Санкт-Петербургский государственный университет

Физический факультет

Кафедра Физики Земли

Зависимость решения задачи лучевой сейсмотомографии от начального приближения

Выполнил:

студент 2-го курса магистратуры Медведев С. В.

Научный руководитель:

профессор, доктор ф-м. н. Яновская Т. Б.

Санкт-Петербургский Государственный Университет

2017

**Содержание**

1. **Введение**  3
2. **Описание метода томографии** 4
3. **Проблемы методики**  5
4. **Модельный пример**  6
   1. **Решение прямой задачи**  7
   2. **Решение обратной задачи**  10
5. **Критерии выбора начального приближения** 18
6. **Выводы** 20

Литература 20

1. **Введение**

Сейсмические данные представляют собой один из самых ценных источников для исследования внутренней структуры и состава Земли. С этой целью самой популярной техникой является инверсия времен пробега объемных волн в связи с относительно легким выявлением их на сейсмограммах и простым отношением между временем пробега и скоростью. Начиная с 80-х годов прошлого столетия посвящено большое количество работ методам лучевой сейсмической томографии и анализу их решений [Bishop et al, 1985; Phillips and Fehler, 1991; Hole. 1992; Zhang and Toksoz, 1998; Z.Veber, 2000] . Вначале задачу томографии пытались решать с помощью лучевого трассирования в неоднородной среде (например, [Podvin & Lecomte, 1991; Hole, 1992 ].) Однако такая задача является существенно нелинейной и требует огромного количества вычислений. Упрощение, приводящее к возможности использовать методику томографии для обработки большого количества данных наблюдений и не требующее лучевого трассирования, основано на линеаризации задачи – поиска не трехмерного (или двумерного) распределения скорости, а поправки к выбранному начальному приближению, которое могло быть определено из некоторых априорных сведений (например, постоянная скорость или зависящая только от глубины). В предположении, что искомая поправка к скорости мала, задача сводится к линейной, в которой исходными данными являются невязки времен пробега [Nolet, 1987; Rawlinson and M. Sambridge 2003; Nowack and Li, 2009, etc.]. Стандартные методы сводятся к нахождению поправок к начальному приближению в блоках или выбранных точках («узлах» сетки) путем решения системы линейных уравнений, связывающих невязки времени по разным трассам с поправками к скорости в блоках или узлах. Но в таком подходе возникает проблема оценки разрешающей способности данных: некоторые из ячеек могут густо пересекаться лучами и соответственно содержать достаточно информации о скорости, а через некоторые ячейки лучи вообще могут не проходить. Размеры ячеек должны быть разными в разных частях среды. В ряде работ [Abers, Roecker, 1991, Spakman, Bijwaard, 2001, Тихоцкий и др. 2011] для преодоления этого недостатка предложены способы адаптивной параметризации среды. Однако, такой подход является достаточно трудоемким и недостаточно формализованным, что ограничивает область его применения.

Для построения решения достаточно детального в областях, густо пересеченных лучами и сглаженного в тех зонах, где лучей недостаточно, в работе [Яновская, 2012] для задач, использующих времена пробега рефрагированных волн в среде с преимущественным изменением скорости с глубиной, был предложен метод нахождения горизонтальных поправок к референтному вертикальному скоростному разрезу, основанный на предположении о гладкости таких поправок. Этот метод описан в следующем разделе.

1. **Описание метода томографии**

Методика [Яновская, 2012] применима для сред, в которых горизонтальные вариации скорости малы по сравнению с вертикальными. Используемые данные – времена пробега рефрагированных волн в такой среде. В простейшем случае источники и приемники считаются расположенными на поверхности, хотя методика может быть модифицирована и для источников на глубине. Искомое трехмерное распределение скорости представляется в виде суммы начального приближения, являющегося функцией только глубины и малых горизонтальных вариаций скорости на отдельных глубинах. Соответственно, среда разбивается на слои (), и горизонтальные поправки к скорости определяются в каждом из них.

Времена пробега в модели начального приближения могут быть рассчитаны и, соответственно, рассчитаны невязки . Связь между невязками и искомой функцией запишется в виде линейного функционала

где поправка к медленности в -ом слое. Интегрирование производится по лучу, рассчитанному для начального распределения скорости , а суммирование по тем слоям, которые пересекает данный луч

В качестве априорного ограничения на горизонтальную вариацию скорости принимается условие ее гладкости :

При наличии ошибок в данных наблюдений условие (3) принимается в качестве стабилизирующего функционала, т.е. задача сводится к минимизации суммы квадратов невязок времени и функционала (3)

где параметр регуляризации.

Решением этой задачи является выражение для искомой функции как линейной комбинации базисных функций и константы

Подстановка (5) в (2) и условие постоянства на бесконечности приводит к системе линейных уравнений относительно коэффициентов при базисных функциях, образующих вектор **,**  и констант (вектор ) в слоях:

где матрица размера содержит элементы длина -го луча в -ом слое, а вектор невязок времен пробегаотносительно начального приближения.

В случае, когда свойства ошибок в исходных данных описываются ковариационной матрицей , в пером из уравнений (6) единичная матрица должна быть заменена на . Таким образом, в общем случае задача томографии сводится к решению системы

Базисныефункции иэлементы матрицы в случае линейного изменения скорости в каждом слое выражаются в конечном виде . В таком случае задача томографии сводится в решению системы линейных уравнений.

