

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра радиофизики

Направление «Прикладные математика и физика»



НЕСТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПРОФИЛЯ ВОЗДУШНОЙ ДУГИ

Магистерская диссертация студента дневного отделения

_____ **Васильева Артема Геннадьевича**

_____ Научный руководитель:
к. т. н., ст. преп. **Самусенко А.В.**

_____ Рецензент:
д. т. н., зав. лаб., "Институт электро-
физики и электроэнергетики РАН", **Сафронов А.А.**

Санкт-Петербург
2017

Оглавление

Введение	4
Предмет исследования	4
Цель и задачи исследования	4
Актуальность работы	5
Новизна	6
Научная значимость	7
Практическая значимость	7
Методология и обоснование достоверности	7
Апробация работы	8
1. Обзор литературы	9
1.1 Падение потенциала	9
1.1 Степень равновесности плазмы	10
1.2 Ионизация	11
1.3 Механизмы отвода тепла	11
1.4 Температура и диаметр	13
1.5 Давление	15
1.6 Вольтамперная характеристика	15
1.7 Напряженность электрического поля	17
1.8 Дуговой разряд в открытой атмосфере	18
1.9 Влияние материала электродов и газовой среды на характеристики дугового разряда	21
1.10 Моделирование дуговых разрядов	22
1.11 Материальные свойства плазмы	24
2. Постановка задачи	26
2.1 1D-модель	26
2.1.1 Геометрия	26
2.1.2 Система уравнений	27
2.1.3 Преобразование системы уравнений	29
2.1.4 Численная реализация	30
2.2 2D-модель	36
2.2.1 Система уравнений	36
2.2.2 Геометрия. Начальные и граничные условия	38
3. Обоснование достоверности	39
3.1 Локальное термодинамическое равновесие	39

3.2	Корректность описания динамики изменения концентраций плазменных компонент	42
3.3	Корректность описания электрической подсистемы	43
3.1	Цилиндрическая симметрия, конвекция	44
3.2	Постоянство давления.	47
3.3	Сеточная сходимость.....	47
3.3.1	1D-модель	47
3.3.2	2D-модель	50
4.	Верификация модели.....	51
4.1	Подбор параметров по экспериментальным данным.....	51
4.2	Верификация по температурному профилю.....	54
4.3	Верификация по ВАХ	55
5.	Моделирование.....	56
5.1	Материальные свойства и параметры модели	56
5.2	Начальные условия	57
5.3	1D-моделирование.....	58
5.3.1	Динамика изменения температурного профиля. Релаксационные задержки ..	58
5.3.2	Радиус дугового канала	59
5.3.3	Зависимость от амплитуды тока	60
5.3.4	Зависимость от мощности излучения	64
5.3.5	Зависимость от мощности конвективного теплоотвода	65
5.4	2D- моделирование.....	68
5.5	Сравнение результатов 2D и 1D моделирования	71
6.	Заключение	73
	Благодарности	76
	Список литературы	77

Введение

Данная работа является продолжением бакалаврской работы [1]. Для полноты и целостности изложения в данной диссертации присутствуют выдержки из бакалаврской работы.

Предмет исследования

В данной работе рассматривается разряд, возникающий в воздухе при замыкании проводников посредством образования между ними плазменного дугового канала. Под дуговым каналом понимается область горячего, ионизированного воздуха, проводящего электрический ток. Такой разряд может самопроизвольно появляться на высоковольтных линиях электропередач (Рис. 1 а) или на коммутационном оборудовании электрических подстанций при размыкании высоковольтной цепи (Рис. 1 б). Таким образом, предметом исследования является свободно горящий (горящий в открытом пространстве, ничем не ограниченный) дуговой разряд в воздухе при атмосферном давлении для токов промышленной частоты (50 Hz) с амплитудой порядка $10 \text{ A} \div 100 \text{ kA}$.

Рассматриваются процессы, протекающие в плазменном канале и определяющие его температуру, давление, проводимость, электрическое и магнитное поле, такие как: генерация тепла посредством Джоулева нагрева, перераспределение тепла за счет теплопроводности и конвекции, излучение тепла в окружающую среду, диффузия, миграция заряженных частиц в электрическом поле, скин-эффект, пинч-эффект. Также внимание уделяется химическим реакциям, имеющим место в воздушной плазме и влияющим на ее материальные свойства.

Также необходимо отметить, что в данной работе рассматриваются не стационарные состояния дугового разряда, а изменяющиеся во времени характеристики, т.е. динамика процессов, происходящих при дуговом замыкании.



а) на ЛЭП



б) на размыкателе

Рис. 1. Дуговое замыкание.

Цель и задачи исследования

Целью данной работы является создание и верификация модели, описывающей динамику погонной проводимости описанного выше дугового разряда. Данная модель с надлежащей точностью должна описывать физические процессы, протекающие в плазме дугового канала. Под надлежащей точностью понимается способность модели воспроизводить основные характерные особенности динамики разряда, например, релаксационные задержки температуры и связанные с

ними выбросы напряженности электрического поля. Кроме того, численная реализация данной модели должна обладать высоким быстродействием и устойчивостью.

Дополнительная цель исследования – моделирование дугового разряда. В том числе исследование зависимостей характеристик разряда от условий, в которых он горит, например, от амплитуды тока или мощности тепловых потерь.

Для достижения сформулированных выше целей были поставлены следующие задачи:

1. Обзор литературы (как фундаментальных трудов, так и современных работ) по данной тематике для составления полной картины о явлении дугового замыкания, процессах, происходящих в плазме дугового разряда, о методах моделирования и результатах экспериментальных исследований данного процесса, представленных в современной литературе.
2. Создание математической модели свободно горящего дугового разряда при атмосферном давлении, содержащей минимальное число параметров, требующих определения.
3. Оценка границы применимости данной модели.
 - a. Оценка времен химической релаксации плазмы дугового разряда.
 - b. Оценка роли конвекции относительно других механизмов отвода тепла.
 - c. Оценка влияния магнитного давления на характеристики разряда.
 - d. Проверка предположения о том, что дуговой канал сохраняет цилиндрическую симметрию.
4. Разработка численной реализации созданной математической модели, требующей минимум вычислительных ресурсов, обладающей высоким быстродействием и устойчивостью.
5. Верификация численной реализации модели по имеющимся экспериментальным данным.
6. Моделирование дугового разряда при различных параметрах.
7. Выявление и описание характерных особенностей рассматриваемого явления на основе анализа результатов моделирования.

Актуальность работы

Разработка данной модели, в первую очередь, обусловлена необходимостью создания математического и численного аппарата для синтетического тестирования современных систем защиты высоковольтных сетей (так называемые Smart Grid), а именно модуля для расчета погонной проводимости дугового канала. Частью функционала таких систем является способность идентифицировать различные виды аварий, в том числе и дуговые замыкания. Для обучения и тестирования такой системы необходимо иметь либо большой набор экспериментальных данных по дуговым замыканиям в реальных сетях электроснабжения (что требует больших затрат материальных ресурсов и времени), либо иметь численную модель такой сети, которая должна включать модуль для расчета характеристик дугового замыкания. При этом численная реализация данного модуля должна обладать как можно меньшим временем расчета, т.к. для обучения и тестирования систем защиты требуется большой набор данных (статистики) по дуговым разрядам, возникающим при различных условиях. Более того, внедрение реализации модели дугового замыкания в реальные устройства защиты ставит ограничения на количество вычислительных ресурсов, а также на время расчета, т.к. характеристики дугового замыкания должны рассчитываться практически в реальном времени, например, для подтверждения детектированного системой дугового замыкания путем сравнения результатов моделирования при конкретных условиях (параметры моделирования могут быть получены из системы мониторинга сети) с данными об аварии, получаемыми в реальном времени.

Реальные сильноточные свободно горящие воздушные дуги характеризуются крайне нерегулярным поведением, в котором проявляется множество различных физических аспектов. С одной стороны, на электрическую подсистему оказывает непосредственное влияние эволюция формы дугового канала [2] [3] [4], в частности, такие процессы, как выдувание тела дуги, рост и схлопывание «петель» и перемещение точек привязки дугового канала. Другим важным аспектом с точки зрения электрической подсистемы является описание процессов, протекающих в плазме воздушной дуги и определяющих ее погонную электропроводность [5]. В этом случае приходится иметь дело с начально-краевой задачей для сильно нелинейного уравнения баланса энергии, описывающего эволюцию температурного профиля в равновесной плазме воздушной дуги [6]. Наличие сильной нелинейности по меньшей мере делает затруднительным использование стандартных численных пакетов вроде программ для решения этой задачи, вынуждая исследователя тщательно подбирать параметры дискретизации и настройки решателя методом проб и ошибок. Более того, решение подобных задач с помощью стандартных пакетов для численного моделирования требует больших затрат вычислительных ресурсов и времени.

Таким образом, из вышесказанного следует, что для создания полной модели, способной с надлежащей точностью численно описывать необходимые характеристики свободно горящих дуговых замыканий в воздухе, требуются: модуль расчета эволюции формы дугового канала, который на данный момент уже реализован в виде готового программного продукта [2], и модуль для расчета динамики погонной проводимости дугового столба, созданию которого и посвящена данная работа.

По этим причинам создание специализированной численной схемы, реализующей эффективный расчет температурного профиля дугового разряда является актуальной задачей (даже при наличии достаточно большого спектра численных пакетов для моделирования).

Также хотелось бы отметить, что в последнее время все больше возрастает интерес к разработке устройств для получения воздушной плазмы в связи с необходимостью создания новых экологически благоприятных методов обезвреживания и переработки отходов. Одним из таких устройств является высоковольтный однофазный генератор плазмы, исследование плазменной струи которого актуально, как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения [7].

Новизна

Новизна работы следует из анализа методик моделирования дуговых разрядов атмосферного давления, представленных в литературе. Уникальность данной работы заключается в следующем:

1. Разработанная модель описывает динамику процессов, происходящих в плазме дугового канала, а не стационарные состояния разряда.
2. Используется открытая постановка задачи (отсутствуют пространственные ограничения разряда).
3. Учитывается отвод тепла за счет излучения.
4. Учитывается отвод тепла за счет конвекции.
5. Для реализации математической модели разработана оригинальная численная схема, в которой для оптимизации расчета используется техника адаптивного шага по времени.
6. При моделировании используются температурные зависимости материальных свойств среды в оригинальном виде (без какого-либо упрощения данных зависимостей).
7. Проведена оценка времен химической релаксации равновесной воздушной плазмы в широком температурном диапазоне.

8. Проведена оценка влияния магнитного поля и конвекции на характеристики дугового разряда посредством численного 2D-моделирования.

В изученной литературе встречались методики моделирования температурного профиля дугового разряда, соответствующие пунктам 1, 3 и 4 по отдельности, но не в совокупности.

Подробный анализ методик моделирования дугового разряда и их отличия (в том числе недостатки относительно поставленной цели) от представленной методики изложены в разделе «Обзор литературы».

Научная значимость

В отличие от большинства работ в данной области, например [6] [8] [9], особенностью этого исследования является рассмотрение не стационарных состояний, как было отмечено ранее, а динамики процессов, происходящих при дуговом замыкании. Такой подход позволяет получить временные зависимости характеристик разряда, но что более важно, с помощью анализа результатов и уравнений, описывающих модель, можно объяснить формы полученных зависимостей. Данное описание физических процессов, протекающих в плазме дугового разряда является существенным с фундаментальной точки зрения результатом. Более того, дуга рассматривается в открытом пространстве, что также отличает данное исследование от большинства работ, представленных в литературе и дает возможность получить новые результаты [1].

Практическая значимость

Практическую значимость работы можно обосновать тем, что построение численных моделей дугового разряда в воздухе при атмосферном давлении, другими словами, воздушного дугового замыкания, представляет значительный интерес с точки зрения разработки, настройки и тестирования современных систем защиты, применяемых в высоковольтных сетях среднего и высокого класса напряжений. Наличие такой модели потенциально способно значительно уменьшить время разработки и тестирования систем защиты, по сравнению с экспериментальными методами, позволит расширить спектр аварийных ситуаций, на которые будет реагировать система защиты, так как некоторые из них сложно воссоздать в реальном эксперименте. Тем самым можно уменьшить время и материальные затраты на разработку и повысить качество выпускаемого продукта. При этом важно, чтобы численный алгоритм мог проводить расчеты в реальном времени, т. е. обладал большим быстродействием. Это необходимо для внедрения данной модели в системы локализации аварий [1].

Методология и обоснование достоверности

Представленная методика моделирования динамики погонной проводимости дугового канала заключается в следующем:

- Параметрами модели являются зависимость тока от времени, температурные зависимости материальных свойств среды, а также два параметра, характеризующие мощность отвода тепла за счет излучения и конвекции. Последние два параметра подбираются путем сравнения модельных и экспериментальных осциллограмм напряженности электрического поля, нормированных на действующее значение напряженности.
- Из уравнения баланса энергии (уравнение Эленбааса-Геллера) рассчитывается температурный профиль канала.
- По распределению температуры находится удельная проводимость в каждой точке канала.

- Интегрируя удельную проводимость по сечению канала, рассчитывается погонная проводимость.

Достоверность данной методики следует из анализа приближений, которые применялись для построения математической модели, другими словами, из ее границ применимости. В литературе частично приводится данный анализ, который доказывает, что рассматриваемая модель применима для воздушной плазмы при атмосферном давлении. Более того, в текущей работе был проведен подробный анализ границ применимости данной модели, а также проверена корректность введенных приближений, что еще раз доказывает достоверность данной методики моделирования и полученных результатов.

Апробация работы

Данная работа была представлена (и включена в сборники трудов) на следующих конференциях:

- Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики, 2015, Петергоф [5];
- Электротехника. Электротехнология. Энергетика, 2015, Новосибирск [10];
- Всероссийский молодежный научный форум "Наука будущего - наука молодых", 2016, Казань [11];
- Materials Science and Condensed Matter Physics, 2016, Chisinau, Republic of Moldova [12];

А также опубликована в журнале:

- Современные проблемы науки и образования, 2015 [13].

1. Обзор литературы

Исследование дуговых разрядов в воздухе представляет большой интерес как с научной, так и с практической точек зрения. В литературе существует огромное количество работ, посвященных данной тематике. Среди них есть как фундаментальные труды [14] [15] [16] [17], в которых описаны физические процессы, происходящие в плазме разрядов различного типа, такие как: элементарные процессы обмена/переноса энергии, ионизация/рекомбинация, излучение, распределения частиц по скоростям/энергиям, движение заряженных частиц в электрическом/магнитном поле, диффузия, так и работы более узкой тематики, посвященные, например, моделированию температурного профиля дугового разряда [9] [6], моделированию дугового разряда в целом [18], расчету равновесных концентраций компонент плазмы [19], расчету материальных свойств горячего воздуха [20], а также воздуха с примесями различных металлов [21] [22], изучению излучения плазменного шнура [23] [24]. Есть и работы, посвященные экспериментальному исследованию дуговых разрядов как в открытом воздухе [4] [3], так стабилизированных разрядов в закрытом пространстве [6] [7]. В фундаментальных работах [15] [16] [17], также, присутствует множество экспериментальных данных по дуговым замыканиям.

Дуговые разряды, горящие при давлениях $p \geq 1$ atm, как в свободной атмосфере воздуха (в том числе с примесями различных металлов), так и стабилизированные дуги при атмосферном давлении в закрытой системе, относятся к разрядам высокого давления [16] [17]. Столб дуги атмосферного давления – наиболее типичный и распространенный образец плотной низкотемпературной плазмы, поддерживаемой электрическим полем [17]. В литературе [15] [16] [17] [6] приводятся следующие характеристики, присущие разрядам данного типа:

- Характерные токи разряда порядка $1 \div 10^5$ А и выше.
- Температура плазмы порядка $10^3 \div 10^4$ К.
- Напряженность электрического поля в столбе $10 \div 100$ В/см.
- Диаметр дугового канала порядка единиц сантиметров.
- Высокая плотность тока порядка $10^2 \div 10^7$ А/см².
- Ясно очерченные границы дугового канала.
- Малое падение напряжения в приэлектродных областях порядка $10 \div 20$ В.
- Плазма дугового разряда находится в состоянии локального термодинамического равновесия, по крайней мере в центральной (наиболее горячей) области канала.
- Дуговой канал однороден вдоль своей оси и имеет цилиндрическую симметрию, за исключением приэлектродных областей, имеющих размеры порядка нескольких миллиметров.

1.1 Падение потенциала

При дуговом замыкании между контактами устанавливается напряжение:

$$U = U_k + U_a + U_{arc}$$

где U_k , U_a , U_{arc} – падение напряжения на катоде, аноде и в дуговом канале, соответственно (Рис. 2). При этом, даже учитывая тот факт, что напряженность электрического поля в катодной и анодной областях значительно выше напряженности поля в дуговом столбе, падение напряжения на этих участках на порядок меньше, чем в центральной области (область горения дуги). Объясняется это тем, что протяженность центрального участка ($\sim 1 \div 100$ см) на порядки меньше размеров приэлектродных областей ($\sim 10^{-4} \div 10^{-1}$ см) [15].

Из вышесказанного можно сделать вывод, что при моделировании дуг, длина которых составляет порядка нескольких сантиметров, пренебрежение приэлектродным падением напряжения не приведет к заметному увеличению погрешности расчетов.

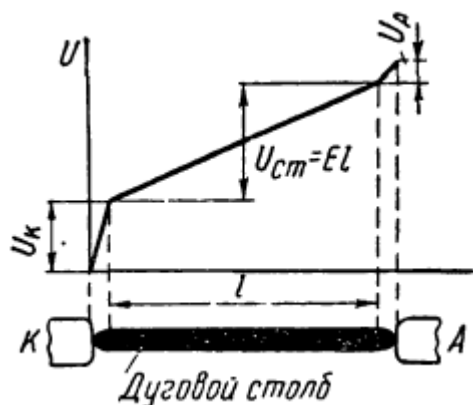


Рис. 2. Схематическое изображение распределения напряжения вдоль дугового столба [15]

1.1 Степень равновесности плазмы

Равновесная плазма характеризуется термодинамическими параметрами, например, температурой (которая одинакова как для электронов, так и для тяжелых частиц) и давлением. Простые термодинамические соотношения, например, Уравнение Саха, функции распределения Больцмана и Максвелла, полностью определяют состав плазмы, скорость поступательного движения частиц, концентрации частиц [14]. Все прямые элементарные процессы находятся в равновесии с обратными: излучение уравновешено поглощением, ионизация – рекомбинацией, возбуждение ударами частиц – потерями на неупругие столкновения и т.д. [16].

