

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(СПбГУ)

Кафедра общей физики I  
Направление «Прикладные математика и физика»



## ГЕНЕРАЦИЯ КЛАСТЕРНЫХ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ СВЕТА

Магистерская работа студента

\_\_\_\_\_ **Королева Сергея Борисовича**

Научный руководитель:

\_\_\_\_\_ д. ф.-м. н., проф. **Голубев Ю. М.**

Рецензент:

\_\_\_\_\_ д. ф.-м. н., проф. **Соколов И. М.**

Санкт-Петербург  
2017

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>1 Обзор литературы</b>	<b>4</b>
1.1 Квантовые вычисления . . . . .	4
1.2 Применение квантовой телепортации в квантовых вычислениях . . . . .	4
1.3 Кластерные состояния . . . . .	6
1.3.1 Кластерные состояния в дискретных переменных . . . . .	6
1.3.2 Кластерные состояния в непрерывных переменных . . . . .	7
<b>2 Генерация кластерных состояний</b>	<b>9</b>
2.1 Мысленный эксперимент . . . . .	9
2.2 Формирование импульсов из стационарной лазерной генерации . . . . .	10
2.3 Формирование кластерного состояния . . . . .	12
2.3.1 Распространение импульсных потоков света через несимметричный интерферометр Маха–Цандера . . . . .	12
2.3.2 Структура кластера . . . . .	13
2.3.3 Условие для возникновения кластерного состояния . . . . .	15
2.4 Сепарабельность множества электромагнитных импульсов . . . . .	16
2.4.1 Критерий сепарабельности ван Лука-Фурусавы . . . . .	16
2.4.2 Кластерное состояние как предельное многочастичное перепутывание . . . . .	17
<b>3 Однонаправленные вычисления</b>	<b>19</b>
3.1 Однонаправленные вычисления на линейном кластерном состоянии . . . . .	19
3.1.1 Примеры преобразований . . . . .	22
3.2 Однонаправленные вычисления на кластерном состоянии, полученном в ходе мысленного эксперимента . . . . .	24
<b>Заключение</b>	<b>26</b>
<b>Литература</b>	<b>27</b>

# Введение

Проблема создания универсального квантового компьютера, заявившая о себе почти тридцать лет назад, все еще остается актуальной. Большинство работ по этой тематике основаны на уже ставшем стандартным подходе, впервые предложенном еще Маниным, Бениоффом и Фейнманом [1–3]. Его основной особенностью является то, что все логические операции над квантовыми состояниями совершаются с помощью унитарных преобразований на квантовых логических вентилях. Это позволяет всей системе пребывать в чистом квантовом состоянии вплоть до самого измерения и, в принципе, делает вычисления обратимыми по аналогии с вентилем Тоффоли [4] в классическом компьютере. Однако, несмотря на успехи ранних экспериментальных работ, продемонстрировавших работоспособность главных принципов теории квантовых вычислений, к настоящему моменту технологически так и не удалось решить проблему, связанную с масштабируемостью вычислений: все реализованные на практике протоколы способны оперировать лишь с небольшим числом кубитов [5, 6]. Разумеется, этого недостаточно даже для того, чтобы конкурировать с классическим компьютером. В связи с этим наряду с поиском решений проблемы масштабируемости в рамках стандартного подхода также изучаются возможные альтернативные пути для создания универсального квантового компьютера.

Одним из таких путей являются квантовые вычисления, основанные на измерениях (measurement-based quantum computation). К ним в первую очередь стоит отнести протоколы, реализованные с помощью однонаправленных схем (the one-way quantum computation), использующие так называемые кластерные состояния [7–9]. Здесь необходимо отметить, что кластерные состояния относятся к многочастично перепутанным состояниям, и их генерация является весьма трудоемкой экспериментальной задачей, однако они оказываются более устойчивыми к влиянию окружающей среды (декогеренции) в сравнении с состояниями Гринбергера–Хорна–Цайлингера [10], поэтому считаются более интересными с точки зрения практических приложений. Квантовые вычисления в однонаправленных схемах осуществляются посредством проведения различных однокубитовых измерений в созданном кластерном состоянии, при этом происходит поэтапное необратимое разрушение имевшейся в нем перепутанности. Таким образом, в отличие от стандартных протоколов на квантовых вентилях такие вычисления нельзя сделать обратимыми, что и отражено в их названии. Однако это не является их существенным недостатком: теоретически было показано, что квантовые компьютеры на кластерных состояниях являются универсальными и по своей вычислительной мощности ни в чем не уступают квантовым компьютерам на обратимых логических вентилях [11].

Первые работы по квантовым вычислениям на кластерных состояниях были выполнены в дискретных переменных (кубитах) [7, 8], позже были также предложены протоколы для непрерывных переменных ( $q$ -модах). В качестве физических систем, которые описываются такими переменными и используются для создания кластера, можно выделить спиновые волны внутри ансамбля атомов [12], оптомеханические системы [13] и световые импульсы. Последние представляют для нас наибольший интерес, поскольку они просты в создании и управлении. Более того, если эти импульсы будут сжаты по одной из квадратур, то для генерации кластерного состояния будет достаточно использовать только элементы линейной оптики (фазовращатели, светоделители).

Целью данной работы является рассмотрение возможности генерации кластерного состо-

яния света с помощью двух субпуассоновских лазерных источников, в каждом из которых подавлена диффузия фаз с помощью синхронизирующего внешнего поля [14]. Мы проследим за тем, какие требования накладываются на реальный источник сжатого света для создания кластерного состояния на его основе. В отличие от других работ в этой области [15, 16], где в качестве источников сжатого состояния света используют оптические параметрические генераторы (ОРО), дающие свет в чистом гауссовском состоянии, выбранные нами источники излучают свет в смешанном состоянии, т.е. по-прежнему одна из квадратурных компонент поля источника будет сжата, а другая растянута, при этом вместо равенства, связывающем их соотношении неопределенностей Гейзенберга, будет стоять строгое неравенство. Использование смешанных состояний может отразиться на генерации сильно перепутанного объекта, которым является кластерное состояние, поэтому для проверки его перепутанности мы воспользуемся критерием сепарабельности для многочастичных систем. После того, как мы докажем, что полученное состояние является кластерным, мы рассмотрим механизм вычислений с помощью этого состояния.

# Глава 1

## Обзор литературы

### 1.1 Квантовые вычисления

Создание квантового компьютера относится к фундаментальным научным проблемам нашего времени. Такая ситуация складывается из-за того, что некоторые задачи (например, факторизация больших целых чисел, задача перебора или моделирование поведения многочастичных квантовых систем) в принципе не могут быть решены с помощью классических компьютеров, так как относятся к "экспоненциальному" классу сложности и требуют нецелесообразно высоких затрат ресурсов и времени. В то же время для квантовых компьютеров, благодаря заложенным в них принципу квантового параллелизма и методу сверхплотного кодирования, эти задачи носят "полиномиальный" характер и могут быть решены с использованием квантовых алгоритмов (например, алгоритм Шора и Гровера) сравнительно быстро [17–20].

Квантовый компьютер — это устройство, способное производить вычисления, оперируя квантовыми состояниями кубитов, которые являются единицами квантовой информации. В отличие от классического бита, который может принимать только два значения 0 или 1, кубит может находиться в суперпозиции двух квантовых базисных состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ . Из-за наличия этой суперпозиции  $n$  кубитов могут одновременно быть в  $2^n$  различных состояниях, в то время как  $n$  классических битов всегда находятся только в одном состоянии. В результате этого при выполнении квантовых операций над кубитами мы изменяем  $2^n$  состояний вместо одного. Это и обеспечивает квантовый параллелизм вычислений. Для практической реализации кубитов используют квантовомеханические системы, которые имеют только два базисных состояния, например, это могут быть проекции спина электрона, две линейные (или круговые) поляризации фотонов, двухуровневые атомы.

Работу квантового компьютера можно представить следующим образом. На первом этапе мы должны закодировать классическую входную информацию в квантовомеханическое состояние с волновым вектором  $|\Psi_{in}\rangle$ . Это состояние подается на вход квантового компьютера. На выходе из него мы получим новое состояние, которое имеет вид:  $|\Psi_{out}\rangle = \hat{U}|\Psi_{in}\rangle$ , где  $\hat{U}$  — это унитарное преобразование. Это преобразование и играет основную роль во всех квантовых вычислениях. Окончательным результатом вычислений является классическая информация, которая будет получена в результате измерения выходного состояния  $|\Psi_{out}\rangle$ .

### 1.2 Применение квантовой телепортации в квантовых вычислениях

Для практической реализации квантовых вычислений существует несколько различных подходов. В данной работе будет рассмотрен подход, основанный на использовании квантовой перепутанности и телепортации.

Перепутанные состояния широко используются в квантовой информатике. По определению, квантовые подсистемы  $A$  и  $B$  являются перепутанными, если общая матрица плотности всей системы не факторизуется на произведение матриц плотности этих подсистем, то есть не выполняется следующее равенство

$$\hat{\rho} = \sum_l \lambda_l \hat{\rho}_{iA} \otimes \hat{\rho}_{iB}.$$

Перепутанность была впервые рассмотрена Эйнштейном, Подольским и Розеном [21] как парадокс, который указывал на неполноту квантовой механики. Однако позже перепутанные физические системы были исследованы экспериментально [22, 23], и сейчас перепутанность рассматривают как характерное свойство квантовой механики. Квантовое состояние, которое было предложено Эйнштейном, Подольским и Розеном, называется ЭПР состоянием.

Перепутанные состояния применяются в квантовой телепортации [24–27]. Это протокол переноса квантового состояния объекта, находящегося в одном месте (у Алисы), на объект в другом месте (у Боба). Подчеркнем, что пересылаемое квантовое состояние считается заранее неизвестным, так что Боб не может его приготовить в своей лаборатории, не имея дополнительной информации.

Для того, чтобы осуществить квантовую телепортацию, нам понадобится три физические системы: одна в неизвестном состоянии  $|\Psi\rangle$  (ее мы и хотим телепортировать) и две в перепутанном (ЭПР состоянии). Эти три системы распределяются между Алисой и Бобом. Алиса имеет у себя систему в неизвестном состоянии  $|\Psi\rangle$  а также систему, которая перепутана с физической системой, находящейся у Боба. На первом шаге телепортации Алиса перепутывает имеющиеся у нее системы. После этого она производит измерения над ними и получает два результата. Полученные результаты она сообщает Бобу по классическому каналу связи. Учитывая эти результаты, он производит коррекцию своей физической системы. В результате всех этих действий физическая система Боба будет находиться в желаемом состоянии  $|\Psi\rangle$ .

Хотя квантовая телепортация была первоначально предложена, как протокол для передачи квантового состояния на большие расстояния, ее можно использовать и для квантовых вычислений. Существует два разных подхода к этим вычислениям. Первый подход состоит в том, что в протоколе квантовой телепортации вместо ЭПР состояния ( $|EPR\rangle$ ) нужно использовать состояние  $\hat{U}|EPR\rangle$  [28, 29], где  $\hat{U}$  – это унитарный оператор. Если в протоколе квантовой телепортации Алиса и Боб будут использовать такое состояние, то в конечном итоге Боб будет иметь состояние  $\hat{U}|\Psi\rangle$ . Эта схема называется "телепортацией квантового логического вентиля" ("gate teleportation"). Это название связано с тем, что в квантовой информатике преобразование, совершаемое над кубитами, называется квантовым логическим вентиляем, а в этой схеме мы телепортируем преобразование  $\hat{U}$  с начального состояния  $\hat{U}|EPR\rangle$  на состояние  $|\Psi\rangle$ . Второй подход состоит в том, что в качестве начальных состояний используются обычные ЭПР состояния, но при этом изменяется базис измерительного прибора Алисы. Поскольку при измерении квантового состояния происходит проектирование этого состояния на базис прибора, то состояние после измерения будет зависеть от этого базиса. Таким образом, состояние, которое получит Боб, будет  $\hat{U}|\Psi\rangle$ , где преобразование  $\hat{U}$  полностью задается базисом измерительного прибора Алисы. Такие вычисления именуется "квантовыми вычислениями, основанными на измерениях" (Measurement-Based Quantum Computation) [28, 30–33].

В данной работе будет рассмотрена модель квантовых вычислений, основанных на измерении, которая была предложена Раусендорфом и Бригелем [7] и которая называется моделью кластерного состояния или моделью однонаправленных квантовых вычислений. Эта модель использует так называемые кластерные состояния в качестве своего основного ресурса.

## 1.3 Кластерные состояния

Модель однонаправленных вычислений основывается на локальных измерениях кластерного состояния. Кластерное состояние используется как универсальный ресурс, в который можно кодировать начальные квантовые состояния и проводить различные унитарные операции над ними. Термин "кластерное состояние" относится к набору состояний, определенных математическим графом. Другими словами, можно сопоставить некоторому графу  $G$ , содержащему  $n$  вершин,  $n$  модовое кластерное состояние. Процедура сопоставления заключается в том, что каждой вершине графа ставится в соответствие некоторая квантовая система и после этого применяется зависящая от графа процедура перепутывания этих квантовых систем. Таким образом, вершинами графа являются квантовые системы, а корреляции, связанные с перепутанностью, обозначаются ребрами на графе.

