и в предыдущем случае:

1. Без свойства одноточечности: наименьшее *c*-ядро.
2. Без свойства согласованности по Дэвису-Машлеру (сильной согласованности по Дэвису-Машлеру): вектор Шепли.

ч.т.д.

Глава 4. Сравнение и выбор оптимального решения в ТП-играх

4.1. Теоретическая основа метода сравнения решений

Главной задачей теории игр является поиск оптимального решения, то есть оптимальный размер выигрыша. Но для каждого из игроков свое понятие оптимальности. В связи с этим, возникает закономерный вопрос: какой же выигрыш выбрать игрокам, для удовлетворения интересов всех участников игры.

Помимо теории игр задача выбора наилучшего решения является актуальной в экономике. В **[6], [8]** описаны подходы использования весовых коэффициентов в задачах многокритериального выбора. В качестве весов используются экспертные оценки, предпочтения индивида или вероятностные характеристики. В **[11]** описан метод для выбора наилучшего одноточечного решения, основанный на использовании сгенерированных случайным образом векторов весов. Применение данного подхода в задачах выбора основано на работе Томаса Байесса **[10]**, в которой он моделирует неопределённый выбор величины w=p (вероятность) из множества [0,1] случайной величиной $\tilde{w} = \tilde{p}$, равномерно распределенной на [0,1].

Отличием метода, описанного Захаровым В.В. и Ганьковой А., является то, что данные веса были применены не к самим полученным решениям, а к их нормированным эксцессам, которые вычисляются по формуле:

$$q(\xi, S) = \frac{e(\xi, S)}{v(N) - v(S)}$$

Данная величина характеризует долю прибыли, которая может достигаться коалицией S. Чем больше значение $q(\xi, S)$, тем значительнее желаемый дележ ξ для коалиции S.

Вектор весов представляет собой совокупность положительных параметров $w = (w_1, w_2, \ldots, w_{2^n-2})$, таких, что $\sum_{i=1}^{2^n-2} w_i = 1$. Физический смысл данных весов состоит в том, что они отражают меру значимости для нормализованного эксцесса для каждой из коалиций.

Далее используется общий весовой коэффициент $Q_w(\xi)$ для сравнения решений:

$$Q_w(\xi) = \sum_{j=1}^{2^n-2} w_j q(\xi, j)$$

Известно, что математическое ожидание является средней ожидаемой величиной. В рамках данной задачи его можно трактовать, как средний ожидаемый выигрыш при произвольном наборе весов:

$$E\big(Q_w(\xi)\big) = \frac{Q_w(\xi)}{2^n - 2}$$

То есть исходная задача сравнения оптимальных решений была сведена к сравнению их взвешенных математических ожиданий. Следовательно, игрокам предпочтительнее выбрать тот дележ, у которого значение математического ожидание больше.

4.2. Программная иллюстрация метода сравнения одноточечных решений

Для иллюстрации описанного ранее метода сравнения решений рассмотрим игру с трансферабельной полезностью, а расчеты проведём в пакете Wolfram Mathematica.

Итак, рассмотрим игру для 3 лиц:

$$v(1,2,3) = 1, v(1,2) = 0.4, v(1,3) = 0.9, v(2,3) = 0.2$$

Для начала необходимо получить оптимальные дележи для данной игры. Поэтому для каждого игрока были вычислены вектор Шепли и *MSC:*

Shapley	0.48(3)	0.21(6)	0.3
MSC	0.75(3)	0.00(6)	0.24

Таблица 2

По полученным результатам можно сделать вывод о том, что оптимальным решением на этом шаге является вектор Шепли, так как второй игрок получает 0.21 часть общего выигрыша, что, конечно же, предпочтительнее для него, чем 0.00(6). Единственный игрок, который получит меньше при данном выборе – первый игрок, так как он теряет 0.27.

Как же изменится ситуация, если будут введены весовые коэффициенты? Для ответа на данный вопрос на следующем шаге были вычислены нормированные эксцессы $q(\xi, S)$ для каждой коалиции и для каждого из игроков:

	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}
Shapley	0.48(3)	0.21(6)	0.3	-0.5	1.16	-0.39
MSC	0.75(3)	0.00(6)	0.24	-0.6	-0.9(3)	-0.58(3)

Таблица 3

Далее необходимо сгенерировать “веса” для получения общего весового коэффициента для обоих решений. Для иллюстрации проведем численный эксперимент и получим 20 вариантов векторов весов (данное действие было совершено при помощи функции RandomReal). В итоге, были получены 2 общих весовых коэффициента и посчитаны их математические ожидания:

$$E(Q_w(MSC)) = 0.1768$$

$$E(Q_w(Shapley)) = 0.5438$$

Из анализа полученных результатов следует, что использование весовых коэффициентов не поменяло выбора оптимального решения для игроков, так как ожидаемый выигрыш, полученный на основе вектора Шепли, превосходит тот выигрыш, который мы получили на основе MSC.