Внешние поля, излучение, конечные скорости химических процессов нарушают т/д равновесие, а столкновительные процессы, приводящие к перераспределению энергии и импульсов частиц, напротив, способствуют его восстановлению. В итоге устанавливается некоторое неравновесное состояние. При этом его близость к равновесному определяется соотношением между факторами, нарушающими и восстанавливающими равновесие [14].

В пространственно-неоднородной плазме часто возникают условия, при которых плазма оказывается равновесной по отношению к локальным (в окрестности какой-либо точки) т/д параметрам. В этом случае вводят понятие локального термодинамического равновесия (ЛТР) [14].

Степень равновесности плазмы зависит от рода газа, силы тока и давления. Плазма воздуха и других молекулярных газов, паров металлов при давлениях $p \geq 1 \text{ atm}$ практически при любых токах – равновесна. Это объясняется интенсивным обменом энергией между электронами и молекулами через возбуждение колебательных и вращательных степеней свободы, а в парах металлов – большими сечениями упругого рассеяния электронов [17].

Следует различать два критерия равновесности – это химическое равновесие и тепловое. При этом время восстановления химического равновесия всегда больше, чем время, за которое сравниваются температуры плазменных компонент (что можно увидеть, например, из приведенной ниже оценки). Это можно объяснить тем, что химические реакции протекают гораздо медленнее, чем реакции обмена энергией (следует из сечений данных реакций).

Оценка времени, за которое температуры всех плазменных компонент сравниваются после некоторого возмущения напряженности электрического поля, приведена в [6] для азотной плазмы при 10000 К и составляет $\tau_{eq} \approx 1 \mu\text{s}$. В данном источнике также приводится оценка для времени химической релаксации, сделанная на основании анализа кинетики химических реакций, для такой же плазмы при 6000 К: $\tau_{ch} = 20 \text{ ns}$. Следовательно, плазма разряда, протекающего в азоте, будет равновесной в электрических полях с частотой $\nu < 1 \text{ kHz}$.

При этом необходимо отметить, что данная оценка времени химической релаксации была сделана при рассмотрении всего одной реакции (самой медленной по мнению автора), протекающей в азотной плазме. Этот факт ставит под сомнение корректность полученного численного результата в 20 ms, т.к. в плазме воздуха протекает огромное количество взаимосвязанных между собой реакций (в работе [25] их выделено 94), что может на порядки завысить или занижить данное значение. Поэтому задачей текущей работы является оценка времени химической релаксации воздушной плазмы в характерном для дуговых разрядов диапазоне температур.

1.2 Ионизация

В передаче электрического тока через дуговой канал существенную роль играет ионизация. Если бы ее не было, то электроны, выходящие с катода, не достигали бы анода даже при очень коротких дугах, т.к. длина их свободного пробега в газовой среде высокого ($p \geq 1 \text{ atm}$) давления крайне мала [15]. В связи с этим, встает вопрос: что влияет на процессы рождения электронов и ионов в плазме дугового канала.

Электрическая напряженность в дуговом канале не способна обеспечить ионизацию нейтральных частиц за счет ускорения электронов полем (ударная ионизация). Например, для молекулы азота энергия, которая требуется для ее ионизации равна 16 eV, а электрон на пути свободного пробега успевает накопить энергию порядка 0.016 eV, что составляет 0.1% от того, что требуется для ионизации. Даже допуская ступенчатую ионизацию молекул через промежуточные фазы возбуждения, при которой для каждого соударения может потребоваться примерно вдвое меньший запас энергии, электрон не успеет накопить нужное количество энергии за время свободного пробега, при характерных для дуг высокого давления напряженностях электрического поля [15].

С другой стороны, количественный анализ термической ионизации показывает, что данный вид ионизации способен обеспечить необходимую концентрацию электронов для протекания электрического тока в разрядах высокого давления [15]. При этом термическая ионизация происходит независимо от того каким путем энергия поступает в систему [17]. Таким образом, ионизация в плазме дугового разряда высокого давления не зависит от напряженности электрического поля и является функцией только температуры газа.

1.3 Механизмы отвода тепла

Дуга прогревается за счет Джоулева нагрева и охлаждается посредством излучения, теплопроводности и конвекции. Непосредственно из проводящего канала тепло выносится посредством теплопроводности, а также излучения (конвекционные течения в центральной области канала практически отсутствуют). Дальнейшая судьба теплового потока зависит от организации разряда. Если дуга горит в трубке, то тепло отводится через охлаждаемые стенки. Дуга может обдуваться потоком холодного газа (продольно или тангенциально), который уносит энергию. Если же разряд горит в свободной атмосфере, тепло уходит благодаря возникающим конвективным потокам, а также благодаря отрыву плазменных петель [17]. При этом соотношения между вкладами различных механизмов теплоотвода сильно зависят от материала электродов и вида дуги. Так, например, наличие примесей металла в плазме разряда увеличивает интенсивность излучения на несколько порядков [24].

Ниже представлена таблица, в которой приведены характерные параметры разрядов различного типа, а также вклад различных механизмов отвода тепла (Таб. 1). Из таблицы видно, что обдуваемая дуга имеет значительно меньший диаметр и большие потери, чем свободная. В свободно горящей и обдуваемой дуге теплоотвод идет в основном за счет конвекции, а в стабилизированной дуге, когда проникновение газа в центральную область становится

ничтожным, на первое место выступает теплопроводность [15]. Столь большие значения мощности конвективного теплоотвода в данной работе по сравнению, например, с работами [16] и [6] можно объяснить тем, что здесь рассматриваются отвод тепла не только за счет конвективных потоков газа, но и за счет отмирания плазменных петель, забирающих большую часть вкладываемой энергии. Но при этом отрыв петли никак не влияет на основной дуговой канал с точки зрения тепловой подсистемы – оторвавшаяся петля не забирает и не отдает энергию продолжающему гореть дуговому каналу. Следовательно, данная оценка роли конвекции в отводе тепла не имеет физического смысла в рамках рассматриваемой в текущей работе модели для расчета температурного профиля дугового разряда.

Обозначение	Размерность	Свободно горящая дуга (в воздухе)		Продольно обдуваемая дуга (в воздухе)		Стабилизированная дуга (в H_2)
I	a	50	1 000	50	1 000	5
E	v/cm	10	14,5	36	36	250
d	cm	0,5	1,5	0,06	0,47	0,1
P	$вт$	500	14 500	1800	36 000	1250
$P_{и}/P$		0,07	0,14	0,1	0,16	0,1
$P_{т}/P$		0,15	0	0	0	1
$P_{к}/P$		0,8	0,8	0,8	0,8	0
j	a/cm^2	250	550	18 000	6 000	600

Таб. 1. Характерные параметры дуговых разрядов различного типа. $P_{и}$, $P_{к}$, $P_{т}$ – мощность тепловых потерь за счет излучения, конвекции и теплопроводности, соответственно [15].

Конвекционные движения газа в дуге высокого давления существуют всегда. В горизонтальной дуге, горящей в свободной атмосфере, они вызывают изгиб столба дуги, откуда и произошло ее название. По другим оценкам, например в работе [16], отвод тепла посредством конвекции в центральных зонах дугового столба пренебрежимо мал. Мощность конвективного теплоотвода пропорциональна плотности, теплоемкости и скалярному произведению скорости газа на градиент температуры. Это можно объяснить тем, что в центральных, хорошо прогретых областях канала газ имеет малую плотность. Более того, как показывают эксперименты, в центральных зонах дуги изотермические поверхности и скорости восходящих потоков газа параллельны оси столба (следовательно, и друг другу). Таким образом их скалярное произведение равно нулю.

Вклад конвекции в теплоотвод был экспериментально проверен Кенти. Опыт заключался в измерении анодного напряжения дуги в двух случаях: в неподвижной и свободно падающей лампе (где конвекция отсутствует). Разница в напряжениях составила всего 1%. Также роль конвекции была оценена Эленбасом для вертикальной дуги в парах ртути. Он получил, что на конвекцию приходится всего 3% от общей мощности [16]. Из выше сказанного следует, что конвекция играет несущественную роль в отводе тепла. Но по данным [15] на конвекцию приходится 80% всего отводимого тепла и ей нельзя пренебрегать. Это можно объяснить тем, что в разных источниках рассматриваются разряды, горящие в разных газах и при разных условиях. Поэтому одной из задач данной работы является оценка роли конвекции в тепловом балансе в плазме дугового канала.

1.4 Температура и диаметр

Температура плазмы дугового канала находящейся в состоянии ЛТР определяется балансом процессов генерации и отвода тепла [16], описанным ранее.

На *Рис. 3. а* показано изменение температуры дуги свободно горящей в воздухе между угольными электродами. Наблюдается плавное изменение температуры, а также значительной сдвиг фаз между нулем тока и минимумом температуры. Это говорит о том, что дуга обладает значительной тепловой инерцией. Данный факт будет использован в дальнейшем для объяснения выбросов на осциллограммах напряженности электрического поля.

Несколько иная картина имеет место для стабилизированного разряда (*Рис. 3 б*). Температура столба в нулях тока (те моменты, когда ток проходит через ноль) снижается более резко, а сдвиг фаз между температурой и током практически отсутствует. Таким же образом ведет себя и зависимость диаметра дугового канала от времени, представленная на *Рис. 4*.

Экспериментальным путем было установлено, что температура свободно горящей дуги колеблется в диапазоне от 4000 К до 6500 К. При интенсивном обдуве дугового канала максимум температуры может достигать порядка 10000 К, а в узких каналах, ограниченных стенками может доходить вплоть до 15000 К. При этом плотность тока в свободно горящих дугах меньше на 1-2 порядка относительно дуг, находящихся в интенсивном продольном потоке воздуха [15].

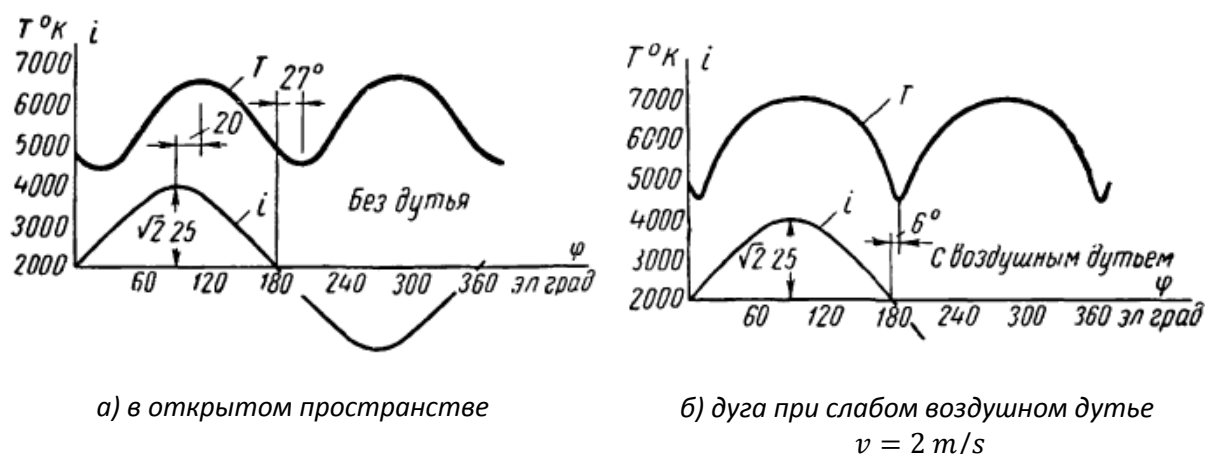


Рис. 3. Колебания температуры в канале угольной дуги переменного тока $l = 10 \text{ мм}$, $I = 25 \text{ А}$ [15].

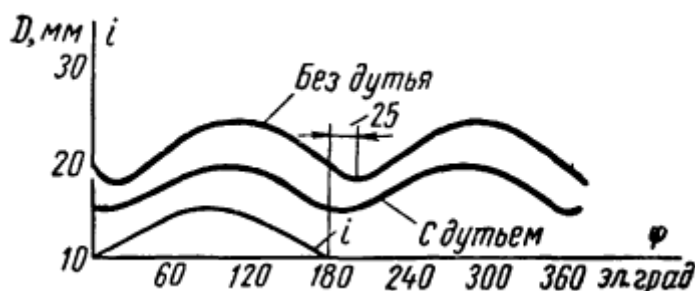


Рис. 4. Колебания диаметра угольной дуги переменного тока при наличии дутья и без него $l = 10 \text{ мм}$, $I = 25 \text{ А}$ [15].

Классическим примером дугового разряда в воздухе является угольная дуга (так же известная под названием вольтова дуга). На *Рис. 5* представлено измеренное температурное поле в сфотографированной вертикально расположенной угольной дуге с межэлектродным расстоянием 4.6 см и током 200 А. В приосевой области температура равна 10000 К, а в максимуме вблизи катода достигает 12000 К. Радиус высоко нагретого, ионизированного, проводящего ток (большую часть тока) канала составляет около 5 мм. От катода к аноду канал немного расширяется [17].

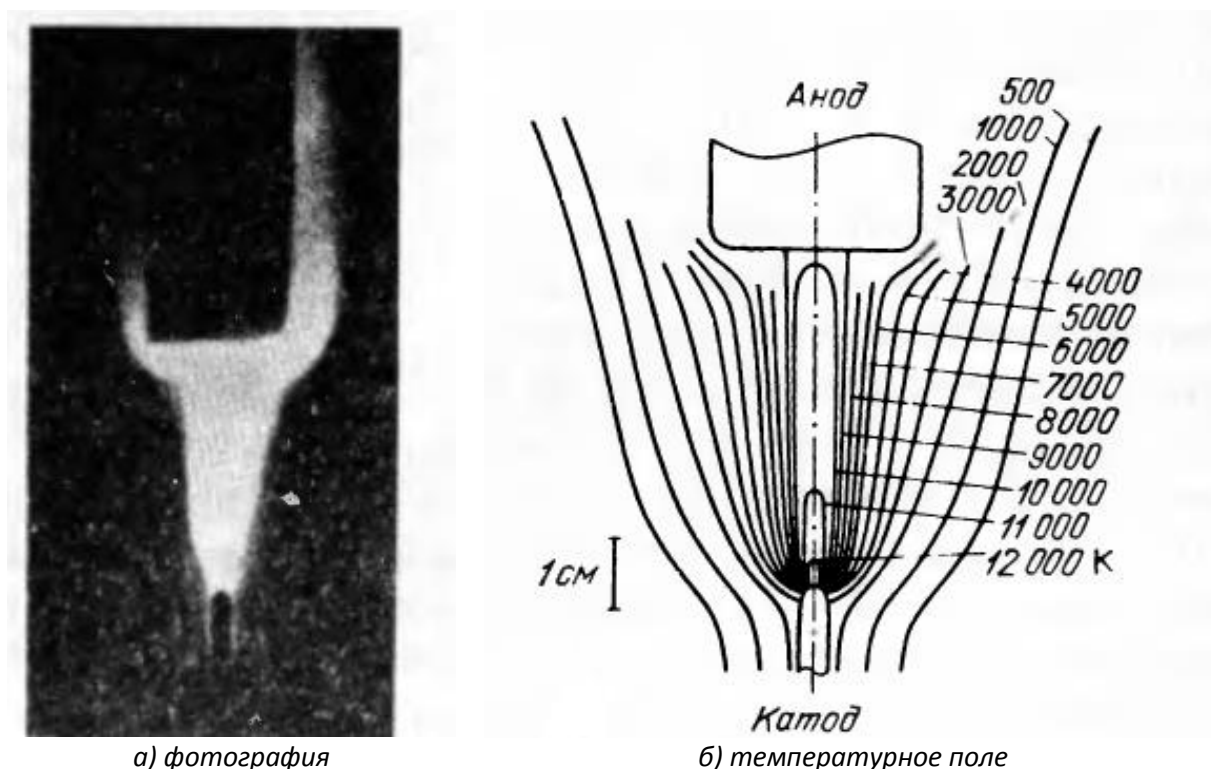


Рис. 5. Угольная вертикально расположенная дуга с межэлектродным расстоянием 4.6 см и током 200 А [17].

В работе [7] приводятся данные о температурном поле стабилизированного (тангенциальным дутье) дугового разряда в воздухе при атмосферном давлении и токе 10 А. Измерялась как электронная, так и газовая температуры. Из *Рис. 6* видно, что в пределах погрешности измерений, которая составляет 20%, температуры примерно одинаковы в центральной части дугового столба. Это подтверждает тот факт, что в воздушной плазме отсутствует отрыв электронной температуры. Что в свою очередь свидетельствует о том, что плазма находится в состоянии ЛТР. Также из графиков можно оценить радиус дугового канала, который составляет около 1 см. Данные из работы [7] были использованы для верификации описанной в текущей работе модели дугового замыкания.

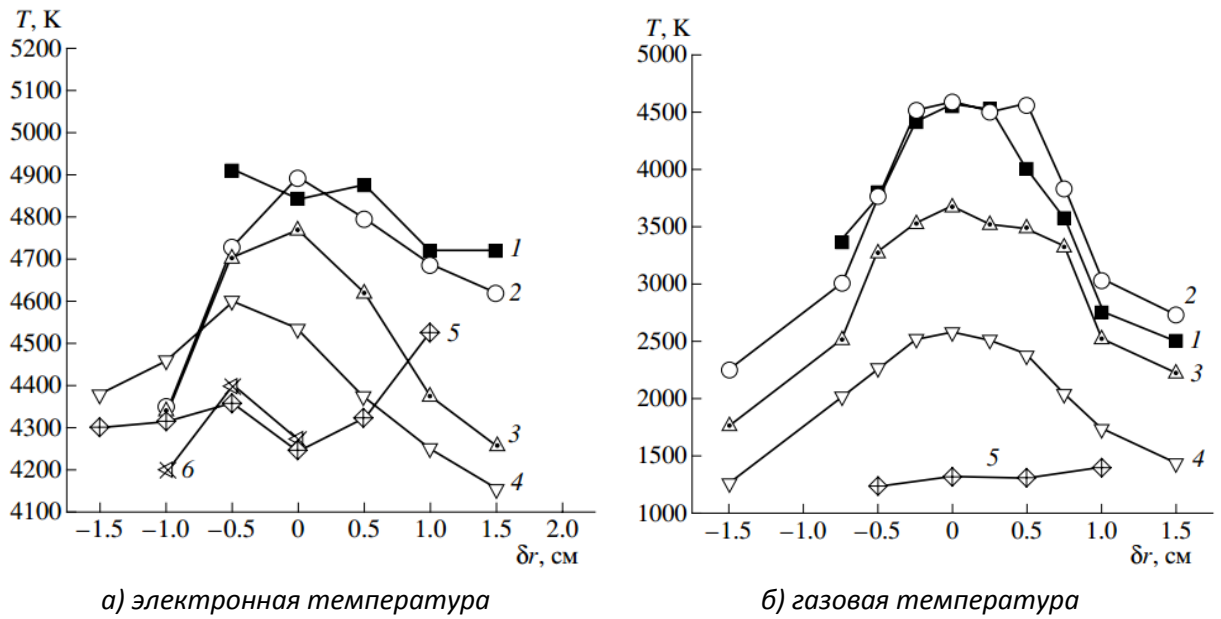


Рис. 6. Поперечный профиль температуры в различных сечениях плазменного факела, 1 – 0.5 см, 2 – 1.5 см, 3 – 2.5 см, 4 – 3.5 см, 5 – 4.5 см, 6 – 5.5 см [7].

