ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики и математической физики

Направление «Физика»

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Магистерская диссертация студента

Космакова Максима Алексеевича

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., проф. **Федотов А. А.**

Рецензент:

к. ф.-м. н., ст. науч. сотр. **Филонов Н. Д.**

Санкт-Петербург

2017

Оглавление

0.1 Введение

На данный момент существует два взгляда на математическую трактовку инфракрасных расходимостей в квантовой электродинамике — первый, который чаще всего упоминается в учебниках по квантовой электродинамике (КЭД), заключается в суммировании вероятностей перехода из данного начального состояния во все конечные состояния, содержащие, помимо детектируемых частиц, еще и произвольное количество мягких фотонов. При таком подходе основным объектом являются не матричные элементы, а сечения; начальные и конечные состояния трактуются несимметрично, и определение оператора рассеяния отсутствует. Второй подход заключается в модификации пространства асимптотических состояний и подходящего определения оператора рассеяния. Основываясь на втором подходе, в недавнем времени в ряде работ [2]-[5] были получены результаты, показывающие, что в КЭД существуют ранее не обнаруженные симметрии, тождества Уорда для которых приводит к известной "Soft Photon Theorem", тем самым теория оказывается внутренне замкнутой. Данная работа посвящена более детальному описанию асимптотического пространства, используемого в этом подходе.
Заявленная тема дипломной работы связана с математическими проблемами, которые возникают в квантовой теории поля. Одна из таких проблем — инфракрасные расходимости КЭД и соответствующее асимптотическое пространство, которые исследуются в представленной работе.

Основные причины, лежащие в основе инфракрасных расходимостей, впервые были сформулированы в работе Блоха и Нордсика [7]. В ряде работ [24] были предложены способы получения свободных от инфракрасных расходимостей вероятностей перехода, однако они выглядели искусственными и не логичными.
Как было замечено [21], одной из основных причин неудачных попыток являлось предположение, что асимптотические состояния содержат конечное число фотонов, а потому принадлежат представлению Фока. На самом деле, если начальное состояние содержало конечное число фотонов, то конечное состояние в общем случае может содержать бесконечное число фотонов. Для корректного описания такого процесса приходится рассматривать представления, неэквивалентные Фоковскому.
Первый шаг в данном направлении был сделан Чангом [6]. Он показал, что можно построить состояния, не принадлежащие гильбертову пространству представления Фока, между которыми элементы S-матрицы являются конечными. Однако данный подход также имел свои недостатки (введение конечной массы у фотона и наличие расходящегося фазового

фактора - кулоновской фазы). Значительное развитие работа Чанга получила в ряде работ Киббла [8].

В работе П.П.Кулиша и Л.Д.Фаддеева [1] модифицировалось не только пространство асимптотических состояний, но и само определение оператора рассеяния. Процедура данных построений является логическим продолжением нерелятивистской теории рассеяния на дальнодействующем потенциале [10] и имеет простую физическую интерпретацию.

0.1.1 Результаты

Одним из результатов работы П.П.Кулиша и Л.Д.Фаддеева являлось введение асимптотического пространства для системы заряженных частиц и фотонов. Асимптотическое пространство возникало как образ пространства Фока под действием оператора W_α:

$$W_\alpha = \exp\left\{\sum_i (\alpha_i^* \mathbf{a}_i - \alpha_i \mathbf{a}_i^*)\right\}, \tag{1}$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^*$ — операторы рождения и уничтожения, $\{\alpha_n = d_n + ir_n\}_{n=1}^\infty$ — некоторый набор комплексных чисел. Как было отмечено в статье, данный оператор выводит из пространства Фока всякий вектор, принадлежащий последнему, в случае когда $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \notin l_2$.

В статье были также описаны общие свойства асимптотического пространства, такие как релятивистская и градиентная инвариантность, не зависимость от времени и существование подпространства с неотрицательной метрикой. При построении использовалось обобщенное представление частиц. Эти свойства удалось получить, не описывая явно полученное пространство.

В данной работе получен явный вид асимптотического пространства. Результаты получены, используя два подхода. Первый, более классический и появившийся еще в работах Чанга и Киббла, основан на бесконечном тензорном произведении по Нейману [9].

Напомним, что для того, чтобы задать неполное тензорное бесконечное тензорное произведение гильбертовых пространств $\bigotimes_{n=1}^\infty H_n$, необходимо выбрать опорный вектор $\otimes_{n=1}^\infty f_n$ — все остальные элементы неполного тензорного произведения, отличающиеся от опорного только в конечном числе координат, образуют плотное множество, тем самым выбор опорного вектора полностью характеризует неполное тензорное произведение.

В работе показано, что в голоморфном представлении, т.е. когда гильбертовы пространства H_n представляют собой подпространство голоморфных функций $f(z)$ со скалярным произведением вида

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi i}\int \overline{f(z)} g(z) e^{-|z|^2/2} d^2 z, \tag{2}$$

асимптотическое пространство H_{as} является неполным тензорным произведением $H_{as} = H[\alpha]$ с опорным вектором $|\alpha\rangle = \bigotimes_n \exp\{\frac{-|\alpha_n|^2}{2}\} \exp\{-\alpha_n z_n\}$. Данное пространство ортогонально стандартному Фоковскому[1] $H_{Fock} = H[0]$ с опорным вектором $\bigotimes_n 1_n$ и принадлежит к так называемому непрерывному представлению по Вайтману и Гардингу [20].

Во втором подходе, который можно назвать функциональным представлением, основануом на разложении Винера-Ито и изоморфизме Сигала, асимптоническое пространство представлено как пространство $L_2(\mathbb{R}^\infty, \breve{\rho})$, где $\breve{\rho}$ — продакт-мера $\breve{\rho} = \times_{k=1}^{\infty} e^{-(\lambda_k + \sqrt{2} d_k)^2} d\lambda_k$.При помощи данного подхода был получена мера $\breve{\rho}$ и нетривиальный продакт-коцикл $C_s(\lambda)$, участвующие в представлении в форме Вейля канонических коммутационных соотношений в данном пространстве:

$$(\breve{U}_t f)(\lambda) = e^{i(t,\lambda)} f(\lambda) \tag{3}$$

$$(\breve{V}_s f)(\lambda) = C_s(\lambda) \sqrt{\frac{d\breve{\rho}_s(\lambda)}{d\breve{\rho}(\lambda)}} f(\lambda + s). \tag{4}$$

Постановка задачи и направление исследований принадлежит Л.Д.Фаддееву.

0.1.2 Структура работы

Работа идейно разделяется на две части. Первая часть — параграфы (1.1 -1.2), основаны на бесконечном тензорном произведении гильбертовых пространств, на данном языке был уже получен ряд результатов [8], также он является достаточно наглядным для описания особенностей, возникающих в КЭД. На этом пути удалось показать, что асимптотическое пространство не только ортогонально невозмущенному Фоковскому, но и также заметить факт нетривиальности меры, связанной с представлением канонических коммутационных соотношений в этом пространстве (непрерывное, а не дискретное). Однако дальнейшее описание данной меры и связанного с ней коцикла оказалось удобнее искать в функциональном представлении — реализации асимптотического пространства как $L_2(\mathbb{R}^\infty, \rho)$ при помощи конструкции Винера-Ито и изоморфизма Сигала. Автор благодарит С.Э.Деркачева за активную помощь при написании этой части.

В параграфе 1.1 мы опишем набор конструкций, необходимых для наших целей: в пункте 1.1.1 мы опишем переход от непрерывного к дискретному случаю, т.к. результаты в дискретном случае имеют простую и наглядную интерпретацию, в то время как переход к непрерывному не представляет сложностей, однако там появляются свои особенности (та-

[1]Подобный результат был получен в модели Ван-Хова [22] для мезонного поля.

кие как ультрафиолетовые расходимости), не рассматриваемые в данной работе; Основным аппаратом для описания асимптотических пространств будет бесконечное тензорное произведение осцилляторов по фон Нейману, определения и необходимые свойства которого мы опишем в пункте 1.1.2 — так как нужный нам оператор, описывающий асимптотическое пространство, выводит из пространства Фока, то нам потребуются как полное так и неполное бесконечное тензорное произведение гильбертовых пространств. В пункте 1.1.3 мы обсудим классификацию канонических коммутационных соотношений по Вайтману и Гардингу, представления разделятся на два класса — непрерывные и дискретные, и окажется, что оба представления появляются в электродинамике. Чтобы построить явный вид асимптотического пространства, оказывается удобным выбрать для представления гильбертова пространства одного осциллятора представление Баргманна-Сигала, кратко описанное в пункте1.1.4

В параграфе 1.2 мы применим построения параграфа 1.1 и явно опишем асимптотическое пространство и укажем его новые свойства.

Вторая часть написана под влиянием плодотворных бесед с А.М.Вершиком, которому автор выражает свою благодраность. Эта часть начинается с предварительных сведений необходимых для дальнейшего. Пункт 2.1.1 содержит предварительные сведения из теории меры на бесконечномерных пространствах и более конкретно — гауссовских мерах, получаемых при помощи оснащенных гильбертовых пространств, которые появятся в функциональной реализации асимптотического пространства. В пункте 2.1.2 описано построение пространства Фока и разложение Винера-Ито, которое затем используется в 2.1.3 при описании изоморфизма Сигала. В параграфе 2.1.3 представлены два примера базисов, полученных при изоморфизме Сигала. При помощи первого из них, хотя он и не используется в дальнейшем в данной работе, можно установить связь с обобщенным белым шумом, что дает возможность для дальнейших исследований. Второй базис потребуется при реализации изоморфизма Сигала как обобщенного преобразования Фурье-Эрмита в следующем параграфе, который начинается с введения стандартных операторов рождения и уничтожения в Фоковском пространстве и диагонализации построенных из них полевых операторов. Далее в 2.2 мы формулируем классическую теорему Стоуна-фон Неймана о представлениях канонических коммутационных соотношений в форме Вейля в конечномерном случае , а также теорему о представлениях в бесконечномерном случае (в так называемом виде Вайтмана-Гардинга). Используя изоморфизм Сигала для "сдвинутых" полевых операторов, в 2.3 мы строим функциональную модель асимптотического пространства, описываем полученную гауссовскую меру γ_{1,d_k} и нетривиальный продакт-коцикл $C_s(\lambda)$.

Глава 1

Асимптотическое пространство как бесконечномерное тензорное произведение

1.1 Вспомогательные сведения

В данном параграфе мы рассмотрим конструкции необходимые для построения асимптотического пространства как бесконечного тензорного произведения и описания его свойств.

1.1.1 Связь "непрерывного"и "дискретного"случая

Параметризующее пространство

Различие между "дискретным"и "непрерывным"случаями состоит в том, что в первом мы строим теорию, основываясь на некотором счетном базисе и в результате получаются бесконечные суммы по коэффициентам Фурье, в то время как во втором случае мы сразу работаем со всем гильбертовым пространством и с получаемыми интегралами. Мы будем работать с "дискретым"случаем, так как он более нагляден и в нем не возникают вопросов об ультрафиолетовых расходимостях, связь "дискретного"и "непрерывного"случая описана ниже.

Рассмотрим гильбертово пространство, которое параметризует состояния одного фотона, обозначим это пространство за $\mathcal{K}$, скалярное произведение в котором задано интегралом:

$$\langle f|g\rangle = \int f_\mu^*(\mathbf{k})g^\mu(\mathbf{k})\ d\mu(\mathbf{k}). \tag{1.1}$$

Рассмотрим плотное подмножество этого пространства $\mathcal{A}$, и пусть задан ортонормированный базис $\{e_n\}$ в $\mathcal{K}$ такой,что все $e_n \in \mathcal{A}$. Для каждого $f \in \mathcal{K}$ обозначим $\{f_n\}$ последовательность комплексных чисел $\langle e_n|f\rangle$. Рассмотрим также пространство $\mathcal{A}^*$, которое является двойственным к $\mathcal{A}$. Тогда для $f \in \mathcal{A}$, $g \in \mathcal{A}^*$ "скалярные" произведения $\langle f|g\rangle$ корректно определены. В частности, так как $e_n \in \mathcal{A}$, мы можем определить $g_n = \langle e_n|g\rangle$. Следует отметить, что последовательность $\{g_n\}$ не обязана сходится и даже быть ограниченной. Именно такие последовательности и будут давать нетривиальное обобщение Фоковского пространства. Скалярное произведение может быть также представлено как $\langle f|g\rangle = \sum f_n^* g_n$. Отметим, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{A}^*$.

С точки зрения физики, пространство $\mathcal{K}$ характеризует детектируемые фотоны — "hard" photones, в то время как $\mathcal{A}^*$ параметризуют недетектируемые фотоны — "soft" photones [6].

Операторы рождения и уничтожения

В методе вторичного квантования основную роль играют операторы рождения и уничтожения[1] , кратко опишем их свойства. Электромагнитное поле в терминах операторов рождения и уничтожения может быть представлено в следующем виде (более подробно см. [1], [8]) :

$$A_\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (\mathbf{a}^*_\mu(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{kx}} + \mathbf{a}_\mu(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kx}}) \frac{d\mathbf{k}}{(2k_0)^{1/2}}, \tag{1.2}$$

где операторы рождения и уничтожения удовлетворяют коммутационным условиям:

$$[\mathbf{a}_\mu(\mathbf{k}), \mathbf{a}^*_\nu(\mathbf{k}')] = \gamma_{\mu\nu}(\mathbf{k})(2\pi)^3 2k^0 \delta_3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \tag{1.3}$$

$\gamma_{\mu\nu}$ — функция, зависящая от выбора калибровки.