1. **Проблемы методики**

При применении этой методики [Яновская и др., 2016] к определению трехмерного распределения скорости продольных волн в верхней части мантии в Черноморском бассейне по данным времен пробега волн от землетрясений в этой зоне обнаружилось , что хотя латеральные вариации скорости в каждом из слоев сохраняются при разных начальных приближениях, абсолютные значения скорости оказываются разными. В некоторых слоях наблюдается постоянный сдвиг скорости, который меняется при вариациях начального приближения. Этот эффект можно объяснить тем, что лучи, отвечающие реальным данным и начальному приближению скорости, могут пересекать разные слои. Схематически это иллюстрируется рис. 1, на котором показаны такие лучи между одними и теми же точками (источником и приемником).

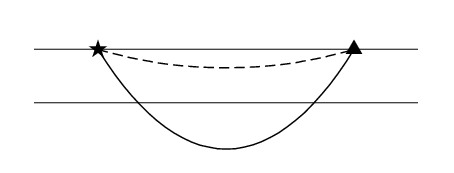


Рис. 1. Схема лучей

Время пробега, отвечающее лучу, рефрагировавшему ниже выбранной границы, несет в себе информацию о скоростях как в верхнем, так и в нижнем слое. В том случае, если начальное приближение выбрано так, что луч между теми же точками на поверхности рефрагирует в верхнем слое из-за более низкого градиента скорости в нем и не проникает в нижний слой, то информация о нижнем слое, содержащаяся во времени пробега волны в реальной среде, как бы переносится на верхний слой. Если таких пар лучей достаточно много, то скорость в первом слое будет искажена.

В настоящей работе мы проанализируем этот эффект на модельном примере и путем анализа модельных данных покажем, как следует выбирать начальное приближение *V*0(*z*), чтобы решение оказалось близким к исходной модели.

1. **Модельный пример**

Как обычно, при анализе методики методом математического моделирования, выбирается модель среды, в какой-то степени отражающая особенности реальной среды, для нее путем решения прямой задачи вычисляются те характеристики геофизического поля, которые являются исходными данными при решении обратной задачи исследуемым методом. В данном случае – это времена пробега волн. Используемый метод нацелен на восстановление трехмерной скоростной структуры исследуемой области, но в данной работе мы ограничимся двумерным случаем для простоты визуализации.

* 1. **Решение прямой задачи**

Модель распределения скорости задавалась в полупространстве в виде суммы вертикального разреза и наложенных на него аномалий задаваемых двумерным гауссовой функцией.Источники и приемники располагались на поверхности с шагом 100км и 40км соответственно.

Время пробега от источника к приемнику рассчитывалось методом «пристрелки». Для набора углов выхода луча из источника строились лучи (точки ) путем численного интегрирования системы дифференциальных уравнений луча

методом Рунге-Кутта 5-го порядка до тех пор, пока значение не становилось отрицательным. Тогда производилась интерполяция на поверхность . Далее, чтобы найти время, отвечающее лучу между источником и приемником, снова производилась интерполяция, но уже между лучами, выходящими на поверхность справа и слева вблизи приемника.

Приведем несколько примеров решения прямой задачи для разных моделей среды.

*Модель* I.

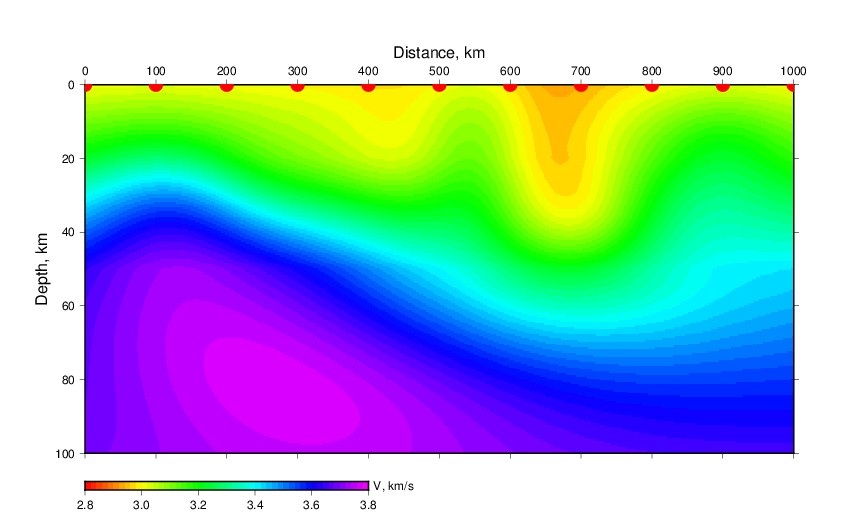
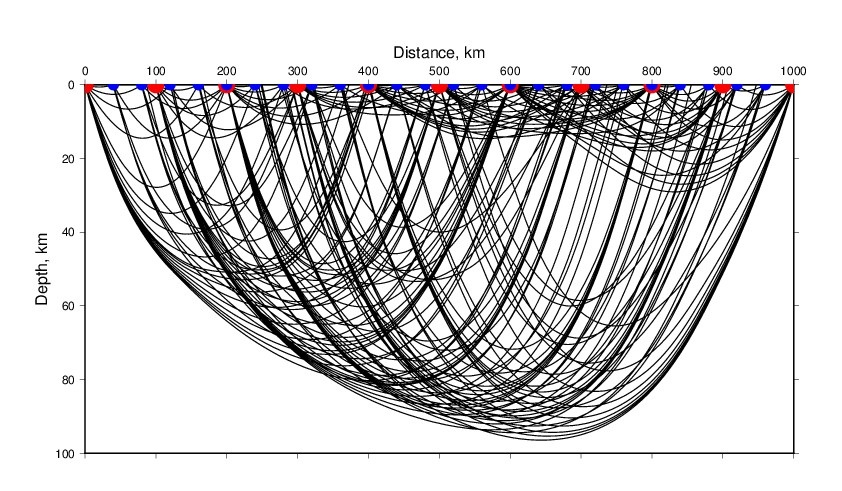


Рис. 2. Синтетическая модель I распределения скорости.