1.5 Давление

Давление в квазиравновесной плазме (в состоянии ЛТР) подчиняется закону Дальтона:

$$\sum_i p_i = kT \sum_i n_i,$$

где p_i – парциальное давление i -ых частиц, а n_i – их концентрация. Однако в реальной дуге в результате сжимающего действия магнитного поля давление в столбе может увеличиваться (пинч-эффект). Существенным может оказаться влияние радиальных потоков тепловой энергии в столбе дуги, которые также могут создавать дополнительное давление. Для дуг с температурой $T < 10000$ К и током $I < 1$ кА влиянием этих процессов можно пренебречь, а давление в канале можно считать постоянным [16].

Для более точной оценки диапазона токов в котором сохраняется постоянное давление воздушной плазмы в текущей работе была поставлена задача оценить влияние магнитного поля на характеристики дугового разряда в широком диапазоне токов.

1.6 Вольтамперная характеристика

Одной из важнейших характеристик разряда является его вольтамперная характеристика. На Рис. 7 представлена зависимость падения напряжения в дуге от межэлектродного расстояния. Видно, что при малых межэлектродных расстояниях данная зависимость существенно нелинейна. Объясняется это тем, что в коротких дугах весь дуговой промежуток заполнен приэлектродными областями (однородного положительного столба практически нет). С увеличением расстояния между электродами ($l > 7$ мм) появляется более-менее однородный по длине положительный столб, а величина приложенного напряжения линейно растет с увеличением тока разряда [16].

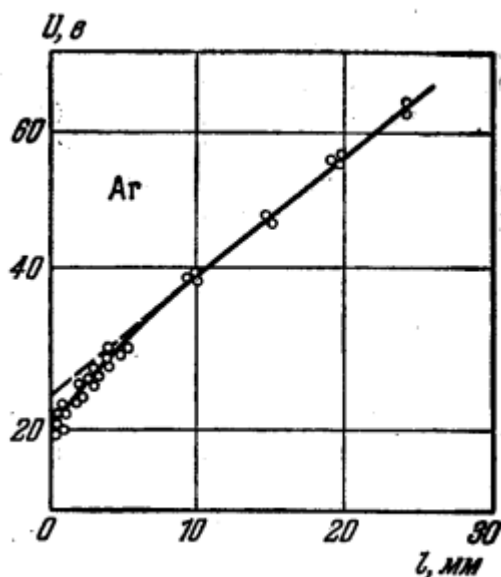


Рис. 7. Падение потенциала в аргонной дуге в зависимости от расстояния между электродами при токе 4 А [16].

В [17] также сказано, что при длине межэлектродного расстояния $L > 0.5 \div 1$ см напряжение линейно зависит от L . Следовательно, электрическое поле однородно вдоль оси канала. На Рис. 8 представлена ВАХ дугового разряда в различных газах при различных условиях (в трубке и в свободной атмосфере). Она имеет характерную форму: быстро спадающая ветвь при малых токах, обусловленная расширением дугового канала по мере увеличения амплитуды тока, и медленно возрастающая ветвь при больших токах (сечение канала начиная с некоторого

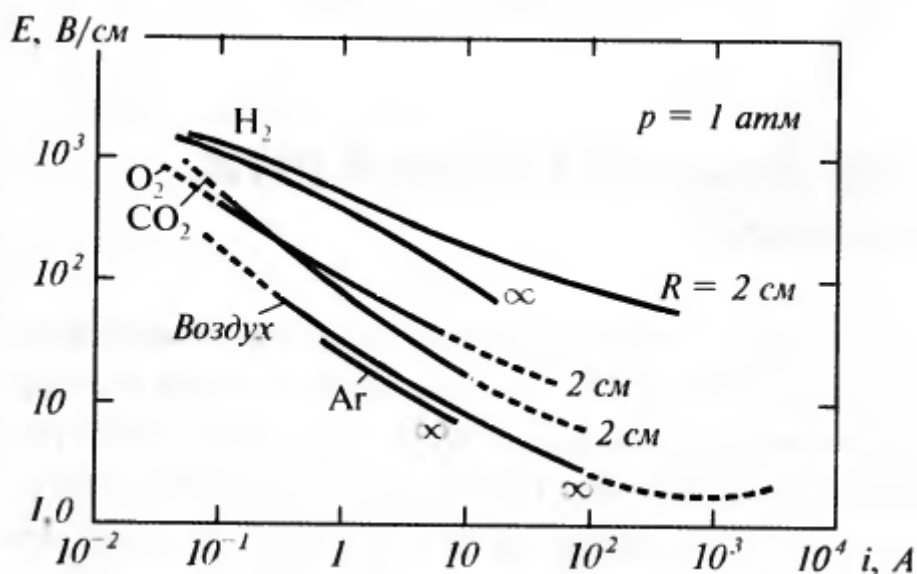


Рис. 8. ВАХ дугового разряда в различных газах в трубках с радиусом $R = 2$ см и в свободной атмосфере $R = \infty$ [17].

значения тока практически перестает увеличиваться из-за высокой интенсивности теплоотвода в сильно прогретом канале). Также из графика видно, что для поддержания разряда в трубке требуется большая напряженность электрического поля из-за более интенсивных потерь тепла.

1.7 Напряженность электрического поля

Напряженность электрического поля в дуговом столбе, как отмечалось ранее, имеет порядок $10 \div 100 \text{ V/cm}$. Нижняя граница соответствует открытым атмосферным воздушным дугам, а верхняя относится к дугам, горящим в мощных дугогасительных камерах, где дуговой столб подвергается интенсивному воздействию (обдуву) газовых или жидких сред [15].

При переменном токе промышленной частоты (50 Hz) изменения тока происходят достаточно быстро, чтобы в дуге проявлялась инерционность тепловых и ионных процессов. Открытая дуга переменного тока, как говорилось ранее, обладает значительной инерционностью. В связи с этим осциллограммы напряжения (очевидно, что форма осциллограмм напряжения совпадает с формой осциллограмм напряженности электрического поля для стабилизированных дуг с неизменной длиной канала порядка нескольких сантиметров) характеризуются пиками напряжения «остывания» и «прогрева» в начале и в конце каждого полупериода, соответственно (Рис. 9). В случае открытой дуги теплоотвод происходит менее интенсивно, чем при стабилизированной. Пики напряжения дуги малы по сравнению с напряжением горения. Это указывает на то, что дуговой канал при переходе тока через ноль сохраняет большой диаметр, высокую температуру газа и большую остаточную проводимость. В случае дуги с активной деионизацией дуговой канал за время прохода тока через ноль приобретает значительную электропрочность, вследствие чего в следующем полупериоде для зажигания дуги источник должен обеспечить большой скачок напряженности электрического поля [15].

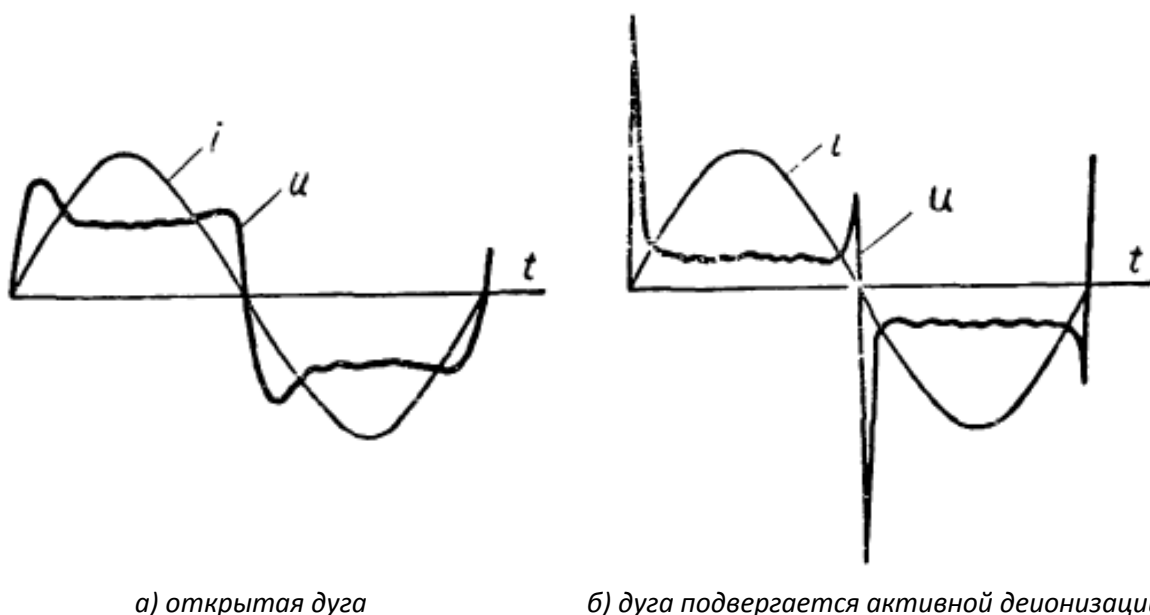


Рис. 9. Осциллограммы напряженности электрического поля в дуге переменного тока промышленной частоты [15].

Вид осциллограмм напряжения (и напряженности электрического поля) достаточно сильно зависит от материала электродов и газа, в котором горит разряд. Это видно из Рис. 10 полученного для стабилизированной дуги в воздухе и азоте с медными и стальными электродами [26].

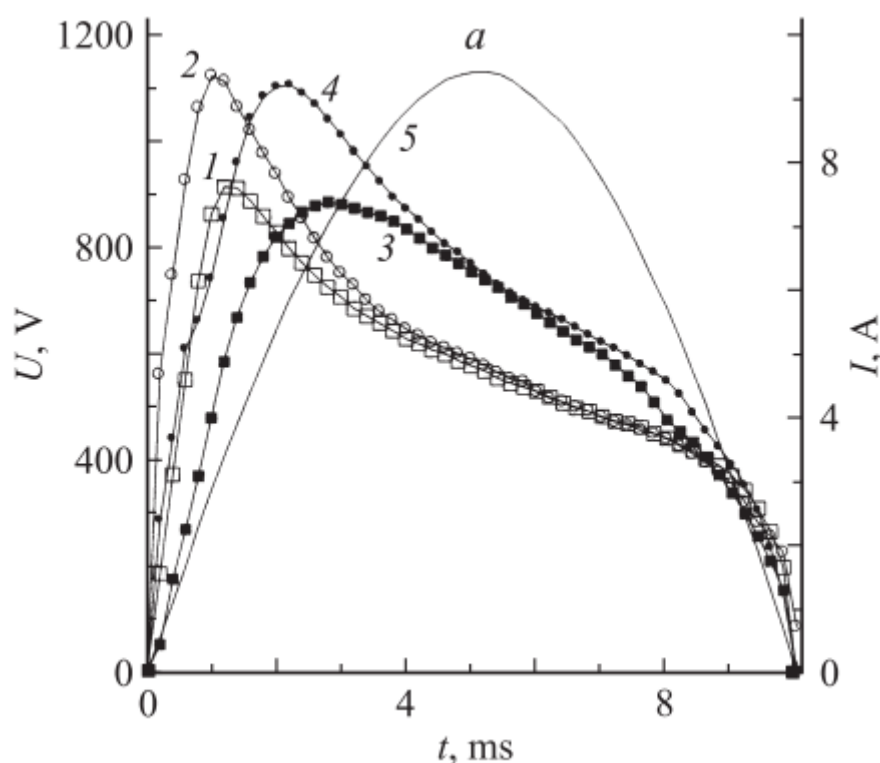


Рис. 10. Осциллограммы падения напряжения на стабилизированном дуговом разряде: 1 и 2 – стальные и медные электроды, соответственно, рабочий газ – воздух, 3 и 4 – стальные и медные электроды, соответственно, рабочий газ – азот. [26]

1.8 Дуговой разряд в открытой атмосфере

В данном разделе рассматривается дуга, горящая в свободной атмосфере в условиях естественной конвекции. Данный вид разряда характеризуется крайне сложным и нерегулярным поведением [2]. В [16] описаны некоторые характерные особенности разряда данного типа:

- Процесс теплопроводности играет существенную роль практически во всех зонах разряда, что обусловлено большими радиальными градиентами температуры.
- При токах меньших 100 А потери на излучение (в азотной плазме) не превышают 20% от полной мощности дуги. Об этом также свидетельствуют эксперименты с угольной дугой в воздухе.
- Конвективный теплоотвод практически отсутствует в центральных зонах дугового столба (причины этого описаны в разделе 1.3).

В работе [4] приведены результаты экспериментального исследования дуговых разрядов в свободной атмосфере воздуха для токов промышленной частоты с амплитудами от 30 А до 20 кА. Рассматриваются как вертикально ориентированные разряды, так и горизонтально. При этом по результатам исследования режимы горения разно ориентированных дуг перестают отличаться друг от друга. Об этом свидетельствует график зависимости мощности дуги от тока (Рис. 11). Следовательно, ориентация дуг, горящих при токах $I > 10$ А, не влияет на характеристики электрической подсистемы.

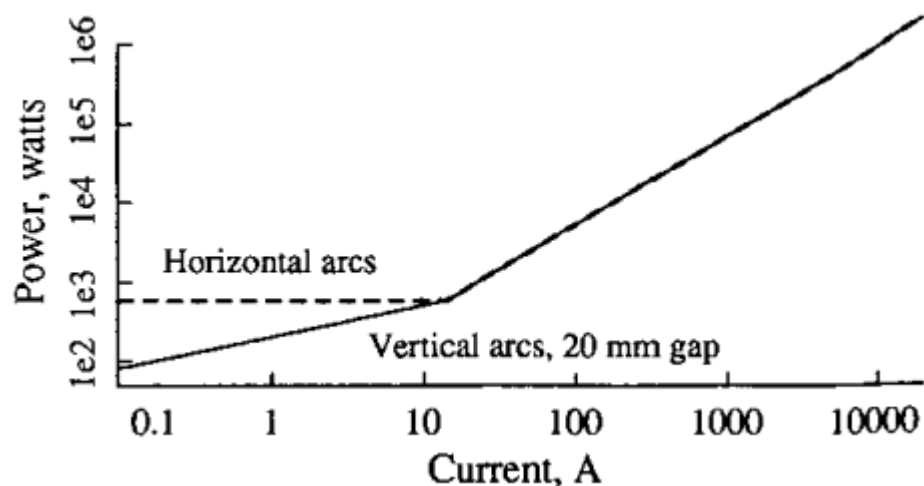
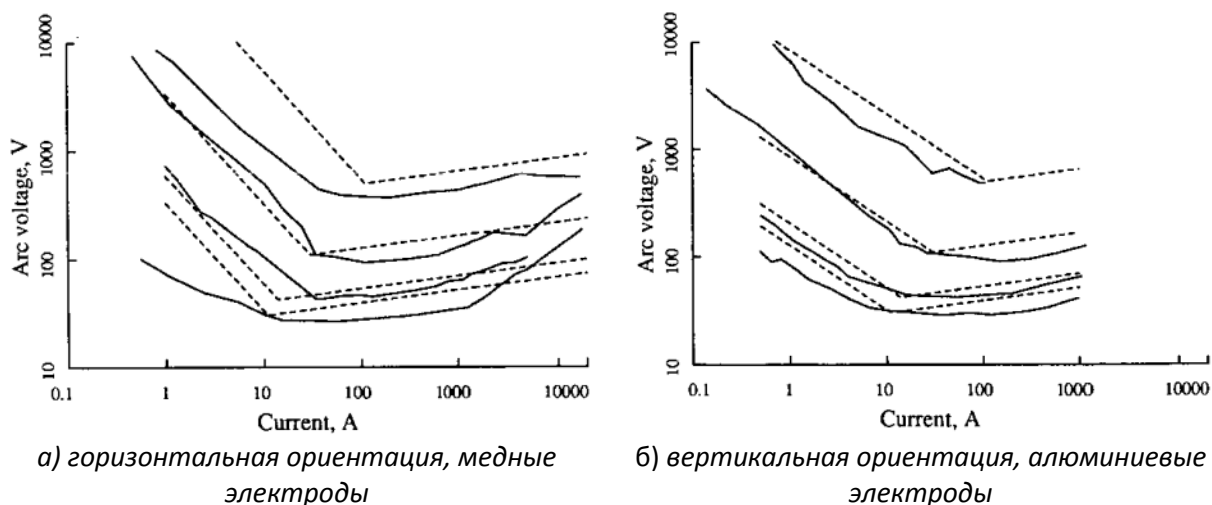


Рис. 11. Зависимость мощности разряда от амплитуды тока. [4]

Также авторами работы были измерены «минимальные» вольтамперные характеристики достаточно длинных (до полуметра) дуговых разрядов (Рис. 12). Под словом минимальные подразумевается тот факт, что напряжение снимается в тот момент, когда дуга имеет наименьшую длину (приблизительно равную межэлектродному промежутку). Как видно из Рис. 13 ВАХ практически не зависит от ориентации дуги и от материала электродов. Эти данные могут быть использованы для сравнения ВАХ, полученных с помощью моделирования, с экспериментальными ВАХ атмосферных воздушных свободно горящих дуг.