Каждой $f \in \mathcal{K}$ мы можем сопоставить операторнозначные функции $\mathbf{a}(f)$ и $\mathbf{a}^*(f)$ формально получаемые как

$$\mathbf{a}(f) = \int f_\mu(\mathbf{k}) \mathbf{a}_\mu(\mathbf{k}) \, d\mu(\mathbf{k}) \qquad \mathbf{a}^*(f) = \int f_\mu(\mathbf{k}) \mathbf{a}^*_\mu(\mathbf{k}) \, d\mu(\mathbf{k}). \tag{1.4}$$

Можно показать, что данные операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\mathbf{a}(f), \mathbf{a}^*(g)] = \langle f|g\rangle \tag{1.5}$$

При построении асимптотического пространства нам понадобятся операторы вида

$$W(f) = \exp\left\{\mathbf{a}(f) - \mathbf{a}^*(f)\right\} \tag{1.6}$$

[1] Смотри пункт 2.1.2.

Если мы разложим f по базису $\{e_n\}$ с соответсвующими коэффициентами f_n, то мы получим следующий вид $W(f)$:

$$W(f) \equiv W_{\{f_n\}} = \exp\left\{\sum_n (f_n \mathbf{a}_n - f_n^* \mathbf{a}_n^*)\right\}, \tag{1.7}$$

где $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}(e_n)$ удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям:

$$[\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_m^*] = \langle e_n | e_m \rangle = \delta_{mn}. \tag{1.8}$$

Мы не требовали при построении, чтобы $f \in \mathcal{K}$, f может принадлежать и $\mathcal{A}^*$, тогда $\{f_n\}$ может расходится. Для того, чтобы придать в этом случае смысл оператору $W(f)$, нам понадобится бесконечные тензорные произведения.

1.1.2 Гильбертово пространство

Ключевую роль в нашем построении будет играть гильбертово пространство бесконечного произведения осцилляторов :

$$H = \bigotimes_{\mathbf{k} \in I} H_{\mathbf{k}} \tag{1.9}$$

в дискретном случае $I = \mathbb{N}$, в непрерывном $I = \mathbb{C}^3$. Бесконечное тензорное произведение понимается в смысле Неймана, описание которого мы и дадим в этом параграфе.

Пусть I — заданное множество индексов произвольной мощности[2], и пусть для каждого $\alpha \in I$ задано гильбертово пространство H_α. Далее мы кратко излагаем теорию, следуя [9], но испоользуем на наш взгляд более удобные обозначения из [14].

Мотивировка

Мы хотим, чтобы $\bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha$ было тоже гильбертовым пространством. Для заданной последовательности $f_\alpha \in H_\alpha$, это новое пространство $\bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha$ должно содержать элемент, символически записываемый как $\bigotimes_{\alpha \in I} f_\alpha$. Такие элементы должны обладать следующим свойством:

$$(\bigotimes_{\alpha \in I} f_\alpha, \bigotimes_{\alpha \in I} g_\alpha) = \prod_{\alpha \in I} (f_\alpha, g_\alpha). \tag{1.10}$$

В частности при $f_a = g_a$:

$$(\bigotimes_{\alpha \in I} f_\alpha, \bigotimes_{\alpha \in I} f_\alpha) = \prod_{\alpha \in I} \|f_\alpha\| \tag{1.11}$$

[2] В общем случае мощность I может быть любой из $\aleph_\alpha$ алеф Кантора, для наших целей достаточно счетной и континуальной мощности.

Эти формулы показывают, что мы должны наложить некоторые условия на сами последовательности f_a:

1) Только те последовательности f_a разрешены, для которых $\prod_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|$ сходится.

2)Последовательности, для которых $\prod_{\alpha\in I}\|f_\alpha\| = 0$ не важны для наших рассмотрений, т.к. требование (1.11) приводит к тому, что для них $\bigotimes_{\alpha\in I} f_\alpha = 0$.

3) Свойство (1.10) - это свойство двух последовательностей, а потому если мы не потребуем

$$\prod_{\alpha\in I}\|f_\alpha\| < \infty \qquad \prod_{\alpha\in I}\|g_\alpha\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \prod_{\alpha\in I}(f_\alpha, g_\alpha) < \infty, \tag{1.12}$$

то мы можем столкнутся с усложнением конструкции.

Наконец мы требуем, чтобы $\bigotimes_{\alpha\in I} H_\alpha$ было "коммутативным" , это мотивирует следующее требование:

4) Сходимость $\prod_{\alpha\in I}\|f_\alpha\|$, $\prod_{\alpha\in I}(f_\alpha, g_\alpha)$ не зависит от упорядочивания множества I.

Числовая сходимость

Как видно из первого пункта, чтобы определить бесконечное тензорное произведение гильбертовых пространств, нам сначала необходимо определить бесконечное числовое произведение (а также и сумму) и его сходимость.

Определение 1.1.1. *Пусть z_α, $\alpha \in I$ — произвольная последовательность комплексных чисел. Будем говорить, что бесконечное произведение $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha$ (бесконечная сумма $\sum_{\alpha\in I} z_\alpha$) сходится, а b является его значением, если для каждого $\delta > 0$ существует конечное множество $I_0 = I_0(\delta) \subset I$, такое что для любого конечного множества $J = \mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $I_0 \subset J \subset I$ выполнено*

$$|z_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_{\alpha_n} - b| < \delta \qquad \big(|z_{\alpha_1} + \ldots + z_{\alpha_n} - b| < \delta\big)\,. \tag{1.13}$$

В отличие от $\sum_{\alpha\in I} z_\alpha$ необходимое и достаточное условие сходимости $\sum_{\alpha\in I}|z_\alpha| < \infty$ в случае $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha$ — $\prod_{\alpha\in I}|z_\alpha| < \infty$ не является достаточным:

Лемма 1. *Бесконечное произведение $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha$ сходится тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух*

1) $\prod_{\alpha\in I}|z_\alpha|$ сходится, его значение =0;

2) $\prod_{\alpha\in I}|z_\alpha|$ сходится, его значение $\neq 0$, и $\sum_{\alpha\in I}|arg\ z_\alpha|$ сходится.

Однако этот факт может не согласовываться с нашим требованием (1.12) — можно построить пример, в котором $\prod_{\alpha\in I}\|f_a\|$ и $\prod_{\alpha\in I}\|g_a\|$ сходится, а $\prod_{\alpha\in I}(f_a, g_a)$ — нет. Поэтому мы определим новую сходимость следующим образом:

Определение 1.1.2. *Бесконечное произведение* $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha$ *называется квазисходящимся, если и только если* $\prod_{\alpha\in I} |z_\alpha| < \infty$*. Его значение*
1) совпадает с $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha$*, если последнее сходится или*
2) равно 0, если расходится.

Этим определением, мы добились выполнения пункта (1.12), а именно:

Лемма 2. *Если* f_α*,* $g_\alpha \in H_\alpha$ *для всех* $\alpha \in I$*, и если* $\prod_{\alpha\in I} \|f_\alpha\|$*,* $\prod_{\alpha\in I} \|g_\alpha\|$ *(квази)сходятся, тогда* $\prod_{\alpha\in I}(f_\alpha, g_\alpha)$ *также квазисходится.*

Следствие. *Квазисходимость* $\prod_{\alpha\in I} z_\alpha$ *к ненулевому значению равносильна просто сходимости к этому же значению. Необходимыми и достаточными условиями является* $z_\alpha \neq 0 \ \forall\alpha$ *и сходимость* $\sum_{\alpha\in I} |z_\alpha - 1|$*.*

Определение 1.1.3. *Назовем последовательность* f_α*,* $\alpha \in I$ *C-последовательностью, если и только если* $f_\alpha \in H_\alpha$ *для всех* $\alpha \in I$ *и* $\prod_{\alpha\in I} \|f_\alpha\|$ *сходится.*

Определение 1.1.4. *Пусть задана C-последовательность* $f^0_\alpha, \alpha \in I$*, рассмотрим функционал, определенный следующим способом :*

$$\Phi(f_\alpha; \alpha \in I) = \prod_{\alpha\in I} (f^0_\alpha, f_\alpha), \tag{1.14}$$

который задан на C-последовательностях $f_\alpha, \alpha \in I$ *и только на них.Обозначим его как*

$$\Phi = \bigotimes_{\alpha\in I} f^0_\alpha. \tag{1.15}$$

Функционалы такого вида будем называть C-векторами.

Определение 1.1.5. *Рассмотрим все конечные линейные комбинации таких элементов:*

$$\Phi = \sum_{\nu=1}^{p} \bigotimes_{\alpha\in I} f^0_{\alpha,\nu}, \tag{1.16}$$

где $p = 0, 1, 2, \ldots$*;* $f^0_{\alpha,\nu}$ *— C-последовательности. Обозначим полученное множество как* $\bigotimes^*_{\alpha\in I} H_\alpha$*.*

На полученном множестве можно ввести произведение:

Лемма 3. *Пусть* $\Phi, \Psi \in \bigotimes^*_{\alpha\in I} H_\alpha$ *:*

$$\Phi = \sum_{\nu=1}^{p} \bigotimes_{\alpha\in I} f^0_{\alpha,\nu} \qquad \Psi = \sum_{\mu=1}^{q} \bigotimes_{\alpha\in I} g^0_{\alpha,\mu} \ . \tag{1.17}$$

Определим (Ψ, Φ) *следующим образом:*

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{q} \prod_{\alpha\in I} (f^0_{\alpha,\nu}, g^0_{\alpha,\mu}) \tag{1.18}$$

Данное выражение зависит только от Φ, Ψ*, а не от выбранного представления* Φ *и* Ψ*.* (Φ, Ψ) *линейно по* Φ*, антилинейно по* Ψ *и эрмитово-симметрично по* Φ, Ψ*.*

Существуют C -последовательности $\{f_\alpha\}$ такие,что $\prod_\alpha \|f_\alpha\| = 0$, хотя $\|f_\alpha\| > 0 \ \forall \alpha$. Чтобы различать эти тривиальные (как функционалы)[3] от нетривиальных, рассматривают C_0-последовательности:

Определение 1.1.6. *Последовательность $f_\alpha, \alpha \in I$ называется C_0-последовательностью, если $f_\alpha \in H_\alpha$ для всех $\alpha \in I$ и $\sum_{\alpha \in I} |\|f_\alpha\| - 1|$ сходится.*

Теорема 1. *С определенным выше (Ψ, Φ), $\bigotimes^*_{\alpha \in I} H_\alpha$ является комплексным линейным пространством с эрмитовым произвдененем. Тем самым оно может быть метризованно следющим способом:*

$$dist\{\Phi, \Psi\} = \|\Phi - \Psi\| \qquad \|\Phi\| = \sqrt{(\Phi, \Phi)}\,. \tag{1.19}$$

Далее проведем операцию пополнения:

Определение 1.1.7. *Рассмотрим те антилинейны функционалы Φ, принимающие комплексные значения, определенные на всех C-последовательностях $f_\alpha, \alpha \in I$ и только на них, для которых существует последовательность $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \in \bigotimes^*_{\alpha \in I} H_\alpha$ такая, что*
1) $\Phi(f_\alpha, \alpha \in I) = \lim\limits_{r \to \infty} \Phi_r(f_\alpha, \alpha \in I)$
2) $\lim\limits_{r,s \to \infty} \|\Phi_r - \Phi_s\| = 0$
для всех C_0-последовательностей $f_\alpha, \alpha \in I$. Эти два условия будем обозначать
$\Phi = L_{r \to \infty} \Phi_r$.
Множество, которое они образуют, будем называть полным прямым произведением пространств $H_\alpha, \alpha \in I$ и обозначать $\bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha$.

Лемма 4. *Если $\Psi, \Phi \in \bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha$, те*

$$\Phi = L_{r \to \infty} \Phi_r \qquad \Psi = L_{r \to \infty} \Psi_r \qquad \Phi_r, \Phi_r \in \bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha, \tag{1.20}$$

тогда $\lim(\Phi_r, \Psi_r)$ существует. Обозначим его за (Φ, Ψ).

Теорема 2. *С произведением (Φ, Ψ), описанном выше $\bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha$ является унитарным пространством, метризованный естественным образом. $\bigotimes^*_{\alpha \in I} H_\alpha$ является линейным всюду плотным подмножеством $\bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha$.*

Неполное прямое произведение

Мы определили бесконечное тензорное произведение как замыкание линейной оболочки C_0-векторов. Однако полезно знать, как это пространство разбивается на ортогональные подпространства:

[3]Если $\prod_\alpha \|f_\alpha\| = 0$. то $\prod_\alpha < f_\alpha, g_\alpha >= 0 \ \forall g_\alpha - C_0$ последовательности.

Определение 1.1.8. *Две C_0 последовательности $f_\alpha, \alpha \in I$, $g_\alpha, \alpha \in I$ называются эквивалентными, если $\sum_{\alpha\in I} |(f_\alpha, g_\alpha) - 1|$ сходится.*

Определение 1.1.9. *Отношение эквивалентности, введенное выше, разбивает множество всех C_0-последовательностей на непересекающиеся классы эквивалентности. Обозначим множество, образованное этими классами эквивалентности, как Γ, а класс эквивалентности для данной f_α как $[f]$.*

Лемма 5. *$(f_\alpha, \alpha \in I) \sim (g_\alpha, \alpha \in I)$ если и только если $\sum_{\alpha\in I} \|f_\alpha - g_\alpha\|^2$ и $\sum_{\alpha\in I} |\Im(f_\alpha, g_\alpha)|$ сходятся.*

Определение 1.1.10. *Пусть $[f] \in \Gamma$ — класс эквивалентности, тогда определим $H[f]$ как замкнутую линейную оболочку, определенную всеми $\bigotimes_{\alpha\in I} f_\alpha$, где $f_\alpha, \alpha \in I$ — некоторая C_0-последовательность из $[f]$. Ясно, что $H[f] \subset \bigotimes_{\alpha\in I} H_\alpha$.*

Теорема 3. *Каждый класс эквивалентности $[f]$ содержит C_0-последовательность f_α, $\alpha \in I$, для которой $\|f_\alpha\| = 1$ для всех $\alpha \in I$.*
Рассмотрим данную последовательность f_α, тогда $H[f]$ является замкнутой линейной оболочкой, определяемой всеми C_0-последовательностями g_α, $\alpha \in I$, для которых $f_\alpha \neq g_\alpha$ только для конченого набора α.