Модель, содержащая крупную высокоскоростную аномалию на глубине 60-100 км и две менее резко выраженных низкоскоростных аномалии на малых глубинах, показана на рис.2. Лучи, рассчитанные между источниками и приемниками, изображены на рис.3. Лучи не покрывают полностью область исследования, поэтому решение следует искать только в той её части, которая покрыта лучами. Кроме того, следует отметить, что на некоторых участках лучи имеет одно и то же направление, что приводит к уменьшению разрешающей способности данных в этих областях.

Рис.3. Схема лучей в синтетической модели I. На дневной поверхности красными точками обозначены источники, синими – приёмники.

*Модель* II

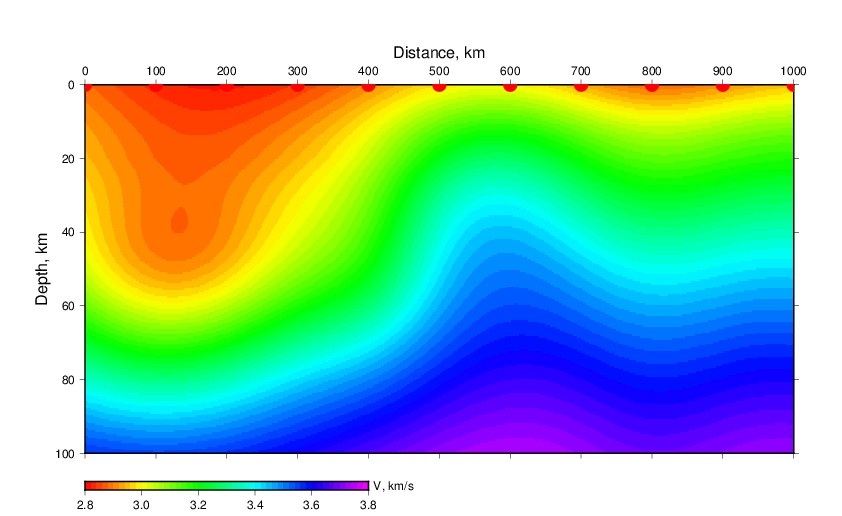


Рис. 4. Синтетическая модель II распределения скорости.

Характерными чертами этой модели является наличие одной ярко выраженных низкоскоростных аномалий в верхней части разреза и двух высокоскоростных в нижней. Лучи в этой модели изображены на рис. 5.

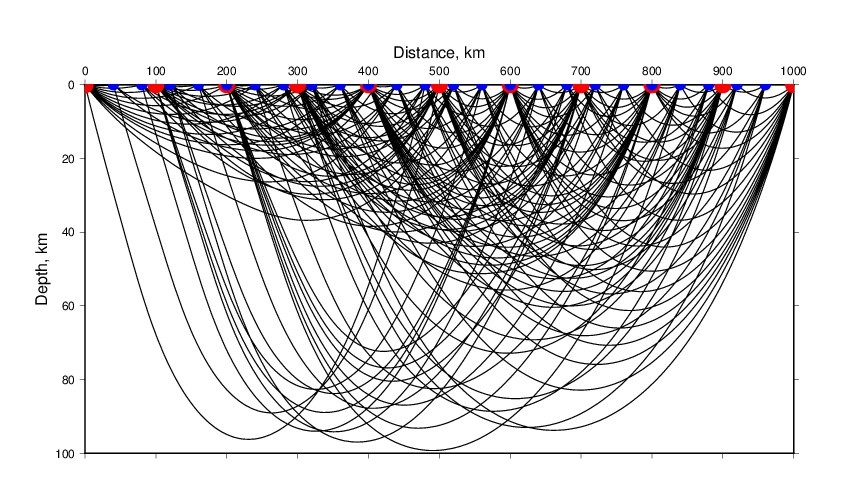


Рис. 5. Схема лучей в синтетической модели II.

Характерной чертой этой модели является сильное понижение скорости в левой части профиля, которое приводит к отсутствию лучей, рефрагирующих в этой части области.

* 1. **Решение обратной задачи**

Решение обратной задачи начиналось с разбиения области на горизонтальные слои и определения начального приближения , которое для простоты вычислений принималось в виде непрерывной кусочно-линейной функции, определяемой значениями скорости на границах слоев

Для выбора этих значений все рассчитанные для синтетической модели данные аппроксимировались кривой , по которой методом Герглоца-Вихерта рассчитывался средний скоростной разрез. Поскольку формула Герглоца-Вихерта использует не собственно годограф , а его производную , и значения имеют значительный разброс из-за неоднородности среды, то полученный «средний» разрез оказывается весьма приближенным.