### 1.3.1 Кластерные состояния в дискретных переменных

Под дискретными кластерными состояниями мы понимаем кластерные состояния, выполненные на кубитах. Такие состояния определяются с помощью ненаправленного графа  $G = (V, E)$ , и строятся следующим образом: каждой вершине графа сопоставляется кубит в состоянии  $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ , после этого ко всем парам кубитов  $(i, j) \in E$  применяется операция  $\text{cPhase}_{i,j} = |0\rangle_i\langle 0| \otimes \hat{I}_j + |1\rangle_i\langle 1| \otimes \hat{Z}_j$ , где  $\hat{I}$  – единичный оператор, а  $\hat{Z}$  – оператор Паули  $\sigma_z$ . В результате всех этих действий мы получим кластерное состояние, которое соответствует графу  $G$ . Волновая функция этого состояния имеет следующий вид

$$|\psi\rangle_G = \prod_{(i,j) \in E} \text{cPhase}_{i,j} |+\rangle_i^{\otimes n}, \quad (1.1)$$

Работа с таким определением оказывается громоздкой из-за большого числа кубитов в кластерном состоянии. Поэтому от определения волновой функции переходят к другому определению через стабилизатор [28]. Стабилизатор предлагает эффективный путь для определения любого кластерного состояния. По определению, стабилизатором состояния  $|\phi\rangle$  является оператор  $\hat{K}$ , если существует равенство  $\hat{K}|\phi\rangle = |\phi\rangle$ . Другими словами, состояние  $|\phi\rangle$  является собственным состоянием оператора  $\hat{K}$  с собственным числом равным единице. Из этого определения очевидно, что, если одно состояние имеет несколько стабилизаторов, то все они образуют Абелеву группу по умножению. С другой стороны, если существует такая группа, то она определяет единственное состояние. Для  $n$ -кубитового кластерного состояния  $|\phi\rangle$ , которое соответствует графу  $G = (V, E)$ , такая группа хорошо известна [7] и стабилизаторы в ней имеют вид

$$\hat{K}_i = \hat{X}_i \prod_{j \in N(i)} \hat{Z}_j, \quad (1.2)$$

где  $N(i)$  обозначает набор всех ближайших соседних вершин к  $i$ , то есть  $N(i) = \{j | (i, j) \in E\}$ . Операторы  $\hat{X}$  и  $\hat{Z}$  являются операторами Паули для кубитов.

Для использования кластерной модели вычислений необходимо доказать ее универсальность, то есть возможность производить с ее помощью любые унитарные преобразования над кубитами. Для этого достаточно иметь конечный набор логических вентилях, которые могут с произвольной точностью аппроксимировать любое унитарное преобразование [34, 35]. Стандартный универсальный набор логических вентилях состоит из всех однокубитных унитарных операций и операции CNOT для любой пары кубитов. Для выполнения всех однокубитных унитарных преобразований достаточно иметь линейный одномерный кластер, состоящий всего из трех кубитов, а для выполнения операции CNOT нужно иметь уже двумерное кластерное состояние, что было продемонстрировано в работе [8]. Таким образом,

для того, чтобы кластерное состояние было универсальным, достаточно иметь двумерное кластерное состояние.

На данный момент существует множество способов практической реализации кластерных состояний на дискретных переменных: спиновые кластерные состояния [36–38], атомные кластерные состояния [39], захваченные ионы [40], световые кластерные состояния [41–44].

### 1.3.2 Кластерные состояния в непрерывных переменных

В данном разделе будет введено определение кластерного состояния для квантовых систем, которые описываются непрерывными переменными. Такие системы имеют две канонические степени свободы, задаваемые операторами  $\hat{q}$  и  $\hat{p}$ . Эти операторы являются наблюдаемыми и должны удовлетворять каноническому коммутационному соотношению

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \frac{i}{2}.$$

Идея использования непрерывных переменных в квантовых вычислениях была первоначально предложена Ллойдом и Браунштайном [45]. В своей работе они доказали, что существует конечный набор преобразований над этими системами, который может аппроксимировать любую унитарную операцию над квантовыми состояниями. Наличие этой универсальности и дискретного кластерного состояния привело к созданию кластерного состояния на непрерывных переменных [46], которое, как было доказано в работе [47], является универсальным ресурсом для однонаправленных вычислений.

Определение этого состояния также начинается с введения графа  $G = (V, E)$ , который в случае непрерывных переменных является взвешенным, то есть каждому его ребру, соединяющему вершины  $i$  и  $j$ , сопоставляется вес  $g_{ij}$ . В качестве "непрерывного" аналога состояния  $|+\rangle$  используют состояние  $|0\rangle_p$ , которое является сжатым вакуумным состоянием в  $p$ -квадратуре и определяется соотношением  $\hat{p}|0\rangle_p = 0$ . Вместо оператора  $\text{sPhase}_{i,j}$  используют оператор  $\hat{C}_{Zij} = e^{2ig_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j}$ . В результате всех этих замен можно записать определение кластерного состояния  $|G\rangle$  в следующем виде

$$|G\rangle = \hat{C}_{Ztotal}|0\rangle_p^{\otimes n} = \prod_{(i,j) \in E} \hat{C}_{Zij}|0\rangle_p^{\otimes n} = \prod_{(i,j) \in E} e^{2ig_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j}|0\rangle_p^{\otimes n} \quad (1.3)$$

Как было упомянуто ранее, определять кластерное состояние можно также и через набор его стабилизаторов. Чтобы получить этот набор в случае непрерывных переменных, нужно взять стабилизатор  $i$ -го сжатого вакуумного состояния, который задается оператором  $\hat{X}_i(s) = e^{-2is\hat{p}_i}$ , и воспользоваться тем фактом, что, если оператор  $\hat{K}$  стабилизирует состояние  $|\phi\rangle$ , то  $\hat{U}\hat{K}\hat{U}^\dagger$  стабилизирует  $\hat{U}|\phi\rangle$ . В результате этого мы получим определение кластерного состояния через набор его стабилизаторов

$$\hat{C}_{Ztotal}\hat{X}_i(s)\hat{C}_{Ztotal}^\dagger|G\rangle = |G\rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

Эти стабилизаторы можно упростить и переписать как

$$\hat{C}_{Ztotal}\hat{X}_i(s)\hat{C}_{Ztotal}^\dagger = \exp\left[-2is(\hat{p}_i - \sum_{j \in N(i)} g_{ij}\hat{x}_j)\right] = \hat{X}_i(s) \prod_{j \in N(i)} \hat{Z}_j(g_{ij}s), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.4)$$

где оператор  $\hat{Z}_i(s) = e^{2is\hat{x}_i}$ . Из упрощенной записи стабилизаторов видно, что, в случае непрерывных переменных, кластерное состояние может быть определено с помощью другого набора операторов как

$$\left(\hat{p}_i - \sum_{j \in N(i)} g_{ij}\hat{x}_j\right)|G\rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.5)$$



Оператор, который стоит в правой части уравнения (1.5), называется нуллифайером кластерного состояния ("калька" с английского термина *nullifier*). С помощью набора всех этих нуллифайеров можно полностью определить кластерное состояние в непрерывных переменных. Здесь стоит отметить, что знак равенства соответствует случаю бесконечного сжатия начальных вакуумных состояний  $|0\rangle_p$ , которое недостижимо в реальных экспериментах. Поэтому в определении кластерного состояния следует заменить равенство нулю на стремление к нулю при стремящемся к бесконечности сжатии начальных состояний.

На сегодняшний день существует множество способов реализации кластерных состояний на непрерывных переменных. Например, кластерные состояния на оптомеханических системах [13], кластерные состояния на атомных ансамблях [48] и световые кластерные состояния. Последние кластерные состояния представляют большой интерес ввиду того, что их проще реализовывать. Существует две схемы получения световых кластерных состояний. Первая основывается на смешении оптического частотного комба на пластинке  $\lambda/4$  и превращении его в кластерное состояние [49–53]. Такое состояние было экспериментально реализовано в работах [54, 55]. Основной минус этого состояния заключается в том, что оно является одномерным, однако позже была предложена новая схема по превращению данного состояния в двумерное [56]. Другая схема кластерных состояний основывается на использовании временных световых мод и действия QND операции, которая превращает независимые временные импульсы в кластерное состояние [30, 57, 58]. Позже было доказано, что кластерные состояния можно получать и с помощью линейной оптики [59–61], что стало предпосылкой для появления данной работы.

# Глава 2

## Генерация кластерных состояний

### 2.1 Мысленный эксперимент

На Рис.2.1 представлена схема мысленного эксперимента, в котором, как мы убедимся, генерируется кластерное состояние поля. В качестве исходных источников света мы выбираем два одинаковых субпуассоновских лазера ( $L_1$ ) и ( $L_2$ ), работающих в стационарном режиме с применением синхронизации фаз. Предполагается, что излучение от этих лазеров сжато по  $y$ -квадратурам. Посредством диафрагм стационарное излучение каждого из лазеров превращается в поток одинаковых импульсов. На схеме они обозначены кружками. Если потребовать, чтобы длительность импульсов была больше характерного времени корреляций лазерного поля [62], то каждый из импульсов сохраняет сжатое состояние стационарного поля. Предполагается, что импульсы на Рис.2.1 в верхнем и нижнем потоках формируются одновременно, то есть положения по оси времени импульсов в обоих потоках попарно совпадают.

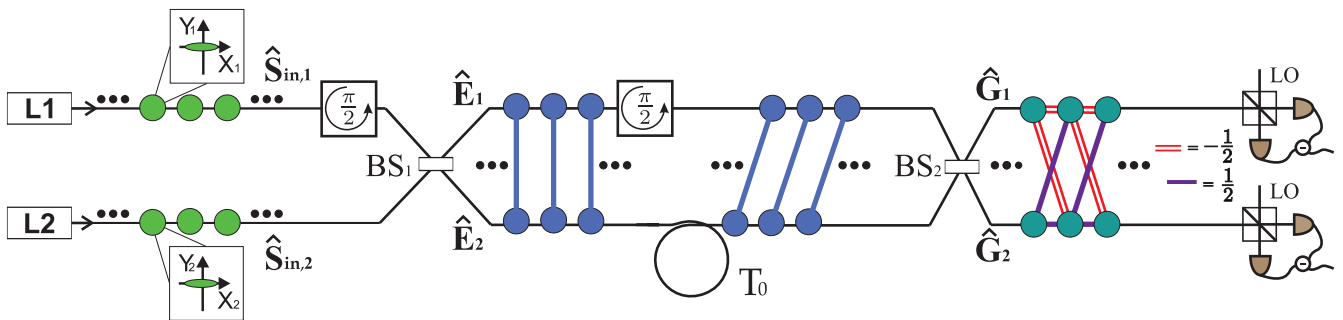


Рис. 2.1: Схема мысленного эксперимента по генерации кластерного состояния на основе несимметричного интерферометра Маха–Цандера. Кружками до первого светоделителя ( $BS_1$ ) обозначены импульсы длительности  $T$  от источников яркого сжатого света (от синхронизованных субпуассоновских лазеров) ( $L_1$ ) и ( $L_2$ ). Предполагается, что свет от обоих источников сжат в  $y$ -квадратурах. В верхнем плече схемы установлен фазовращатель, такой, что амплитуда поля умножается на мнимую единицу  $i$ . После светоделителя ( $BS_1$ ) образуются независимые пары импульсов в перепутанных состояниях. Факт перепутанности двух импульсов света на схеме обозначен вертикальными линиями, соединяющими соответствующие кружки. Каждый импульс нижнего плеча интерферометра проходит через линию задержки  $T_0$ , а верхнего – снова через фазовращатель с умножением амплитуд на  $i$ . Далее оба (верхний и нижний) световых потока выходят из интерферометра через выходной светоделитель ( $BS_2$ ). В результате образуются два световых потока в кластерном состоянии с амплитудами  $\hat{G}_1$  и  $\hat{G}_2$ . Предполагается, что наблюдение производится при подходящем гомодинном детектировании в каждом из двух плечей. Слева от светоделителя ( $BS_1$ ) и фазовращателя амплитуды световых потоков обозначены как  $\hat{S}_{in,1}(t)$  и  $\hat{S}_{in,2}(t)$ .

Последовательности импульсов проходят через несимметричный интерферометр Маха–Цандера, у которого нижнее плечо между входным и выходным светоделителями длиннее верхнего. После входного светоделителя внутри интерферометра спаренные независимые импульсы оказываются в перепутанном состоянии. На рисунке факт перепутанности отмечен вертикальными связями между кружками. Далее в нижнем плече интерферометра вводится линия задержки, так что импульсы в этом плече оказываются запаздывающими по сравнению с верхним плечом на время  $T_0$  так, чтобы  $(n+1)$ -ый импульс в верхнем потоке совпал бы по времени с  $n$ -ым импульсом в нижнем потоке. Состояние, которое мы будем анализировать на предмет его принадлежности к кластерным состояниям, получается после смещения этих полей на втором симметричном светоделителе ( $BS_2$ ).