Лемма 6. *Пространства $H[f]$ для разных $[f] \in \Gamma$ попарно ортогональны:*

$$f^0 \in [f] \neq [g] \ni g^0 \quad \Rightarrow \quad < \bigotimes_{\alpha\in I} f_\alpha, \bigotimes_{\alpha\in I} g_\alpha >= 0; \tag{1.21}$$

$$f^0, g^0 \in [f] \quad \Rightarrow \quad \left\{ < \bigotimes_{\alpha\in I} f_\alpha, \bigotimes_{\alpha\in I} g_\alpha >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha : < f_\alpha, g_\alpha >= 0 \right\}, \tag{1.22}$$

и их замкнутая линейная оболочка совпадает с $\bigotimes_{\alpha\in I} H_\alpha$:

$$\bigotimes_{\alpha\in I} H_\alpha = \overline{\bigotimes_{[f]\in\Gamma} H[f]} \,. \tag{1.23}$$

Для связи с ранними подходами, описанной в дополнении 3.1, потребуется изоморфизм между неполным тензорным произведением и пространством последовательностей.

Рассмотрим некоторый $[f] \in \Gamma$. Выберем из $[f]$ последовательность $f^0_\alpha, \alpha \in I$: $\|f^0_\alpha\| = 1$. (такая существует по Теореме 3)
Пусть N_α — размерность H_α. Пусть K_α — множество индексов с мощностью$= N_\alpha$. Образуем полный ортонормированный набор $\phi_{\alpha,\beta}$ $\beta \in K_\alpha$ в H_α. Сделаем это таким образом, чтобы $0 \in K_\alpha$ и $\phi_{\alpha,0} = f^0_\alpha$.
Пусть $\mathtt{F}$ — множество функций $\beta(\alpha)$, определенных для всех $\alpha \in I$ и только для них, такие что из $\alpha \in I$ следует, что $\beta(\alpha) \in K_\alpha$, и $\beta(\alpha) \neq 0$ только для конечного числа α .

Лемма 7. *Если $\beta(\alpha)$ пробегает все* $\mathtt{F}$, *то все* $\bigotimes_{\alpha\in I}\phi_{\alpha,\beta(\alpha)}$ *существуют и образуют полное ортонормированное множество в* $H[f]$.

Теорема 4. *Пусть* $[f]$, f^0_α,N_α, K_α, $\mathtt{F}$ *определены также, как и в предыдущей лемме. Тогда существует взаимнооднозначное соответствие между* $\Phi\in H[f]$ *и коэффициентами* $g[\beta(\alpha);\alpha\in I]$ *такими что:*

1)$g[\beta(\alpha);\alpha\in I]$ *определены для* $\beta(\alpha)\in\mathtt{F}$ *и только для них и принимают комплексные значения;*

2) $\sum_{\beta(\alpha)\in\mathtt{F}}|g[(\beta(\alpha);\alpha\in I]|^2$ *сходится.*

Это соответствие определяется следующим образом:

$$g[(\beta(\alpha);\alpha\in I]=(\Phi,\bigotimes_{\alpha\in I}\phi_{\alpha,\beta(\alpha)})=\Phi(\phi_{\alpha,\beta(\alpha)};\alpha\in I). \tag{1.24}$$

Если Φ,Ψ *соответствуют*$g[(\beta(\alpha);\alpha\in I]$, $h[(\beta(\alpha);\alpha\in I]$, *то*

$$(\Phi,\Psi)=\sum_{\beta(\alpha)\in\mathtt{F}}g[(\beta(\alpha);\alpha\in I]\cdot h^*[(\beta(\alpha);\alpha\in I]\;. \tag{1.25}$$

1.1.3 Представление

Под представлением коммутационных соотношений мы будем понимать набор $\{\mathbf{a}_k\}_1^m$ операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве H, который удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\mathbf{a}_j\mathbf{a}_k-\mathbf{a}_k\mathbf{a}_j=0\qquad\mathbf{a}_j\mathbf{a}^*_k-\mathbf{a}^*_k\mathbf{a}_j=\delta_{jk}, \tag{1.26}$$

где $j,k=1,\ldots,m$, в случае когда $m<\infty$ Нейман доказал, что любое представление является прямой суммой неприводимых представлений, которые унитарно эквивалентны. В случае $m=\infty$ Фридрихсом и Нейманом Neu было построено несколько неэквивалентных представлений, что показывало существенное различие конечномерных и бесконечномерных случаев. Полная классификация бесконечномерных представлений была получена Гардингом и Вайтманом. Коротко опишем их построение.

Пусть I обозначает множество всех бесконечных последовательностей $n=(n_1,n_2,\ldots)$ с целыми элементами $n_k\geqslant 0$, пусть Δ обозначает "рациональные"последовательности, т.е. те последовательности, у которых только конечное число элементов отлично от нуля. Обозначим за $P^{(n)}_j$ —проектор на n-частичное состояние осциллятора j. Определим новые проекторы:

$$E_\alpha\equiv E_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots}=\lim_{M\to\infty}\prod_{j=1}^{M}P_j^{(\alpha_j)}\;. \tag{1.27}$$

Физический смысл этого оператора ясен — это оператор, матожидание которого является вероятностью чисел заполнения α (см. 2.1.2). Хотя оператор E_α и является проектором, однако ничто не мешает ему быть равным нулю. Как мы увидим дальше, такие примеры существуют и не являются чем-то патологическим. В связи с этим дадим следующее определение:

Определение 1.1.11. *Представление называется непрерывным, если все проекторы E_α обнуляются, представление называется дискретным, если не существует нетривиального подпространства на котором все E_α обнуляются.*

Тот факт, что любое представление является суммой дискретного и непрерывного, следует из следующей теоремы (см. [12])

Теорема 5.

$$E_{\alpha'}E_\alpha = 0 = E_\alpha E_{\alpha'} \qquad \alpha \neq \alpha', \tag{1.28}$$

$\sum_\alpha E_\alpha$ — проектор, подпространства $(\sum_\alpha E_\alpha)H$ и $(1-\sum_\alpha E_\alpha)H$ инвариантны относительно $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}^*$. На $(\sum_\alpha E_\alpha)H$ представление является дискретным, на $(1-\sum_\alpha E_\alpha)H$ — непрерывным. Необходимым условием унитарной эквивалентности двух представлений является унитарная эквивалентность их E_α.

Также полезна

Теорема 6. *Пусть $[\alpha]$ обозначает класс эквивалентности: $\alpha \sim \beta$ когда отличаются в конечном числе членов, тогда $\dim(E_\alpha) = \dim(E_\beta) \quad \alpha, \beta \in [\alpha]$, более того;*

$$\mathbf{a}_j^n E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_j\ldots}(\mathbf{a}_j^*)^n = E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_j-n\ldots} \tag{1.29}$$

$$(\mathbf{a}_j^*)^n E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_j\ldots}(\mathbf{a}_j)^n = E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_j+n\ldots}\ . \tag{1.30}$$

Пусть $[\alpha]$ и $[\alpha']$ различные классы эквивалентности, тогда $\sum_{\beta\in[\alpha]} E_\beta$ и $\sum_{\beta\in[\alpha']} E_\beta$ — ортогональные проекторы, подпространства которых

$$\mathfrak{M}(\alpha) \equiv (\sum_{\beta\in[\alpha]} E_\beta)H \qquad \mathfrak{M}(\alpha') \equiv (\sum_{\beta\in[\alpha']} E_\beta)H \tag{1.31}$$

инвариантны относительно $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}^*$. Представления индуцированные в $\mathfrak{M}(\alpha)$ и $\mathfrak{M}(\alpha')$ неэквивалентны, если одно из них нетривиально. Представление, индуцированное в $\mathfrak{M}(\alpha)$ является прямой суммой неприводимых эквивалентных представлений.

Таким образом, унитарно неэквивалентных дискретных представлений континуально много — по одному на каждый класс эквивалентности $[\alpha]$. И только одно представление допускает состояние без частиц — вакуумное состояние, и оператор полного числа частиц — $N = \sum_{j=1}^{\infty} N_j = a_j^* a_j$ — это представление Фока, соответствующее классу [0]. Тем самым, если мы хотим, чтобы конечное состояние допускало бесконечное число частиц, то мы необходим приходим к представлению, неэквивалентному Фоковскому. Более того, как мы увидим, данное представление не будет даже дискретным.

Название дискретное и непрерывное представление объясняет следующая конструкция — рассмотрим оператор

$$G = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2 \ldots n_k = 0}^{\infty} 2^{-k-n_1-n_2-\ldots-n_k} P_1^{n_1} \ldots P_k^{n_k} \tag{1.32}$$

Этот оператор самосопряжен и его спектр заполняет замкнутый единичный интервал $[0, 1]$. На векторах из дискретного спектра G $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^*$ задают дискретное представление (в описанном выше смысле), а на векторах из непрерывного спектра, соответственно, непрерывное представление. Соответствие между единичным интервалом и числами заполнения дается формулой

$$\beta = \sum_{=1}^{\infty} 2^{-k-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_k}, \tag{1.33}$$

Для данного представления, по теореме о самосопряженном операторе, мы можем разложить гильбертово пространство H как прямой интеграл над $[0, 1]$

$$\bigoplus \int_{[0,1]} H(\beta)\ d\mu(\beta), \tag{1.34}$$

где оператор G действует как умножение на β. Мера μ является квазиинвариантной в том смысле, что $\mu(\Delta)$ и $\mu(T_k^{\pm}\Delta)$ абсолютно непрерывны по отношению к друг другу для любых борелевских Δ (здесь оператор $T_k^{\pm}$ — увеличение/уменьшение на единицу k-го номера). Размерность $\nu(\beta)$ гильбертова пространства $H(\beta)$ постоянна при μ-почти всех β. Операторы $\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{a}_k^*$ действуют следующим образом:

$$(\mathbf{a}_k g)(\beta) = \sqrt{\beta_k + 1} C_k(\beta) g(T_k^+ \beta) \sqrt{\frac{d\mu(T_k^+ \beta)}{d\mu(\beta)}}; \tag{1.35}$$

$$(\mathbf{a}_k^* g)(\beta) = \sqrt{\beta_k} C_k(\beta) g(T_k^- \beta) \sqrt{\frac{d\mu(T_k^- \beta)}{d\mu(\beta)}}, \tag{1.36}$$

где $C_k(\beta)$ — измеримые унитарные операторы, удовлетворяющие

$$C_k(\beta) C_l(T_k^+) = C_l(\beta) C_k(T_l^+ \beta)\ . \tag{1.37}$$

Простейший набор C_k, удовлетворяющий указанным выше условиям, является $C_k(\beta) = 1\ \forall k$. Положив $\nu = 1$ и рассмотрев меру μ которая принимает значения =1 только на рациональных последовательностях, иначе =0, мы получаем стандартное представление, используемое в физике:

$$(\mathbf{a}_k g)(\beta) = \sqrt{\beta_k + 1} g(T_k^+ \beta) \tag{1.38}$$

$$(\mathbf{a}_k^* g)(\beta) = \sqrt{\beta_k} g(T_k^- \beta) \ . \tag{1.39}$$

Однако данным примером не исчерпываются все дискретные представления, тем более, как и в дискретном случае — существует бесконечно много неэквивалентных непрерывных представлений с неэквивалентными мерами и со своими операторами C_k.

1.1.4 Пространство Баргманна-Сигала

Пространство Баргманна-Сигала было построено для удобства реализации коммутационных соотношений, а именно — операторы рождения и уничтожения в этом пространстве действуют как умножение и взятие производной соответственно.

Определение 1.1.12. *Рассмотрим голоморфные функции $f(z)$. Введем скалярное произведение по формуле*

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi i} \int \overline{f(z)} g(z) e^{-|z|^2/2} d^2 z \ . \tag{1.40}$$

Функция $f(z)$ принадлежит пространству $\mathfrak{F}_1$, если $(f, f) < \infty$. Если разложить данную функцию в ряд по z:

$$f(z) = \sum_0^\infty C^n \frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \tag{1.41}$$

то

$$f \in \mathfrak{F}_1 \Leftrightarrow \sum_0^\infty |C_n|^2 < \infty \ . \tag{1.42}$$

Нам понадобятся два простых факта для данного пространства

Лемма 8. *Вектора*

$$u_m(z) = \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \tag{1.43}$$

образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{F}_1$.
Вектор $e_a(z) = e^{\bar{a}z}$ является аналогом δ-функции:

$$(e_a, f) = f(a) \ . \tag{1.44}$$

Отметим также, что операторы рождения и уничтожения в этом пространстве имеют простой вид:

$$\mathbf{a} \leftrightarrow \frac{d}{dz} \qquad \mathbf{a}^* \leftrightarrow z \tag{1.45}$$

Они являются сопряженными друг к другу и удовлетворяют коммутационным соотношениям.