Как уже выше упоминалось, в задаче томографии – нахождении горизонтальных вариаций скорости в слоях необходимо решать систему уравнений (7), в которую входит ковариационная функция ошибок наблюдений **.** В случае, когда используются синтетические данные, казалось бы, ошибок не должно быть, но за счет неадекватности модели (синтетическая модель не соответствует принятому в данном методе томографии скоростному распределению, т.е. ), ошибок при интегрировании системы (9), интерполяции в точки приемников рассчитанные для синтетической модели времена пробега будут содержать вычислительные ошибки. Мы приняли, что члены ковариационной матрицы ошибок , где символ Кронекера. Такая ковариационная функция ошибок возникает в случае, когда ошибки времен пробега обусловлены наличием случайных отклонений скорости (медленности) в среде, которые независимы и равноточны.

Действительно, пусть случайная погрешность медленности , причем , а . Ошибка в значении времени пробега волны по лучу длиной будет, соответственно, , а ее дисперсия . Пропорциональность дисперсии длине луча вполне логична, ведь чем длиннее будет луч, тем больше отклонений во времени накопится по мере трассирования, тем больше будет возможная ошибка при интерполяции в точку приемника. Неизвестная дисперсия войдет в параметр регуляризации α, который выбирается так, чтобы решение, с одной стороны, не было слишком неустойчивым при малым значениях и слишком сглаженным при больших, с другой стороны.

Перейдем теперь к построению и анализу решений для выбранных моделей.

***Модель* I**

На рис.6 точками изображены рассчитанные для синтетической модели значения времен пробега по трассам, показанным на рис.3. Разброс времен довольно велик, и аппроксимировать эти данные удается только квадратичной параболой. Так что параметр луча , используемый в формуле Герглоца-Вихерта, представляет прямую линию. Конечно, получаемый по этим данным скоростной разрез оказывается весьма приближенным, но его основе можно было выбрать несколько разрезов , годографы для которых с достаточной степенью точности отражают рассчитанные времена пробега, изображенные на рис.6.



Рис. 6. Годограф и его аппроксимация.

Область глубин 0-100 км была разделена на 5 слоев, границы которых находились на глубинах 10, 20, 40 и 60 км. На рис. 7 приведены три скоростных разреза, принятые в качестве начальных приближений. Они максимально различаются в верхних двух слоях. Соответственно можно ожидать различия решений именно в этих слоях.

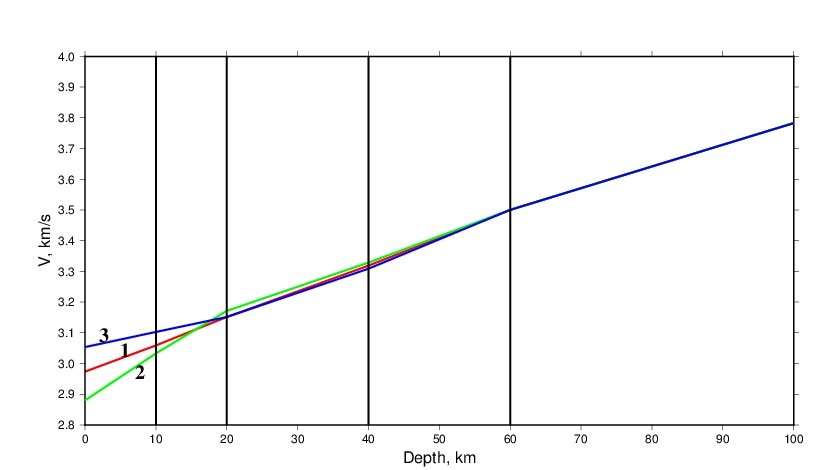


Рис.7. Принятые скоростные разрезы для трех начальных приближений в модели I.

Для каждого из них решалась томографическая задача - нахождение горизонтальных вариаций скорости в слоях, и, далее, в сумме с начальным вертикальным разрезом определялось искомое скоростное распределение. Для наглядного сравнения решений томографической задачи при разных начальных приближениях они изображались на рис. 8 в форме графиков изменения скорости по горизонтали вдоль профилей на глубинах, соответствующих серединам слоев. Для оценки качества решений на этих же графиках изображались изменения скорости на этих же глубинах в синтетической модели. Поскольку верхние слои пересекаются гораздо большим числом лучей, чем нижние, то можно было ожидать достаточно детального решения лишь в этих слоях. В более глубоких слоях решения, полученные для трех начальных приближений, почти не различаются и вследствие малого количества пересекающих слои лучей оказываются недостаточно точными, хотя и отображают основные особенности.