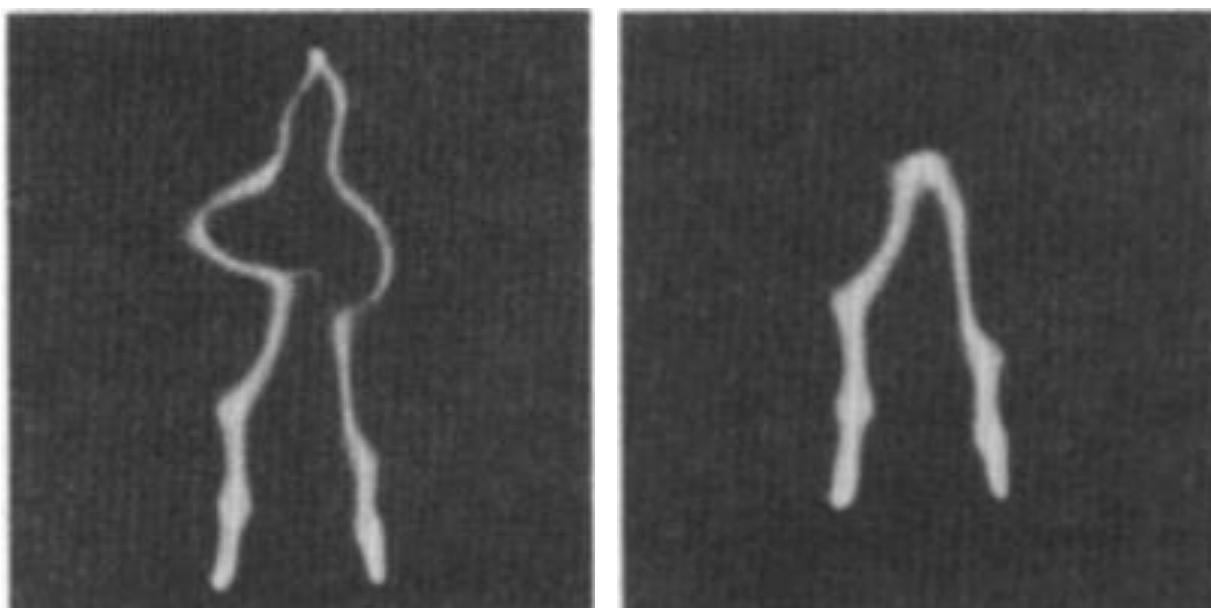


а) горизонтальная ориентация, медные электроды

б) вертикальная ориентация, алюминиевые электроды

Рис. 13. «Минимальная» ВАХ дугового разряда, межэлектродное расстояние 5, 20, 100, 500 мм (снизу-вверх, соответственно) [4].

В работе [4] проведен анализ характерного для свободно горящих дуг процесса – отрыва плазменных петель: под действием сил Архимеда и Ампера часть дуги изгибается, увеличивается в длину и затем отсоединяется от основного канала (Рис. 14). На Рис. 15 приведены графики тока и напряжения дуги. На осциллограммах видны просадки тока и выбросы напряжения, которые соответствуют моментам отмирания плазменных петель. По оценкам авторов для коротких дуг с межэлектродным расстоянием $L < 20$ мм преобладающая частота отмирания петель составляет приблизительно $10 \div 12$ Hz. Для более длинных дуговых каналов эта частота уменьшается, т.к. размеры петель, соответственно, и время их выдувания увеличиваются.



а) в верхней части разряда образовалась плазменная петля

б) дуга перезамкнулась, произошло отмирание петли

Рис. 14. Дуговой разряд в свободной атмосфере, время между кадрами 10 мс [4].

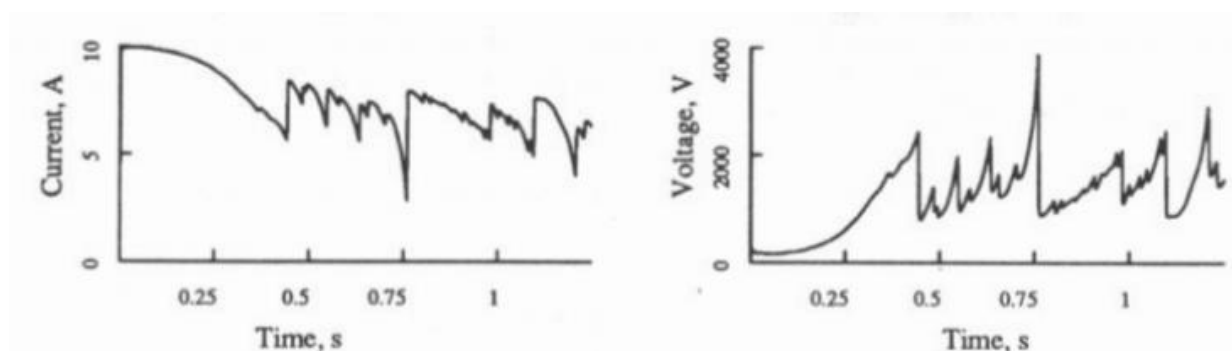


Рис. 15. Ток и напряжение в дуге, ток 10 А, межэлектродное расстояние 10 см. [4]

В работе [3] также рассматривается процесс отрыва плазменных петель и колебания дугового столба в открытой воздушной атмосфере. Причиной данного явления по мнению авторов, как и в предыдущей работе, являются силы Архимеда и пондеромоторные силы. Приведена экспериментальная оценка скорости колебания плазменного шнура, которая составляет единицы метров в секунду.

В работе [2] приводится описание численной модели для расчета динамики изменения формы дугового канала, учитывающей магнитные и архимедовы силы. Благодаря использованному оригинальному методу перестроения пространственной сетки, данная модель способна воспроизводить как изгиб дугового канала, так и отрыв плазменных петель. На Рис. 16 приведены результаты расчета формы и длины плазменного канала.

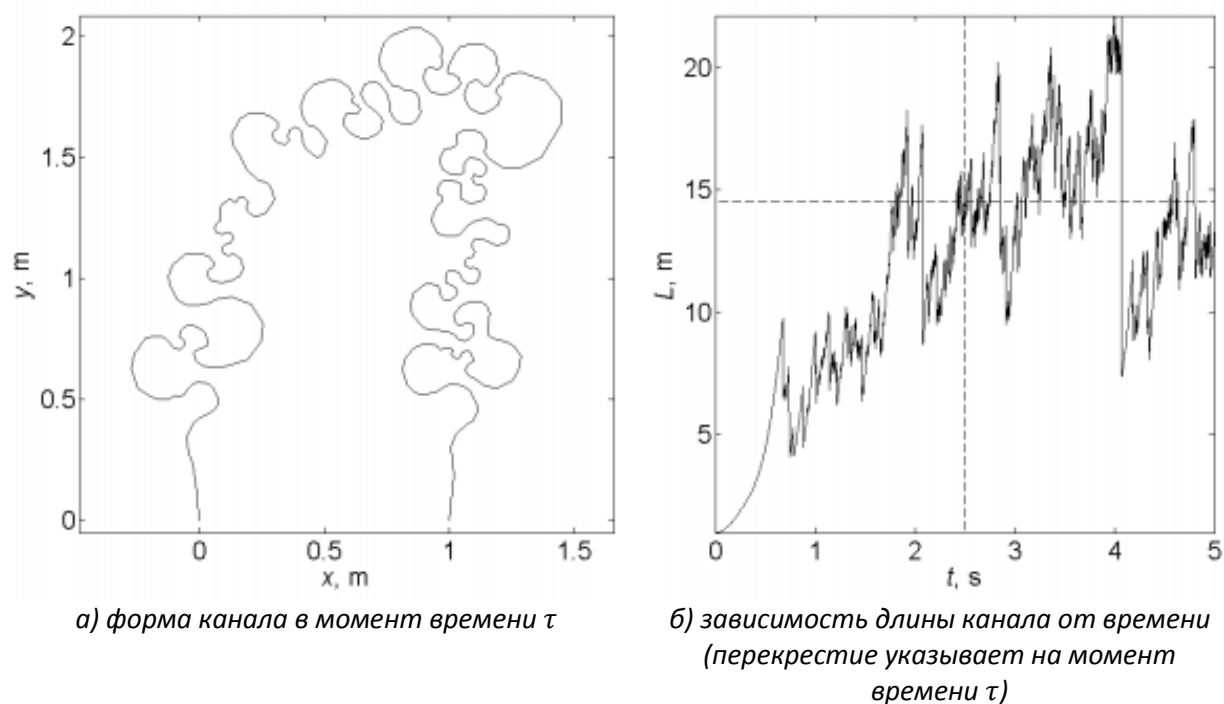


Рис. 16. Результаты моделирования динамики изменения формы дугового канала [2].

В дальнейшем, используя описанную в работе [2] модель эволюции формы дугового канала, планируется создать полную модель, описывающую динамику проводимости дугового канала. Полная модель включает в себя два блока: блок для расчет погонной проводимости дуги (данной теме как раз и посвящена текущая работа) и блок для расчета формы (длины) дугового канала.

1.9 Влияние материала электродов и газовой среды на характеристики дугового разряда

Работа [26] посвящена сопоставлению характеристик стабилизированного дугового разряда с медными и стальными электродами в воздухе и азоте. Основываясь на экспериментальных данных авторы данной статьи утверждают, что материал электродов оказывает существенное влияние на газоразрядную плазму: происходят изменения в элементарных процессах, в проводимости, изменяются напряжения горения дуги, ее мощность, возникают потери на излучение. Стальные электроды, по сравнению с медными позволяют получить более высокую проводимость канала с меньшими затратами энергии. Энергия излучения воздушной плазмы с медными электродами на 90% ниже, чем со стальными. Также можно отметить, что диаметр светящейся области дуги с медными электродами почти в 4 раза меньше, чем со стальными.

Ниже приведена таблица с характерными параметрами разрядов, где σ – проводимость дуги, E – вложенная в разряд энергия, $k = E/\sigma$ – коэффициент, показывающий эффективность преобразования энергии электрического поля в ионизацию газа, k_{norm} – нормированный на меньшее значение коэффициент k для воздушной и азотной плазмы.

Влияние материала электродов и газовой среды на формы осциллограмм напряжения были приведены ранее на Рис. 10.

Металл/Газ	σ, S	E, J	k	k_{norm}
Сталь/Воздух	1.078	69.778	0.015	1.10
Медь/Воздух	1.052	75.167	0.014	1.00
Сталь/Азот	0.975	82.992	0.012	1.28
Медь/Азот	0.839	91.545	0.009	1.00

Таб. 2. Эффективность преобразования энергии за период. [26]

1.10 Моделирование дуговых разрядов

В работах [27] и [18] моделирование дугового разряда производится в трёхмерном пространстве и основано на решении полной системы уравнений гидро и электродинамики, а также уравнения описывающего перенос тепла. Такой детальный подход дает хорошее описание динамики изменения формы дугового канала, а также характеристик разряда как с точки зрения плазменной, так и с точки зрения электрической подсистемы, но требует больших затрат вычислительных ресурсов и времени. Поэтому он не является оптимальным для многочисленных расчетов проводимости дугового канала в максимально приближенном к реальному времени, что требуется от представленной в текущей работе модели.

Простейшие численные модели дугового замыкания описываются дифференциальным уравнением первого порядка, которое не в состоянии полностью отразить всю природу физических процессов, происходящих в плазме разряда. Чаще всего такие модели описывают только электрическую подсистему либо только стационарное состояние разряда. Если учитывается динамика процессов, то такие модели пригодны для описания разрядов, протекающих при конкретных условиях (токах, методах стабилизации, газах и т.д.) [28].

С прикладной точки зрения (например, для предсказания поведения дуги в реклоузере) используются модели типа «черный ящик», состоящие из сильно упрощенного уравнения и некоторого набора параметров. Такие модели обычно основаны на эмпирических формулах и не описывают физику процессов, имеющих место в дуговом разряде. При этом в данном подходе имеется еще один огромный минус – это наличие большого набора параметров, которые, чаще всего, можно определить только из экспериментальных данных притом для разряда, горящего в конкретных условиях. Тем самым использование такой модели обязывает проводить эксперименты.

Наиболее известными моделями данного типа, описывающими электрическую подсистему разряда, являются модель Майра (1), применяемая для моментов, в которые ток дуги проходит через ноль, и модель Касси (2), применяемая для сильноточной фазы горения дуги [28]:

$$\frac{1}{g_m} \frac{dg_m}{dt} = \frac{1}{\tau_m} \left(\frac{ui}{P_0} - 1 \right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{g_c} \frac{dg_c}{dt} = \frac{1}{\tau_c} \left(\frac{u^2}{u_0^2} - 1 \right) \quad (2)$$

где: u, i – мгновенные значения напряжения и тока, соответственно, g_m и g_c – динамическая проводимость дуги, τ_m и τ_c – временные константы, P_0 – мощность энергопотерь в момент прохождения тока через ноль, u_0 – среднее значение напряжения. Другие же, более сложные

модели данного типа, например, модели Хадэбанка, Швамакера и Шварца, являются комбинацией уравнений (1) и (2) с добавлением некоторых функций, обеспечивающих переход от одного уравнения к другому [28]. Это ведет к увеличению набора «подгоночных» параметров модели. В данных моделях не учитываются такие важные характеристики дугового канала, как температура и геометрия (радиус и длина дуги).

Существует и другой подход, основанный на уравнении баланса энергии (3). Дуговой канал рассматривается, как цилиндрически симметричный объем. При этом учитываются физические свойства плазмы, такие как плотность, давление, энтальпия, температура, скорость потоков газа.

$$P_{total} = P_{rad} + P_{tur} + P_{ramf} - P_{axmf} + P_{net} \quad (3)$$

где P_{total} – мощность вкладываемая в дугу, P_{rad} – потери тепла на излучение, P_{tur} – потери связанные с турбулентностью, P_{ramf} , P_{axmf} – потери/прирост тепла связанные с радиальными/аксиальными потоками газа, соответственно, P_{net} – потери связанные с изменением формы канала.

Данный подход гораздо лучше и более детально описывает процесс дугового замыкания, но при этом обладает гораздо большим набором параметров, требующих определения, в отличие от моделей, основанных на уравнениях (1) и (2). В модели данного типа, описанной в [28] таких параметров 12. Температура и энтальпия газа считаются постоянными во всем канале, что является достаточно грубым приближением.

Наиболее оптимальный, используемый в текущей работе, подход к моделированию дугового разряда основан на расчете температурного профиля канала, т.к. в условиях ЛТР все свойства плазмы являются функциями температуры и давления. Давление газа при не очень больших токах, как было отмечено в разделе 1.5, можно считать постоянным. Помимо ЛТР и постоянства давления предполагается, что дуговой канал имеет цилиндрическую симметрию (однороден вдоль своей оси).

Распределения температуры вдоль радиуса канала описывается уравнением баланса тепловой энергии (уравнение Эленбааса-Геллера), имеющим следующий вид:

$$\rho c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = (\nabla, \kappa \nabla T) + \sigma E^2 - Q - \rho c(u, \nabla T) \quad (4)$$

где $T = T(r, t)$ – искомое мгновенное распределение температуры, r – радиальная координата, $\rho = \rho(T)$, $c = c(T)$, $\kappa = \kappa(T)$, $\sigma = \sigma(T)$ – температурные зависимости плотности, удельной теплоемкости, теплопроводности и электропроводности плазмы воздуха при атмосферном давлении соответственно, $E = E(t)$ – мгновенное продольное электрическое поле, $Q = Q(T)$ – радиационные потери, u – скорость радиальных потоков. Данное уравнение дополняется начальными и граничными условиями, а также уравнениями для расчета погонной проводимости канала (5) и напряженности электрического поля (6).

$$\Sigma = 2\pi \int_0^{\infty} \sigma(T(r, t)) r dr \quad (5)$$

$$E(t) = \frac{I(t)}{2\pi \int_0^{\infty} \sigma(T(r,t)) r dr} \quad (6)$$

где I – ток дуги, Σ – погонная проводимость канала. Получается замкнутая система уравнений, в которой присутствует два параметра I и u (температурные зависимости материальных свойств газа и мощности потерь на излучения считаются известными).

В большинстве работ [16] [17] [9] [8] пренебрегают членами связанными с излучением и конвекцией и рассматривают стационарные состояния разряда, что не дает возможности рассчитывать зависимости проводимости и напряженности электрического поля от времени. Также во всех изученных работах разряд моделируется в закрытой системе (граничное условие определяется не на бесконечности, а на некотором расстоянии, которое характеризует радиус трубки, в которой горит разряд).

В работе [6] уравнения (4) - (6) решаются во временной области, но, опять же, не учитывается излучение и конвекция, а зависимость материальных свойств от температуры задаются в упрощенном виде (аппроксимируются линейной функцией). Поэтому численные расчеты имеют смысл лишь на качественном уровне, что неприемлемо для поставленной цели данной диссертации. Этим обосновывается новизна и актуальность текущей работы, в которой рассматривается динамика температурного профиля, а все материальные свойства задаются в виде сложных нелинейных функций от температуры, рассчитанных из законов термодинамики.

1.11 Материальные свойства плазмы

Для вычисления температурных зависимостей материальных свойств плазмы (плотности, теплопроводности, теплоемкости, проводимости и объемной мощности излучения), находящейся в состоянии ЛТР, прежде всего необходимо знать распределение равновесных концентраций во всем температурном диапазоне. Концентрации рассчитываются из условий равновесия прямых и обратных химических реакций, имеющих место в плазме. Для данного расчета необходимо знать список реакций, протекающих в плазме, а также константы равновесия каждой реакции, которые можно вычислить, используя уравнение Саха и закон действующих масс. Пример алгоритма для расчета равновесных концентраций представлен в работах [19] и [29].

Методики расчета и сами температурные зависимости материальных свойств представлены в работах [20] [22] [25]. В текущей работе используются материальные свойства из работы [20], в которой приведены их зависимости не только от температуры, но и от давления среды.

Отдельно следует рассмотреть расчет мощности объемного излучения в зависимости от температуры. Обычно при упрощенном расчете радиационных потерь пренебрегают рассеянием и преломлением. Необходимыми для рассмотрения остаются такие физические аспекты, как поглощение, излучение и передача энергии. Распространение излучения можно описать следующим уравнением [27] [24]:

$$n\nabla I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \varepsilon_\nu(\mathbf{r}) - \kappa_\nu(\mathbf{r})I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \quad (7)$$

$$W = \int_0^{\infty} d\nu \int n I_\nu d\Gamma \quad (8)$$

$$q = \text{div} (\mathbf{W}) \quad (9)$$

где $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ – спектральная интенсивность излучения в точке \mathbf{r} , распространяющегося в направлении \mathbf{n} , ε_ν и κ_ν – коэффициенты излучения и поглощения соответственно, индекс ν означает, что уравнение рассматривается для единственной частоты излучения, \mathbf{W} – вектор потока энергии излучения. Таким образом, чтобы учесть излучение для всех спектральных интервалов, необходимо брать интеграл по всему спектру частот.