1.2 Асимптотическое пространство

Как было сказано выше, наше гильбертово пространство представляет собой бесконечное произведение осцилляторов. Рассмотрим дискретный случай:

$$H = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} H_n \tag{1.46}$$

Пространство каждого осциллятора реализуем как пространство Баргманна-Сигала $\mathfrak{F}_1$, таким образом вектор нашего пространства имеет вид

$$\psi = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} f_n(z_n) \qquad f_n(z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^n \frac{z_n^k}{\sqrt{k!}} \tag{1.47}$$

Коэффициенты C_k^n должны удовлетворять следующим условиям:

$$\|f_n\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |C_k^n|^2 < \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^2 - 1| < \infty \tag{1.48}$$

В работе Л.Д.Фаддеева и П.Кулиша появляются операторы, которые характеризуют асимптотическое состояние:

$$W_\alpha = \exp\left\{\sum_i (\alpha_i^* \mathbf{a}_i - \alpha_i \mathbf{a}_i^*)\right\}, \tag{1.49}$$

если привести этот оператор к нормальному виду, то он будет иметь вид:

$$W_\alpha = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_i |\alpha_i|^2\right\} \exp\left\{-\sum_i \alpha_i \mathbf{a}_i^*\right\} \exp\left\{\sum_i \alpha_i^* \mathbf{a}_i\right\} . \tag{1.50}$$

Асимптотическое пространство определяется как

$$H[\alpha] = W_\alpha H[0], \tag{1.51}$$

где $H[0]$ — пространство Фока. Как было указано авторами, в том случае, когда $\sum\limits_i |\alpha|^2 = \infty$, оператор выводит из пространства Фока любой вектор, принадлежащий последнему.
Опишем, как действует оператор W_α на элемент из тензорного произведения $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} H_n$:

$$W_\alpha = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} W_{\alpha,n} \qquad W_\alpha \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} f_n = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} W_{\alpha,n} f_n, \tag{1.52}$$

где

$$W_{\alpha,n} = \exp\{\alpha_n^* \mathbf{a}_n - \alpha_n \mathbf{a}_n^*\} . \tag{1.53}$$

Так как каждый $W_{\alpha,n}$ является унитарным оператором, то если есть два эквивалентных C_0-вектора $\phi \sim \psi$, то и $W_\alpha \phi \sim W_\alpha \psi$. Однако только в частных случаях $W_\alpha \psi \sim \psi$. В этом случае W_α определяет унитарный оператор на $H[\psi]$, в общем же случае W_α — частично изометричен.

Напомним, что вакуумное состояние $|\psi_0\rangle \in H_\otimes$ представляет собой

$$|\psi_0\rangle = \bigotimes_n \psi_{0n}, \tag{1.54}$$

Где ψ_{0n} — ваккуумное состояние в H_n.

Определение 1.2.1. *Для каждого α определим когерентное состояние следующим образом:*

$$|\alpha\rangle = W_\alpha |\psi_0\rangle \ . \tag{1.55}$$

Два когерентных состояния эквивалентны $|\alpha\rangle \sim |\beta\rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_n |\alpha_n - \beta_n|^2 < \infty \qquad \sum_n |\Im \alpha_n \beta_n^*| < \infty \ . \tag{1.56}$$

В голоморфном представлении вакуумное состояние имеет вид $|\psi_o\rangle = \bigotimes_n |1_n\rangle$, тогда

$$|\alpha\rangle = W_\alpha \bigotimes_n |1_n\rangle = \bigotimes_n W_{\alpha,n} |1_n\rangle \qquad W_{\alpha,n} = \exp\{\alpha_n^* \partial_{z_n} - \alpha_n z_n\}, \tag{1.57}$$

где $\alpha = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$. Но

$$\exp\{\alpha_n^* \partial_{z_n} - \alpha_n z_n\} 1 = \exp\{\frac{-|\alpha_n|^2}{2}\} \exp\{-\alpha_n z_n\} \tag{1.58}$$

Таким образом

$$|\alpha\rangle = \bigotimes_n \exp\{\frac{-|\alpha_n|^2}{2}\} \exp\{-\alpha_n z_n\} \ . \tag{1.59}$$

До этого момента мы не накладывали никаких условий на числовую последовательность $\{\alpha_n\}$. Прежде всего покажем, что в случае, когда $\alpha \in l_2$, то $|\alpha\rangle \in H[0]$. Для этого достаточно показать $0 < \langle\alpha|0\rangle < \infty$, используя лемму 8 о дельта-функции , получаем

$$\langle\alpha|0\rangle = \prod_n \exp\{\frac{-|\alpha_n|^2}{2}\} = \exp\{\frac{-\sum_n |\alpha_n|^2}{2}\} \ . \tag{1.60}$$

Последнее выражение отлично от нуля в силу условия $\alpha \in l_2$. Может вызвать недоразумения тот факт, что обычно под элементом из пространства Фока подразумевают состояние с конечным числом частиц, а в состоянии $|\alpha\rangle$ бесконечно много осцилляторов возбуждены. Однако более аккуратное рассуждение следующее: заметим, что состояния $|\alpha\rangle$ являются собственными для операторов $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}_j |\alpha\rangle = \alpha_j |\alpha\rangle \tag{1.61}$$

Хотя когерентные состояния не являются собственными для оператора частиц $N = \sum_j \mathbf{a}_j^* \mathbf{a}_j$, можно посчитать среднее значение этого оператора:

$$\langle\alpha| N |\alpha\rangle = \sum_n |\alpha_n|^2 < \infty \tag{1.62}$$

что совпадает с фичической интерпритацией пространства Фока (с математической точки зрения, состояния с конечным числом частиц лишь плотно в пространстве Фока, а не совпадает с ним, потому противоречий, связанных с когерентными состояниями, не возникает).

Используя тот факт, что отношение эквивалентности является транзитивным свойством, и что оператор W_α переводит один класс эквивалентности в другой класс эквивалентности, для описания асимптотического пространства $H[\alpha] = W_\alpha H[0]$, достаточно описать куда переводит W_α вакуумное состояние $|\psi_0\rangle$.

Но по построению $W_\alpha |\psi_0\rangle$ является когерентным состоянием $|\alpha\rangle$, и его явный вид мы уже получили:

$$|\alpha\rangle = \bigotimes_n \exp\{\frac{-|\alpha_n|^2}{2}\} \exp\{-\alpha_n z_n\}, \tag{1.63}$$

покажем, что данный вектор является C_0-вектором, тем самым наше обозначение $H[\alpha]$ будет оправдано — так как в таком случае $|\alpha\rangle$ будет являться опорным вектором неполного тензорного произведения $H[\alpha]$.

По определению, $|\alpha\rangle$ является C_0-вектором тогда и только, когда $0 < \| \, |\alpha\rangle \, \|^2 = \langle\alpha|\alpha\rangle < \infty$. в нашем случае

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \prod_i \exp(\frac{-|\alpha_i|^2}{2}) \cdot \exp(\frac{-|\alpha_i|^2}{2}) \cdot \exp(|\alpha_i|^2) = 1 \tag{1.64}$$

Тем самым мы получили два способа описания пространства $H[\alpha]$: первый из них основан на теореме [3]

1) Пространство $H[\alpha]$ является замыканием линейно оболочки натянутой на вектора, которые отличны от вектора $|\alpha\rangle = \bigotimes_n |\alpha_n\rangle$ только в конечном наборе n.

Второй основан на определении эквивалентности C_0-последовательностей и неполного тензорного произведения:

2)Пространство $H[\alpha]$ является замыканием линейной оболочки, натянутой на вектора, которые эквивалентны $|\alpha\rangle$

$$|\phi\rangle = \bigotimes_n \phi_i \qquad \mathfrak{F}_1 \ni \phi_i = \sum_k d_{ik} \frac{z^k}{\sqrt{k!}} : \qquad \sum_k |d_{ik}|^2 = S_i < \infty, \quad \sum_n |S_n - 1| < \infty; \tag{1.65}$$

$$|\phi\rangle \sim |\alpha\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \prod_i \langle\alpha_i|\phi_i\rangle < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i | \langle\alpha_i|\phi_i\rangle - 1| < \infty; \tag{1.66}$$

Снова используя лемму о дельта-функции получаем, что

$$|\phi\rangle \sim |\alpha\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \prod_i \exp(\frac{-|\alpha_i|^2}{2})\psi_i(\overline{\alpha_i}) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} | \exp(\frac{-|\alpha_i|^2}{2})\psi_i(\overline{\alpha_i}) - 1| \, . \tag{1.67}$$

Представления

Перейдем теперь к свойству асимптотического пространства $H[\alpha]$, которое существенно отличает его от Фоковского, а именно — пространство Фока, очевидно, принадлежит дискретному представлению, покажем, что асимптотическое пространство принадлежит непрерывному.

Для этого сначала построим проекторы E_β[4], в голоморфном представлении проекторы на один осциллятор будут иметь следующий вид:

$$E_{\beta_n} = (\cdot, u_{\beta_n})u_{\beta_n} \qquad u_{\beta_n} = \frac{z_n^{\beta_n}}{\sqrt{\beta_n!}}\ . \tag{1.68}$$

Покажем, что построенные по ним проекторы E_β обнуляют когерентное состояние $|\alpha\rangle$, когда $\alpha \notin l_2$. По определению

$$E_\beta = \lim_{k\to\infty} E_{\beta_1}E_{\beta_2}\dots E_{\beta_k} \equiv \lim_{k\to\infty} E_{\beta(k)}, \tag{1.69}$$

тогда

$$\|E_\beta(k)\,|\alpha\rangle\,\| = |C(k)| \cdot \prod_{n>k} 1, \tag{1.70}$$

где

$$C(k) = \prod_{n\leqslant k} \frac{|\alpha_n|^{\beta_n}}{\sqrt{\beta_n!}} e^{-|\alpha_n|^2/2}\ . \tag{1.71}$$

Предположим, что существует набор $\{\beta_n\}$, такой что $\lim_{k\to\infty} C(k) = A \neq 0$, тогда $C(k)$ не превосходят C_{max} — значение на последовательности $\{\alpha_n = \sqrt{\beta_n}\}$:

$$C_{max}(k) = \prod_{n\leqslant k} \frac{|\beta_n|^{\beta_n/2}}{\sqrt{\beta_n!}} e^{-|\beta_n|/2} \equiv \prod_{n\leqslant k} c(\beta_n), \tag{1.72}$$

но $c(\beta_n)$ является строго убывающей последовательностью по β_n:

$$\frac{c(\beta_n+1)}{c(\beta_n)} = \left(1+\frac{1}{\beta_n}\right)^{\frac{\beta_n}{2}} e^{-1/2} < 1, \tag{1.73}$$

тем самым

$$C_{max}(k) < \prod_{n\leqslant k} c(1) = \prod_{n\leqslant k} e^{-1/2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\ . \tag{1.74}$$

В том случае, когда $\beta_n = 0$ для всех $n > N$, получаем вместо (71)

$$\prod_{N<n\leqslant k} e^{-|\alpha_n|^2/2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \tag{1.75}$$

так как $\{\alpha_n\} \notin l_2$. В том случае, когда такого N не существует, множители с $\beta_n = 0$ оцениваются 1, и мы приходим к уже разобранному случаю.

Так как вектора, отличные от $\langle\alpha|$ в конечном числе элементов плотны в $H[\alpha]$, а на них данные проекторы, очевидно, также обнуляются, мы приходим к выводу, что на $H[\alpha]$ все проекторы E_α равны нулю, тем самым $H[\alpha]$ принадлежит непрерывному представлению.[5]

[4]Здесь β, в отличие от α, по смыслу являются набором натуральных чисел и нулей.

[5]Следует отметить, что результат подобного типа был получен в работе [19].

Глава 2

Асимптотическое пространство как $L_2(\mathbb{R}^\infty, \rho)$

Данная часть основана на двух работах, в которых можно найти более подробное изложение, дальнейшие ссылки и доказательства утверждений, использованных в тексте — работе Ю.С.Самойленко [16], и работе Ю.М.Березанского и Ю.Г.Кондратьева [17].

2.1 Предварительные сведения

2.1.1 Цилиндрический множества и продакт-меры

Пусть X обозначает множество индексов x произвольной мощности, и пусть $(R_x)_{x\in X}$ — семейство абстрактных пространств с σ-алгебрами $\mathfrak{R}_x$ подмножеств, определенных в каждом пространстве. Предположим, что на каждом пространстве R_x задана мера, и мы хотим построить меру на $R_X = \bigtimes_{x\in X} R_x$. которое по определению состоит из отображений вида $X \ni x \mapsto \lambda(x) \in R_x$. Для этого введем подходящую σ-алгебру в R_X. Для произвольных различных индексов $x, \ldots, x_n \in X$ Обозначим $R_{x_1\ldots x_n} = R_{x_1} \times \ldots \times R_{x_n}$. В $R_{x_1\ldots x_n}$ рассмотрим соответствующую σ-алгебру $\mathfrak{R}_{x_1\ldots x_n}$.

Определение 2.1.1. *Множество $\mathfrak{C} \in R_X$ называется цилиндрическим, если оно оно определяется точками $x_1, \ldots, x_n$ и базой $\delta \in R_{x_1\ldots x_n}$ и имеет вид*

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_n; \delta) = \{\lambda(\cdot) \in R_X \mid \big(\lambda(x_1), \ldots, \lambda(x_n)\big) \in \delta\} . \tag{2.1}$$

Множество всех цилиндрических множеств образует алгебру $\mathscr{C}(R_X)$, σ-оболочка $\mathscr{C}_\delta(R_X)$ алгебры $\mathscr{C}(R_X)$ и является нужной нам σ-алгеброй на R_X.