Заключение

Данная работа состоит из следующих решенных задач:

1. Составлен обзор по аксиоматическим характеризациям решений игр с трансферабельной полезностью. Первым делом были даны определения базовым понятиям теории игр, перечислены теоретико – игровые свойства решений. Данное исследование является базой для проведения процесса аксиоматизации, так как именно свойства определяют аксиоматические характеристики решений. В обзоре были рассмотрены такие одноточечные решения, как вектор Шепли, пред *n*-ядро, *SM*-ядро и многоточечное решение - *c*-ядро. Было отмечено, что при различных определениях свойств получаются отличающиеся друг от друга аксиоматизации. Например, для вектора Шепли характерна согласованность по Харту-Мас-Колеллу, а для пред *n*-ядра – согласованность по Дэвису-Машлеру.
2. Исследованы свойства селектора *SC*-ядра – вектора *MSC*. Данная задача является основной в данной работе. Её актуальность состоит в том, что после получения аксиоматизации данного решения появится возможность практического использования в задачах. По результатам исследования *MSC* удовлетворяет следующим свойствам: одноточечности, непустоты, ковариантности, согласованности по Дэвису-Машлеру, подтверждения. В список не включены аксиомы эффективности, инвариантности относительно сдвига, положительной однородности и сильной согласованности, так как они являются избыточными. На основе данных свойств предложены два возможных варианта аксиоматической характеризации. В первом случае учитываются свойства одноточечности, непустоты и согласованности, во втором случае – свойства непустоты, одноточечности и сильной согласованности по Дэвису-Машлеру. Далее были доказаны

независимости данных свойств путем приведения примеров решений, удовлетворяющим трем из трех свойств.

3. Решена задача выбора лучшего одноточечного решения. Для иллюстрации решения данной задачи были использованы вектор Шепли и *MSC*, которые были посчитаны для игры трёх лиц. Метод, используемый для данной задачи, основан на применении сгенерированного вектора весов, который получен случайным образом, к нормированному эксцессу, посчитанного для каждого из решений. В итоге был определен весовой коэффициент для каждого из вариантов оптимального дележа. Абсолютная величина данного весового коэффициента является математическим ожиданием каждого из решений, тем самым по его величине можно оценить средний ожидаемый выигрыш. Задача была реализована в пакете Wolfram Mathematica.

Использованная литература и источники

1. Бритвин С.В., Тарашнина С.И. Алгоритмы нахождения пред n -ядра и SM - ядра в кооперативных ТП-играх // МТИП, 2013, Т.5, вып.4, С.14-32.
2. Захаров В.В,Дементьева М.Б. Согласованность *SC*-ядра и задача о минимальной редукции // Ж. Вестник СПбГУ Сер.1, 2003, вып.4 (№25) . С.28-33.
3. Захаров В.В., Акимова А.Н.О некоторых селекторах С-ядра // Вестн. С.-Петерб. ун-та.2002. Сер. 1, Вып. 3, 17. С. 10–16.
4. Кацев И.В., Яновская Е.Б. Пред *n*-ядра в играх с ограниченной кооперацией // МТИП, 2011, Т.3, вып. 4, С.23-48.
5. Лежнина Е.А. Аксиоматизация некоторых решений кооперативных игр // 2010 г.
6. Лещинский Б.С. Нечеткий многокритериальный выбор объектов недвижимости //Экономические науки-2003.-116-119
7. Соболев А.И. Характеризация принципов оптимальности в кооперативных играх посредством функциональных уравнений// Мат. методы в социальных науках. Вып.6 Вильнюс:Ин-т математики и кибернетики АН.Лит ССР.175.С.94-151.
8. Хованов Н.В. Анализ и синтез показателей при информационном дефиците//СПб: издательство СПб ун-та, 1996 -196с.
9. Яновская Е.Б. Совместная аксиоматизация пред - n -ядра и решения Дутты-Рэя // МТИП, 2012, Т.4, вып. 2, С.96-123.
10. Bayes, T. [1958] An essay towards solving a problem in the doctrine of chances, Biometrica 45, 296–315. (Reprinted from Philos. Trans., 1763)
11. Gan'kova A., Zakharov V. Comparing solutions in joint implementation projects, International Game Theory Review, Vol. 10, 119-128
12. Orshan G, Sudhölter P. Reconfirming the prenucleolus// Mathematic of Operations Research. 28(2): 283-293. 2003