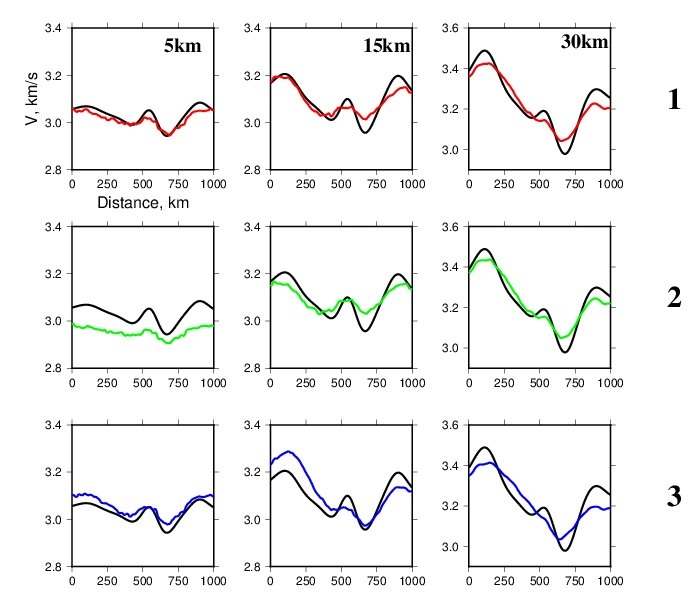
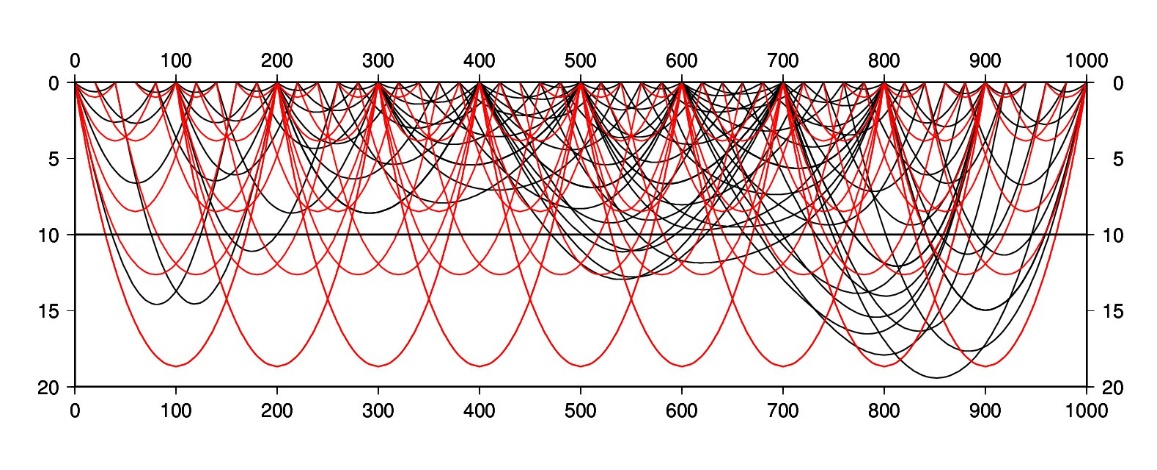
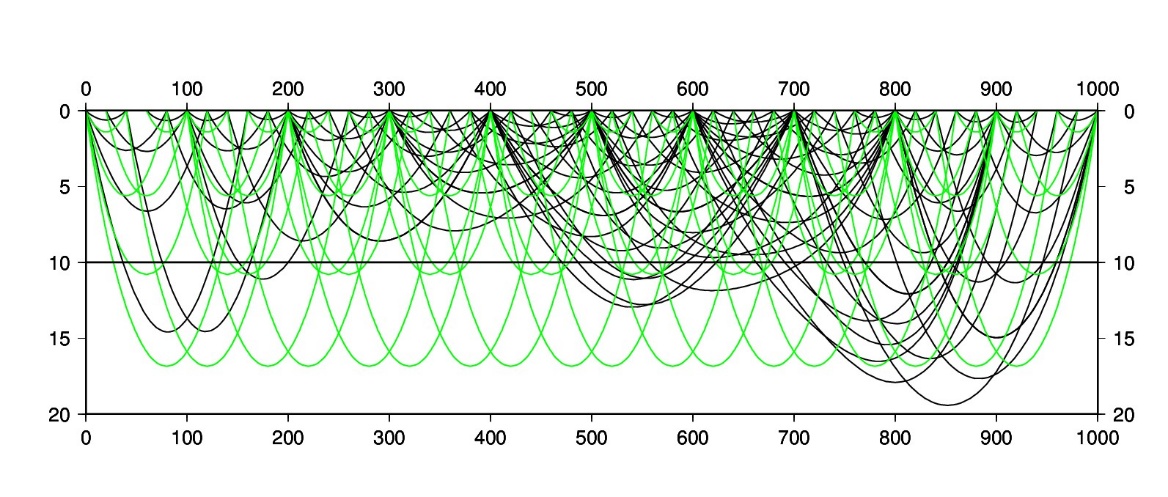


Рис. 8. Графики горизонтальных вариаций скорости в решении для модели I на глубинах, соответствующих серединам верхних трех слоев. Линии красного, зеленого и синего цвета отвечают начальным приближениям под номерами, указанными сбоку. Изменения скорости в синтетической модели выделены черным цветом.

Решение, полученное для начального приближения 1, достаточно хорошо отображает исходную модель. В варианте 2 скорость в 1-2 слоях оказывается заниженной, а в варианте 3 – наоборот, завышенной. Эти результаты объясняются тем, что, как было указано в разделе 3, лучи между некоторыми парами источник- приемник рефрагируют в разных слоях. Это отчетливо видно на рис. 9, где изображены те лучи в синтетической модели и модели начального приближения, которые не проникают ниже второго слоя.