Для вероятностных мер существует стандартная конструкция Колмогорова, которая позволяет построить меру μ_X на σ-алгебре $\mathscr{C}_\delta(R_X)$ из вероятностных мер $(\mu_x)_{x\in X}$; полученная мера μ_X называется продакт-мерой μ_x и обозначается как $\mu_X = \times_{x\in X}\mu_x$. Данную меру можно получить продолжением с цилиндрических множеств, на которых она определяется как

$$\mu_X(\mathfrak{C}) = \mu_X(\mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_n; \delta)) = \mu_{x_1\ldots x_n}(\delta) \ . \tag{2.2}$$

Для наших целей достаточно рассотреть ситуацию, когда множество индексов X счетно и меры являются вероятностными.

В этом случае рассмотрим $X = \mathbb{N}$ и последовательность пространств $(R_k)_{k=1}^{\infty}$, σ-алгебр $(\mathfrak{R}_k)_{k=1}^{\infty}$. В соответствии с вышесказанным определим $R_X = \bigtimes_{k=1}^{\infty} R_k$, $\mathscr{C}(R_X)$ и вероятностную меру $\mathscr{C}_\delta(R_X) \ni \alpha \mapsto \mu_X(\alpha) = (\times_{k=1}^{\infty}\mu_k)(\alpha)$.

Мера $\mu_\infty(\alpha) = (\times_{k=1}^{\infty}\mu_k)(\alpha)$ наиболее просто вычисляется на цилиндрических множествах $\mathfrak{C}_n$. базу которых составляют прямоугольники $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n (\alpha_k \in \mathfrak{R}_k)$. В соответствии с ()

$$\mathfrak{C}_n = \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n \times R_{n+1} \times R_{n+2} \times \ldots , \tag{2.3}$$

и соответственно

$$\mu_\infty(\mathfrak{C}_n) = \mu_1(\alpha_1) \ldots \mu_n(\alpha_n) \ . \tag{2.4}$$

Допустим теперь, что нам дано ядерное оснащение (тройка Гельфанда)

$$\Phi' \supset H_0 \supset \Phi \tag{2.5}$$

Опишем, как задать гауссовскую меру на пространстве Φ'. Рассмотрим оператор $S \in \mathcal{L}_0(\Phi, \Phi')$ такой, что $(S\phi, \phi)_{H_0} > 0 \quad \forall \phi \in \Phi$. Пространство H_S получается пополнением Φ по отношению к скалярному произведению

$$(\phi, \psi)_H = (S\phi, \psi)_{H_0} \qquad \phi, \psi \in \Phi \ . \tag{2.6}$$

Обобщим предыдущие построения и построим цилиндрические множества и гауссову меру для оснащенных пространств. Определим цилиндрические множества в Φ' следующим образом. Пусть K — конечномерное подпространство Φ и пусть P_K — ортогональный проектор на K в H_0. Его можно непрерывно продолжить до проектора из Φ' в Φ.

Для конечномерного $K \subset \Phi$ и $\delta \in \mathfrak{B}(K)$ введем цилиндрическое множество

$$\mathfrak{C}(K; \delta) = \{\xi \in \Phi' | P_K\xi \in \delta\} \tag{2.7}$$

Цилиндрическая гауссовская мера на данном пространстве задается как стандартная гауссовская мера на конечномерном пространстве:

$$\gamma(\mathfrak{C}(K; \delta)) = \pi^{-1/2 \dim K} (\det S_K)^{-1/2} \int_\delta \exp\left[-((S_K)^{-1}(\phi - P_K a), \phi - P_K a)_{H_0}\right] dm_K(\phi) \tag{2.8}$$

Используя теорему Минлоса, можно показать (смотри дополнение 3.3), что данная мера может быть продолжена до цилиндрической меры на $\mathfrak{C}(\Phi')$. Обозначим полученную гауссовскую меру на $\mathfrak{C}_\sigma(\Phi')$ с корреляционным оператором S и средним значением равным a за $\gamma_{S,a}$.

Изоморфизм Сигала можно считать некоторым обобщением преобразования Фурье-Эрмита, только роль функций Эрмита играют Виковские мономы. Чтобы их ввести нам понадобятся сначала просто мономы.

Допустим задан $a_n \in \Phi^{\otimes n}$, введем непрерывные n-линейные мономы $M_{a_n}(x)$ $(x \in \Phi')$ следующим образом:

$$m_{a_n}(x) = (a_n, x^{\otimes n})_{H_0^{\otimes n}}, \tag{2.9}$$

где $x^{\otimes n} = x \otimes \ldots \otimes x$. Для набора $(a_k)_{k=0}^n$, где $a_0 \in \mathbb{C}$, $a_k \in \Phi^{\otimes k}$ введем непрерывные полиномы с комплексными коэффициентами переменной x как

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k, x^{\otimes k})_{H_0^{\otimes n}} \ . \tag{2.10}$$

Обозначим семейство всех непрерывных полиномов на Φ' за $\mathcal{P}(\Phi')$. Хотя полиномы достаточно просты и играют важную роль, их неудобство состоит в том, что они не обладают ортогональностью. Для этого вводятся Виковские полиномы, описанные ниже.

2.1.2 Пространство Фока и разложение Винера-Ито

Гильбертово пространство $L_2(\Phi', \gamma_S)$ допускает разложение в ортогональную сумму подпространств, которые состоят из полиномов специального типа (так называемые полиномы Вика).

Сначала опишем пространство Фока.

Пусть H— гильбертово пространство, для каждого n обозначим

$$H^{\otimes n} = H \otimes \ldots \otimes H \tag{2.11}$$

n-ую тензорную степень пространства H. Рассмотрим унитарный оператор $U_{\sigma,n}$ действующий в $H^{\otimes n}$:

$$U_{\sigma,n}(h_1 \otimes \ldots \otimes h_n) = h_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes h_{\sigma(n)}, \tag{2.12}$$

где перестановка $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n)) \in \mathfrak{S}_n$. Легко проверить, что оператор

$$P_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} U_{\sigma,n} \tag{2.13}$$

является проектором, обозначим образ $H^{\otimes n}$ под действием этого проектора за $\mathfrak{F}_n(H)$ — n-ая симметричная степень пространства H и положим по определению $\mathfrak{F}_0 = \mathbb{C}$. Симметричное (или бозонное) пространство Фока $\mathfrak{F}(H)$ определяется как следующая ортогональная сумма

$$\mathfrak{F}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n(H), \tag{2.14}$$

и состоит из последовательностей $f = (f_n)_{n=0}^{\infty}$ ($f_n \in \mathfrak{F}_n(H)$). для которых

$$\|f_2\|^2_{\mathfrak{F}(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{H^{\otimes n}} < \infty \; . \tag{2.15}$$

Подпространства $\mathfrak{F}_n$ называют n-частичными подпространствами, а подпространство $\mathfrak{F}_0(H)$ называют вакуумным.

Построим базис, который называют базисом чисел заполнения, в Фоковском пространстве следующим образом. Пусть задан ортонормированный базис $(e_j)_{j=0}^{\infty}$ в H. Пусть $\mathbb{Z}^{\infty}_{+,0} \subset \mathbb{Z}^{\infty}_{+}$ — множество конечных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, 0, 0, \ldots)$ с целыми неотрицательными элементами. Для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}^{\infty}_{0,+}$ такого, что $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu = n$ вектор

$$e^{(n)}_{\alpha} = \left(\frac{n!}{\alpha_1! \ldots \alpha_\nu!}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(e_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_\nu^{\otimes \alpha_\nu}) \tag{2.16}$$

принадлежит $\mathfrak{F}_n(H)$. Вектора $e^{(n)}_{\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}$, $|\alpha| = n$ образуют ортонормированный базис в $H^{\otimes n}$, а потому вектора

$$e_\alpha = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{|\alpha|-1}, e^{(|\alpha|)}_{\alpha}, 0, 0, \ldots) \qquad (\alpha \in \mathbb{Z}^{\infty}_{+,0}, |\alpha| > 0) \tag{2.17}$$

$$e_{(0,0,\ldots)} = (1, 0, 0, \ldots) \tag{2.18}$$

образуют ортонормированный базис $\mathfrak{F}(H)$, который и называется базисом чисел заполнения.

Разложение

Обозначим за $\mathfrak{p}_{\gamma_S,n}(\Phi')(n \in \mathbb{Z}_+)$ подпространство $L_2(\Phi', \gamma_S)$, состоящее из измеримых полиномов, чья степень не превосходит n. Можно показать, что $\mathfrak{p}_{\gamma_S,n}(\Phi')(n \in \mathbb{Z}_+)$ является замыканием линейной оболочки мономов $\prod_{k=1}^{m} (\phi_k, x)_{H_0}$ и констант. Введем следующее подпространство:

$$\Gamma_n(\Phi', \gamma_S) \subset L_2(\Phi', \gamma_S) \qquad n \in \mathbb{Z}_+ \tag{2.19}$$

$$\Gamma_n(\Phi', \gamma_S) = \mathfrak{p}_{\gamma_S,n}(\Phi') \ominus \mathfrak{p}_{\gamma_S,n-1}(\Phi') \qquad \mathfrak{p}_{\gamma_S,0}(\Phi') = \mathbb{C} \tag{2.20}$$

Подпространства $\Gamma_n(\Phi', \gamma_S)$ попарно ортогональны и

$$\mathfrak{p}_{\gamma_S,n}(\Phi') = \bigoplus_{k=0}^{n} \Gamma_k(\Phi', \gamma_S) \tag{2.21}$$

Так как полиномы плотны в $L_2(\Phi', \gamma_S)$, то получаем следующее

$$L_2(\Phi', \gamma_S) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(\Phi', \gamma_S) \tag{2.22}$$

Данное разложение $L_2(\Phi', \gamma_S)$ и называют разложением Винера-Ито.

Пусть $\alpha_n \in \Phi^{\otimes n}$. Сопоставим каждому непрерывному моному $(a_n, x^{\otimes n})_{H_0^{\otimes n}}$ $(x \in \Phi')$ Виковский моном по следующей формуле:

$$:(a_n, x^{\otimes n})_{H_0^{\otimes n}} :\equiv P_{\Gamma_n}\left((a_n, x^{\otimes n})_{H_0^{\otimes n}}\right), \tag{2.23}$$

где P_{Γ_n} — проектор на подпространство $\Gamma_n(\Phi', \gamma_S)$ в $L_2(\Phi', \gamma_S)$. Данную формулу можно продолжить для полиномов, а также для $h \in H_S$ вместо $\phi \in \Phi$. Основные свойства мономов Вика описываются следующей теоремой:

Теорема 7.

- *Пусть $h \in H_S$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда верно следующее:*

$$:(h^{\otimes n}, x^{\otimes n})_{H_0^{\otimes n}} :=: (h, x)^n_{H_0^n} = 2^{-n}\|h\|^n_{H_S} H_n\left(\|h\|^{-1}_{H_S}(h, x)_{H_0}\right) \tag{2.24}$$

- *Для попарно ортогональных векторов $h_1, \dots, h_m \in H_S$ и набора степеней $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$:\prod_{k=1}^{m}(h_k, x)^{n_k}_{H_0} := \prod_{k=1}^{m} :(h_k, x)^{n_k}_{H_0}: \tag{2.25}$$

- *Для $h_k, g_k, \in H_S$ имеем*

$$\int_{\Phi'} :\prod_{k=1}^{m}(h_k, x)^{n_k}_{H_0} :: \prod_{k=1}^{m}(g_k, x)^{n_k}_{H_0} : d\gamma_S(x) = 2^{-n}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}(h_{\sigma(1)} g_1)_{H_S} \dots (h_{\sigma(n)} g_1)_{H_S} \tag{2.26}$$

2.1.3 Изоморфизм Сигала

Зафиксируем $S \in \mathcal{L}(\Phi, \Phi')$ и построим H_S и соответствующее $\mathcal{F}(H_S)$, а также построим $L_2(\Phi', \gamma_S)$. Рассмотрим оператор $I_S : \mathcal{F}(H_S) \to L_2(\Phi', \gamma_S)$ заданный на плотном множестве векторов вида $P_n(h_1 \otimes \dots \otimes h_n) \quad _k \in H_S$ по формуле

$$I_S P_n(h_1 \otimes \dots \otimes h_n) = 2^{n/2}(n!)^{-1/2} : \prod_{k=1}^{n}(h_k, x)_{H_0} : \qquad I_S e_0 = 1\ . \tag{2.27}$$

Из предыдущей теоремы и определения оператора P_n данное отображение изометрично, а потому может быть продолжено на все $\mathcal{F}(H_S)$, более того верна следующая теорема

Теорема 8 (Изоморфизм Сигала)**.** *Образ пространства Фока $\mathfrak{F}(H_S)$ оператора I_S совпадает с $L_2(\Phi', \gamma_S)$ и потому I_S является унитарным изоморфизмом между $\mathfrak{F}(H_S)$ и $L_2(\Phi', \gamma_S)$.*

Конкретная реализация

Вектору из пространства Фока $f = (f_0, f_1, \dots) \in \mathfrak{F}(H_S)$ изоморфизм Сигала ставит в соответсвие функцию

$$(I_S f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{\sqrt{n!}} : (f_n, x^{\otimes n})_{H_0^{\otimes n}} :\in L_2(\Pi', \gamma_S) \ . \tag{2.28}$$

Рассмотрим куда переводит изоморфизм Сигала базис чисел заполнения и когерентные состояния.