## 2.2 Формирование импульсов из стационарной лазерной генерации

Цель данного исследования – проследить за превращением двух исходных световых полей в сжатых состояниях в поле в кластерном состоянии. При этом мы не постулируем просто квантовые состояния полей на входе системы, а полагаем, что там установлены субпуассоновские лазеры, работающие в синхронизованном режиме. Теория подобных источников хорошо разработана, и вся необходимая информация о них может быть найдена, например, в цитируемой работе [14]. Для нас важными обстоятельствами будет то, что, во-первых, это источники яркого света, что заставляет рассматривать теорию генерации кластерного состояния в непрерывных переменных. Во-вторых, излучение любого лазера оказывается в смешанном состоянии. Также мы полагаем существенным учитывать не только нулевую Фурье компоненту одномодового лазерного поля, но и частотное распределение в пределах одной актуальной лазерной моды. В этом смысле мы характеризуем решаемую нами задачу как многомодовую, хотя исходные лазеры по принятой терминологии являются одномодовыми.

В работе [14] произведен расчет корреляционных свойств синхронизованного субпуассоновского лазера, работающего в стационарном режиме. Авторы рассматривают одномодовый лазер, и сопоставляют полю внутри резонатора гейзенбергову амплитуда  $\hat{a}(t) = \hat{x}(t) + i \hat{y}(t)$ . Для этой амплитуды имеет место каноническое коммутационное соотношение:

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = 1. \quad (2.1)$$

Авторы работы ставили своей целью анализ квантово-статистических свойств генерации и пришли к выводу, что внутри резонатора одна из квадратур оказывается сжатой согласно выражению

$$\langle : \delta \hat{y}(t) \delta \hat{y}(t') : \rangle = \frac{p}{8} \frac{1 - \mu}{1 - \mu/2} e^{-\kappa(1 - \mu/2)|t - t'|}. \quad (2.2)$$

Здесь параметр  $\kappa \gg T^{-1}$  – это спектральная ширина моды лазерного резонатора. Параметр  $\mu$  характеризует меру синхронизации лазерной генерации. Предполагается, что воздействие синхронизирующих полей на лазерную генерацию очень слабое, поэтому  $\mu \ll 1$ . В противном случае неклассические свойства лазерной генерации подавляются, и такие источники для нас оказываются бесполезными.

В формуле (2.2) фигурирует важный параметр  $p$ , характеризующий меру сжатия исходной лазерной генерации. Он напрямую связан со статистикой возбуждения лазерной среды. Для случайной (пуассоновской) накачки  $p = 0$ , для суперпуассоновской  $p > 0$ . Квадратурное сжатие лазерной генерации возникает при  $-1 < p < 0$ .

Для решения задачи в рамках этой работы необходимо иметь два независимых лазерных источника, которыми являются субпуассоновские лазеры, работающие в стационарном режиме. На Рис.2.1 они обозначены как ( $L1$ ) и ( $L2$ ). С помощью диафрагмы, которая через

каждый временной интервал  $T_0$  открываются на время  $T \ll T_0$ , мы получаем, что оба световых потока перестают быть стационарными, и каждый из них превращается в поток из  $N$  независимых импульсов. Предполагается, что они попарно согласованы на оси времени таким образом, что в обоих потоках каждый  $m$ -ый импульс начинается в момент времени  $t_m = (m-1)T_0$ , где  $m = 1, 2, \dots, N$ . Припишем каждому потоку индекс  $j = 1, 2$  и сопоставим им гейзенбергову амплитуды

$$\hat{S}_{in,j}(t) = \sum_{m=1}^N \hat{S}_{in,m}^j(t) \Theta(t - t_m) + \hat{V}_{in,j}(t), \quad j = 1, 2. \quad (2.3)$$

Здесь функция  $\Theta(t - t_m)$  определена таким образом, что она равна единице при  $t_m < t < t_m + T$  ( $T$  – длительность импульса) и равна нулю вне этих временных интервалов. Величина  $\hat{S}_{in,m}^j(t)$  по своему физическому смыслу может обсуждаться как гейзенбергова амплитуда  $m$ -ого импульса в  $j$ -ом световом потоке. Слагаемое  $\hat{V}_j(t)$  определяет вклад вакуумных каналов и его присутствие в формуле позволяет согласовать друг с другом коммутационные соотношения

$$\left[ \hat{S}_{in,j}(t), \hat{S}_{in,j}^\dagger(t') \right] = \delta(t - t'), \quad \left[ \hat{S}_{in,m}^j(t), \left( \hat{S}_{in,n}^j(t') \right)^\dagger \right] = \delta_{mn} \delta(t - t'). \quad (2.4)$$

Если длительность каждого из импульсов гораздо больше времени лазерных корреляций, то они находятся в хорошо сжатом состоянии точно так же, как и исходная стационарная лазерная генерация. Для того, чтобы оценить сжатие в каждом из импульсов, потребуется знание нормально упорядоченных средних вида

$$\langle : \delta \hat{Y}_{in,m}^j(t) \delta \hat{Y}_{in,n}^j(t') : \rangle = \kappa \langle : \delta \hat{y}(t) \delta \hat{y}(t') : \rangle \Theta(t - t_m) \Theta(t' - t_n) \delta_{mn}, \quad j = 1, 2. \quad (2.5)$$

Квадратуры полей  $\hat{X}_{in,m}^j$  и  $\hat{Y}_{in,m}^j$  (и их флуктуации  $\delta \hat{X}_{in,m}^j$  и  $\delta \hat{Y}_{in,m}^j$ ) вводятся обычным образом как реальные и мнимые части гейзенбергових амплитуд в форме  $\hat{S}_{in,m}^j = \hat{X}_{in,m}^j + i \hat{Y}_{in,m}^j$ . Нормальное упорядочение при усреднении связано с тем, что при выходе их резонатора лазерное поле смешивается с вакуумом согласно равенству

$$\hat{S}_{in,j}(t) = \sqrt{\kappa} \hat{a}_j(t) - \hat{v}_j(t). \quad (2.6)$$

Совершим преобразование Фурье в равенствах (2.5), определяя его в виде

$$\delta \hat{Y}_{in,m}^j(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \delta \hat{Y}_{in,m}^j(t) e^{i\omega t}. \quad (2.7)$$

Тогда получим зависимость от  $\omega$  и  $\omega'$ , и затем положим  $\omega' = -\omega$ . В результате сможем записать выражения для спектральных компонент квадратурных флуктуаций в виде

$$\begin{aligned} \langle : |\delta \hat{Y}_{in,m}^j(\omega)|^2 : \rangle &= \frac{p\kappa}{8} \frac{1-\mu}{1-\mu/2} \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} dt dt' e^{-\kappa(1-\mu/2)|t-t'|} e^{i\omega(t-t')} \Theta(t - t_m) \Theta(t' - t_m) = \\ &= \frac{p\kappa}{8} \frac{1-\mu}{1-\mu/2} \frac{1}{2\pi} \iint_{t_m}^{t_m+T} dt dt' e^{-\kappa(1-\mu/2)|t-t'|} e^{i\omega(t-t')} = \\ &= \frac{p\kappa}{8} \frac{1-\mu}{1-\mu/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^T dt \int_0^t dt' e^{-\kappa(1-\mu/2)(t-t')} e^{i\omega(t-t')} + k.c. = \frac{p}{4} \frac{1-\mu}{1-\mu/2} \frac{T}{2\pi} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Удобно перейти к дискретной шкале частот, выбирая в качестве единицы шкалы величину  $2\pi/T$ . В результате этого получим аналитические выражения для спектров флуктуаций квадратур в виде

$$4\langle |\delta\hat{Y}_{in,m}^j(\omega_s)|^2 \rangle = \frac{\kappa^2(1+p) + \omega_s^2}{\kappa^2 + \omega_s^2}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}s, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Здесь учтена малость параметра синхронизации  $\mu$  и связь средних с нормально упорядоченными средними:

$$4\langle |\delta\hat{Y}_{in,m}^j(\omega_s)|^2 \rangle = 1 + 4\langle : |\delta\hat{Y}_{in,m}^j(\omega_s)|^2 : \rangle. \quad (2.10)$$

Для целей генерации кластерного состояния мы должны предположить, что оба световых потока сжаты в одной и той же  $y$ -квadrатуре. Однако, стоит помнить, что в верхнем плече перед светоделителем ( $BS_1$ ) предполагается наличие фазовращателя, после которого начальные амплитуды  $\hat{S}_{in,j}(t)$  преобразуются по правилу

$$\hat{S}_{in,j=1}(t) \rightarrow i\hat{S}_{in,j=1}(t), \quad \hat{S}_{in,j=2}(t) \rightarrow \hat{S}_{in,j=2}(t). \quad (2.11)$$

Таким образом, после фазовращателя верхний и нижний световые потоки оказываются сжатыми в разных квадратурах

$$4\langle |\delta\hat{Y}_{in,m}^{j=2}(\omega_s)|^2 \rangle = 4\langle |\delta\hat{X}_{in,m}^{j=1}(\omega_s)|^2 \rangle = \frac{\kappa^2(1+p) + \omega_s^2}{\kappa^2 + \omega_s^2}. \quad (2.12)$$

## 2.3 Формирование кластерного состояния

### 2.3.1 Распространение импульсных потоков света через несимметричный интерферометр Маха–Цандера

В результате прохождения света через светоделитель ( $BS_1$ ) каждая пара одновременных статистически независимых импульсов с амплитудами  $i\hat{S}_{in,m}^{j=1}$  и  $\hat{S}_{in,m}^{j=2}$  порождает другую пару тоже одновременных импульсов с амплитудами

$$\hat{E}_m^{j=1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( i\hat{S}_{in,m}^{j=1}(t) + \hat{S}_{in,m}^{j=2}(t) \right), \quad (2.13)$$

$$\hat{E}_m^{j=2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( i\hat{S}_{in,m}^{j=1}(t) - \hat{S}_{in,m}^{j=2}(t) \right). \quad (2.14)$$

Появление в этих формулах в качестве множителя мнимой единицы связано с наличием фазовращателя перед светоделителем ( $BS_1$ ). Новые импульсы окажутся в перепутанном состоянии в силу того, что они возникли в результате смещения на светоделителе двух импульсов, сжатых в ортогональных квадратурах.

Мы будем предполагать, что интерферометр Маха–Цандера несимметричен таким образом, что расстояние от входного светоделителя ( $BS_1$ ) до выходного ( $BS_2$ ) для луча с индексом  $j = 1$  меньше, чем для луча с индексом  $j = 2$ . Если бы интерферометр был симметричен, то на выходной светоделитель ( $BS_2$ ) одновременно попадали бы импульсы только с одним и тем же индексом  $m$ . Если же полагать, что нижняя ветвь интерферометра больше верхней на величину  $cT_0$ , то на выходной светоделитель одновременно попадают импульсы с индексами  $m$  и  $m + 1$ . Это означает, что вследствие прохождения этой пары через светоделитель возникнут два новых импульса с амплитудами

$$\hat{G}_{m+1}^{j=1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( i\hat{E}_{m+1}^{j=1}(t) + \hat{E}_m^{j=2}(t) \right), \quad (2.15)$$

$$\hat{G}_{m+1}^{j=2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( i\hat{E}_{m+1}^{j=1}(t) - \hat{E}_m^{j=2}(t) \right). \quad (2.16)$$

Здесь множитель  $i$  связан со вторым фазовращателем.

Подставим сюда (2.13)-(2.14), в результате получим поле на выходе интерферометра после светоделителя ( $BS_2$ ), выраженное через поле на входе. Эта связь имеет вид

$$\hat{G}_{m+1}^{j=1}(t) = -\frac{1}{2} \left( \hat{S}_{in,m+1}^{j=1}(t) + \hat{S}_{in,m}^{j=2}(t) \right) + \frac{i}{2} \left( \hat{S}_{in,m+1}^{j=2}(t) + \hat{S}_{in,m}^{j=1}(t) \right), \quad (2.17)$$

$$\hat{G}_{m+1}^{j=2}(t) = -\frac{1}{2} \left( \hat{S}_{in,m+1}^{j=1}(t) - \hat{S}_{in,m}^{j=2}(t) \right) + \frac{i}{2} \left( \hat{S}_{in,m+1}^{j=2}(t) - \hat{S}_{in,m}^{j=1}(t) \right). \quad (2.18)$$

Как видим, на выходе пара импульсов с индексом  $m$  оказывается зависящей не только от пары импульсов на входе с тем же индексом  $m$ , но и с индексом  $m + 1$ . Таким образом, хотя на входе интерферометра все импульсы были статистически независимыми, на выходе между ними возникает связь. При этом естественно задать вопрос, является ли вся совокупность импульсов сепарабельной или мы должны в данном случае говорить о многочастичном перепутывании (о кластерном состоянии).