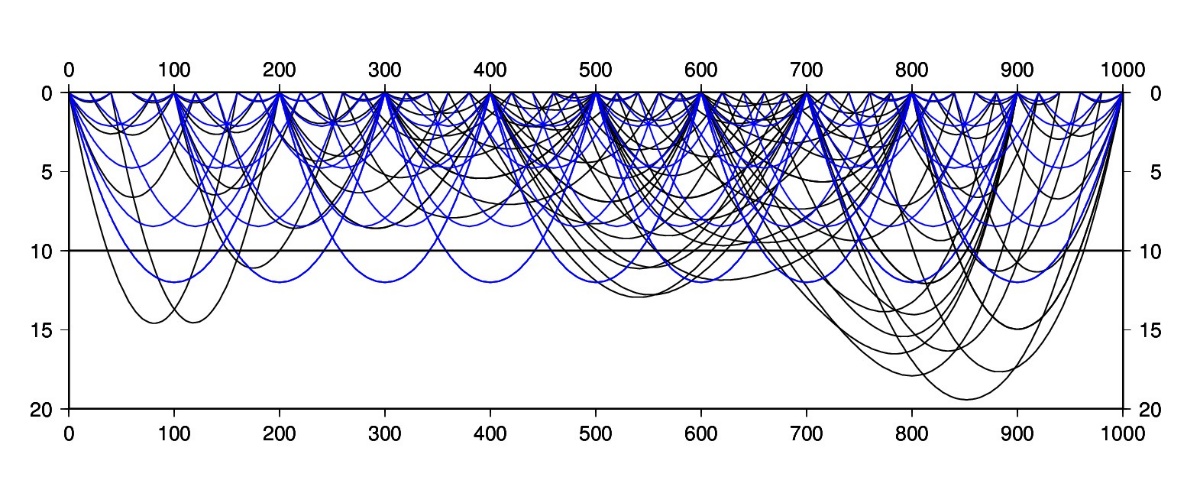


Рис. 9. Схема лучей для синтетической модели (черный цвет) и моделей начального приближения (1 вариант – красный цвет, 2 – зеленый, 3 – синий).

На рис.9 изображены лучи в исходной (синтетической) модели черным цветом, а цветами –лучи в трех моделях начального приближения. В варианте 2, в решении для которого скорость в первом слое оказывается заниженной, многие лучи в модели начального приближения рефрагируют глубже, чем между этими же точками в истинной модели. А поскольку скорость возрастает с глубиной, это приводит к занижению скорости в решении. И наоборот, в варианте 3, из-за низкого градиента скорости лучи в модели начального приближения рефрафрагируют выше, и информация о скоростях между этими точками из-за проникновения лучей в синтетической модели глубже приводит к завышению скорости в решении. В варианте 1, в котором совпадение скоростей в первых двух слоях оказывается наилучшим, лучи между отдельными парами точек рефрагируют в разных слоях, но по-разному: для одних пар имеет место заглубление луча в модели начального приближения по сравнению с истинной моделью, для других пар – наоборот.

На рис.10 и 11 представлены решения в двумерном изображении в области, где достаточно хорошее разрешение (сравнить с рис.3). На рисунке 10 показано решение для модели начального приближения 3. Из-за завышения скорости в верхних слоях можно видеть четкие границы между слоями на глубинах 10 и 20 км. На рис.11 показано решение для наилучшей модели (1). Здесь уже с трудом прослеживаются скачки скорости на границах, и решение оказывается более плавным и достаточно хорошо отражает истинную модель (рис.2).

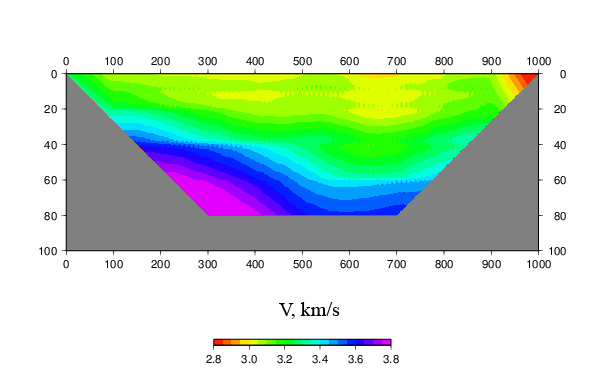


Рис. 10. Решение томографической задачи для варианта 3 начального приближения.

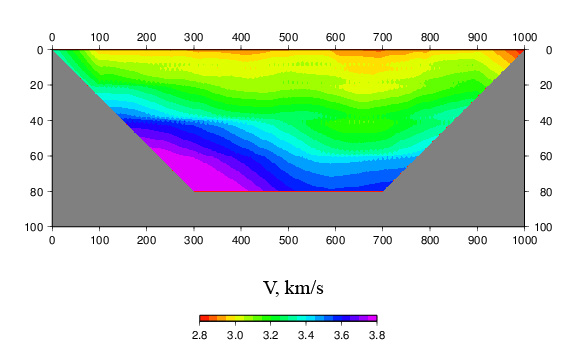


Рис. 11. Решение томографической задачи для варианта 1 начального приближения.

***Модель* II**

Для модели II были выполнены те же действия. Область глубин 0-100 км была также разделена на 5 слоев, границы которых находились на глубинах 10, 20, 40 и 60 км. На рис. 12 приведены три разреза, принятые в качестве начальных приближений. Решения томографической задачи при этих начальных приближениях в трех верхних слоях изображены на рис. 13.

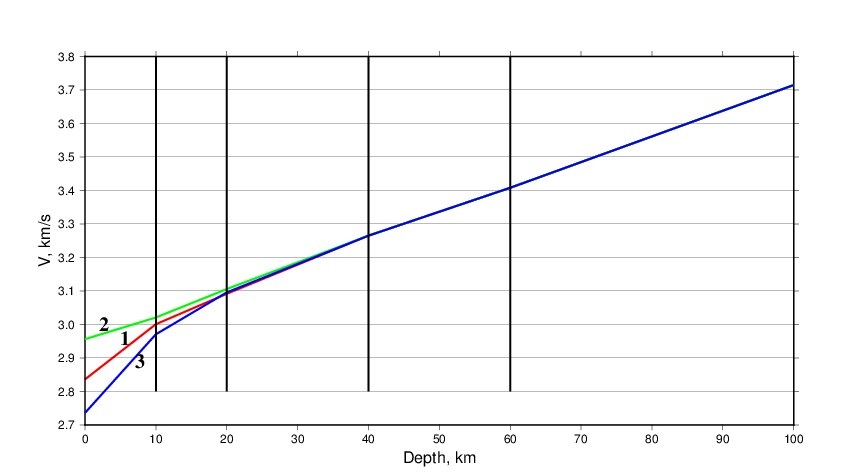


Рис.12. Принятые скоростные разрезы для трех начальных приближений в модели II.