13. Peleg B., Sudhölter P. Introduction to the theory of cooperative games // Springer, 2007/
14. Smol'yakov E.R. Axiomatization in cooperative game theory // Computational Mathematics and Modeling, Vol. 16, No. 1, 2005
15. Tarashnina S. The simplified modified nucleolus of a cooperative TU-game // Operations Research and Decision Theory. 2011. V.19. N 1. P. 150–166.
16. Zakharov V., O-Hun Kwon. Mathematical programming approach in cooperative games //
Journal of Korean Mathematical Society. 1997. Vol. 2
17. Zakharov V., O-Hun Kwon. Selectors of the core and consistency properties // Game Theory and Applications. 1999. Vol. 4
18. ZakharovV. About selectors of the core in dynamic games // Proceedings of the 7th ISDG symposium on Dynamic Game and Applications. Kanagawa, Japan. 1996.

Приложение №1

Реализация метода для сравнения одноточечных решений:

```
ClearAll["Global`*"]
K={1,1,1};n=3;
M={{1,1,0},{1,0,1},{0,1,1}};
B={0.4,0.9,0.2};S={1,1,1};
BS={{B[[1]],S[[1]]},{B[[2]],S[[2]]},{B[[3]],S[[3]]}};
SC=LinearProgramming[K,M,BS]
{0.7, 0., 0.2}
s = n - 1; V12 = 0.4; V13 = 0.9; V23 = 0.2;
Q12 = 1 - V12; Q13 = 1 - V13; Q23 = 1 - V23;
Part1 = ConstantArray[0, n];
For[i = 0, i < n, i++, Part1[[i + 1]] = i! (n - i - 1)!/n!]
Sh1 = Part1[[1]]*(1 - V23) + Part1[[2]]*(V12 + V13);
Sh2 = Part1[[1]]*(1 - V13) + Part1[[2]]*(V13 + V23);
Sh3 = Part1[[1]]*(1 - V12) + Part1[[2]]*(V12 + V23);
Sh = {Sh1, Sh2, Sh3}
qs12 = (V12 - Plus[Sh[[1]], Sh[[2]]])/Q12;
qs13 = (V13 - Plus[Sh[[1]], Sh[[3]]])/Q13;
qs23 = (V23 - Plus[Sh[[2]], Sh[[3]]])/Q23;
QSh = {Sh1, Sh2, Sh3, qs12, qs13, qs23}
{0.483333, 0.216667, 0.3}
{0.483333, 0.216667, 0.3, -0.5, 1.16667, -0.395833}
a1 = (1 - V23)/(Q23 + Q12 + Q13);
a2 = (1 - V13)/(Q23 + Q12 + Q13);
a3 = (1 - V12)/(Q23 + Q12 + Q13);
A = {a1, a2, a3};
MSC = ConstantArray[0, n];
For[i = 1, i < n + 1, i++,  MSC[[i]] = SC[[i]] + A[[i]] (1 - Total[SC])];
```

```
q12 = (V12 - Plus[MSC[[1]], MSC[[2]]])/Q12;

q13 = (V13 - Plus[MSC[[1]], MSC[[3]]])/Q13;

q23 = (V23 - Plus[MSC[[2]], MSC[[3]]])/Q23;

QMSC = {MSC[[1]], MSC[[2]], MSC[[3]], q12, q13, q23}

{0.753333, 0.00666667, 0.24}

{0.753333,0.00666667,0.24,-0.6,-0.933333,-0.0583333}

A = ConstantArray[0, {20, 6}]; m = 20;

S1 = ConstantArray[0, {20, 1}]; S2 = ConstantArray[0, {20, 1}];

S3 =  ConstantArray[0, {20, 1}]; S4 = ConstantArray[0, {20, 1}];

S5 = ConstantArray[0, {20, 1}]; S6 = ConstantArray[0, {20, 1}];

QShw = ConstantArray[0, {20, 6}]; QMSCw = ConstantArray[0, {20, 6}];

For[i = 1, i < (m + 1), i++, A[[i]] = RandomReal[1, (2^n - 2)];  A[[i]] = A[[i]]/Total[A[[i]]];
QMSCw[[i]] = QMSC*A[[i]]; QShw[[i]] = QSh*A[[i]]];

T1 = Abs[Total[Total[QMSCw]]/(2^n - 2)]

T2 = Abs[Total[Total[QShw]]/(2^n - 2)]

0.176815

0.543811
```