Решение уравнений (7) - (9) является довольно сложной и ресурсоемкой задачей, так как оно зависит не только от излучения в рассматриваемой точке, но и от излучения, приходящего в эту точку из окружающего пространства. Также сложность представляет расчет коэффициента поглощения κ_ν из-за его температурной зависимости, сложного спектрального профиля и зависимости от вида и количества примесей в плазме.

В работах [23] [24] [30] [31] для оценки мощности излучения на единицу объема используется приближение объемного излучателя (Net emission coefficient в англоязычной литературе). В рамках данного подхода излучаемая мощность определяется выражением (10), где B_ν – излучение черного тела, κ_ν – коэффициент поглощения, R_p – радиус изотермической области, ν – частота.

$$\varepsilon_{NEC}(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) \kappa_\nu(T) e^{-\kappa_\nu(T) R_p} d\nu \quad (10)$$

Рассмотрим изотермическую сферу радиуса R_p . Все точки данной сферы излучают энергию в окружающее пространство (в полный телесный угол вокруг себя). В то же время каждая точка сферы поглощает часть приходящей на нее энергии. Коэффициент ε_{NEC} характеризует разность энергии испускаемой из центра данной сферы в единицу телесного угла и энергии поглощаемой данной точкой, приходящей от всех точек этой сферы, за единицу времени. Мощность излучения сферического объёма легко пересчитывается в мощность излучения цилиндрического объёма с тем же радиусом.

Случай $R_p = 0$ соответствует приближению оптически тонкой плазмы, что согласуется с рассматриваемой моделью дуги, так как согласно [27] воздушная плазма при атмосферном давлении и рассматриваемых токах является оптически тонкой средой. Это значит, что излученный фотон с большой вероятностью не будет поглощен другими атомами или молекулами проходя расстояние равное характерному радиусу профиля дуги. Также необходимо отметить, что при низких температурах $T < 10000$ К поглощение излучения мало, что является вторым фактором, позволяющим считать дугу, рассматриваемую в данной работе, оптически тонкой [32].

Изложенный выше метод расчета хорошо описывает излучение в центральной (горячей) области плазменного канала и дает значительную погрешность в холодных областях вблизи границ дуги [23], так как для излучения на краях горячей области характерны повышенная мощность энергопотерь и интенсивное поглощение излучения холодным газом в ее ближайшей окрестности [27]. Данный вывод был сделан на основе сравнения результатов, полученных при решении уравнения переноса излучения методом трехмерной пространственной дискретизации, и в приближении объемного излучателя [27].

2. Постановка задачи

Как говорилось ранее, в данной работе рассматривается модель дугового разряда в воздухе при атмосферном давлении. Входными параметрами модели являются зависимость тока от времени, температурные зависимости материальных свойств плазмы – плотности, удельной теплоемкости, теплопроводности и электрической проводимости, а также мощности объемного излучения. Кроме этого, имеются еще два параметра, отвечающие за мощность теплоотвода посредством излучения и конвекции, которые нуждаются в определении.

На выходе модели рассчитывается температурный профиль дуги, зная который, используя температурную зависимость удельной проводимости воздушной плазмы, рассчитывается погонная проводимость дугового столба. Также из моделирования можно получить распределение различных мощностей – мощности джоулева нагрева, отвода тепла за счет теплопроводности, излучения и конвекции.

В одномерной постановке предполагается, что дуговой канал однороден вдоль своей оси и имеет цилиндрическую симметрию. Электрическое поле направлено вдоль оси и постоянно по сечению. Рассчитывается уравнение баланса энергии с крайними граничными условиями, которое дополнено уравнением для расчета напряженности электрического поля. Давление считается постоянным, а материальные свойства – функциями температуры.

В двумерной постановке, так же как и в одномерной, предполагается однородность дугового канала вдоль своей оси. Рассматривается перпендикулярное оси сечение плазменного канала. Вместе с уравнением баланса энергии рассчитываются уравнения гидро и электродинамики. Учитываются естественная конвекция и магнитное давление. Материальные свойства являются функцией не только температуры, но и давления.

2.1 1D-модель

В данной модели используются следующие приближения, обоснованность которых следует как из анализа литературы, так и из расчётов, представленных в разделе 3:

- Однородность плазменного канала вдоль своей оси.
- Цилиндрическая симметрия.
- Плазма разряда находится в состоянии ЛТР.
- Электрическое поле однородно по сечению канала и направлено вдоль оси.
- Давление постоянно.
- Упрощённый расчет излучения.
- Упрощённый расчет конвекции.

2.1.1 Геометрия

В работе рассматривается плазменный шнур в открытом пространстве, имеющий две точки привязки, в начале и в конце, с некоторым переменным радиусом. Вдоль оси плазменного шнура построим ось z . Затем выделим однородный по оси шнура цилиндр длиной Δl такой, что на участке обозначенным красным цветом (Рис. 17) $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, где f – некоторая функция, описывающая характеристики разряда (например, температуру, напряженность электрического поля, проводимость).

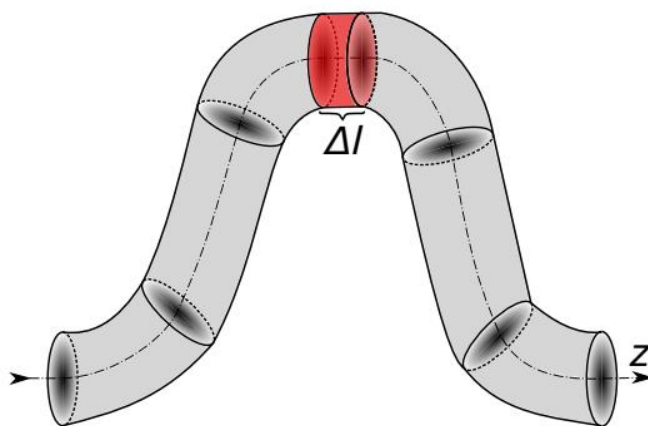
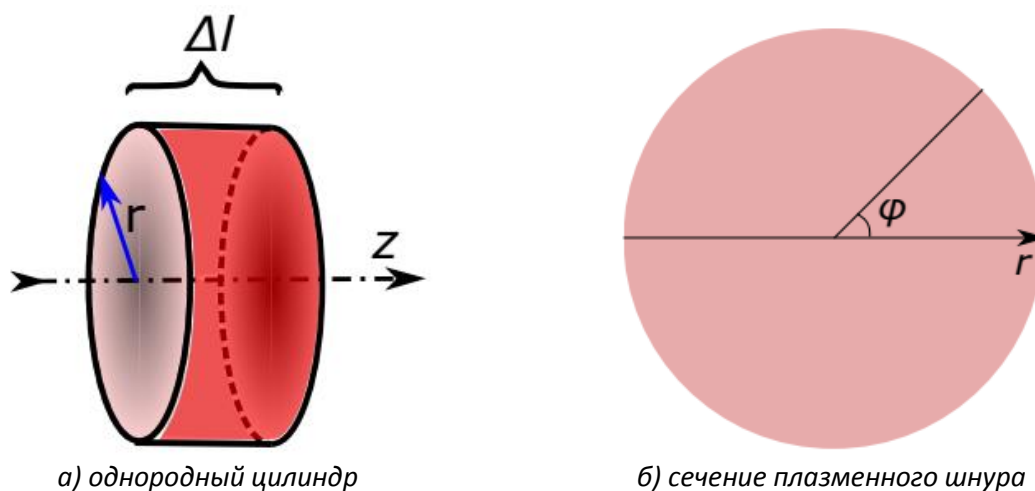


Рис. 17. Плазменный шнур

Перпендикулярно оси цилиндра введем ось изменения радиуса шнура r (Рис. 18. а). Устремив Δl к нулю получим сечение плазменного шнура (Рис. 18. б).



а) однородный цилиндр

б) сечение плазменного шнура

Рис. 18: Геометрия.

В рамках условий применимости данной модели, которые будут рассмотрены позже, а также, из анализа литературы известно, что $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$. В итоге мы приходим к одномерной задаче вдоль оси r , где $r \in [0, +\infty)$. Такой постановки достаточно для расчета погонных параметров плазмы. Также хочется отметить, что задача поставлена, как задача с открытой границей, в отличие от наиболее распространенной в литературе постановки задачи о дуге, горящей в некотором объеме, ограниченном стенками. Данная постановка является наиболее естественной для дуговых разрядов при коротком замыкании в воздухе.

2.1.2 Система уравнений

Распределение температуры в разряде описывается системой уравнений, которая включает в себя уравнение баланса энергии, учитывающие генерацию тепла посредством джоулева нагрева, перераспределение тепла за счет теплопроводности и конвекции и отвод тепла за счет излучения, крайевые и начальные условия следующего вида:

$$\rho c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = (\nabla, \kappa \nabla T) + \sigma E^2 - q - F \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad (12)$$

$$T \Big|_{r=\infty} = T_{\infty} \quad (13)$$

$$T \Big|_{t=0} = T_0 \quad (14)$$

где $T = T(r, t)$ – искомое мгновенное распределение температуры, r – радиальная координата, $\rho = \rho(T)$, $c = c(T)$, $\kappa = \kappa(T)$, $\sigma = \sigma(T)$ – температурные зависимости плотности, удельной теплоемкости, теплопроводности и электропроводности плазмы воздуха при атмосферном давлении соответственно, $E = E(t)$ – мгновенное продольное электрическое поле, $q = q(T)$ – радиационные потери, являющиеся, вообще говоря, некоторым функционалом температурного профиля, $F = F(T)$ – потери тепла, связанные с конвекцией; T_{∞} – температура окружающего дугу ненагретого воздуха, $T_0 = T_0(r)$ – начальное распределение температуры плазмы, причем $T_0(\infty) = T_{\infty}$. Начального распределение температуры имеет вид гауссова профиля. При этом важно понимать, что выбор начальных условий влияет лишь на скорость установления конечного (нестационарного) распределения температуры.

Рассмотрим систему уравнений (11) - (14), где κ , σ , c , ρ , q , F – заданные параметры модели, а T и E – неизвестные величины. Чтобы ее замкнуть, напишем уравнение для расчета электрического поля E . Зная, что электрическое поле однородно по сечению дуги, воспользуемся законом Ома:

$$I = \Sigma E, \quad (15)$$

где I – ток дуги, параметр модели, Σ – погонная проводимость, новая неизвестная величина. По текущему распределению температурного профиля, выразим мгновенное значение погонной проводимости дуги $\Sigma = \Sigma(t)$ и свяжем с помощью него ток дуги $I = I(t)$ с напряженностью электрического поля E :

$$\Sigma = 2\pi \int_0^{\infty} \sigma(T(r, t)) r dr \quad (16)$$

$$E(t) = \frac{I(t)}{2\pi \int_0^{\infty} \sigma(T(r, t)) r dr} \quad (17)$$

Формула (17) позволяет рассматривать ток дуги $I(t)$ как заданную величину, что наиболее приближено к реалиям эксперимента.

2.1.3 Преобразование системы уравнений

Из-за сильной нелинейности температурных зависимостей материальных свойств горячего воздуха расчет модели в постановке (11) - (14) является ресурсоемкой задачей и требует больших затрат времени. Также с точки зрения численной реализации постановка (11) - (14), как задачи с открытой границей является неудобной. Сделав некоторые преобразования уравнений приведем исходную систему уравнений к виду, более подходящему для численной реализации.

2.1.3.1 Потенциал теплового потока

Введем в рассмотрение потенциал теплотокота w [6] [16] в соответствии с выражением:

$$dw = \kappa dT \Leftrightarrow w(T) = \int_{T_\infty}^T \kappa(T') dT' \quad (18)$$

Благодаря тому, что коэффициент теплопроводности κ строго положительная величина, выражение (18) задает взаимно-однозначное отображение $w \leftrightarrow T$, что позволяет рассматривать все материальные свойства плазмы, а также радиационные потери как функции новой переменной w .

Учитывая (18), постановка задачи (11) - (14) примет следующий вид:

$$\frac{1}{\chi} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + \sigma E^2 - q - F, \quad (19)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (20)$$

$$w \Big|_{r=\infty} = 0, \quad (21)$$

$$w \Big|_{t=0} = w_0. \quad (22)$$

где $\chi(T) = \frac{\kappa(T)}{\rho(T) \cdot c(T)}$ – коэффициент температуропроводности, $w_0 = w_0(r)$ – начальное распределение потенциала потока, причем $w_0(\infty) = 0$.

Важно отметить, что нелинейные температурные зависимости материальных свойств воздуха (c, ρ, κ), собрались в один коэффициент χ . Это позволяет уменьшить вычислительные затраты на расчет модели.

2.1.3.2 Замена координат

Согласно выражению (23) перейдем от пространственной радиальной координаты r к “сжатой” безразмерной координате x . Замена (23) отображает полубесконечный промежуток по $r \in [0, \infty)$ в $x \in [0, 1)$, что позволяет переформулировать задачу (11) - (14) на конечном интервале.

$$r = R_0 \cdot \frac{x}{1-x} \quad (23)$$

где R_0 – некий характерный радиус дуги, x – новая безразмерная координата. С учетом замен (18), (23) система уравнений (11) - (14) примет следующий вид:

$$\frac{1}{\chi} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta_x w + \sigma E^2 - q - F \quad (24)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (25)$$

$$w \Big|_{x=1} = 0 \quad (26)$$

$$w \Big|_{t=0} = w_0 \quad (27)$$

$$\Delta_x w(x, t) = \frac{(1-x)^4}{R_0^2} \cdot \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{(1-x)^3(1-2x)}{R_0^2 \cdot x} \cdot \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (28)$$

где Δ_x – лапласиан в терминах безразмерной координаты x .

2.1.3.3 Особенность в нуле

Согласно определению лапласиана в терминах безразмерной координаты x (28), один из его членов в точке $x = 0$ обращается в бесконечность. Чтобы устранить данную неопределенность, возьмем предел от функции $\Delta_x w(x, t)$ при $x \rightarrow 0$. Для этого разложим $w(x, t)$ в ряд Тейлора по аргументу x в окрестности нуля, а затем возьмем производную:

$$w(x, t) = w(0, t) + \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{(0,t)} \cdot x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{(0,t)} \cdot x^2 + O(x^3). \quad (29)$$

Продифференцируем полученный ряд (29) по x , учитывая граничные условия в нуле (25):

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{(0,t)} \cdot x + O(x^2). \quad (30)$$

Подставим выражение (30) в лапласиан и найдем предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \Delta_x w(x, t) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1-x)^4}{R_0^2} \cdot \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \frac{(1-x)^3(1-2x)}{R_0^2 \cdot x} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{(0,t)} \cdot x + O(x^2) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{R_0^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{(0,t)} + \frac{1}{R_0^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{(0,t)} \cdot 0 \right) = \frac{2}{R_0^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{(0,t)} \end{aligned} \quad (31)$$

2.1.4 Численная реализация

Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми граничными условиями (24) - (28) можно реализовать с помощью метода конечных разностей [33]. Суть данного метода заключается в разбиении области, в которой ищется решение, на конечное число подобластей. В каждой из них решение аппроксимируется линейной функцией.

Применяя метод конечных разностей, для начала необходимо заменить область непрерывного аргумента некоторым конечным множеством точек, покрывающим эту область. Таким образом: $t \in (0, \infty) \rightarrow t_n, n = 1, 2, \dots, M; x \in (0, 1) \rightarrow x_i, i = 1, 2, \dots, N$. Где N число узлов сетки по оси x , а M число узлов сетки по оси t , при этом h – шаг по пространственной координате, а τ – по времени. Множество точек $\{x\}_{i=1}^N \cup \{t\}_{n=1}^M$ является пространственно-временной сеткой.

Каждой непрерывной функции можно поставить в соответствие сеточную функцию, т. е. дискретную функцию, определенную в узлах сетки. Таким образом: $\chi(x, t) \rightarrow \chi_i^n, \sigma(x, t) \rightarrow \sigma_i^n, q(x, t) \rightarrow q_i^n, E(t) \rightarrow E^n, w(x, t) \rightarrow w_i^n$.

При построении численной схемы частные производные аппроксимируются конечными разностями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\xi_i)}{\partial \xi_i} &\rightarrow \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2k} \\ \frac{\partial^2 f(\xi_i)}{\partial \xi_i^2} &\rightarrow \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{k^2} \end{aligned} \quad (32)$$

где $\{\xi\}_{i=1}^N$, – узлы сетки, f – сеточная функция, k – шаг. От погрешности аппроксимации будет зависеть точность нашего решения.

2.1.4.1 Явная схема

Явная схема предполагает замену временных производных прямыми конечными разностями, что непосредственно приводит к выражениям для значений искомых функций на следующем временном шаге. Суть прямых разностей заключается в том, что все производные, стоящие в правой части уравнения (24), считаются на n -ом шаге. Таким образом уравнение (24) после дискретизации будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{\chi_i^n} \cdot \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\tau} = a_i(w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n) + b_i(w_{i+1}^n - w_{i-1}^n) + Q_i^n, \quad (33)$$

где: $a_i = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{(1-x_i)^4}{R_0^2}, b_i = \frac{1}{2h} \cdot \frac{(1-x_i)^3(1-2x_i)}{R_0^2 \cdot x_i}, Q_i^n = \sigma_i^n (E^n)^2 - q_i^n - F_i^n$.