### 2.3.2 Структура кластера

Кластерное состояние многочастичной системы может возникнуть тогда, когда набор статистически независимых квантовых объектов (в нашем случае – импульсов света) в одном и том же состоянии превращается посредством приемлемых преобразований в набор со связями. При этом каждому элементу множества может быть сопоставлен нуллифайер. Нужно иметь в виду, что точно так же можно говорить о нуллифайерах перепутанного состояния.

Согласно Рис.2.1, при выходе поля из лазерных резонаторов, мы имеем совокупность  $2N$  независимых импульсов. Каждый из этих импульсов находится в сжатом состоянии относительно  $y$ -квадратуры. Импульсы в верхнем плече схемы (*верхние* импульсы) проходят через фазовращатель, вследствие чего амплитуды этих импульсов приобретают дополнительный фазовый множитель  $\exp(i\pi/2)$ , и для них сжатой оказывается уже  $x$ -квадратура. Затем независимые *верхние* и *нижние* импульсы, смешиваясь на светоделителе ( $BS_1$ ), оказываются попарно перепутанными. Если их канонические переменные обозначить при этом как  $\hat{q}_m^j(\omega)$  и  $\hat{p}_m^j(\omega)$ , то для каждой пары импульсов с одним и тем же индексом  $m$  могут быть написаны два нуллифайера

$$\hat{q}_m^{j=1}(\omega) + \hat{q}_m^{j=2}(-\omega), \quad \hat{p}_m^{j=1}(\omega) - \hat{p}_m^{j=2}(-\omega), \quad m = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (2.19)$$

После прохождения верхнего импульса через фазовращатель это переписывается в виде

$$\hat{p}_m^{j=1}(\omega) + \hat{q}_m^{j=2}(-\omega), \quad \hat{q}_m^{j=1}(\omega) + \hat{p}_m^{j=2}(-\omega). \quad (2.20)$$

В этом выражении линия задержки для нижних импульсов приводит к соответствующей замене индекса  $m$  на индекс  $m + 1$

$$\hat{p}_m^{j=1}(\omega) + \hat{q}_{m+1}^{j=2}(-\omega), \quad \hat{p}_{m+1}^{j=2}(-\omega) + \hat{q}_m^{j=1}(\omega). \quad (2.21)$$

И, наконец, после светоделителя ( $BS_2$ ), то есть на выходе интерферометра Маха–Цандера, нуллифайеры, которые мы теперь обозначим как  $\hat{U}_m(\omega)$  и  $\hat{V}_m(\omega)$ , приобретают вид

$$\hat{U}_m(\omega) = \hat{P}_m^{j=1}(\omega) + \hat{P}_m^{j=2}(\omega) + \hat{Q}_{m+1}^{j=1}(-\omega) - \hat{Q}_{m+1}^{j=2}(-\omega), \quad (2.22)$$

$$\hat{V}_m(\omega) = \hat{Q}_m^{j=1}(\omega) + \hat{Q}_m^{j=2}(\omega) + \hat{P}_{m+1}^{j=1}(-\omega) - \hat{P}_{m+1}^{j=2}(-\omega). \quad (2.23)$$

В последних формулах наборы величин  $\hat{Q}_m^j(\omega)$ ,  $\hat{P}_m^j(\omega)$  представляют поля с комплексными амплитудами  $\hat{G}_m^j(\omega)$  на выходе интерферометра Маха–Цандера, то есть после светоделителя ( $BS_2$ ). Эти величины определены как реальная и мнимая части амплитуд  $\hat{G}_m^j(\omega)$

$$\hat{G}_m^j(\omega) = \hat{Q}_m^j(\omega) + i\hat{P}_m^j(\omega), \quad \hat{Q}_m^j(\omega) = \left( \hat{Q}_m^j(\omega) \right)^\dagger, \quad \hat{P}_m^j(\omega) = \left( \hat{P}_m^j(\omega) \right)^\dagger. \quad (2.24)$$

Структура нуллифайеров (2.22)-(2.23) такова, что они эрмитовские и оказываются измеримыми одновременно, поскольку

$$\left[ \hat{U}_m(\omega), \hat{V}_n(-\omega) \right] = 0, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (2.25)$$

Как известно, нуллифайеры дают возможность судить о структуре кластера, но при этом они должны иметь форму  $(P_j - \sum_i A_{ji} Q_i)$ . Чтобы привести (2.22)-(2.23) к нужному виду, воспользуемся тем, что сумма нуллифайеров тоже является нуллифайером. Построим из них комбинацию вида

$$\hat{N}_m^{j=1}(\omega) = \frac{1}{2} \left( \hat{U}_m(\omega) + \hat{V}_{m-1}(-\omega) \right), \quad (2.26)$$

$$\hat{N}_m^{j=2}(\omega) = \frac{1}{2} \left( \hat{U}_m(\omega) - \hat{V}_{m-1}(-\omega) \right). \quad (2.27)$$

Подставляя сюда (2.22)-(2.23), получим новые нуллифайеры в следующем виде

$$\hat{N}_m^{j=1}(\omega) = \hat{P}_m^{j=1}(\omega) - \frac{1}{2} \left( \hat{Q}_{m+1}^{j=2}(-\omega) - \hat{Q}_{m+1}^{j=1}(-\omega) - \hat{Q}_{m-1}^{j=1}(-\omega) - \hat{Q}_{m-1}^{j=2}(-\omega) \right), \quad (2.28)$$

$$\hat{N}_{m-1}^{j=2}(\omega) = \hat{P}_{m-1}^{j=2}(\omega) - \frac{1}{2} \left( \hat{Q}_m^{j=2}(-\omega) - \hat{Q}_m^{j=1}(-\omega) + \hat{Q}_{m-2}^{j=1}(-\omega) + \hat{Q}_{m-2}^{j=2}(-\omega) \right). \quad (2.29)$$

Таким образом, мы получили нуллифайеры для каждого верхнего и каждого нижнего импульса в нужной для нас форме, позволяющей нарисовать взвешенный граф, представленный на Рис.2.2.

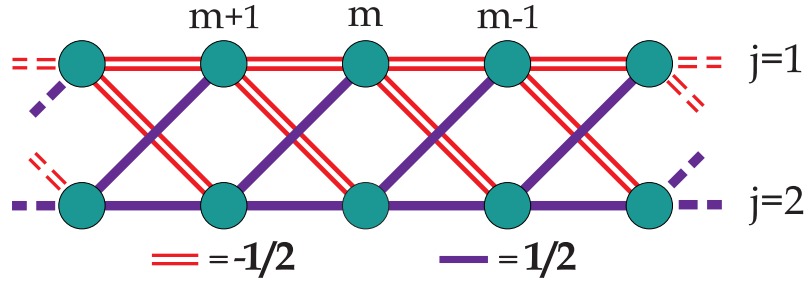


Рис. 2.2: Граф кластерного состояния, получающегося в результате мысленного эксперимента. Разными линиями на графе обозначены весовые коэффициенты  $A_{ij} = \pm 1/2$  между узлами  $i$  и  $j$ .

Как видим, имеются два типа связей, определяемых величинами  $\pm 1/2$ . Мы предполагаем, что это кластерная структура. Однако, окончательное заключение может быть сделано только после того, как мы убедимся, что выбранные в качестве нуллифайеров выражения (2.28)-(2.29) действительно являются таковыми. Для этого необходимо продемонстрировать, что флуктуации этих операторов, действуя на кластерное состояние, дают ноль. Это означает, что мы должны определить условия, при которых величины

$$\left\langle \left[ \delta \hat{N}_m^{j=1}(\omega) \right]^2 \right\rangle, \quad \left\langle \left[ \delta \hat{N}_m^{j=2}(\omega) \right]^2 \right\rangle \quad (2.30)$$

близки к нулю. Следующий раздел посвящен вычислению этих величин. Используя формулы, полученные в предыдущих разделах, мы выразим средние квадратичные флуктуации нуллифайеров через известные характеристики исходной лазерной генерации.

### 2.3.3 Условие для возникновения кластерного состояния

Для того, чтобы заключить, что состояние ансамбля электромагнитных импульсов является кластерным, мы должны продемонстрировать, что величина

$$D_m(\omega) = \langle [\delta \hat{N}_m^{j=1}(\omega)]^2 \rangle + \langle [\delta \hat{N}_m^{j=2}(\omega)]^2 \rangle \quad (2.31)$$

близка к нулю. Вычислим ее в явном виде, выражая ее через исходные лазерные характеристики. Эту операцию проще всего выполнить, понимая, что согласно (2.26)-(2.27)

$$D_m(\omega) = \frac{1}{2} \left( \langle \delta \hat{U}_m^2(\omega) \rangle + \langle \delta \hat{V}_{m-1}^2(\omega) \rangle \right). \quad (2.32)$$

Имея в виду (2.22)-(2.23) и (2.26)-(2.27), может быть получена связь с известными исходными полями в виде

$$\hat{U}_m(\omega) = - \left( \hat{Y}_{in,m}^{j=1}(\omega) + \hat{Y}_{in,m}^{j=1}(-\omega) \right) + i \left( \hat{Y}_{in,m}^{j=2}(\omega) - \hat{Y}_{in,m}^{j=2}(-\omega) \right), \quad (2.33)$$

$$\hat{V}_m(\omega) = - \left( \hat{Y}_{in,m}^{j=2}(\omega) + \hat{Y}_{in,m}^{j=2}(-\omega) \right) - i \left( \hat{Y}_{in,m}^{j=1}(\omega) - \hat{Y}_{in,m}^{j=1}(-\omega) \right). \quad (2.34)$$

В силу статистической независимости всех импульсов друг от друга на выходе их из лазерных резонаторов мы можем написать следующее

$$\langle \delta \hat{U}_m^2(\omega) \rangle = \langle \left( \delta \hat{Y}_{in,m}^{j=1}(\omega) + \delta \hat{Y}_{in,m}^{j=1}(-\omega) \right)^2 \rangle - \langle \left( \delta \hat{Y}_{in,m}^{j=2}(\omega) - \delta \hat{Y}_{in,m}^{j=2}(-\omega) \right)^2 \rangle, \quad (2.35)$$

$$\langle \delta \hat{V}_m^2(\omega) \rangle = \langle \left( \delta \hat{Y}_{in,m}^{j=2}(\omega) + \delta \hat{Y}_{in,m}^{j=2}(-\omega) \right)^2 \rangle - \langle \left( \delta \hat{Y}_{in,m}^{j=1}(\omega) - \delta \hat{Y}_{in,m}^{j=1}(-\omega) \right)^2 \rangle. \quad (2.36)$$

Подставляя это в (2.32), получим

$$D_m(\omega_s) = 2 \langle |\delta \hat{Y}_{in,m}^{j=1}(\omega)|^2 \rangle + 2 \langle |\delta \hat{Y}_{in,m}^{j=2}(\omega)|^2 \rangle = \frac{\kappa^2(1+p) + \omega_s^2}{\kappa^2 + \omega_s^2}. \quad (2.37)$$

Здесь мы учли, что в силу тождественности импульсов можно записать  $\delta \hat{Y}_{in,m}^{j=2}(\omega) = \delta \hat{Y}_{in,m-1}^{j=2}(\omega)$  и  $\delta \hat{Y}_{in,m}^{j=1}(\omega) = \delta \hat{Y}_{in,m-1}^{j=1}(\omega)$ . Второе равенство записано согласно (2.9). Таким образом, в нашем случае кластерное состояние возникает только для частот, удовлетворяющих неравенствам

$$(1+p)\kappa^2 \ll \omega^2 \ll \kappa^2 \quad (2.38)$$

Это неравенство выполнимо при условии, что лазерная среда, формирующая лазерную генерацию, возбуждается не случайным образом, но с субпуассоновской статистикой. Если регулярность возбуждения существенна, то формально это означает, что величина  $(1+p)$  близка к нулю.

В этом случае говорят, что все элементы множества эффективно перепутаны, и система оказывается несепарабельной. Однако, сепарабельность системы может все еще сохраняться даже в том случае, когда условие  $D_\omega \rightarrow 0$  выполняется, но не очень хорошо. В следующем разделе мы будем оценивать это, применяя критерий ван Лука-Фурусавы [63].



## 2.4 Сепарабельность множества электромагнитных импульсов

### 2.4.1 Критерий сепарабельности ван Лука-Фурусавы

Пусть мы имеем множество  $(S)$ , состоящее из  $N$  элементов, которые представимы каноническими переменными  $\{\hat{q}_k(-\omega), \hat{p}_k(\omega)\}$ , где  $k$  нумерует элементы множества и пробегает значения от 1 до  $N$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Будем полагать, что это множество разделяется на  $M$  независимых подмножеств  $(S_r)$  ( $r = 1, 2, \dots, M$ ). Для каждого подмножества  $(S_r)$  введем в рассмотрение вспомогательные эрмитовские операторы как линейные комбинации величин  $\hat{q}_k(-\omega)$  и  $\hat{p}_k(\omega)$

$$\hat{u}_r(\omega) = \sum_{k \in S_r} [h_k \hat{q}_k(-\omega) + g_k \hat{p}_k^j(\omega)], \quad \hat{v}_r(\omega) = \sum_{k \in S_r} [\tilde{h}_k \hat{q}_k(\omega) + \tilde{g}_k \hat{p}_k(-\omega)]. \quad (2.39)$$

Полагаем, что здесь все коэффициенты  $h_k, \tilde{h}_k, g_k, \tilde{g}_k$  вещественны. С правой стороны этих равенств имеет место суммирование только по тем индексам, которые принадлежат к подмножеству  $(S_r)$ .