Зависимость полученных решений от начального приближения отличается от случая для модели I. Так, для модели начального приближения 1 выявляется занижение скорости в 3-м слое, а в вариантах 2 и 3 происходит чередование занижения и завышения скоростей в слоях. Это обусловлено тем, что в истинной модели лучи в левой половине профиля не рефрагируют в интервале глубин 40-80 км. Соответственно это приводит к скачкам скорости на границах, наибольший из которых проявляется на границе 60 км. Это отчетливо видно на рис.14, построенном для модели начального приближения 1.

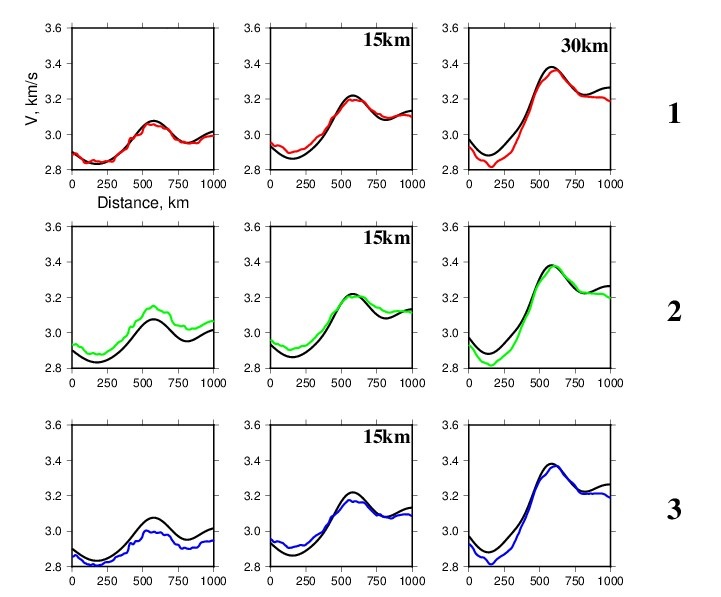


Рис. 13. Графики горизонтальных вариаций скорости в решении для модели II на глубинах, соответствующих серединам верхних трех слоев. Линии красного, зеленого и синего цвета отвечают начальным приближениям под номерами, указанными сбоку. Изменения скорости в синтетической модели выделены черным цветом.

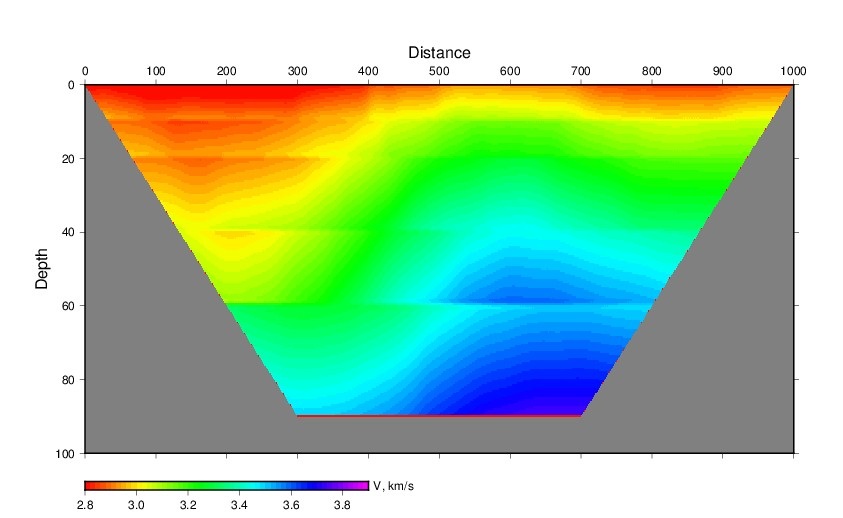


Рис. 14. Решение томографической задачи для варианта 1 начального приближения.

1. **Критерии выбора начального приближения**

В силу неоднозначности начального приближения и вытекающих отсюда различиях в решениях томографической задачи возникает проблема выбора наилучшего скоростного разреза . В случае известной модели среды это просто: достаточно подобрать такую функцию , в которой значения скорости в точках, соответствующих серединам слоев совпадали бы с теми, которые отвечают осредненным по горизонтали значениям в заданной модели, и варьировать V0(z) до наилучшего совпадения окончательного решения с заданной моделью.

В случае же реальных наблюдений, когда неизвестно, с чем надо сравнивать полученное решение, необходимо определить критерий, по которому выбирать окончательное решение. Критерий минимума среднеквадратичной временной невязки оказывается неподходящим, поскольку решение для горизонтальных поправок к скорости в слоях определяется как раз из этого критерия. Можно исходить из соображений, основанных на получающемся полном решении для скорости как суммы и . Из рис. 8, 13 видно, что при неверном выборе получающееся решение (в данном случае, главным образом в первом слое) может отличается от истинного распределения на нереально большую величину, в то время как вариации скорости по горизонтальному направлению в решениях для любых отличаются очень мало. То есть, достаточно добиваться того, чтобы средний уровень получаемых в решении кривых , изображенных на рис. 8, 13, был бы близок к средним значениям скоростей  на глубинах  в истинной модели. Таким образом, решение томографической задачи по поиску  разбивается на две задачи – поиску и соответственно томографической задачи определения горизонтальных вариаций скорости в слоях .