Выразим следующий шаг через предыдущий:

$$w_i^{n+1} = \chi_i^n \tau \cdot [(a_i + b_i)w_{i+1}^n - 2a_i w_i^n + (a_i - b_i)w_{i-1}^n + Q_i^n] + w_i^n. \quad (34)$$

Для удобства вычислений запишем уравнение (34) в матричном виде:

$$\vec{w}^{n+1} = \vec{\chi}^n \tau \cdot (A \vec{w}^n + \vec{Q}^n) + \vec{w}^n, \quad (35)$$

где A – трех-диагональная матрица, в которой:

$$\begin{aligned} A_{\downarrow} &\equiv A_{i,i} = -2a_i - \text{главная диагональ} \\ A_{\uparrow} &\equiv A_{i,i+1} = a_i + b_i - \text{верхняя диагональ} \\ A_{\downarrow} &\equiv A_{i,i-1} = a_i - b_i - \text{нижняя диагональ} \end{aligned} \quad (36)$$

Теперь необходимо учесть граничные условия. Мы знаем, что:

$$\begin{aligned}\Delta w(0, t) &= \frac{2}{R_0^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}_{(0,t)} \\ w(1, t) &= w_\infty\end{aligned}\quad (37)$$

В терминах конечно-разностной схемы выражения (37) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta w_1^n &= \frac{2}{R_0^2 h^2} \cdot (w_2^n - w_1^n) \\ w_N^n &= 0.\end{aligned}\quad (38)$$

Перепишем уравнение (34), учитывая начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned}w_i^{n+1} &= \chi_i^n \tau \cdot [(a_i + b_i)w_{i+1}^n - 2a_i w_i^n + (a_i - b_i)w_{i-1}^n + Q_i^n] + w_i^n, \\ i &= 2 \dots N - 1, \\ w_1^{n+1} &= \chi_1^n \tau \cdot [c(w_2^n - w_1^n) + Q_1^n] + w_1^n, \\ w_N^{n+1} &= 0,\end{aligned}\quad (39)$$

Из (39) видно, что:

$$\begin{aligned}A_{1,1} &= -c \\ A_{1,2} &= c \\ A_{1,3} &= 0 \\ A_{N,N} &= 0 \\ A_{N,N-1} &= 0 \\ Q_N &= 0;\end{aligned}\quad (40)$$

где $c = \frac{2}{R_0^2 h^2}$.

Для наглядности запишем (35) в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} w_1^{n+1} \\ w_2^{n+1} \\ w_3^{n+1} \\ \vdots \\ w_{N-1}^{n+1} \\ w_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^n \\ w_2^n \\ w_3^n \\ \vdots \\ w_{N-1}^n \\ w_N^n \end{pmatrix} + \tau \vec{\chi}^n \cdot \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -c & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_\downarrow & A_\downarrow & A_\uparrow & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_\downarrow & A_\downarrow & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_\downarrow & A_\uparrow \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^n \\ w_2^n \\ w_3^n \\ \vdots \\ w_{N-1}^n \\ w_N^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1^n \\ Q_2^n \\ Q_3^n \\ \vdots \\ Q_{N-1}^n \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}\quad (41)$$

2.1.4.2 Неявная схема

Преимущество данной численной схемы заключается в том, что она является более устойчивой (меньшая вероятность появления расходящегося решения). Таким образом, использование неявной схемы позволяет нам значительно увеличить шаг по пространственной координате и шаг по времени, но при этом уменьшается точность.

Рассмотрим уравнение (24) и аналогично уравнению (33) перепишем его в конечно-разностном приближении, но теперь производные в правой части уравнения (24) будем брать на $n + 1$ шаге:

$$\frac{1}{\chi_i^n} \cdot \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\tau} = a_i(w_{i+1}^{n+1} - 2w_i^{n+1} + w_{i-1}^{n+1}) + b_i(w_{i+1}^{n+1} - w_{i-1}^{n+1}) + Q_i^n, \quad (42)$$

где a_i, b_i и Q_i^n такие же, как в явной схеме.

Видно, что мы не можем выразить следующий шаг через предыдущий. Перепишем уравнение (42) в следующем виде:

$$-\frac{1}{\tau\chi_i^n} \cdot w_i^n = (a_i + b_i)w_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{1}{\tau\chi_i^n} + 2a_i\right)w_i^{n+1} + (a_i - b_i)w_{i-1}^{n+1} + Q_i^n \quad (43)$$

и воспользуемся матричным представлением:

$$B\vec{w}^n = A\vec{w}^{n+1} + \vec{Q}^n, \quad (44)$$

где A – трех-диагональная матрица, а B – диагональная матрица следующего вида:

$$\begin{aligned} A_{\downarrow} &\equiv A_{i,i} = -\frac{1}{\tau\chi_i^n} - 2a_i - \text{главная диагональ} \\ A_{\uparrow} &\equiv A_{i,i+1} = a_i + b_i - \text{верхняя диагональ} \\ A_{\downarrow} &\equiv A_{i,i-1} = a_i - b_i - \text{нижняя диагональ} \\ B_{\downarrow} &\equiv B_{i,i} = -\frac{1}{\tau\chi_i^n} - \text{нижняя диагональ} \end{aligned} \quad (45)$$

Теперь мы можем выразить $n + 1$ шаг через предыдущий, при условии, что матрица A обратима:

$$\vec{w}^{n+1} = A^{-1}(B\vec{w}^n - \vec{Q}^n). \quad (46)$$

Учитывая граничные условия, аналогично (38), перепишем уравнение (43):

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\tau\chi_i^n} \cdot w_i^n &= (a_i + b_i)w_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{1}{\tau\chi_i^n} + 2a_i\right)w_i^{n+1} + (a_i - b_i)w_{i-1}^{n+1} + Q_i^n, \\
i &= 2 \dots N - 1, \\
-\frac{1}{\tau\chi_1^n} w_1^n &= cw_2^{n+1} - \left(c + \frac{1}{\tau\chi_1^n}\right)w_1^{n+1} + Q_1^n, \\
w_N^{n+1} &= 0.
\end{aligned} \tag{47}$$

Из (47) видно, что:

$$\begin{aligned}
A_{1,1}^n &= -c - \frac{1}{\tau\chi_1^n} \\
A_{1,2} &= c \\
A_{1,3} &= 0 \\
A_{N,N} &= 0 \\
A_{N,N-1} &= 0 \\
B_{N,N} &= 0 \\
Q_N &= 0;
\end{aligned} \tag{48}$$

Для наглядности выпишем уравнение (44) в развернутой форме:

$$\begin{pmatrix} B_{\downarrow} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_{\downarrow} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{\downarrow} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_{\downarrow} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^n \\ w_2^n \\ w_3^n \\ \vdots \\ w_{N-1}^n \\ w_N^n \end{pmatrix} = \tag{49}$$

$$\left[\begin{pmatrix} -c - \frac{1}{\tau\chi_1^n} & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_{\downarrow} & A_{\downarrow} & A_{\uparrow} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_{\downarrow} & A_{\downarrow} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{\downarrow} & A_{\uparrow} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^{n+1} \\ w_2^{n+1} \\ w_3^{n+1} \\ \vdots \\ w_{N-1}^{n+1} \\ w_N^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1^n \\ Q_2^n \\ Q_3^n \\ \vdots \\ Q_{N-1}^n \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

2.1.4.3 Адаптивный шаг по времени

Каждая численная схема обладает критериями устойчивости, которые накладывают ограничения на шаг пространственной сетки и шаг по времени. Кроме этого, для того чтобы можно было адекватно разрешить те или иные процессы в окрестности данной точки, необходимо, чтобы временной шаг был существенно меньше характерных временных масштабов этих процессов в данной окрестности. Таким образом, кроме соотношений устойчивости, существуют ограничения, обусловленные физической сутью явлений. Чтобы определить характерные временные масштабы нашей задачи, линеаризуем уравнение (24). Для этого воспользуемся теорией возмущений [34] и π -теоремой размерностей [35].

Введем безразмерную переменную $\xi = \frac{r}{h_\xi}$, где h_ξ – характерный размер элемента в окрестности данной точки (в метрах). Сделаем замену переменных в уравнении (24):

$$\frac{\partial w(\xi, t)}{\partial t} = \frac{\chi(w)}{h_\xi^2} \cdot \Delta_\xi w(\xi, t) + \{\chi\sigma\}(w)E^2 - \{\chi Q\}(w), \quad (50)$$

где Δ_ξ – лапласиан в терминах переменной ξ , а $Q = q + F$.

Воспользуемся теорией возмущений [34] и добавим к решению уравнения (50) малое возмущение:

$$w \rightarrow w + \delta w, \quad \|\delta w\| \ll \|w\|. \quad (51)$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \delta w}{\partial t} &= \frac{\chi(w + \delta w)}{h_\xi^2} \cdot (\Delta_\xi w + \Delta_\xi \delta w) + \{\chi\sigma\}(w + \delta w)E^2 - \\ & - \{\chi Q\}(w + \delta w). \end{aligned} \quad (52)$$

Раскладывая функции вида $f(w + \delta w)$ в ряд Тейлора с точностью $O(\delta w^2)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \delta w}{\partial t} &= \\ &= \frac{\chi(w) + \chi'_w(w)\delta w}{h_\xi^2} \cdot [\Delta_\xi w + \Delta_\xi \delta w] + [\{\chi\sigma\}(w) + \{\chi\sigma\}'_w(w)\delta w]E^2 - \\ & - [\{\chi Q\}(w) + \{\chi Q\}'_w(w)\delta w] + O(\delta w^2). \end{aligned} \quad (53)$$

Сократим члены, квадратичные по δw , и члены, отвечающие невозмущенному состоянию в уравнении (53):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta w}{\partial t} &= \delta w \left[\frac{\chi'_w(w)\Delta_\xi w}{h_\xi^2} + \{\chi\sigma\}'(w)E^2 - \{\chi Q\}'_w(w) \right] + \\ & + \frac{\chi(w)}{h_\xi^2} \Delta_\xi \delta w + o(\|\delta w\|) \end{aligned} \quad (54)$$

Из вида уравнения (54), т. е. линейризованного уравнения для возмущения δw , используя π -теорему размерностей [35], находим два временных масштаба:

$$\tau_H = \left[\frac{\chi'_w(w)\Delta_\xi w}{h_\xi^2} + \{\chi\sigma\}'(w)E^2 - \{\chi Q\}'_w(w) \right]^{-1} \quad (55)$$

$$\tau_\chi = \frac{h_\xi^2}{\chi(w)}$$

Следовательно, для возмущения δw имеем:

$$\frac{\partial \delta w}{\partial t} = \frac{1}{\tau_H} \cdot \delta w + \frac{1}{\tau_\chi} \cdot \Delta_\xi \delta w \quad (56)$$

Таким образом, чтобы адекватно разрешить уравнение, необходимо, чтобы шаг по времени τ не превышал временных масштабов τ_H и τ_χ , например:

$$\tau = \frac{\min(\tau_H, \tau_\chi)}{2} \quad (57)$$

2.2 2D-модель

В данной постановке в модели используются те же приближения, что и в одномерном случае за исключением:

- Производится расчет гидродинамической системы уравнений – давления и скорости движения среды в условиях естественной конвекции.
- Производится расчет электродинамики – учет вихревых токов и магнитного давления.
- Рассматривается сечение канала, которое, вообще говоря, не сохраняет цилиндрическую симметрию.

Для расчета используется пакет для численного моделирования – COMSOL Multiphysics.

2.2.1 Система уравнений

Для расчета распределения температуры в сечении дугового канала с учетом естественной конвекции и магнитных сил используются уравнения (58) - (72).

Тепловая подсистема описывается уравнением баланса энергии, учитывающим следующие механизмы генерации/отвода/перераспределения тепла:

- Джоулев нагрев – σE^2 ;
- Излучение – Q_r ;
- Нагрев/остывание газа за счет изменения давления – Q_p ;
- Теплопроводность – $(\nabla, \kappa \nabla T)$;
- Конвективный перенос тепла – $\rho C_p (\vec{u}, \nabla T)$;

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = (\nabla, \kappa \nabla T) - \rho C_p (\vec{u}, \nabla T) + \sigma \vec{E}^2 - Q_r + Q_p \quad (58)$$

$$Q_p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla p) \right) \quad (59)$$

где T – температура, t – время, \vec{u} – скорость, p – давление, $\rho = \rho(T, p)$ – плотность, $C_p = C_p(T, p)$ – теплоемкость, $\kappa = \kappa(T, p)$ – теплопроводность, $\sigma = \sigma(T, p)$ – удельная проводимость, $Q_r = Q_r(T)$ – мощность объемного излучения, Q_p – мощность нагрева/охлаждения за счет изменения давления.

Электромагнитная подсистема описывается следующими уравнениями, учитывающими скин-эффект:

$$\vec{I} = I \cdot \vec{e}_z = \int \vec{J} dS \quad (60)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}_v + \vec{J}_e \quad (61)$$

$$\vec{J}_e = J_e \cdot \vec{e}_z = \sigma \vec{E}_e \quad (62)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (63)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (64)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (65)$$

$$\vec{E}_v = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (66)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_v + \vec{E}_e \quad (67)$$

где $\vec{I} = \vec{I}(t)$ – полный электрический ток, \vec{J} – плотность полного электрического тока, \vec{J}_e – плотность стороннего электрического тока, $\sigma = \sigma(T, p)$ – удельная проводимость, \vec{H} – магнитное поле, \vec{B} – индукция магнитного поля, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, $\mu_r = 1$ – магнитная проницаемость среды, \vec{A} – векторный потенциал магнитного поля, \vec{E} – напряженность электрического поля, \vec{E}_v – напряженность вихревого электрического поля, \vec{E}_e – напряженность стороннего электрического поля, t – время, \vec{e}_z – единичный вектор, направленный вдоль оси z .

Для расчета гидродинамики используются уравнения, описывающие скорость движения сжимаемого газа под действием сил: трения, тяжести, Архимеда и Ампера:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \rho \vec{u}) = 0 \quad (68)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u}, \nabla \vec{u}) = \nabla \cdot [-pI + \tau] + \vec{f} + \vec{f}_m \quad (69)$$

$$\tau = \mu(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T) - \frac{2}{3} \mu(\nabla, \vec{u})I \quad (70)$$

$$\vec{f} = -\vec{g}(\rho - \rho_0) \quad (71)$$

$$\vec{f}_m = \vec{J} \times \vec{B} \quad (72)$$

где t – время, \vec{u} – скорость, p – давление, $\rho = \rho(T, p)$ – плотность, $\mu = \mu(T, p)$ – динамическая вязкость, I – единичная матрица, T – символ транспонирования, \vec{g} – ускорение свободного падения, \vec{B} – индукция магнитного поля, \vec{J} – плотность полного электрического тока, \vec{f}_m – сила ампера, \vec{f} – сила, возникающая при естественной конвекции, τ – тензор характеризующий силу вязкого трения.

2.2.2 Геометрия. Начальные и граничные условия

Рассматривается сечение дугового канала, описанное в части 2.1.1, в свободной атмосфере воздуха в условиях естественной конвекции (ускорение свободного падения направленно вниз). Распределения всех величин в такой постановке симметричны относительно вертикальной прямой, проведенной через центр сечения. Поэтому рассматривается только половина модели. В области, в которой будет двигаться дуга, для лучшего описания больших градиентов построена более мелкая сетка. В качестве начального условия задается распределение температуры имеющие, как и в одномерной модели, гауссов профиль. На внешних границах модели задаются условия свободного прохождения всех потоков – условия открытой границы, которые подробно описаны на Рис. 19.

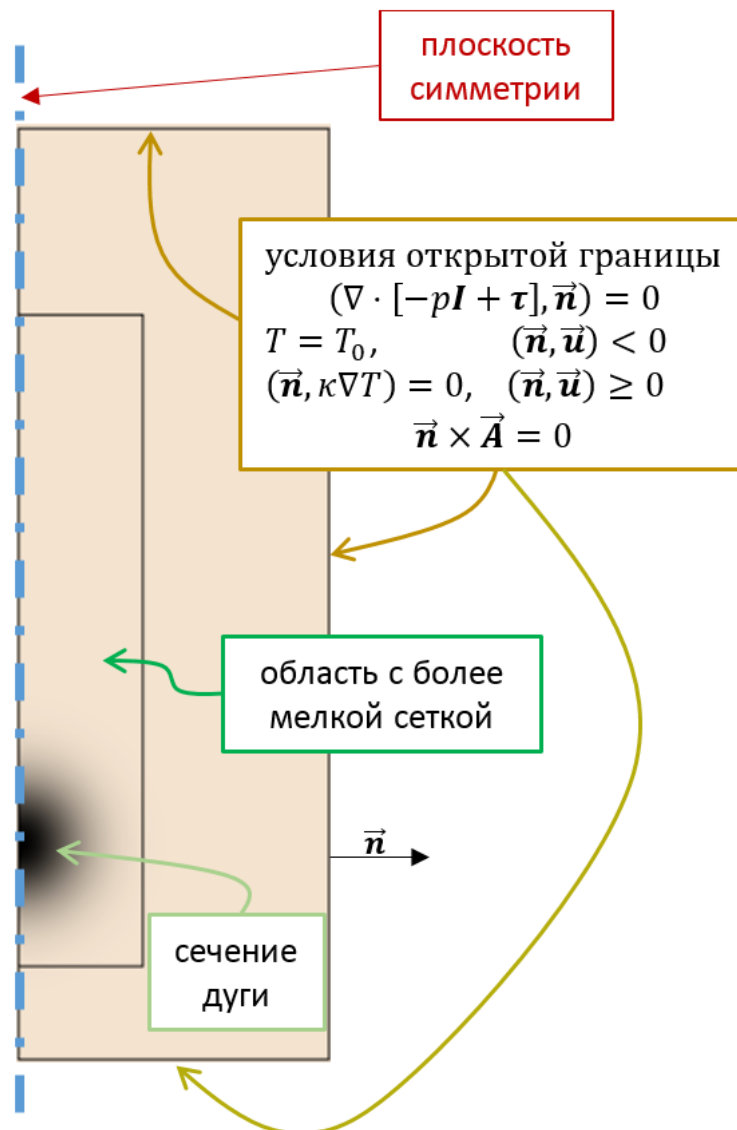


Рис. 19. Геометрия модели, граничные условия, \vec{n} – единичный вектор нормали

3. Обоснование достоверности

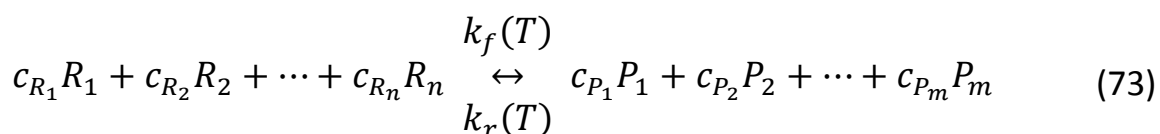
В данном разделе обосновывается справедливость всех приближений, использованных при разработке модели, описывающей динамику температурного профиля воздушного дугового разряда при атмосферном давлении. Приводится обоснование использования уравнений (11) - (17) для моделирования дуговых разрядов с точки зрения тепловой, химической и электрической подсистем. А также, приводятся графики сеточной сходимости для 1D и 2D моделей.