По определению когерентное состояние $\Gamma(h) \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{S}}$ имеет следующий вид

$$\Gamma(h) = (1, h, \dots, (n!)^{-1/2} h^{\otimes n}, \dots), \tag{2.29}$$

тогда

$$I_S \left(\Gamma(h)\right)(x) = \exp(\sqrt{2}(h,x)_{H_0} - \frac{1}{2}\|h\|^2_{H_S}) \ . \tag{2.30}$$

Используя равенства

$$: \exp(h,x)_{H_0} := \exp\left((h,x)_{H_0} - \frac{1}{4}\|h\|^2_{H_S}\right), \tag{2.31}$$

$$: \exp(h,x)_{H_0} : \exp(h,x)_{H_0} \left(\int_{\Phi'} \exp(h,x)_{H_0}\, d\gamma_S(x)\right)^{-1}, \tag{2.32}$$

получаем,что

$$I_S(\Gamma(h)) =: \exp(\sqrt{2}h, \cdot)_{H_0} : \ . \tag{2.33}$$

Опишем теперь базис в $L_2(\Phi', \gamma_S)$, который является образом базиса чисел заполнения при изоморфизме Сигала:

$$I_S e_\alpha = h_{\alpha_1}\left((e_1, x)_{H_0}\right) \dots h_{\alpha_\nu}\left((e_\nu, x)_{H_0}\right), \tag{2.34}$$

где $h_n(t) = 2^{-n/2}(n!)^{-1/2} H_n(t)$ — нормированный полином Эрмита. Построенный таким образом базис $(I_S e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^\infty_{+,0}}$ позволяет представить $L_2(\Phi', \gamma_S)$ как пространство функций на $\mathbb{R}^\infty$:

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^\infty$ каноническую гауссовскую меру γ_1 на σ-алгебре $\mathfrak{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$ с соответствующим оснащением $\mathbb{R}^\infty \supset l_2(\mathbb{R}_1) \supset \mathbb{R}^\infty_0$. Другими словами, $\gamma_1(x) = \bigotimes_{k=1}^\infty \gamma_1(x_k)$, $d\gamma_1(x_k) = \pi^{-1/2} e^{-x_k^2} dx_k$. Тогда

$$L_2(\mathbb{R}^\infty, \gamma_1) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} L_2(\mathbb{R}, \gamma_1), \tag{2.35}$$

и ортогональный базис в $L_2(\mathbb{R}^\infty, \gamma_1$ образован полиномами

$$h_\alpha(x) = h_{\alpha_1}(x_1) \dots h_{\alpha_\nu}(x_\nu) \ . \tag{2.36}$$

Пусть $(e_k)_{k=1}^{\infty} \subset \Phi$ ортогональный базис в H_S, введем отображение

$$\Phi' \ni x \to j_e x = \left((e_k, x)_{H_0}\right)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty} \tag{2.37}$$

Отображение j_e индуцирует отображение J_e, которое отображает цилиндрические функции, заданные на $\mathbb{R}^{\infty}$, на цилиндрические функции на Φ' по формуле

$$(J_e f)(x) = f(j_e x) \quad x \in \Phi' \tag{2.38}$$

Сравнивая с (2.34), получаем, что $J_e h_\alpha = I_s e_\alpha (\alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^{\infty})$. Тем самым мы установили соответствие между ортонормированным базисом в $L_2(\Phi', \gamma_S)$ и $L_2(\mathbb{R}^{\infty}, \gamma_1)$, а потому и изоморфизм между этими гильбертовыми пространствами.

Отображение $I_S : \mathfrak{F}(H_S) \to L_2(\Phi', \gamma_S)$ представляет собой функциональную реализацию пространства Фока. Однако мы можем сразу стартовать с гильбертова пространства H и Фоковского пространства $\mathfrak{F}(H)$ и получить функциональное представление для этого рассмотрев тройку $\Phi \subset H \subset \Phi$ (переходя к координатам — $\mathbb{R}^{\infty} \subset l_2(\mathbb{R}^1) \subset \mathbb{R}_0^{\infty}$) взяв $S = I$ и действуя по выше описанной схеме. Подобная идея была предложена (в других терминах) и в ранних работах Киббла[8], в качестве Φ можно взять линейную оболочку, натянутую на базисные вектора.

Операторы рождения и уничтожения.

Рассмотрим гильбертово пространство H_S., построим по нему Фоковское пространство $\mathfrak{F}(H_S) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n(H_S)$. Далее мы рассматриваем ситуацию описанную в конце предыдущего параграфа, когда $S = I$, и полагаем $H_I \equiv H$.

Для каждого $h \in H$ введем оператор рождения $a_+(h)$ по формуле

$$a_+(h) f_n = \sqrt{n+1} P_{n+1}(h \otimes f_n) \qquad n \in \mathbb{Z}_+ \ . \tag{2.39}$$

$f_n \in \mathfrak{F}_n(H)$, P_n — проектор на симметричное подпространство $\mathfrak{F}_n(H)$. Область определения оператора $\mathfrak{D}(a_+(h)) = \mathfrak{F}_{fin}(H)$ - (вектора f, у которых $P_n(f) = 0$, начиная с некоторого n).

Оператор уничтожения $a_-(h)$ $(h \in H)$ описывается следующим образом:

$$a_-(h) = a_+^*(h) \restriction \mathfrak{F}_{fin}(H) \tag{2.40}$$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям:

$$[a_+(h_1), a_+(h_2)] = [a_-(h_1), a_-(h_2)] = 0 \tag{2.41}$$

$$[a_-(h_1), a_+(h_2)] = (h_1, h_2)_H 1 \qquad h_1, h_2 \in H \tag{2.42}$$

Рассмотрим так называемые полевые операторы $\varphi(h)$:

$$\varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_+(h) + a_-(h) \right) \qquad \mathfrak{D}(\varphi) = \mathfrak{F}_{fin}(H) \tag{2.43}$$

Можно показать, что $\mathfrak{F}_{fin}$ является плотным подмножеством аналитических векторов для φ, тем самым $\varphi(h)$ $h \in H$ является самосопряженным в существенном.
Можно также рассмотреть еще одни эрмитовы операторы

$$\pi(h) = \frac{1}{i\sqrt{2}} (a_+(h) - a_-(h)) \qquad \mathfrak{D}(\pi) = \mathfrak{F}_{fin} \tag{2.44}$$

Тогда пара (φ, π) будут удовлетворять следующим коммутационным соотношениям:

$$[\varphi(h_1), \varphi(h_2)] = [\pi(h_1), \pi(h_2)] = 0 \tag{2.45}$$

$$[\pi(h_1), \varphi(h_2)] = -i(h_1, h_2)_H 1 \qquad h_1, h_2 \in H \tag{2.46}$$

Как показывает уравнение (7) операторы $\varphi(h)$ коммутируют в $\mathfrak{F}_{fin}$, можно доказать следующее утверждение

Утверждение 2.1.1. *Замыкания $\tilde{\varphi}(h)$ операторов $\varphi(h)$ образуют семейство коммутирующих самосопряженных операторов.*

Рассмотрим теперь ядерное оснащение $\Phi' \supset H \supset \Phi$. зафиксируем ортонормированный базис $(e_j)_{j=1}^{\infty} \subset \Phi$ в H и положим $\varphi_j = \varphi(e_j)$. Как было сказано, операторы $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ образуют счетное множество коммутирующих самосопряженных в существенном операторов. Рассмотрим как эти операторы действуют на базис чисел заполнения:

$$a_+(e_j)e_\alpha = \sqrt{\alpha_j + 1} e_{\alpha+1_j} \qquad a_-(e_j) = \sqrt{\alpha_j} e_{\alpha-1_j} \tag{2.47}$$

Откуда получаем,что

$$\varphi_j e_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\alpha_j + 1} e_{\alpha+1_j} + \sqrt{\alpha_j} e_{\alpha-1_j} \right) \tag{2.48}$$

$$\varphi_j \Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} e_j \tag{2.49}$$

Найдем обобщенные собственные вектора семейства самосопряженных операторов $(\tilde{\varphi}_j)_{j=1}^{\infty}$:

$$(\tilde{\varphi}_k u)(\lambda) = \lambda_k u(\lambda) \tag{2.50}$$

Так как $u(\lambda) \in \mathfrak{F}'_{fin}(\Phi)$, то $u(\lambda)$ имеет вид

$$u(\lambda) = (u_0(\lambda), u_1(\lambda), u_2(\lambda), \ldots), \tag{2.51}$$

где $u_n(\lambda) \in \mathfrak{F}'_{fin}(\Phi)$. В терминах операторов рождения и уничтожения уравнение принимает следующий вид

$$\phi_k u_n(\lambda) = \lambda_k u_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_+(e_k) u_{n-1}(\lambda) + a_-(e_k) u_{n+1} \right), \tag{2.52}$$

где мы положили $u_{-1}(\lambda) = 0, u_0(\lambda) = 1$. разложим далее $u_n(\lambda)$ по базису чисел заполнения, тогда получим следующие рекуррентные формулы:

$$\lambda_k u_n^{(\alpha)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\alpha_k} u_{n-1}^{(\alpha-1_k)}(\lambda) + \sqrt{\alpha_k+1} u_n^{(\alpha+1_k)}(\lambda) \right) \tag{2.53}$$

аналогичные формулы следуют для операторов π_k :

$$\pi_k u_n^{(\alpha)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}i} \left(\sqrt{\alpha_k} u_{n-1}^{(\alpha-1_k)}(\lambda) - \sqrt{\alpha_k+1} u_n^{(\alpha+1_k)}(\lambda) \right) \tag{2.54}$$

на соответствующие коэффициенты разложения

$$u_n^{(\alpha)}(\lambda) = (u_n(\lambda), e_\alpha)_{H^{\otimes n}} \qquad |\alpha| = n \; . \tag{2.55}$$

По индукции можно доказать, что

$$u_n^{(\alpha)}(\lambda) = h_{\alpha_1} \dots h_{\alpha_\nu}(\lambda_\nu) = h_\alpha(\lambda) \qquad (\lambda = (\lambda_j)_{j=1}^\infty, |\alpha| = n), \tag{2.56}$$

где $h_{\alpha_j}(\lambda_j)$ — эрмитовы полиномы, ортонормированные относительно меры $d\gamma_1(\lambda_j) = \pi^{-1/2} e^{-\lambda_j^2} d\lambda_j$. Тогда операторы π_k будут действовать как производные:

$$\pi_k u_n^{(\alpha)}(\lambda) = \partial_{\lambda_k} u_n^{(\alpha)}(\lambda) \; . \tag{2.57}$$

Обобщенное преобразование Фурье

$$\mathfrak{F}_{fin}(\Phi) \ni f \to \tilde{f}(\lambda) = (f, u(\lambda))_{\mathfrak{F}(H)} \tag{2.58}$$

переводит вектор из $\mathfrak{F}_{fin}(\Phi)$ в функцию $\tilde{f}(\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}^\infty$. Под действием этого отображения базисные вектора $e_\alpha \in \mathfrak{F}_{fin}(\Phi)$ переходят в функцию $h_\alpha(\lambda)$. Единственная нормированная скалярная мера определенная на $\mathfrak{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty)$, для которой выполнено равенство Парсеваля

$$(E(\delta)f, g)_{\mathfrak{F}(H)} = \int_\delta \tilde{f}(\lambda) \overline{\tilde{g}(\lambda)} \, d\rho(\lambda) \qquad f, g \in \mathfrak{F}_{fin}, \;\; \delta \in \mathfrak{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty) \tag{2.59}$$

является мера

$$d\rho(\lambda) = \times_{k=1}^\infty d\gamma_1(\lambda_k) = d\gamma_1(\lambda) \; . \tag{2.60}$$

Это следует из двух фактов — $\{h_\alpha(\lambda)\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^\infty}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\gamma_1(\lambda))$ и из единственности спектральной меры. По равенству Парсеваля, отображение

$$\mathfrak{F}_{fin}(\Phi) \ni f \to I_1 f = \tilde{f} \in L_2(\mathbb{R}^\infty, \gamma_1) \tag{2.61}$$

может быть продолжено до изоморфизма между всем Фоковским пространством $\mathfrak{F}(\Phi)$ и $L_2(\mathbb{R}^\infty, \gamma_1)$. Этот изоморфизм и является описанным выше изоморфизмом Сигала.

2.2 О канонических коммутационных соотношениях

Рассмотрим подробнее представления счетных канонических коммутационных соотношений CCR следуя Ю.С. Самойленко. Пусть задана система самосопряженных операторов $(P_k, Q_k)_{k=1}^{\infty}$ такая, что P_k, Q_k по отдельности коммутируют[1] $\forall k$ и выполнено

$$[P_k, Q_k] = -i\delta_{kl} I \ . \tag{2.62}$$

(В предыдущих обозначениях $P_k = \pi(e_k), Q_k = \varphi(e_k)$)

Как известно, не существует одновременно ограниченных операторов P и Q в сепарабельном H таких, что $[P, Q] = -iI$. Потому, так как операторы набора $(Q_k, P_k)_{k=1}^{\infty}$ неограничены, то соотношения CCR вводятся с помощью кососамосопряженных представлений алгебры Ли $\mathfrak{D}_0^{\infty}$. А именно.

Представления CCR с конечным числом степеней свободы

Рассмотрим группу Ли $\mathfrak{I} = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, S^1) \ni (t_1, s_1, \alpha_1)$ с групповой операцией

$$(t_1^{(1)}, s_1^{(1)}, \alpha_1^{(1)})(t_1^{(2)}, s_1^{(2)}, \alpha_1^{(2)}) = (t_1^{(1)} + t_1^{(2)}, s_1^{(1)} + s_1^{(2)}, e^{it_1^{(2)} s_1^{(1)}} \alpha_1^{(1)} \alpha_1^{(2)}) \ . \tag{2.63}$$

Вещественная алгебра Ли $\mathfrak{D}$ группы $\mathfrak{I}$ трехмерна, базис в $\mathfrak{D}$ —q, p, e, где q — касательный вектор к подгруппе $(\mathbb{R}, 0, 1)$, p — касательный к $(0, \mathbb{R}, 1)$, e — касательный вектор к подгруппу $(0, 0, S^1)$, коммутационные соотношения в алгебре $[q, e] = [p, e] = 0$ $[p, q] = e$.