Дополнительно требуем, чтобы эрмитовские операторы

$$\hat{u}(\omega) = \sum_{r=1}^M \hat{u}_r(\omega), \quad \hat{v}(\omega) = \sum_{r=1}^M \hat{v}_r(\omega) \quad (2.40)$$

были бы измеримы одновременно, то есть полагаем, что

$$[\hat{u}(\omega), \hat{v}(-\omega)] = 0. \quad (2.41)$$

Нетрудно убедиться в том, что для этого необходимо потребовать выполнения равенства

$$\sum_{k=1}^N [h_k \tilde{g}_k - g_k \tilde{h}_k] = 0. \quad (2.42)$$

Что касается коммутационного соотношения для операторов (2.39), то они, вообще говоря, не коммутируют. Можно увидеть, что имеет место соотношение

$$[\hat{u}_r(\omega), \hat{v}_r(-\omega)] = \frac{i}{2} \sum_{k \in S_r} [h_k \tilde{g}_k - g_k \tilde{h}_k] \neq 0. \quad (2.43)$$

Запишем очевидное неравенство

$$\langle |\delta \hat{u}_r(\omega) + i \delta \hat{v}_r(-\omega)|^2 \rangle \geq 0. \quad (2.44)$$

После почленного возведения в квадрат под знаком усреднения можем записать

$$\langle \delta \hat{u}_r^2(\omega) \rangle + \langle \delta \hat{v}_r^2(-\omega) \rangle \geq |\langle [\hat{u}_r(\omega), \hat{v}_r(-\omega)] \rangle|. \quad (2.45)$$

Заменяя выражение справа согласно (2.43) и суммируя по всем значениям  $r = 1, 2, \dots, M$ , получаем

$$\langle [\delta \hat{u}(\omega)]^2 \rangle + \langle [\delta \hat{v}(-\omega)]^2 \rangle \geq \frac{1}{2} \sum_{r=1}^M \left| \sum_{k \in S_r} (h_k \tilde{g}_k - \tilde{h}_k g_k) \right|. \quad (2.46)$$

Это неравенство берется за основу критерия сепарабельности ван Лука-Фурусавы: если сформулированное неравенство имеет место, то множество может быть разделено на  $M$  независимых подмножеств.

С другой стороны, если

$$\langle [\delta\hat{u}(\omega)]^2 \rangle + \langle [\delta\hat{v}(-\omega)]^2 \rangle < \frac{1}{2} \sum_{r=1}^M \left| \sum_{k \in S_r} (h_k \tilde{g}_k - \tilde{h}_k g_k) \right|, \quad (2.47)$$

то множество оказывается несепарабельным, то есть имеет место многочастичное перепутывание или даже кластерное состояние.

## 2.4.2 Кластерное состояние как предельное многочастичное перепутывание

Перепишем сформулированный критерий сепарабельности для нашей задачи. Мы обсуждаем множество, состоящее из  $2N$  электромагнитных импульсов. Изначально эти импульсы излучаются двумя лазерами независимо друг от друга и находятся в одном и том же сжатом состоянии. Проходя через установку, схематически представленную на Рис.2.1, все импульсы перепутываются. Множество импульсов на выходе установки задается набором канонически сопряженных пар  $\{\hat{Q}_k^j(-\omega), \hat{P}_k^j(\omega)\}$ . Напомним, что индекс  $k = 1, 2, \dots, N$  нумерует импульсы от одного и того же лазера, а индекс  $j = 1, 2$  нумерует лазеры. Так же, как и ранее, предположим, что наше множество ( $S$ ) делимо на  $M$  независимых подмножеств  $S_r$  ( $r = 1, 2, \dots, M$ ). Снова введем в рассмотрение вспомогательные эрмитовские операторы

$$\hat{u}(\omega) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1,2} \left[ h_{kj} \hat{Q}_k^j(-\omega) + g_{kj} \hat{P}_k^j(\omega) \right], \quad \hat{v}(\omega) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1,2} \left[ \tilde{h}_{kj} \hat{Q}_k^j(\omega) + \tilde{g}_{kj} \hat{P}_k^j(-\omega) \right]. \quad (2.48)$$

Как и ранее эти операторы эрмитовы и коммутируют друг с другом, то есть выполнено коммутационное соотношение (2.41).

Критерий сепарабельности ван Лука-Фурусавы, определяющий возможность разделения полного множества на  $M$  подмножеств, записывается в виде неравенства

$$\langle [\delta\hat{u}(\omega)]^2 \rangle + \langle [\delta\hat{v}(-\omega)]^2 \rangle \geq \frac{1}{2} \sum_{r=1}^M \left| \sum_{k,j \in S_r} (h_{kj} \tilde{g}_{kj} - \tilde{h}_{kj} g_{kj}) \right|. \quad (2.49)$$

Как видно, сформулированный критерий (2.49) существенно зависит от набора вещественных констант  $h_{kj}, \tilde{h}_{kj}, g_{kj}, \tilde{g}_{kj}$ . Этот набор определяется конкретной физической ситуацией, связанной с выбранной схемой генерации поля и схемой детектирования электромагнитного поля. Пусть, например, мы хотим проследить за возможностью разделить множество на два подмножества такие, что соседние элементы с индексами  $(m, j = 1)$  и  $(m - 1, j = 2)$  оказались бы в разных подмножествах. Чтобы это установить, заменим операторы  $\hat{u}(\omega)$  и  $\hat{v}(\omega)$  в неравенстве (2.49) на нуллифайеры двух соседних элементов

$$\hat{u}(\omega) \rightarrow \hat{N}_m^{j=1}(\omega), \quad \hat{v}(-\omega) \rightarrow \hat{N}_{m-1}^{j=2}(\omega). \quad (2.50)$$

Это означает в согласии с формулами (2.28)-(2.29), что набор ненулевых констант имеет вид

$$\begin{aligned} g_{mj=1} &= 1, & h_{m+1j=2} &= -1/2, & h_{m+1j=1} &= 1/2, & h_{m-1j=1} &= 1/2, & h_{m-1j=2} &= 1/2, \\ \tilde{g}_{m-1j=2} &= 1, & \tilde{h}_{mj=2} &= -1/2, & \tilde{h}_{mj=1} &= 1/2, & \tilde{h}_{m-2j=1} &= -1/2, & \tilde{h}_{m-2j=2} &= -1/2. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Принимая это в расчет, мы видим, что выделенные соседние электромагнитные импульсы оказываются разделимыми при условии

$$D_m(\omega) = \langle [\delta \hat{N}_m^{j=1}(\omega)]^2 \rangle + \langle [\delta \hat{N}_{m-1}^{j=2}(\omega)]^2 \rangle \geq 1/2. \quad (2.52)$$

В согласии с (2.37) это условие переписывается в виде

$$\frac{\kappa^2(1+p) + \omega^2}{\kappa^2 + \omega^2} \geq 1/2. \quad (2.53)$$

Таким образом, мы можем заключить, что при условии  $\kappa^2(1+p) + \omega^2 < 1/2(\kappa^2 + \omega^2)$  множество электромагнитных импульсов в нашем опыте оказывается в многочастичном перепутанном состоянии и потому неразделимым. Нужно отметить, что при этом состояние может быть не обязательно кластерным, поскольку кластерное состояние возникает только тогда, когда  $D_m(\omega)$  оказывается много меньшим единицы, то есть, например, при  $1+p \ll 1$  и  $\omega < \kappa$ .

Итак, проанализировав одну из возможностей генерации кластерного состояния электромагнитного поля мы показали, что обсуждаемая схема, представленная на Рис.2.1, вполне осуществима не только в условиях слабого поля в чистом состоянии, но и тогда, когда исходное излучение яркое и находится в смешанном состоянии.

# Глава 3

## Однонаправленные вычисления

### 3.1 Однонаправленные вычисления на линейном кластерном состоянии

В данной главе будут рассмотрены вычисления на кластерном состоянии, которое было получено в мысленном эксперименте. Однако, прежде чем перейти к данной задаче, мы рассмотрим более простую, вспомогательную задачу, в которой кластерное состояние линейно и состоит из 2 узлов. Схема генерации такого состояния, а также вычислений на нем представлена на рис.3.1.

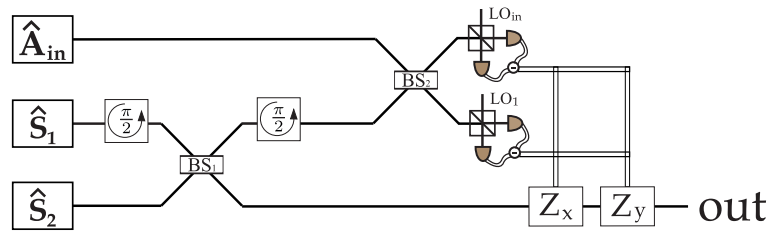


Рис. 3.1: Схема однонаправленных вычислений с помощью двухмодового кластерного состояния. Импульсы  $\hat{S}_1$  и  $\hat{S}_2$  являются сжатыми в  $y$ -квадратурах;  $\hat{A}_{in}$  – импульс над которым мы хотим произвести вычисления.

Из схемы видно, что процедуру вычислений можно разбить на несколько этапов. На первом этапе мы подаем три независимых световых импульса на вход системы. Два из этих импульсов являются сжатыми в  $y$ -квадратурах, а третий находится в произвольном состоянии. Именно над этим импульсом мы и хотим совершить преобразование. Запишем импульсы через их квадратуры

$$\begin{aligned}\hat{A}_{in}(t) &= \hat{X}_{in}(t) + i\hat{Y}_{in}(t), \\ \hat{S}_1(t) &= \hat{X}_1(t) + i\hat{Y}_1(t), \\ \hat{S}_2(t) &= \hat{X}_2(t) + i\hat{Y}_2(t).\end{aligned}$$

После этого необходимо создать кластерное состояние из сжатых импульсов. Для этого нужно отправить один из импульсов на фазовращатель, после этого смешать два импульса на светоделителе и снова пропустить первый импульс через фазовращатель. После всех этих преобразований амплитуды кластерных состояний можно записать через начальные квадратуры следующим образом

$$\hat{G}_1(t) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left( i\hat{S}_1(t) + \hat{S}_1(t) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ - \left( \hat{X}_1(t) + \hat{Y}_2(t) \right) + i \left( \hat{X}_2(t) - \hat{Y}_1(t) \right) \right], \quad (3.1)$$

$$\hat{G}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( i\hat{S}_1(t) - \hat{S}_1(t) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ - \left( \hat{X}_2(t) + \hat{Y}_1(t) \right) + i \left( \hat{X}_1(t) - \hat{Y}_2(t) \right) \right]. \quad (3.2)$$

К полученному кластерному состоянию необходимо примешать состояние, над которым мы и хотим произвести вычисления. Это можно сделать с помощью светоделителя, на вход которого подаются амплитуды  $\hat{A}_{in}(t)$  и  $\hat{G}_1(t)$ . В результате мы получим новые амплитуды полей

$$\begin{aligned}\hat{G}'_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{G}_1(t) + \hat{A}_{in}(t) \right) = \frac{1}{2} \left[ - \left( \hat{X}_1(t) + \hat{Y}_2(t) - \sqrt{2}\hat{X}_{in}(t) \right) + i \left( \sqrt{2}\hat{Y}_{in}(t) + \hat{X}_2(t) - \hat{Y}_1(t) \right) \right], \\ \hat{A}'_{in}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{G}_1(t) - \hat{A}_{in}(t) \right) = \frac{1}{2} \left[ - \left( \hat{X}_1(t) + \hat{Y}_2(t) + \sqrt{2}\hat{X}_{in}(t) \right) + i \left( -\sqrt{2}\hat{Y}_{in}(t) + \hat{X}_2(t) - \hat{Y}_1(t) \right) \right].\end{aligned}$$