3.1 Локальное термодинамическое равновесие

Как говорилось ранее, уравнение (11) применимо только для плазмы находящейся в состоянии локального термодинамического равновесия. Данное равновесие характеризуется тем, что все прямые процессы в плазме разряда уравновешены обратными, а температуры всех плазменных компонент в некоторой окрестности равны. Самыми медленными процессами, которые нарушают равновесие, являются химические реакции (времена реакций рождения и гибели частиц всегда больше, чем реакции обмена энергиями). Оценка времени химической релаксации, т.е. времени за которое химическая подсистема приходит в равновесие после некоторого малого возмущения, представленные в литературе [6], приведена для одной температуры и рассчитана на основе всего одной реакции для плазмы азота. Эта информация не дает полной уверенности, что воздушная плазма во всем температурном диапазоне горения дугового разряда будет равновесна. В ходе обзора литературы других численных оценок времен химической релаксации найдено не было. Поэтому автором текущей работы была произведена оценка времен химической релаксации воздушной плазмы в широком диапазоне температур (300 ÷ 30000 K). При этом рассматривалось 94 реакции протекающих в плазме воздуха, например, ионизация, рекомбинация, диссоциация, обмен зарядом, и 15 сортов частиц. Данные для расчета, такие как температурные зависимости скоростей прямых химических реакций и равновесных концентраций частиц для воздушной плазмы, были взяты из литературы [25].

Равновесный состав плазмы определяется набором протекающих в ней химических реакций. Каждый сорт частиц, находящихся в плазме, может участвовать сразу в нескольких реакциях. Или другим словами, на динамику изменения концентрации отдельного сорта частиц могут влиять сразу несколько реакций. Более того, скорость протекания химической реакции зависит от концентрации всех частиц, участвующих в данной реакции. Следовательно, оценка времени химической релаксации по одной из реакций является очень грубой из-за сложности (большого количества взаимосвязанных процессов) рассматриваемой системы. Для более точной оценки предлагается методика, описанная ниже.

Химическая реакция может быть записана в следующем виде [19]:



$$v_f = k_f(T) \cdot \prod_i n(R_i)^{c_{R_i}} \quad v_r = k_r(T) \cdot \prod_i n(P_i)^{c_{P_i}} \quad (74)$$

где $n(R_i), n(P_i)$ – концентрации реагентов и продуктов реакции, соответственно, c – стехиометрические коэффициенты (константы для каждой реакции), k_f и k_r – константы скоростей прямой и обратной реакций, соответственно. Скорости реакций – v_f и v_r – являются функциями как температуры, так и концентраций частиц, участвующих в данной реакции. В условиях равновесия

скорости прямой и обратной реакций равны. Приравняв скорости друг к другу получим следующее условие равновесия:

$$\frac{k_f}{k_r} = \frac{\prod_i n[P_i]^{c_{P_i}}}{\prod_i n[R_i]^{c_{R_i}}} = K_{eq}(T) \quad (75)$$

Зная константы прямой и обратной скоростей реакции или их отношение, которое называется константой равновесия реакции – K_{eq} , можно из условия (75) найти распределение концентраций плазменных компонент, удовлетворяющее условию равновесия рассматриваемой реакции. Т.к. реакций в плазме протекает много, равновесное распределение всех частиц находится из некоторого набора таких условий, число которых равно числу реакций, протекающих в плазме.

Для каждого сорта частиц можно написать уравнение, характеризующее динамику изменения его концентрации.

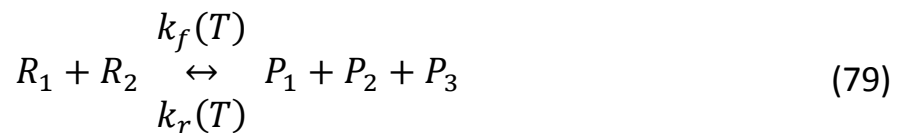
$$\frac{dn_j}{dt} = \sum_r \Delta_{j,r}(\vec{n}(t)) \quad (76)$$

$$\Delta_{j,r}(n(R)) = -k_f \prod_i n(R_i)^{c_{R_i}} + k_r \prod_i n(P_i)^{c_{P_i}} - \text{для реагентов} \quad (77)$$

$$\Delta_{j,r}(n(P)) = +k_f \prod_i n(R_i)^{c_{R_i}} - k_r \prod_i n(P_i)^{c_{P_i}} - \text{для продуктов} \quad (78)$$

где $\Delta_{j,r}$ – вклад r -ой реакции в изменение концентрации j -го компонента, при этом для каждого компонента рассматриваются только те реакции, в которых он участвует. В итоге получим 15 уравнений (т.к. рассматривается 15 сортов частиц) вида (76) и 15 неизвестных величин (константы скоростей реакций считаются известными для каждой температуры).

В условиях ЛТР производные всех концентраций по времени в уравнениях (76) равны нулю. Воспользуемся теорией возмущений и прибавим малую добавку $\delta \vec{n}_i$ к вектору равновесных концентраций \vec{n} . Линеаризуем полученную систему уравнений следующим образом. Рассмотрим, к примеру, реакцию в которой присутствует два реагента и три продукта реакции и все стехиометрические коэффициенты равны единице (79), и запишем уравнение для расчета изменения концентрации первого из реагента с учетом малой добавки.



$$\frac{d}{dt}(R_1 + \delta R_1) = -k_f(R_1 + \delta R_1)(R_2 + \delta R_2) + k_r(P_1 + \delta P_1)(P_2 + \delta P_2)(P_3 + \delta P_3) \quad (80)$$

Раскроем скобки и выкинем все члены, соответствующие невозмущенному состоянию, а также нелинейные по малой добавке слагаемые. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta R_1 = & -k_f(R_1 \delta R_2 + R_2 \delta R_1) + \\ & + k_r(P_1 P_2 \delta P_3 + P_2 P_3 \delta P_2 + P_1 P_3 \delta P_1) \end{aligned} \quad (81)$$

По данному принципу линеаризуются все уравнения вида (76). В итоге приходим к следующему дифференциальному уравнению в матричном виде:

$$\frac{d}{dt} \delta \vec{n} = A \cdot \delta \vec{n} \quad (82)$$

где A – некоторая матрица коэффициентов, которая рассчитывается для каждой температуры из линеаризованных уравнений (76). При этом константы скоростей реакций и равновесный набор концентраций считаются известными для каждой температуры. Как известно решением уравнения данного вида является сумма экспонент (в нашем случае затухающих экспонент, т.к. данная система всегда стремится к равновесному состоянию):

$$\delta \vec{n}(t) = \sum_{i=1}^{\text{rank}(A)} e^{-\frac{t}{\tau_i}} \cdot \vec{V}_i \quad (83)$$

где \vec{V}_i – вектор начальных условий, τ_i – характерное время химической релаксации рассматриваемой системы. Таким образом, оценивая сверху, время, за которое плазма приходит в состояние ЛТР, получим:

$$\tau_{ch} = \max_i(\tau_i) \quad (84)$$

На *Рис. 20* (внизу) представлен график расчета времени химической релаксации воздушной плазмы при атмосферном давлении. Скачки и разрывы на данном графике можно объяснить тем, что для каждой температуры рассматривался набор реакций такой, что относительные концентрации всех частиц, участвующих в этих реакциях, должны быть больше, чем 10^{-6} (относительная точность приведенного в [25] расчета равновесных концентраций). Очевидно, что если концентрация хотя бы одного компонента реакции стремиться к нулю, то данная реакция не будет вносить существенный вклад в процесс установления равновесия.

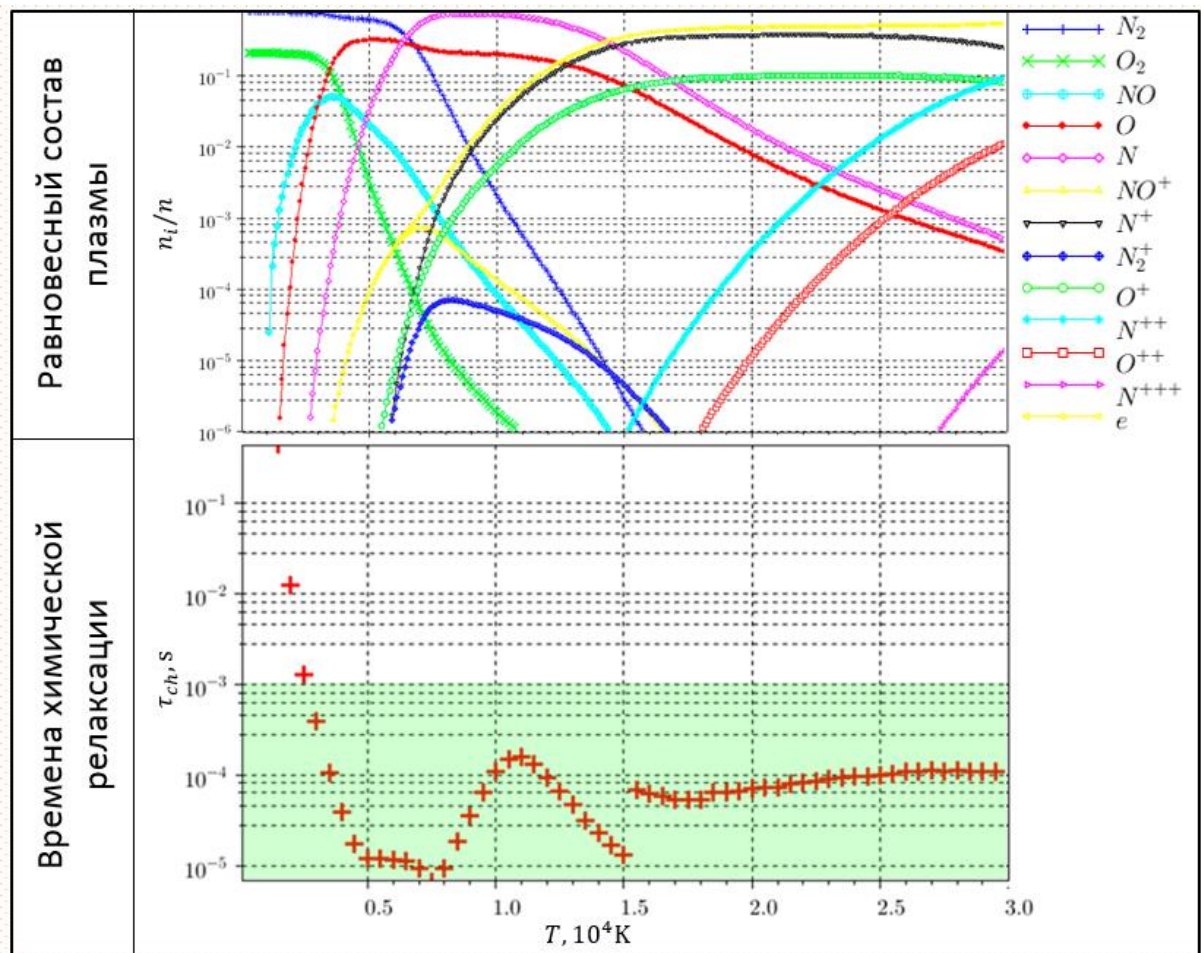


Рис. 20. Равновесные концентрации и время химической релаксации воздушной плазмы при атмосферном давлении в зависимости от температуры.

Рассмотри разрыв на графике τ_{ch} при $T = 15000$ К. Как можно заметить из графика равновесных концентраций, в окрестности данной температуры из рассмотрения уходят реакции, в которых участвуют N_2 , NO^+ , NO , N_2^+ , и включаются новые реакции с участием N^{++} . А локальный максимум на графике времен при $T = 11000$ К соответствует выключению реакций с O_2 .

Зеленым цветом на графике обозначена область, в которой время химической релаксации на порядок меньше периода возмущения током частоты 50 Hz. Следовательно, плазма дуговых разрядов, горящих при токах промышленной частоты, будет находиться в состоянии ЛТР при $T > 3000$ К. В дальнейшем будет показано, что таким температурам соответствуют дуги с амплитудой тока $I > 10$ А.

3.2 Корректность описания динамики изменения концентраций плазменных компонент

Как известно, динамика изменения концентрация плазменных компонент определяется уравнением Нерста-Планка:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} - \text{div}(-\mu_i n_i \vec{E} - D_i \nabla n_i) = v_i - r_i \quad (85)$$

где μ_i – подвижность i -ой частицы, D_i – коэффициент диффузии i -ой частицы, v_i и r_i – скорости рождения и смерти i -ой частицы.

Т.к. рассматриваемая плазма находится в состоянии ЛТР. Процессы рождения и смерти частиц уравновешены. Следовательно, $v_i - r_i = 0$. Более того, если за время своей жизни частица под действием электрического поля проходит малое расстояние (по сравнению с продольным размером рассматриваемого участка канала), можно пренебречь миграционным членом $\mu_i n_i \vec{E}$. Также, если характерные масштабы диффузии меньше пространственных размеров рассматриваемой области, можно пренебречь диффузионным членом $D_i \nabla n_i$. Если предположения о малости диффузии и миграции частиц верны, то концентрация частиц определяется исключительно условиями ЛТР и является функцией только температуры.

Докажем следующие неравенства для электрона (для оценки «сверху»), т.к. он обладает наибольшей подвижностью и коэффициентом диффузии по сравнению с тяжелыми частицами:

$$\tau_e \cdot \mu_e E \ll \Delta l \quad (86)$$

$$\sqrt{\tau_e D_e} \ll \lambda \quad (87)$$

где τ_e – время жизни электрона, Δl – продольный размер рассматриваемого канала (как на *Рис. 17*), λ – характерный пространственный масштаб рассматриваемой области.

Время жизни электрона оценивается из скоростей химических реакций и имеет порядок 1 μ s. Подвижность электрона в воздухе в слабых электрических полях по данным литературы [14] [17] имеет порядок 0.1 m^2/Vs . Коэффициент диффузии можно оценить из соотношения Эйнштейна $D_e = \mu_e k_B T / e$. Для оценки «сверху» возьмем завышенные характерные параметры дугового разряда: $E = 10^4 \text{ V/m}$ и $T = 10^4 \text{ K}$. Характерный радиус дугового канала имеет размеры порядка нескольких сантиметров, а параметр Δl может быть выбран сколь угодно маленьким (неравенство (87) лишь определяет дискретизацию сетки вдоль оси дугового столба, при моделировании целого канала). Получим:

$$\tau_e \cdot \mu_e E \sim 10^{-3} \ll \Delta l \quad (88)$$

$$\sqrt{\tau_e D_e} \sim 10^{-4} \ll \lambda \quad (89)$$

Таким образом данные оценки подтверждают предположение о малости миграционного и диффузионного членов в уравнении (85), а, следовательно, и о том, что концентрации частиц в равновесной плазме дугового разряда в воздухе являются функциями только температуры и не зависят, в частности, от напряженности электрического поля, как это обычно бывает при описании высоковольтных разрядов другого типа.

3.3 Корректность описания электрической подсистемы

Для расчета напряженности электрического поля в общем случае используются следующие уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = 0 \quad (90)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0} \quad (91)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (92)$$

где ρ – плотность объемного заряда, σ – удельная проводимость, $\varepsilon = 1$ – диэлектрическая проницаемость воздуха, ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, \vec{E} – электрическое поле, \vec{B} – поле магнитной индукции.

Оценим время максвелловской релаксации по данным из [20]: $\tau_m = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\sigma} < 10^{-10}$ с. Т.к. время максвелловской релаксации настолько маленькое (плазма имеет высокую проводимость), накопления объемного заряда практически не происходит (может происходить на периферии разряда, в области с большим градиентом проводимости, но этот заряд быстро рекомбинирует и не влияет на поле в центральной части разряда). Следовательно, нет необходимости рассчитывать распределение объемного заряда.

Оценим вихревое электрическое поле следующим образом:

$$E_v = \lambda \frac{\partial B}{\partial t} = \lambda 2\pi 50[\text{Hz}] \cdot B \quad (93)$$

$$\oint B \, dl = \mu_0 I \quad (94)$$

По данной оценке даже при токах порядка 100 кА вихревое электрическое поле имеет порядок 10 В/м, что на два порядка меньше характерных напряженностей продольного электрического поля в разряде. Таким образом, при рассмотрении электрической подсистемы дугового разряда в воздухе можно пренебречь скин-эффектом (наличием вихревых токов и полей). Тогда из равенства $\nabla \times \vec{E} = 0$ и условий цилиндрической симметрии следует, что электрическое поле в дуговом разряде постоянно по сечению и направлено по оси канала.

Воспользовавшись дифференциальной формой закона Ома, учитывая отсутствие вихревых полей, малость объемного заряда и вывод о том, что электрическое поле постоянно по сечению канала и направлено вдоль его оси, для описания электрической подсистемы можно оправданно использовать уравнение (17), как показано ниже

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E \vec{e}_z \rightarrow \int \vec{j} \, d\mathbf{S} = \vec{E} \int \sigma \, d\mathbf{S} \rightarrow \vec{I} = \Sigma \vec{E} \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} \end{aligned} \quad (95)$$

где Σ – погонная проводимость дугового канала.

3.1 Цилиндрическая симметрия, конвекция

Для проверки является ли свободно горящий дуговой разряд цилиндрически симметричным, а также для оценки роли конвекции в теплопереносе было проведено 2D моделирование. Ток дуги 200 А, $k_q = 1000$.

На *Рис. 21* представлены распределения проводимости для 2D-модели с учетом и без учета магнитных сил. Из графиков видно, что без учета магнитных сил (*Рис. 21 а, в*) дуговой канал теряет цилиндрическую симметрию. В реальных условиях (с учетом магнитных сил), как видно из *Рис. 21 б, г*, дуговой канал сохраняет цилиндрическую симметрию, т.к. на него действует сила магнитного давления, которая пытается сжать дугу (*Рис. 22*).