Рассмотрим унитарное представление группы $\mathfrak{I} \ni g \to U_g$ в H такое, что $U_{(0,0,\alpha_1)} = \alpha_1 I$ и самосопряженные генераторы однопараметрических подгрупп $U_{t_1,0,1)} = U_{t_1} = e^{it_1 Q_1}$, $U_{(0,s_1,1)} = V_{s_1} = e^{is_1 P_1}$ и $U_{(0,0e^{i\phi_1})} = e^{i\phi_1} I = e^{i\phi_1 I}$

Можно выбрать плотное в H пространство $\mathfrak{D}_\Gamma$ такое, что оно инвариантно для P_1 и Q_1 и

$$[P_1, Q_1] f = -if \quad \forall f \in \mathfrak{D}_\Gamma \ . \tag{2.64}$$

Определение 2.2.1. *Представлением CCR в форме Г.Вейля систем с одной степенью свободы назовем унитарное представление группы $\mathfrak{I} \ni (t_1, s_1, \alpha_1) \to U_{(t_1,s_1,\alpha_1)}$ в H такое, что $U_{(0,0,\alpha)} \to \alpha_1 I$.*

Определение 2.2.2. *Представлением CCR в форме Г.Вейля систем с n степенями свободы назовем унитарное представление группы $\mathfrak{I}^n \ni ((t_1, s_1, \alpha_1), \ldots, (t_n, s_n, \alpha_n)) \to U_{((t_1,s_1,\alpha_1),\ldots,(t_n,s_n,\alpha_n))}$ в H такое, что $U_{(0,0,\alpha_1),\ldots,(0,0,\alpha_n)} \to \alpha_1 \ldots \alpha_n I$.*

[1]Напомним, что неограниченные операторы коммутируют, если коммутируют их разложения единицы

Самосопряженные генераторы однопараметрических подгрупп $U_{((0,0,1),\ldots,(t_k,0,1),\ldots(0,0,1))} = U_{(0,\ldots,0,t_k,0,\ldots,0)} = e^{it_kQ_k}$ и $U_{((0,0,1),\ldots,(0,s_k,1),\ldots(0,0,1))} = V_{(0,\ldots,0,s_k,0,\ldots,0)} = e^{is_kP_k}$ на плотном множестве $\mathfrak{D}_\Gamma^{(n)}$ удовлетворяют соотношениям

$$[P_k, Q_j]f = -\delta_{kj}f \quad \forall f \in \mathfrak{D}_\Gamma^{(n)} . \tag{2.65}$$

Рассмотрим представления в $L_2(\mathbb{R}^n, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n)$ следующего вида

$$(U_{(t_1,\ldots,t_n)}f)(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = e^{\sum_{k=1}^n t_k\lambda_k} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n); \tag{2.66}$$

$$(V_{(s_1,\ldots,s_n)}f)(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = f(\lambda_1+s_1,\ldots,\lambda_n+s_n) . \tag{2.67}$$

Теорема 9 (Стоун - фон Нейман). *Неприводимое представление CCR системы с конечным числом степеней свободы единственно (с точностью до унитарной эквивалентности) и совпадает с вышеописанным. Любое представление CCR системы с конечным числом степеней свободы — прямая сумма представлений данного вида.*

Представления CCR со счетным числом степеней свободы

Рассмотрим группу $\mathfrak{I}_0^\infty$, получаемую как индуктивный предел

$$\mathfrak{I}_0^\infty = \lim_{\vec{j}} \mathfrak{I}^n, \tag{2.68}$$

где вложения $j = (j_{n+1}^n) \quad j_{n+1}^n : \mathfrak{I}^n \hookrightarrow \mathfrak{I}^{n+1}$, задаются следующим образом

$$j_{n+1}^n((t_1,s_1,\alpha_1),\ldots,(t_n,s_n,\alpha_n)) = ((t_1,s_1,\alpha_1),\ldots,(t_n,s_n,\alpha_n),(0,0,1)) \in \mathfrak{I}^{n+1} . \tag{2.69}$$

Определение 2.2.3. *Представлением CCR в форме Г.Вейля систем со счетным числом степеней свободы назовем унитраное представление группы*

$$\mathfrak{I}_0^\infty \ni ((t_1,s_1,\alpha_1),\ldots,(t_n,s_n,\alpha_n),\ldots) \to U_{((t_1,s_1,\alpha_1),\ldots,(t_n,s_n,\alpha_n),\ldots)} \tag{2.70}$$

в H такое, что $U_{(0,0,\alpha_1),\ldots,(0,0,\alpha_n),\ldots} \to \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots I$.

Теорема 10. *Представление CCR системы со счетным числом степеней свободы унитарно эквивалентно представлению в*

$$H = \oplus \int_{\mathbb{R}^\infty} H_\lambda d\rho(\lambda) \ni \vec{f}, \tag{2.71}$$

где $\rho(\cdot)$ —$\mathbb{R}_0^\infty$-квазиинвариантная мера на $\mathbb{R}^\infty$, а операторы $U_t(t \in \mathbb{R}_0^\infty)$ и $V_s(s \in \mathbb{R}_0^\infty)$ определены по формулам

$$(U_t\vec{f})(\lambda) = e^{i(t,\lambda)}\vec{f}(\lambda); \tag{2.72}$$

$$(V_s\vec{f})(\lambda) = C_s(\lambda)\sqrt{\frac{d\rho_s(\lambda)}{d\rho(\lambda)}}\vec{f}(\lambda+s) . \tag{2.73}$$

Измеримые унитарные оператор-функции $C_s(\lambda) : H_{\lambda+s} \to H_\lambda$, удовлетворяют уравнениям

$$|C_s(\lambda)| = 1; \tag{2.74}$$

$$C_{s+s'}(\lambda) = C_s(\lambda) C_{s'}(\lambda + s) \; . \tag{2.75}$$

Размерность векторов $\vec{f}$ зависит от простоты спектра коммутирующих самосопряженных операторов (КСО) $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$. Напомним, что понимается под совместным спектром. Сначала сформулируем спектральную теорему для счетного семейства КСО.

Теорема 11. *По каждому счетному семейству КСО $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ однозначно определяется разложение единицы $E(\cdot)$ на $(\mathbb{R}^\infty, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty))$. Обратно, каждая такая операторнозначаная мера порождается единственным образом по семейству КСО*

$$Q_j = \int_{\mathbb{R}^\infty} \lambda_j \; dE(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{2.76}$$

Определение 2.2.4. *Совместным спектром счетного набора $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ $\sigma(Q_1, Q_2, \ldots)$ называется пересечение всех замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}^\infty$ полной операторнозначной меры $\prod_{k=1}^{\infty} dE_k(\lambda_k)$.*

2.3 Асимптотическое пространство

Рассмотрим как преобразуются операторы ϕ_j и π_j под действием операторов

$$W_\alpha = \exp\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^* \mathbf{a}_i - \alpha \mathbf{a}_i^*) \right\}, \tag{2.77}$$

где $\alpha = \{\alpha_k = d_k + i r_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\breve{\phi}_j = W_\alpha \phi_j W_\alpha^* = \phi_j + \sqrt{2} d_j \qquad \breve{\pi}_j = W_\alpha \pi_j W_\alpha^* = \pi_j + \sqrt{2} r_j \; . \tag{2.78}$$

Как и в случае невозмущенных операторов, совместный спектр КСО $\{\breve{Q}_k\}_{k=1}^{\infty}$ будет простым — это легко понять, учитывая тот факт, что операторы Q_k действуют по "различным переменным"в первом подходе бесконечного тензорного произведения, а именно [16]: операторы Q_k имеют следующий вид

$$Q_k = I \otimes \ldots \otimes \ldots \mathcal{Q}_k \otimes \ldots \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2.79}$$

и действуют в пространстве $H = \bigotimes_{k=1}^{\infty} H_k$. Если исходные операторы $\mathcal{Q}_k$ имели простой спектр, то семейство операторов $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $H = \bigotimes_{k=1}^{\infty} H_k$ унитарно эквивалентно семейству операторов $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2(\mathbb{R}^\infty, \rho(\lambda))$, где $\rho(\cdot)$ — продакт мера, восстанавливаемая по спектральным мерам операторов $\mathcal{Q}_k$ и опорного вектора, задающего неполное тензорное произведение.

Тем самым в $L_2(\Phi,\mu)$ спектральная мера новых операторов $\{\breve{\phi}_j\}_{j=1}^{\infty}$ и соответствующая скалярная мера будут иметь вид

$$\{\breve{\phi}_j\}_{j=1}^{\infty}: \qquad (\breve{E}(\delta)f,g)_{\mathfrak{F}(H)} = \int_{\mathbb{R}^\infty} f(\lambda)\overline{g}(\lambda)d\tilde{\rho}, \tag{2.80}$$

где $\tilde{\rho} = \times_{k=1}^{\infty} d\gamma_{1,d_k}(\lambda_k) = \times_{k=1}^{\infty} e^{-(\lambda_k+\sqrt{2}d_k)^2}d\lambda_k$.

Тогда операторы $U_t = e^{i\sum t_k\phi_k}$ и $V_s = e^{i\sum s_k\pi_k}$, действующие в пространстве

$$H = L_2(\mathbb{R}^\infty, \rho(\lambda)) \ni f, \tag{2.81}$$

перейдут соответсвенно в

$$(\breve{U}_t f)(\lambda) = e^{i(t,\lambda)}f(\lambda); \tag{2.82}$$

$$(\breve{V}_s f)(\lambda) = C_s(\lambda)\sqrt{\frac{d\breve{\rho}_s(\lambda)}{d\breve{\rho}(\lambda)}}f(\lambda+s)\ . \tag{2.83}$$

В нашем случае, так как $\breve{\rho}$ является продакт-мерой, коцикл будет нетривиальным продакт-коциклом[2] следующего вида

$$C_s(\lambda) = \exp\left\{ i\sum_{n=1}^{\infty}(2(\lambda_n+\sqrt{2}d_n)s_n + s_n^2 + \sqrt{2}r_n s_n)\right\} \tag{2.84}$$

Данный результат получен на основе вывода формулы для Фоковского представления (при $d_n = 0$ — см. [16]), а именно: в силу простоты спектра системы операторов $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ замыкание линейной оболочки $E(\delta)\Omega = H$, где Ω — общий циклический вектор. Изометрическое соответствие $E(\delta)\Omega \to \chi(\delta)$, где $\chi(\delta)$ — характеристическая функция множества $\delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$, порождает унитарное отображение пространств H и $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\rho(\lambda))$. Зная вид операторов Q_k в H и их образов в $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\rho(\lambda))$, можно определить вид функции $C_s(\lambda)$, сдвиг спектральной меры $E(\delta)$ приводит к сдвигу независимой переменной λ. Тем самым результат из [16] о том, что

$$C_s(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(\lambda_n+s_n)}{\phi_n(\lambda_n)} \qquad \phi_n = \exp\left\{i\lambda_n^2\right\}, \tag{2.85}$$

отличается от нашей ситуации только сдвигом.

Формулу для производной Радона-Никодима мы опишем ниже, попутно обсудив ортогональность стандартной гауссовской меры, отвечающей Фоковскому представлению, и

[2] Коцикл называется тривиальным, если он представим в виде $\alpha_s(\lambda) = \dfrac{\phi(\lambda+s)}{\phi(\lambda)}$, где $\phi(\cdot)$ —$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$-измеримая функция.

меры, отвечающей асмптотическому пространству. Однако можно сразу воспользоваться готовой формулой из [25]:

$$\mu_\sigma(u) = \mu_F(u+\sigma) \quad \Rightarrow \quad a_\sigma(q,u) = a_F(q,u-\sigma) \qquad \sigma \in Q' \setminus Q^3 \tag{2.86}$$

Теорема Какутани

Как мы видели в первой части, асимптотическое пространство $H_{as} = H[\alpha]$ было ортогонально Фоковскому $H_{Fock} = H[0]$. В функциональной модели $L_2(\mathbb{R}^\infty, \rho)$ можно показать подобный результат, используя теорему Какутани о продакт-мерах:
Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^\infty$ и σ-алгебру $\mathfrak{C}_\sigma(\mathbb{R}^\infty) = \bigotimes \mathfrak{C}_\sigma(\mathbb{R})$. Пусть $\{\mu_n\}$ и $\{\nu_n\}$ две последовательности вероятностных мер на $\mathbb{R}$, определим $\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \ldots$ и $\nu = \nu_1 \times \nu_2 \times \ldots$. Тогда μ и ν две вероятностные меры на $(\mathbb{R}^\infty, \mathfrak{C}_\sigma)$.