Итак, критерием выбора решения должна быть близость получающихся средних значений скорости в слоях на этих глубинах и значений . Поскольку число лучей, пересекающих последовательные слои уменьшается с глубиной слоя, что приводит к уменьшению информации об изменении скоростей в глубинных слоях, при построении критерия следует ввести вес каждого слоя, пропорциональный числу пересекающих его лучей.

Функция V0(z) задается набором параметров- значений скорости в начальном приближении на границах слоев. Обозначим его вектором **V**. Предлагается определять этот вектор из условия минимизации функционала , где - скорость в середине *k*-ого слоя, полученная в результате определения горизонтальных вариаций скорости в слоях, число отрезков лучей, пересекающих слой.

Иначе говоря, на каждом шаге минимизации должна решаться обратная (томографическая) задача. Именно таким способом был получен вариант 1 начального приближения, который привел к решениям, изображенным на рис. 8, 13.

Однако, такой критерий можно использовать в случае, когда достаточно хорошо известны средние значения скоростей в серединах слоев. Но в реальных ситуациях это не всегда возможно. Другой критерий, который может использоваться как самостоятельно, так и в качестве дополнительного, является отсутствие в решении заметных скачков на границах слоев. Если начальное приближение выбрано неправильно, то, как видно из рис.8, 13, это приводит к завышению или занижению средней скорости в каком-то слое, а это в свою очередь создает скачок на границе слоя. Это особенно заметно, если скорость в вышележащем слое оказывается завышенной. Интересно отметить, что решение задачи об определении начального приближения (вектора **V)** может быть неединственным, но при этом решения конечной задачи об определении *V*(*x,y,z*) оказываются практически неразличимыми.

**Выводы**

В задаче лучевой сейсмотомографии, в которой исходными данными являются времена пробега рефрагированных волн, решение, как выяснилось в ходе данной работы, зависит от начального приближения . Волны между одними и теми же точками могут в зависимости от начального приближения рефрагировать в разных слоях при разных значенях скоростей в этих слоях, в результате чего время пробега между этими точками будет нести в себе информацию о скоростях на разных глубинах Таким образом, томографическая задача по определению поправки к скорости в референтной вертикально-неоднородной модели разбивается на две, решаемые поочередно, - собственно томографическая задача по определению горизонтальных вариаций скорости и одномерная обратная задача по поиску вертикального распределения скорости, принимаемого в качестве начального приближения при решении томографической задачи.

Литература:

[1] Bishop, T., Bube, K., Cutler, R., Langan, R., Love, P., Resnick, J., Shuey, R., Spindler, D., and Wyld, H. (1985) Tomographic determination of velocity and depth in laterally varying media // Geophysics, v.50, P. 903-923.

[2] W.S.Phillips, M.C.Fehler (1991) Traveltime tomography: a comparison of popular methods // Geophysics. V.56, №16, P.1639-1649

[3] Hole J. (1992) Nonlinear high-resolution three-dimensional seismic travel time tomography //  
J.Geophys.Res. V. 97, P. 6553-6562

[4] Jie Zhang, M. Nafi Toksoz (1998) Nonlinear refraction travel time tomography // Geophysics, v. 63, n. 5, p. 1726-1737.

# [5] [Z. Wébe](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031920199001570)r (2000) Seismic traveltime tomography: a simulated annealing approach // PEPI v.119, 1-2, P.149-159

[6] Podvin, P., and I. Lecomte (1991) Finite difference computation of traveltimes in very contrasted velocity model: A massively parallel approach and its associated tools // Geophysical Journal International, v.105, P. 271–284.

[7] G. Nolet (1987) Seismic wave propagation and seismic tomography // In:Seismic Tomography ed. by G. Nolet, (Reidel, Hingham MA 1987) P.1–23

[8] N. Rawlinson and M. Sambridge (2003) Seismic traveltime tomography of the crust and lithosphere // Advances in Geophysics, 46, 81-197.

[9] P.L.Nowack and C.Li (2009) Seismic tomography // In Handbook of signal processing in acoustics, chapter 91, P.1635-1653

[10] Abers G., Roecker S. (1991) Deep structure of an arc-continent collision: Earthquake relocation and inversion for upper mantle P and S wave velocities beneath Papua New Guinea // J.Geophys.Res. Vol. 96, P. 6370\_6401

[11] Spakman W., Bijwaard H. (2001) Optimization of cell parameterization for tomographic inverse problems // Pure Appl. Geophys. V. 158, P. 1401-1423.

[12] Тихоцкий С.А., Фокин И.В., Шур Д.Ю. (2011) Активная лучевая сейсмическая томография с использованием адаптивной параметризации системой вэйвлет\_функций //

Физика Земли. № 4. С. 67–86.

[13] Яновская Т.Б. (2012) Методика трехмерной лучевой томографии, основанная на предположении о гладкости латеральных вариаций скорости // Физика Земли. №5. С. 1-15.

[14] Яновская Т.Б, Гобаренко В.С., Егорова Т.П. (2016) Строение подкоровой литосферы Черноморского бассейна по сейсмологическим данным // Физика Земли, №1, 15-30