Таким образом, в результате выполненных действий мы получили новое кластерное состояние, которое уже имеет три узла и описывается с помощью амплитуд  $\hat{A}'_{in}(t)$ ,  $\hat{G}'_1(t)$ ,  $\hat{G}_2(t)$ . Чтобы совершить преобразование над входным состоянием  $\hat{A}_{in}$  мы должны в получившемся кластере произвести измерения амплитуд  $\hat{A}'_{in}(t)$ ,  $\hat{G}'_1(t)$  с помощью гомодинных детекторов, локальные осцилляторы которых имеют амплитуды  $\beta_k = \beta_0 (\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$ ,  $k = \{in, 1\}$ . В результате получим квантовые фототоки:

$$\hat{i}_1(t) = \beta_0 \left[ - \left( \hat{X}_1(t) + \hat{Y}_2(t) - \sqrt{2}\hat{X}_{in}(t) \right) \cos \theta_1 + \left( \sqrt{2}\hat{Y}_{in}(t) + \hat{X}_2(t) - \hat{Y}_1(t) \right) \sin \theta_1 \right] \quad (3.3)$$

$$\hat{i}_{in}(t) = \beta_0 \left[ - \left( \hat{X}_1(t) + \hat{Y}_2(t) + \sqrt{2}\hat{X}_{in}(t) \right) \cos \theta_{in} + \left( -\sqrt{2}\hat{Y}_{in}(t) + \hat{X}_2(t) - \hat{Y}_1(t) \right) \sin \theta_{in} \right]. \quad (3.4)$$

Решим полученную систему уравнений относительно квадратур  $\hat{X}_1(t)$  и  $\hat{X}_2(t)$  и подставим их в уравнение (3.2). В результате найдем квадратуры поля  $\hat{G}_2(t)$ , которые мы обозначим, как  $\hat{X}_{out}(t)$  и  $\hat{Y}_{out}(t)$ . Эти квадратуры связаны с квадратурами поля  $\hat{A}_{in}(t)$  следующим образом

$$\begin{aligned}\hat{X}_{out}(t) &= -\sqrt{2}\hat{Y}_1(t) + \frac{1}{\sin \theta_-} \left( \hat{Y}_{in}(t) \sin \theta_+ + 2\hat{X}_{in}(t) \cos \theta_1 \cos \theta_{in} + \frac{1}{\beta_0 \sqrt{2}} \left( \cos \theta_1 \hat{i}_{in}(t) - \cos \theta_{in} \hat{i}_1(t) \right) \right), \\ \hat{Y}_{out}(t) &= -\sqrt{2}\hat{Y}_2(t) - \frac{1}{\sin \theta_-} \left( 2\hat{Y}_{in}(t) \sin \theta_1 \sin \theta_{in} + \hat{X}_{in}(t) \sin \theta_+ + \frac{1}{\beta_0 \sqrt{2}} \left( \sin \theta_1 \hat{i}_{in}(t) - \sin \theta_{in} \hat{i}_1(t) \right) \right),\end{aligned}$$

где  $\theta_{\pm} = \theta_1 \pm \theta_{in}$ . Для наглядности эти соотношения удобно переписать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out}(t) \\ \hat{Y}_{out}(t) \end{pmatrix} = M(\theta_+, \theta_-) \begin{pmatrix} \hat{X}_{in}(t) \\ \hat{Y}_{in}(t) \end{pmatrix} - \sqrt{2}I \begin{pmatrix} \hat{Y}_1(t) \\ \hat{Y}_2(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\beta_0 \sqrt{2} \sin \theta_-} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\cos \theta_{in} \\ -\sin \theta_1 & \sin \theta_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i}_{in}(t) \\ \hat{i}_1(t) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

где  $I$  – единичная матрица, а матрица  $M(\theta_+, \theta_-)$  имеет вид

$$M(\theta_+, \theta_-) = \frac{1}{\sin \theta_-} \begin{pmatrix} \cos \theta_+ + \cos \theta_- & \sin \theta_+ \\ -\sin \theta_+ & \cos \theta_+ - \cos \theta_- \end{pmatrix}$$

Уравнение (3.5) состоит из трех слагаемых. Первое слагаемое отвечает основному преобразованию над квадратурами поля  $\hat{A}_{in}(t)$ . Это преобразование полностью определяется с помощью выбора углов  $\theta_1, \theta_{in}$  при гомодинном детектировании. Второе слагаемое содержит  $y$ -овые квадратуры мод 1 и 2, а последнее – квантовые фототоки.

После того, как мы записали связь (3.5) мы можем перейти от квантовых фототоков  $\hat{i}_1(t)$  и  $\hat{i}_{in}(t)$  к их измеренным значениям  $i_1(t)$  и  $i_{in}(t)$ . В этом случае можно записать

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out}(t) \\ \hat{Y}_{out}(t) \end{pmatrix} = M(\theta_+, \theta_-) \begin{pmatrix} \hat{X}_{in}(t) \\ \hat{Y}_{in}(t) \end{pmatrix} - \sqrt{2}I \begin{pmatrix} \hat{Y}_1(t) \\ \hat{Y}_2(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\beta_0 \sqrt{2} \sin \theta_-} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\cos \theta_{in} \\ -\sin \theta_1 & \sin \theta_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{in}(t) \\ i_1(t) \end{pmatrix},$$

Мы видим, что в последнем слагаемом находятся только классические величины, которые могут быть скомпенсированы с помощью смещения квадратур выходного поля. Смещение выполняется с помощью операторов  $\hat{Z}_x(s) = e^{-is\hat{Y}}$  и  $\hat{Z}_y(s) = e^{is\hat{X}}$ , которые в гейзенберговском представлении действуют следующим образом

$$\begin{aligned}\hat{Z}_x^\dagger(s(t)) \hat{X}(t) \hat{Z}_x(s(t)) &= \hat{X}(t) + s(t), & \hat{Z}_x^\dagger(s(t)) \hat{Y}(t) \hat{Z}_x(s(t)) &= \hat{Y}(t) \\ \hat{Z}_y^\dagger(s(t)) \hat{Y}(t) \hat{Z}_y(s(t)) &= \hat{Y}(t) + s(t), & \hat{Z}_y^\dagger(s(t)) \hat{X}(t) \hat{Z}_y(s(t)) &= \hat{X}(t)\end{aligned}$$

Стоит отметить, что измерения в квантовой механике носят случайный характер, поэтому в каждом эксперименте нужно смещать квадратуры выходного поля на соответствующие величины  $i_1(t)$  и  $i_{in}(t)$ . Для этих целей используется операция feed-forward. Суть этой операции состоит в том, что мы отправляем результаты измерений на физические приборы, которые выполняют преобразования  $\hat{Z}_x(s)$  и  $\hat{Z}_y(s')$ , до того, как на них пришло поле. Тем самым мы подготавливаем эти приборы так, что квадратуры пришедшего на них света будут смещаться нужным нам образом. Если в нашей задаче к выходным квадратурам применить преобразования  $\hat{Z}_x\left(-\frac{1}{\beta_0\sqrt{2}\sin\theta_-}(\cos\theta_1 i_{in}(t) - \cos\theta_{in} i_1(t))\right)$  и  $\hat{Z}_y\left(-\frac{1}{\beta_0\sqrt{2}\sin\theta_-}(-\sin\theta_1 i_{in}(t) + \sin\theta_{in} i_1(t))\right)$ , мы полностью скомпенсируем классические слагаемые в квадратурах выходного поля. Эти квадратуры теперь можно записать как

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out}(t) \\ \hat{Y}_{out}(t) \end{pmatrix} = M(\theta_+, \theta_-) \begin{pmatrix} \hat{X}_{in}(t) \\ \hat{Y}_{in}(t) \end{pmatrix} - \sqrt{2}I \begin{pmatrix} \hat{Y}_1(t) \\ \hat{Y}_2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

Рассмотрим второе слагаемое в соотношении (2.6). В этом слагаемом находятся квадратуры  $\hat{Y}_1(t)$  и  $\hat{Y}_2(t)$ , являющиеся сжатыми. Из того факта, что в конце любого квантового вычисления необходимо произвести измерения полученного состояния, следует, что при достаточно хорошем начальном сжатии мы можем пренебречь этими слагаемыми как малыми поправками. Поэтому окончательное уравнение, связывающее входные и выходные квадратуры, можно записать в следующем виде

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out}(t) \\ \hat{Y}_{out}(t) \end{pmatrix} = M(\theta_+, \theta_-) \begin{pmatrix} \hat{X}_{in}(t) \\ \hat{Y}_{in}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta_-} \begin{pmatrix} \cos\theta_+ + \cos\theta_- & \sin\theta_+ \\ -\sin\theta_+ & \cos\theta_+ - \cos\theta_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_{in}(t) \\ \hat{Y}_{in}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Данное уравнение демонстрирует, что связь между входными и выходными квадратурами является линейной. Это означает, что можно воспользоваться теоремой о редукции Блоха-Мессиа [64], которая гласит, что матрицу  $M$ , связывающую квадратуры, можно разложить как

$$M = R(\phi_1)S(r)R(\phi_2),$$

где

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad S(r) = \begin{pmatrix} e^{-r} & 0 \\ 0 & e^r \end{pmatrix}$$

матрицы вращения и сжатия соответственно. В нашем случае такое разложение имеет следующий вид

$$M(\theta_+, \theta_-) = R\left(-\frac{1}{2}\theta_+\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{\theta_-}{2}\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\theta_+\right). \quad (3.8)$$

Таким образом, в данной схеме мы можем выполнять произвольные повороты и сжатия входных состояний, выбирая фазы локальных осцилляторов (углы  $\theta_{in}$ ,  $\theta_1$ ).

Перейдем к случаю, когда кластерное состояние состоит из большего числа узлов. Рассмотрим, например, случай четырех узлов. Схема генерации такого кластерного состояния представлена на Рис.3.2.

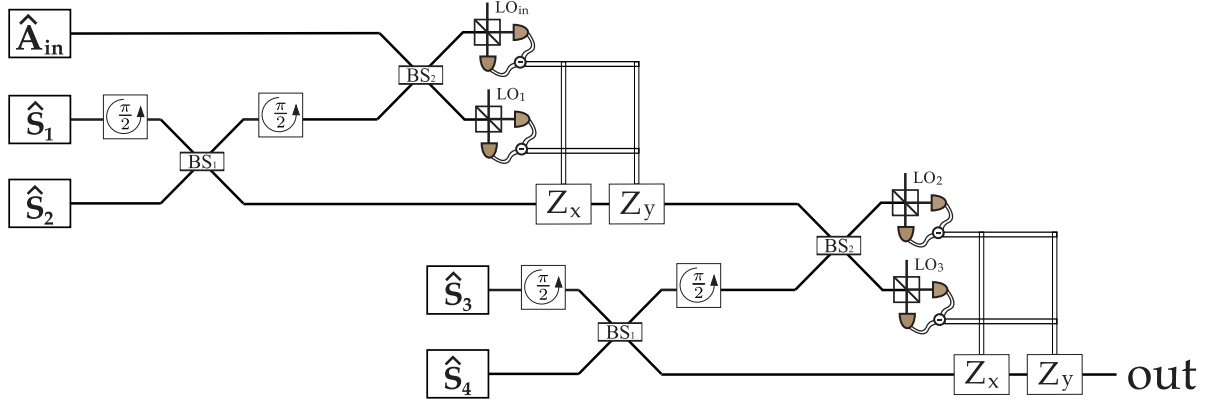


Рис. 3.2: Схема однонаправленных вычислений с помощью четырехмодового кластерного состояния. Импульсы  $\hat{S}_1$ ,  $\hat{S}_2$ ,  $\hat{S}_3$  и  $\hat{S}_4$  являются сжатыми в  $y$ -квадратурах;  $\hat{A}_{in}$  – импульс над которым мы хотим произвести вычисления.

Рисунок демонстрирует, что мы можем свести генерацию и вычисления на таком состоянии к двум последовательным схемам 3.1. Иными словами, мы отправляем выходные квадратуры после одной схемы на вход другой схемы. В результате мы получим двойное преобразование вида

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = M(\theta_{+2}, \theta_{-2}) M(\theta_{+1}, \theta_{-1}) \begin{pmatrix} \hat{X}_{in} \\ \hat{Y}_{in} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Выражая матрицы  $M(\theta_{+2}, \theta_{-2})$  и  $M(\theta_{+1}, \theta_{-1})$  в виде произведения вращения и сжатия мы получим

$$\begin{aligned} M(\theta_{+2}, \theta_{-2}) M(\theta_{+1}, \theta_{-1}) &= \\ &= R\left(-\frac{1}{2}\theta_{+2}\right) S\left(\ln\left(\tan\frac{\theta_{-2}}{2}\right)\right) R\left(-\frac{1}{2}\theta_{+2}\right) R\left(-\frac{1}{2}\theta_{+1}\right) S\left(\ln\left(\tan\frac{\theta_{-1}}{2}\right)\right) R\left(-\frac{1}{2}\theta_{+1}\right) \end{aligned}$$

Если выбрать  $\theta_{-1} = \frac{\pi}{2}$ , то мы получим  $S\left(\ln\left(\tan\frac{\theta_{-1}}{2}\right)\right) = I$ , и следовательно

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out} \\ \hat{Y}_{out} \end{pmatrix} = R\left(-\frac{1}{2}\theta_{+2}\right) S\left(\ln\left(\tan\frac{\theta_{-2}}{2}\right)\right) R\left(-\frac{1}{2}\theta_{+2} - \frac{1}{2}\theta_{+1}\right) \begin{pmatrix} \hat{X}_{in} \\ \hat{Y}_{in} \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы получили преобразование состоящее из двух вращений на разные углы и сжатия. А это означает, что с помощью данной схемы мы можем выполнить любое линейное преобразование(преобразование Боголюбова) над входным полем.