Теорема 12. *Если $\mu_k \sim \nu_k$, $k = 1, 2, \ldots$, тогда μ и ν либо ортогональны, либо эквивалентны. Более того $\mu \sim \nu$ тогда и только тогда, когда*

$$H = \prod_n \int \sqrt{\frac{d\mu_n}{d\nu_n}}\, d\nu_n > 0\ . \tag{2.87}$$

Рассмотрим следующий пример:

$$d\mu_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{-x^2}{2t}\right\} dx, \qquad d\nu_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x+\alpha_k)^2}{2t}\right\} dx \tag{2.88}$$

Тогда

$$\frac{d\mu}{d\nu}(x_1, x_2, \ldots) = \exp\left\{-\frac{1}{2t}\sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 - \frac{1}{t}\sum_{k=1}^\infty a_k x_k\right\} \tag{2.89}$$

и

$$H = \prod_k \exp\left\{-\frac{\alpha_k^2}{8t}\right\}\ . \tag{2.90}$$

В инетерсующим нас случае $t = \dfrac{1}{2}$, тем самым, если $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty \notin l_2$, то

$$H = \prod_k \exp\left\{-\frac{\alpha_k^2}{4}\right\} = 0, \tag{2.91}$$

что показывает, что две меры $\rho = \times_{k=1}^\infty d\gamma_1$ и $\breve{\rho} = \times_{k=1}^\infty d\gamma_{1,d_k}$ ортогональны друг другу.

[3] Мы оставили обобзначения статьи [25] — индекс F обозначает Fock, a_σ играет роль производной Радона-Никодима.

2.4 Заключение

В данной работе мы исследовали асимптотическое пространство, появляющееся в КЭД, были показаны его особенности — ортогональность стандартному Фоковскому пространству, принадлежность к непрерывному представлению, описаны явно гауссовская мера и соответствующий нетривиальный продакт-коцикл, появляющийся в канонических коммутационных соотношениях в форме Вейля. Дальнейшее развитие возможно в двух направлениях: первое — исследование связи с обобщенными белыми шумами, используя базис, построенный при помощи изоморфизма Сигала когерентных состояний; второй — исследование алгебры полевых операторов/операторов рождения-уничтожения, рассмотреть ГНС-конструкцию для данной ситуации [23]. Как было показано в [12] для антикоммутационных и для коммутационных соотношений в [13] на данном пути часто возникают алгебры фон Неймана типа II и III_∞.

Глава 3

Дополнения

3.1 Дополнение А. Связь с предыдущими подходами бесконечномерных тензорных произведений

Для того, чтобы иметь связь со стандартным подходом к неполному тензорному произведению, а именно как к набору комплексных чисел, нумеруемых числовой последовательностью, воспользуемся теоремой [4]. Сначала для наглядности рассмотрим Фоковское $H[0]$:

Вакуумное состояние $\otimes_n |1_n\rangle$ играет роль опорного вектора, мощность H_α и множество индексов — $N_\alpha = \mathbb{N}$ и $K_\alpha = \mathbb{N} \cup 0$ соответственно. Полный ортонормированный набор имеет вид

$$\phi_{n,\beta} \equiv u_{\beta_n} = \frac{z_n^\beta}{\sqrt{\beta_n!}} \quad \beta \in K_\alpha \ . \tag{3.1}$$

Тогда числовая последовательность, соответствующая вектору $\Psi \in H[0]$, будет иметь следующие значения:

$$a[\beta(n)] = (\Psi, \bigotimes_n \phi_{n,\beta(n)}) \equiv (\Psi, u_{\beta(n)}), \tag{3.2}$$

где $\beta(n)$ равно 0 при почти всех n. В пространстве последовательностей $\{g[\beta]\}$ мы уже описывали как действуют операторы рождения и уничтожения:

$$(\mathbf{a}_k g)(\beta) = \sqrt{\beta_k + 1} g(T_k^+ \beta) \tag{3.3}$$

$$(\mathbf{a}_k^* g)(\beta) = \sqrt{\beta_k} g(T_k^- \beta) \ . \tag{3.4}$$

Легко видеть, что это соответствует введенному нами действию операторов рождения и уничтожения в пространстве голоморфных функций

$$\mathbf{a}_k u_{\beta(n)} = \frac{z_1^{\beta_1}}{\sqrt{\beta_1!}} \otimes \ldots \frac{z_k^{\beta_k+1}}{\sqrt{\beta_k!}} \otimes \ldots \tag{3.5}$$

$$\mathbf{a}_k^* u_{\beta(n)} = \frac{z_1^{\beta_1}}{\sqrt{\beta_1!}} \otimes \ldots \frac{z_k^{\beta_k - 1}}{\sqrt{\beta_k!}} \otimes \ldots . \tag{3.6}$$

Для асимптотического пространства $H[\alpha]$:
$[f] \equiv [|\alpha\rangle]$, $f_\alpha^0 = |\alpha\rangle$, $K_\alpha = N_\alpha = \mathbb{N}$, построим базис $\phi_{n,k}$ — так как $u_{n,k} = \frac{z_n^k}{\sqrt{k!}}$ образуют ортогональный базис, то $\phi_{n,k}$ будут иметь вид:

$$\phi_{n,0} = \exp\left\{-\frac{|\alpha_n|^2}{2}\right\} \exp\{-\alpha_n z_n\} \qquad \phi_{n,k} = u_{n,k} - (u_{n,k}, \phi_{n,0})\phi_{n,0} \tag{3.7}$$

$$(u_{n,k}, \phi_{n,0}) = \exp\left\{-\frac{|\alpha_n|^2}{2}\right\} \frac{\overline{\alpha}_n^k}{\sqrt{k!}} \tag{3.8}$$

Таким образом числовая последовательность, соответствующая вектору $\Psi \in H[\alpha]$, будет иметь следующие значения:

$$a[\beta(n)] = (\Psi, \bigotimes_n \phi_{n,\beta(n)}). \tag{3.9}$$

3.2 Дополнение B. Матричный вид W_α

Как отмечалось в теореме [2], функционалы вида

$$\bigotimes_{\alpha \in I} f_\alpha \tag{3.10}$$

плотны в $\bigotimes_{\alpha \in I} H_\alpha$. В электродинамике нас интересуют два вида пространства — это Фоковское $H[0]$ и асимптотическое $H[\alpha]$. Заметим, что и в том и в другом пространстве когерентные состояния

$$|\alpha\rangle = \bigotimes_n \exp\{\frac{-|\alpha_n|^2}{2}\} \exp\{-\alpha_n z_n\} \tag{3.11}$$

являются плотным множеством (в одном однако $\alpha \in l_2$, а другом — $\notin l_2$). Тем самым можно рассмотреть "матричные элементы"оператора W_α, а именно числа вида

$$\langle \alpha | W_\beta | \gamma \rangle , \tag{3.12}$$

которые будут определять оператор W_β в интересующих нас пространствах. Имеем

$$\langle \alpha | W_\beta | \gamma \rangle = \langle 0 | W_\alpha W_\beta W_\gamma | 0 \rangle = \exp^{-(|\gamma|^2 + |\beta|^2 + |\alpha|^2)/2} \exp^{-\gamma\beta^* - \beta\alpha^* - \gamma\alpha^*} \tag{3.13}$$

3.3 Дополнение C. Теорема Минлоса-Бохнера

Теорема 13. *Если ν является вероятностной мерой на Φ', то ее преобразование Фурье*

$$\hat{\nu}(\xi) = \int_{\Phi'} e^{i(x,\xi)}\, \nu(dx) \quad \xi \in \Phi \tag{3.14}$$

является характеристической функцией и наоборот — для любой характеристической функции C на ядерном просранстве E существует вероятностная мера ν на Φ' такая, что $C = \hat{\nu}$

Лемма 9. *Для $\sigma \geqslant 0$*

$$C_\sigma(\xi) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2\right) \qquad \xi \in E \tag{3.15}$$

является характеристической функцией.

Определение 3.3.1. *Вероятностная мера, характеристическая функция которой является C_σ называется гауссовской мерой с корелляцией σ^2.*

Связь с конечномерным случаем можно увидеть в следующей лемме

Лемма 10. *Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — ортогональный система в H, тогда образ гауссовской меры μ_I под действием отображения*

$$x \mapsto \big((x, \xi_1), \dots, (x, \xi_n)\big) \in \mathbb{R}^n \qquad x \in \Phi' \tag{3.16}$$

является произведением гауссовских мер на $\mathbb{R}$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-(t_1^2+\ldots+t_n^2)/2} dt_1 \ldots dt_n \,. \tag{3.17}$$

3.4 Дополнение D. Производная Радона-Никодима как обобщенная функция

Как отмечено в [17], производная Радона-Никодима

$$\rho(\phi, x) = d\gamma_1(x + \phi)/d\gamma_1(x) \tag{3.18}$$

может быть тоже определна и в случае $\phi \notin l_2(\mathbb{R})$, однако для $\phi \notin l_2(\mathbb{R})$ это будет обобщенная функция из подходящего класса $A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty)$:

$$A_{-\tau}(\mathbb{R}^\infty) = \left\{ \xi = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^\infty} \xi_\alpha h_\alpha \Big| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{+,0}^\infty} |\xi_\alpha|^2 \tau_1^{-\alpha_1} \ldots \tau_\nu^{-\alpha_\nu} < \infty \right\} \qquad \{\tau_k\} \in [1, \infty)^\infty \,. \tag{3.19}$$

Для $\rho(\phi, \cdot)$ можно написать следующее равенство:

$$\big(\rho(\phi, \cdot), u\big)_{L_2(\mathbb{R}^\infty, \gamma_1)} = \int_{\mathbb{R}^\infty} \overline{u}(x) d\gamma_1(x + \phi) \qquad u \in A_\tau(\mathbb{R}^\infty), \tag{3.20}$$

где левая часть рассматривается как действие обобщенной функции $\rho(\phi, \cdot)$ на пробную функцию $u \in A_\tau(\mathbb{R}^\infty)$. В случае когда $\phi \in l_2(\mathbb{R})$ мы имеем $\rho(\phi, \cdot) \in l_2(\mathbb{R})$ и равенство имеет стандартный смысл.

Литература

[1] Kulish, P. P., Faddeev, L. D. (1970). Asymptotic conditions and infrared divergences in quantum electrodynamics. Theoretical and Mathematical Physics, 4(2), 745-757.

[2] T. He, P. Mitra, A. P. Porfyriadis and A. Strominger, "New Symmetries of Massless QED,"JHEP 1410, 112 (2014) doi:10.1007/JHEP10(2014)112 [arXiv:1407.3789 [hepth]].

[3] D. Kapec, M. Pate and A. Strominger, "New Symmetries of QED,"arXiv:1506.02906 [hep-th].

[4] C. Gomez and M. Panchenko, "Asymptotic dynamics, large gauge transformations and infrared symmetries," arXiv:1608.05630 [hep-th].

[5] B. Gabai and A. Sever, "Large gauge symmetries and asymptotic states in QED," doi:10.1007/JHEP12(2016)095 [arXiv:1607.08599 [hep-th]].

[6] V. Chung, "Infrared Divergence in Quantum Electrodynamics,"Phys. Rev. 140, B1110 (1965). doi:10.1103/PhysRev.140.B1110

[7] F. Bloch, A.Nordsieck. Phys. Rev., 52, 54, 1937.

[8] T. Kibble . Phys. Rev., 173, 1527; 174, 1882, 175, 1624, 1968.

[9] J. von Neumann, Comp. Math. 6 (1938) 1-77

[10] J. Dollard, J. Math. Phys. 5, 729 (1964).

[11] I.M. Gelfand, N.J. Vilenkin, Generalized Functions, Vol. IV, Academic Press, New York, 1964.

[12] A. S. Wightman and S. S. Schweber "Configuration Space Methods in Relativistic Quantum Field Theory. I"Phys. Rev. 98, 812

[13] V. Ya. Golodets, “On factor-representations of types II and III for commutation relations”, Math. USSR-Sb., 7:4 (1969), 491–501

[14] T. Thiemann and O. Winkler, "Gauge field theory coherent states (GCS) 4: Infinite tensor product and thermodynamical limit," Class. Quant. Grav. **18**, 4997 (2001) doi:10.1088/0264-9381/18/23/302 [hep-th/0005235].

[15] V. Bargmann, "On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. 1," Commun. Pure Appl. Math. **14**, 187 (1961).

[16] Y. S. Samoilenko "Spectral Theory of Families of Self-Adjoint Operators"Springer Netherlands,1991.

[17] Y. M. Berezansky, Y. G. Kondratiev "Spectral Methods in Infinite-Dimensional Analysis"Springer Netherlands,1995

[18] Obata N. "White Noise Calculus and Fock Space"Springer-Verlag, 1994

[19] D.Shelupsky "Translations of the Discrete BoseEinstein Operators"J. Math. Phys. 7, 163 (1966); doi: 10.1063/1.1704804

[20] L.Garding , A. Wightman. "Representations of the Commutation Relations." Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 40, no. 7, 1954, pp. 622–626.

[21] K. O. Friedrichs, Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields (Interscience Publishers, Inc., New York, 1953), Secs. 14 and 19.

[22] L.Van Hove "Les difficultés de divergences pour un modèle particulier de champ quantifié Physica, Volume 18, Issue 3, p. 145-159 DOI:10.1016/S0031-8914(52)80017-5

[23] Gerard G.Emch "Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory", Wiley-Interscience, 1972

[24] D. R. Yennie, S. C. Frautschi, and H. Suura, Ann. Phys. (N.Y.) 13, 379 (1961);
K. E. Eriksson, Nuovo Cimento 19, 1010 (1961);
J. M. Jauch and F. Rohrlich, Helv. Phys. Acta 27,613 (1954);
R. J. Glauber, Phys. Rev. 84, 395 (1951);
E. L. Lomon, Nucl. Phys,1,101 (1956); Phys. Rev. 113, 726 (1959);
S. Weinberg, Phys. Rev.140, B516 (1965).

[25] G.Sardanashvily. "Nonequivalent representations of nuclear algebras of canonical commutation relations. Quantum fields"Int.J.Theor.Phys. 41 (2002) 1541-1562 DOI: 10.1023/A:1020140632510