### 3.1.1 Примеры преобразований

Рассмотрим преобразования над входными модами, полученные в результате выбора углов  $\theta_k$ ,  $k = \{1, in\}$ , в амплитуде локального осциллятора при гомодинном детектировании. Для простоты будем использовать двухмодовое кластерное состояние.

#### Телепортация

В качестве примера рассмотрим чистую телепортацию. Для этого мы должны потребовать, чтобы матрица  $M(\theta_+, \theta_-)$  в уравнении 2.7 была единичной. Это условие достигается при выборе углов  $\theta_+ = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  и  $\theta_- = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

## Сжатие

Далее рассмотрим возможность сжатия входных состояний в зависимости от выбора углов  $\theta_+$  и  $\theta_-$ . В качестве входного состояния возьмем когерентное состояние с хорошо известными свойствами  $\langle (\delta\hat{X}_{in})^2 \rangle = \langle (\delta\hat{Y}_{in})^2 \rangle = \frac{1}{4}$ ,  $\langle \delta\hat{X}_{in} \delta\hat{Y}_{in} \rangle = \langle \delta\hat{X}_{in} \rangle \langle \delta\hat{Y}_{in} \rangle$ . Из уравнения (2.7) найдем среднеквадратичные флуктуации квадратур на выходе в зависимости от среднеквадратичных флуктуаций на входе. Эта зависимость имеет вид

$$\langle (\delta\hat{X}_{out})^2 \rangle = \frac{1}{4 \sin^2 \theta_-} (\sin^2 \theta_+ + (\cos \theta_+ + \cos \theta_-)^2), \quad (3.10)$$

$$\langle (\delta\hat{Y}_{out})^2 \rangle = \frac{1}{4 \sin^2 \theta_-} (\sin^2 \theta_+ + (\cos \theta_+ - \cos \theta_-)^2). \quad (3.11)$$

Построим контурный график этих среднеквадратичных флуктуаций в зависимости от углов  $\theta_+$  и  $\theta_-$ .

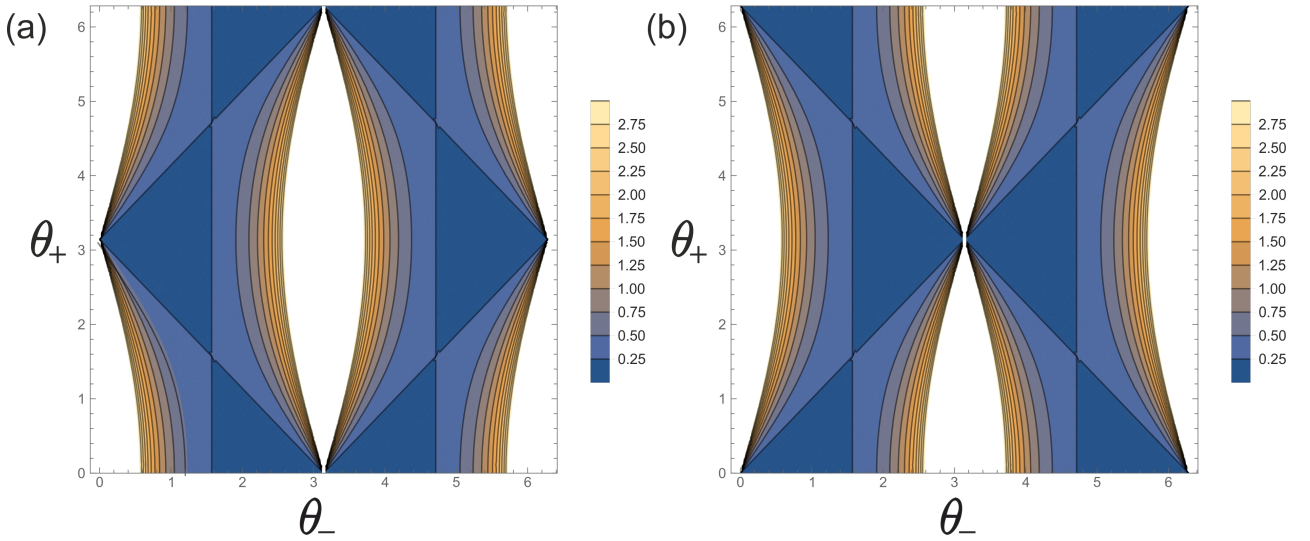


Рис. 3.3: Контурный график среднеквадратичных флуктуаций а)  $\langle (\delta\hat{X}_{out})^2 \rangle$  и б)  $\langle (\delta\hat{Y}_{out})^2 \rangle$  в зависимости от углов  $\theta_+$  и  $\theta_-$ .

График демонстрирует, что при выборе значений  $\theta_+$  и  $\theta_-$ , лежащих в области, закрашенной синим цветом, мы получим на выходе сжатое состояние. Области параметров, закрашенных белым цветом, соответствуют растянутым квадратурам.

Рассмотрим случай идеального сжатого состояния, то есть состояния, чьи флуктуации удовлетворяют соотношению  $\sqrt{\langle (\delta\hat{Y})^2 \rangle \langle (\delta\hat{X})^2 \rangle} = \frac{1}{4}$ . Если подставить в это равенство соотношения 3.10 и 3.11, мы получим

$$\sqrt{\langle (\delta\hat{Y}_{out})^2 \rangle \langle (\delta\hat{X}_{out})^2 \rangle} = \frac{\sqrt{1 + \cos^4 \theta_- - 2 \cos^2 \theta_- \cos 2\theta_+}}{4 \sin \theta_-}$$

Как видно из этого равенства, при выборе  $\theta_+ = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  мы будем получать идеальное сжатое состояние при любом  $\theta_-$ .



## 3.2 Однонаправленные вычисления на кластерном состоянии, полученном в ходе мысленного эксперимента

Перейдем к однонаправленным вычислениям на нашем кластерном состоянии. Для реализации этих вычислений воспользуемся модифицированной схемой генерации кластерного состояния Рис.2.1. Модификация будет заключаться в том, что в нижнем плече интерферометра Маха–Цандера до светоделителя ( $BS_2$ ) мы установим переключатель [15], имеющий три режима работы Рис.3.4. В первом режиме работы с помощью этого переключателя можно ввести внешнее поле в нижний канал интерферометра, во втором режиме переключатель никак не влияет на поля, идущие в интерферометре, а в третьем он выводит поле из нижнего плеча интерферометра.

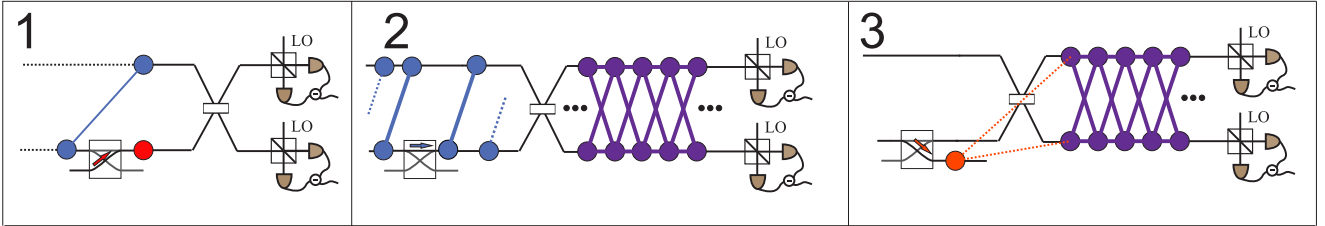


Рис. 3.4: Три различных режима работы переключателя. В первом режиме с помощью переключателя можно ввести свет в интерферометр. Во втором режиме он пропускает все световые импульсы, идущие в нижнем плече интерферометра. В третьем – можно вывести световой импульс из интерферометра.

Рассмотрим пошагово механизм вычисления на кластерном состоянии Рис.3.5. Предположим, что мы имеем две пары сжатых импульсов от субпуассоновского источника. Амплитуды этих импульсов обозначим  $\hat{S}_{in,1}^{j=1}(\tau_1)$ ,  $\hat{S}_{in,1}^{j=2}(\tau_1)$  и  $\hat{S}_{in,2}^{j=1}(\tau_2)$ ,  $\hat{S}_{in,2}^{j=2}(\tau_2)$ , где время  $\tau_1 \in [0, T]$ , а  $\tau_2 \in [T_0, T_0 + T]$ . Как было показано ранее, подходя ко второму светоделителю ( $BS_2$ ) пары этих импульсов перепутываются и задерживаются в нижнем плече интерферометра, поэтому их амплитуды можно переписать как  $i\hat{E}_1^{j=1}(\tau_1)$ ,  $\hat{E}_1^{j=2}(\tau_2)$  и  $i\hat{E}_2^{j=1}(\tau_2)$ ,  $\hat{E}_2^{j=2}(\tau_3)$ , где  $\tau_3 \in [2T_0, 2T_0 + T]$ . Воспользуемся первым режимом работы переключателя и введем в интерферометр поле  $\hat{A}_{in}(\tau_1) = \hat{X}_{in}(\tau_1) + i\hat{Y}_{in}(\tau_1)$  так, чтобы оно совпадало по времени с  $i\hat{E}_1^{j=1}(\tau_1)$ . После этого переключатель переходит во второй режим работы, и все импульсы, кроме  $\hat{E}_2^{j=2}(\tau_3)$ , отправляются на светоделитель ( $BS_2$ ) и далее на гомодинные детекторы, результаты измерения которых записываются в память. Что касается последнего импульса  $\hat{E}_2^{j=2}(\tau_3)$ , то его нужно вывести из интерферометра с помощью переключателя и отправить на ячейки, которые выполняют операции  $\hat{Z}_x(s)$  и  $\hat{Z}_y(s')$ , основываясь на результатах измерений, записанных в памяти.

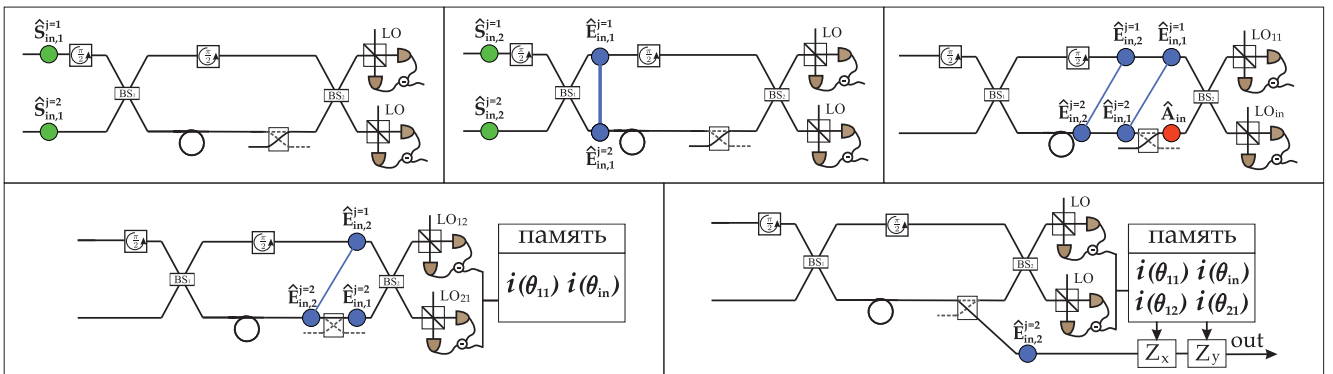


Рис. 3.5: Последовательная схема получения кластерного состояния и вычисления на нем.

Данную схему генерации кластерного состояния и вычисления на нем можно изобразить с помощью следующей схемы

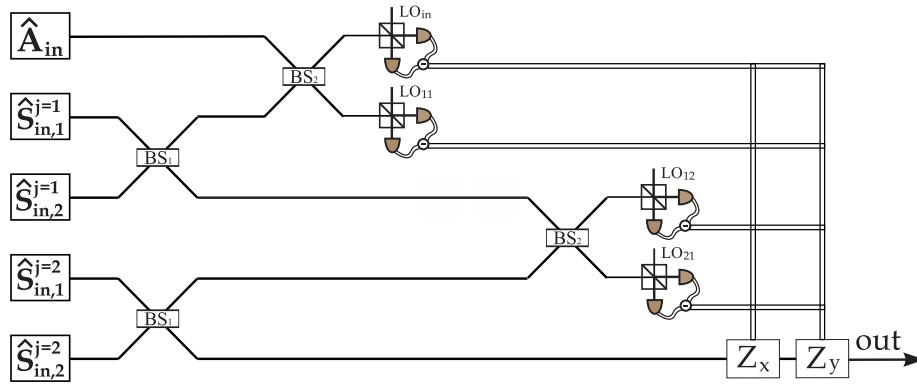


Рис. 3.6: Схема однонаправленных вычислений на кластерном состоянии, полученном в ходе мысленного эксперимента.

Данная схема почти аналогична схеме, представленной на Рис.3.2. Как видно, основное отличие заключается в том, что на той схеме смещение выходных импульсов происходит дважды. Однако легко показать, что это условие излишне и можно производить смещение выходного импульса один раз. При этом преобразование над входным импульсом никак не изменится и его можно записать как

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out}(t) \\ \hat{Y}_{out}(t) \end{pmatrix} = M(\theta_{+2}, \theta_{-2}) M(\theta_{+1}, \theta_{-1}) \begin{pmatrix} \hat{X}_{in}(t) \\ \hat{Y}_{in}(t) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Таким образом, мы видим, что с помощью нашего кластера и схемы, показанной на Рис.3.5, можно выполнять любые линейные преобразования над входным состоянием  $\hat{A}_{in}(t)$ .

# Заключение

Однонаправленные вычисления с использованием кластерных состояний света - одна из альтернативных возможностей, нацеленных на создание универсального квантового компьютера, проблематика которого является актуальной и сегодня.

В работе была рассмотрена возможность генерации кластерного состояния света с помощью двух субпуассоновских лазерных источников, в каждом из которых подавлена диффузия фаз с помощью синхронизирующего внешнего поля, а также проанализированы требования, которые накладываются на реальный источник сжатого света для создания кластерного состояния на его основе. Показано, что обсуждаемая схема, представленная на Рис.2.1, вполне осуществима не только в условиях слабого поля в чистом состоянии, но и тогда, когда исходное излучение яркое и находится в смешанном состоянии, что было продемонстрировано с помощью критерия ван Лука-Фурасавы. Помимо прочего в работе была оценена роль ненулевых спектральных компонент лазерного излучения в генерации кластерного состояния света и был исследован вопрос о сепарабельности множества электромагнитных импульсов.

В рассматриваемый мысленный эксперимент был добавлен переключатель, что позволило использовать полученное кластерное состояние для вычислений. В работе продемонстрировано, что с помощью данного кластерного состояния возможно выполнить любое линейное преобразование (преобразование Боголюбова) над входным полем.

# Литература

1. Манин Ю.И. // Советское Радио. 1980. Т. 39, № 8. с. 128.
2. P. Benioff. Quantum mechanical hamiltonian models of turing machines // Journal of Statistical Physics. 1982. Т. 29, № 3.
3. Feynman Richard P. Simulating physics with computers // International Journal of Theoretical Physics. 1982. Т. 21, № 6-7. С. 467–488.
4. et al. T. Toffoli. Automata, Languages and Programming, Seventh Colloquium. Noordwijkerhout // Springer Verlag. 1980.
5. Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. / L M Vandersypen, Matthias Steffen, Gregory Breyta [и др.] // Nature. 2001. Т. 414, № 6866. С. 883–887.
6. Quantum Factorization of 143 on a Dipolar-Coupling Nuclear Magnetic Resonance System / Nanyang Xu, Jing Zhu, Dawei Lu [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2012. Т. 108. с. 130501.
7. Raussendorf Robert, Briegel Hans J. A One-Way Quantum Computer // Phys. Rev. Lett. 2001. Т. 86. С. 5188–5191.
8. Raussendorf Robert, Browne Daniel E., Briegel Hans J. Measurement-based quantum computation on cluster states // Phys. Rev. A. 2003. Т. 68. с. 022312.
9. Measurement-based quantum computation / H. J. Briegel, D. E. Browne, W. Dür [и др.] // Nature Physics. 2009. Т. 5, № 1. С. 19–26.
10. Compendium of Quantum Physics / Holger Lyre, Daniel Greenberger, Klaus Hentschel [и др.]. Springer, 2009.
11. Raussendorf Robert, Wei TC. Quantum computation by local measurement // arXiv preprint arXiv:1208.0041. 2012. Т. 3, № 1. С. 239–261.
12. Milne Darran F., Korolkova Natalia V. Composite-cluster states and alternative architectures for one-way quantum computation // Phys. Rev. A. 2012. Т. 85. с. 032310.
13. Houhou Oussama, Aissaoui Habib, Ferraro Alessandro. Generation of cluster states in optomechanical quantum systems // Phys. Rev. A. 2015. Т. 92. с. 063843.
14. Golubeva T., Ivanov D., Golubev Yu. Broadband squeezed light from phase-locked single-mode sub-Poissonian lasers // Phys. Rev. A. 2008. Т. 77. с. 052316.
15. Ultra-large-scale continuous-variable cluster states multiplexed in the time domain / S. Yokoyama, R. Ukai, S. C. Armstrong [и др.] // Nature Photonics. 2013. Т. 7. С. 982–986.
16. Menicucci, C. Nicolas. Temporal-mode continuous-variable cluster states using linear optics // Phys. Rev. A. 2011. Т. 83. с. 062314.

17. Shor Peter W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer // SIAM J. Comput. Philadelphia, PA, USA, 1997. Oct. T. 26, № 5. C. 1484–1509.
18. Grover Lov K. Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack // Phys. Rev. Lett. 1997. T. 79. C. 325–328.
19. S. J. Lomonaco Jr. L. H. Kauffman. Quantum Hidden Subgroup Problems: A Mathematical Perspective // arXiv:quant-ph/0201095. 2002.
20. S. J. Lomonaco Jr. L. H. Kauffman. A Continuous Variable Shor Algorithm // arXiv:quant-ph/0210141. 2004.
21. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? // Physical Review. 1935. T. 47.
22. Aspect Alain, Grangier Philippe, Roger Gérard. Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem // Phys. Rev. Lett. 1981. T. 47. C. 460–463.
23. Aspect Alain, Dalibard Jean, Roger Gérard. Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers // Phys. Rev. Lett. 1982. T. 49. C. 1804–1807.
24. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels / Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau [и др.] // Phys. Rev. Lett. 1993. T. 70. C. 1895–1899.
25. Vaidman Lev. Teleportation of quantum states // Phys. Rev. A. 1994. T. 49. C. 1473–1476.
26. Yonezawa Hidehiro, Furusawa Akira, van Loock Peter. Sequential quantum teleportation of optical coherent states // Phys. Rev. A. 2007. T. 76. c. 032305.
27. Yukawa Mitsuyoshi, Benichi Hugo, Furusawa Akira. High-fidelity continuous-variable quantum teleportation toward multistep quantum operations // Phys. Rev. A. 2008. T. 77. c. 022314.
28. Gottesman D. The Heisenberg Representation of Quantum Computers // arXiv:quant-ph/9807006. 1998.
29. Bartlett Stephen D., Munro William J. Quantum Teleportation of Optical Quantum Gates // Phys. Rev. Lett. 2003. T. 90. c. 117901.
30. Zhang Jing, Braunstein Samuel L. Continuous-variable Gaussian analog of cluster states // Phys. Rev. A. 2006. T. 73. c. 032318.
31. Universal Quantum Computation with Continuous-Variable Cluster States / Nicolas C. Menicucci, Peter van Loock, Mile Gu [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2006. T. 97. c. 110501.
32. Nielsen Michael A. Cluster-state quantum computation // Reports on Mathematical Physics. 2006. T. 57, № 1. C. 147 – 161.
33. van Loock Peter. Examples of Gaussian cluster computation // J. Opt. Soc. Am. B. 2007. T. 24, № 2. C. 340–346.
34. Elementary gates for quantum computation / Adriano Barenco, Charles H. Bennett, Richard Cleve [и др.] // Phys. Rev. A. 1995. T. 52. C. 3457–3467.
35. M.A. Nielsen I. L. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

36. Universal quantum computer from a quantum magnet / Jianming Cai, Akimasa Miyake, Wolfgang Dür [и др.] // Phys. Rev. A. 2010. Т. 82. с. 052309.
37. Generation of cluster states / Ping Dong, Zheng-Yuan Xue, Ming Yang [и др.] // Phys. Rev. A. 2006. Т. 73. с. 033818.
38. Zou XuBo, Mathis W. Schemes for generating the cluster states in microwave cavity QED // Phys. Rev. A. 2005. Т. 72. с. 013809.
39. Cho Jaeyoon, Lee Hai-Woong. Generation of Atomic Cluster States through the Cavity Input-Output Process // Phys. Rev. Lett. 2005. Т. 95. с. 160501.
40. Zheng Shi-Biao. Generation of cluster states in ion-trap systems // Phys. Rev. A. 2006. Т. 73. с. 065802.
41. One-way quantum computation with four-dimensional photonic qudits / Jaewoo Joo, Peter L. Knight, Jeremy L. O'Brien [и др.] // Phys. Rev. A. 2007. Т. 76. с. 052326.
42. Yoran N., Reznik B. Deterministic Linear Optics Quantum Computation with Single Photon Qubits // Phys. Rev. Lett. 2003. Т. 91. с. 037903.
43. Browne Daniel E., Rudolph Terry. Resource-Efficient Linear Optical Quantum Computation // Phys. Rev. Lett. 2005. Т. 95. с. 010501.
44. Experimental Realization of One-Way Quantum Computing with Two-Photon Four-Qubit Cluster States / Kai Chen, Che-Ming Li, Qiang Zhang [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2007. Т. 99. с. 120503.
45. Lloyd Seth, Braunstein Samuel L. Quantum Computation over Continuous Variables // Phys. Rev. Lett. 1999. Т. 82. С. 1784–1787.
46. Universal Quantum Computation with Continuous-Variable Cluster States / Nicolas C. Menicucci, Peter van Loock, Mile Gu [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2006. Т. 97. с. 110501.
47. Universal linear Bogoliubov transformations through one-way quantum computation / Ukai R., Yoshikawa J., Iwata N. [и др.] // Phys. Rev. A. 2010. Т. 81. с. 032315.
48. hui Sun Li, qin Chen Yan, xiang Li Gao. Creation of four-mode weighted cluster states with atomic ensembles in high-Q ring cavities // Opt. Express. 2012. Т. 20, № 3. С. 3176–3191.
49. Ultracompact generation of continuous-variable cluster states / N. Menicucci, S. Flammia, H. Zaidi [и др.] // Phys. Rev. A. 2007. Т. 76. с. 010302.
50. Menicucci N., Flammia S., Pfister O. One-Way Quantum Computing in the Optical Frequency Comb // Phys. Rev. Lett. 2008. Т. 101. с. 130501.
51. Flammia S., Menicucci N., Pfister O. The optical frequency comb as a one-way quantum computer // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. 2009. Т. 42, № 11. с. 114009.
52. Weaving quantum optical frequency combs into continuous-variable hypercubic cluster states / Pei Wang, Moran Chen, Nicolas C. Menicucci [и др.] // Phys. Rev. A. 2014. Т. 90. с. 032325.
53. R. Shahrokhshahi, O. Pfister, E Polzik. Large-scale multipartite entanglement in the quantum optical frequency comb of a depleted-pump optical parametric oscillator // Quantum Information and Computation. 2012. Т. 12, № 11. С. 953–969.

54. Chen Moran, Menicucci Nicolas C., Pfister Olivier. Experimental Realization of Multipartite Entanglement of 60 Modes of a Quantum Optical Frequency Comb // *Phys. Rev. Lett.* 2014. T. 112. c. 120505.
55. Parallel Generation of Quadripartite Cluster Entanglement in the Optical Frequency Comb / Pysheer M., Miwa Y., Shahrokhshahi R. [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2011. T. 107. c. 030505.
56. One-way quantum computing with arbitrarily large time-frequency continuous-variable cluster states from a single optical parametric oscillator / Rafael N. Alexander, Pei Wang, Niranjana Sridhar [и др.] // *Phys. Rev. A.* 2016. T. 94. c. 032327.
57. Experimental generation of four-mode continuous-variable cluster states / Yukawa M., Ukai R., van Loock P. [и др.] // *Phys. Rev. A.* 2008. T. 78. c. 012301.
58. Menicucci Nicolas C. Temporal-mode continuous-variable cluster states using linear optics // *Phys. Rev. A.* 2011. T. 83. c. 062314.
59. Quantum computing with continuous-variable clusters / Mile Gu, Christian Weedbrook, Nicolas C. Menicucci [и др.] // *Phys. Rev. A.* 2009. T. 79. c. 062318.
60. Demonstration of Unconditional One-Way Quantum Computations for Continuous Variables / Ryuji Ukai, Noriaki Iwata, Yuji Shimokawa [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2011. T. 106. c. 240504.
61. van Loock P., C. Weedbrook, M. Gu. Building Gaussian cluster states by linear optics // *Phys. Rev. A.* 2007. T. 76. c. 032321.
62. Quadrature squeezing in an isolated pulse of light / K. S. Samburskaya, T. Yu. Golubeva, V. A. Averchenko [и др.] // *Optics and Spectroscopy.* 2012. T. 113, № 1. C. 86–95.
63. van Loock Peter, Furusawa Akira. Detecting genuine multipartite continuous-variable entanglement // *Phys. Rev. A.* 2003. T. 67. c. 052315.
64. Braunstein Samuel L. Squeezing as an irreducible resource // *Phys. Rev. A.* 2005. May. T. 71. c. 055801.