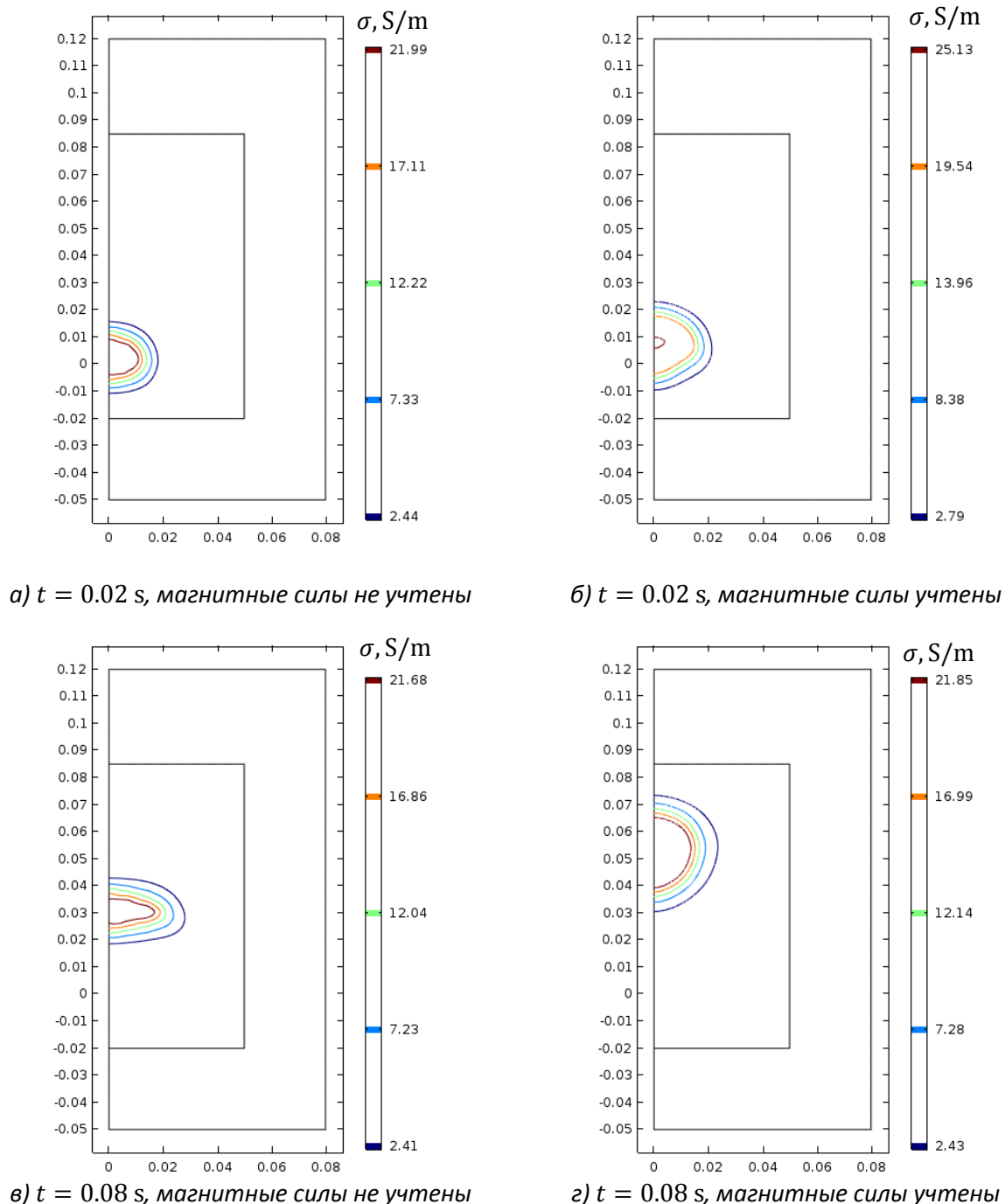


Рис. 21. Распределение удельной проводимости (S/m).

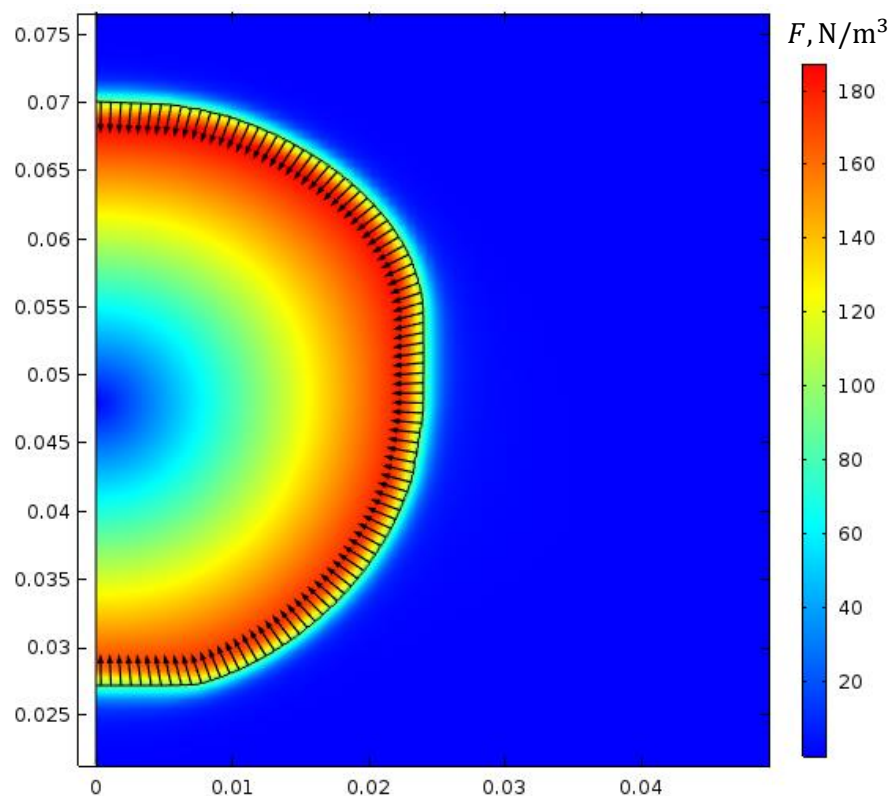


Рис. 22. Распределение силы магнитного давления (N/m^3), момент времени соответствует максимальной амплитуде тока.

Для оценки роли конвекции сравним конвективный тепловой поток и тепловой поток, связанный с теплопроводностью. Как видно из Рис. 23 конвективный тепловой поток имеет такой же порядок величины, как и поток вызванный теплопроводностью.

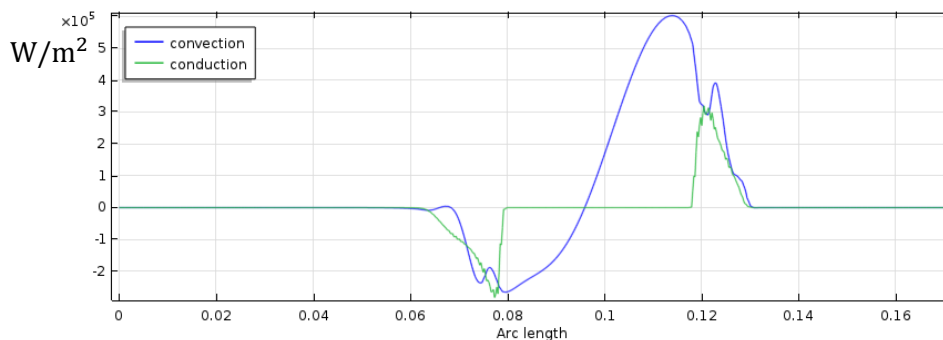
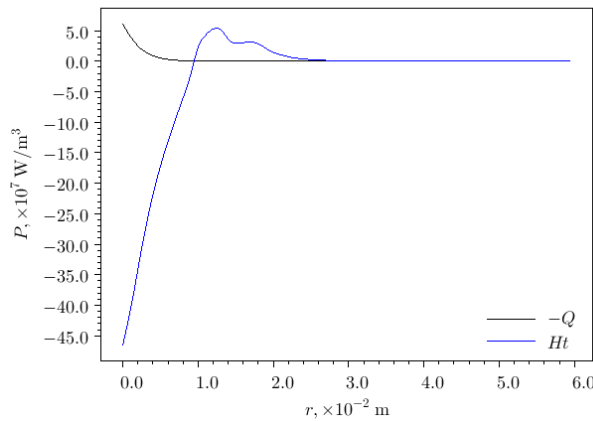
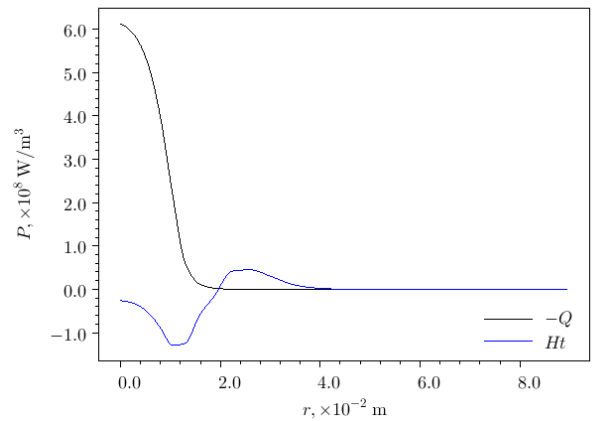


Рис. 23. Распределение конвективного теплового потока (синим) и потока, вызванного теплопроводностью (зеленым) вдоль оси y .

При малых токах в свободно горящих воздушных дугах, как показывает моделирование, теплопроводность является определяющим механизмом отвода тепла (Рис. 25 а). Согласно Рис. 23 конвекция имеет тот же порядок величины и ей пренебречь нельзя. С другой стороны, при высоких температурах дугового канала (следовательно, при высоких токах) мощность теплоотвода за счет излучения гораздо выше дивергенции теплового потока, обусловленного теплопроводностью (Рис. 25 б). Поэтому, учитывая тот факт, что конвекция имеет тот же порядок величины, что и теплопроводность, конвективным теплоотводом в данном случае можно пренебречь.



а) $I = 100 \text{ A}$



б) $I = 1000 \text{ A}$

Рис. 24. Сравнение мощности тепловода за счет излучения (Q) и теплопроводности (Ht) при малых (а) и больших (б) токах.

3.2 Постоянство давления.

Как было отмечено ранее, магнитные силы, действующие в дуговом канале, могут создавать дополнительное давление. На Рис. 25 представлена зависимость отношения максимального давления к атмосферному от времени, посчитанная для дуги с током 10 кА (с учетом магнитных сил). Как видно из графика, изменения давления малы ($\approx 10\%$ от атмосферного).

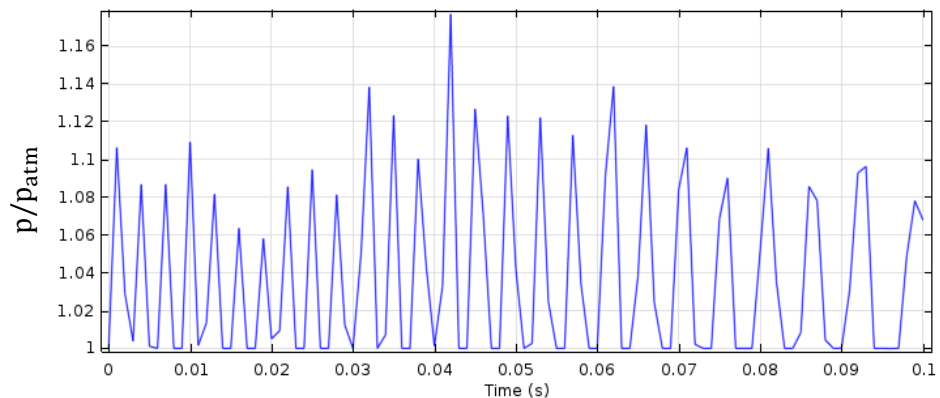


Рис. 25. Зависимость отношения максимального давления к атмосферному от времени

3.3 Сеточная сходимость

3.3.1 1D-модель

Одним из важнейших показателей правильной работы численной схемы является сходимость, другими словами независимость результатов расчета, начиная от некоторого числа разбиений, от количества элементов сетки с точностью до заданной погрешности.

Рассмотрим графики напряженности поля (Рис. 26 и Рис. 27), рассчитанные с помощью явной (сплошные линии на графике) и неявной схемы (пунктирные линии на графике) при разном числе разбиений по оси x и сравним результаты, полученные при разных параметрах сетки. В качестве входных параметров модели был использован гармонический ток амплитудой 50 А и частотой 50 Hz.

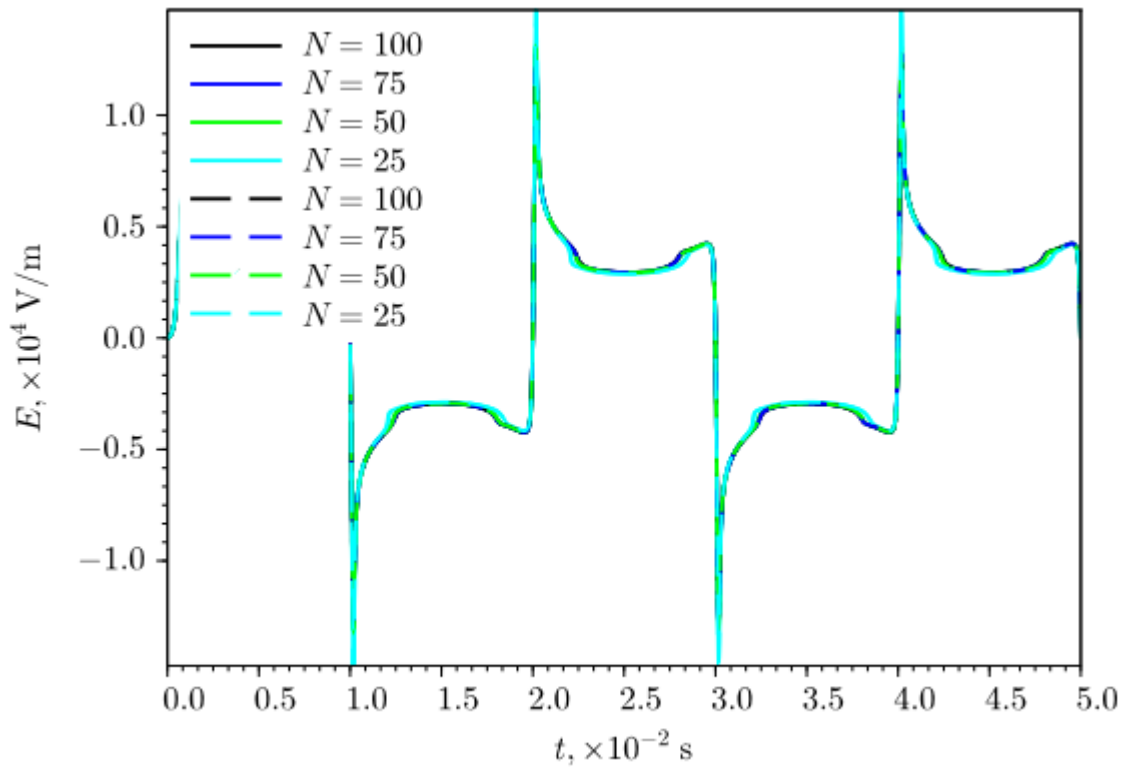


Рис. 26. Напряженность поля при различном количестве элементов пространственной сетки.

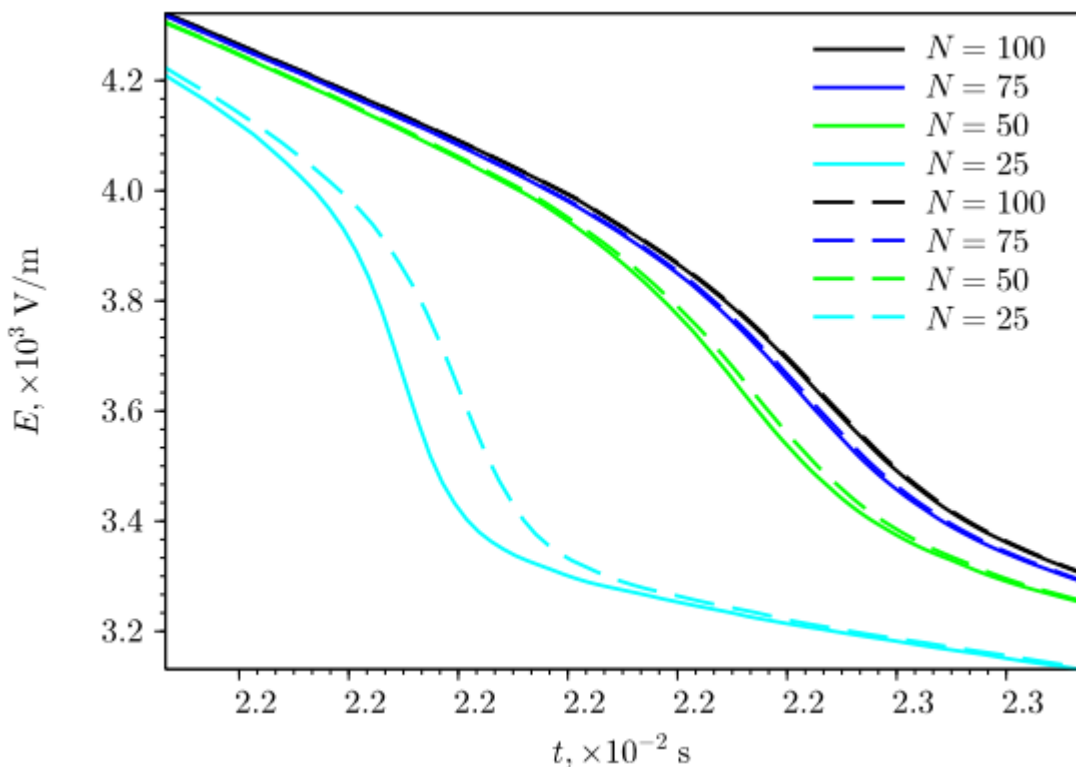


Рис. 27. Напряженность поля при различном количестве элементов пространственной сетки (увеличенный фрагмент).

Из графиков видно, что с увеличением числа разбиений осциллограммы напряженности сходятся к некоторой кривой. Причем неявная схема сходится быстрее. Различия между явной и

неявной схемой практически не видны даже на увеличенном фрагменте (Рис. 27), когда число разбиений N превышает 50.

Получим численное подтверждение предыдущему утверждению. Для этого найдем погрешности между соседними кривыми по следующей формуле:

$$\Delta_{12} = \frac{\sum_{i=1}^M |E_{1_i} - E_{2_i}|}{\overline{E_2} \cdot M} \quad (96)$$

На Рис. 28 представлены кривые сходимости явной и неявной схемы, а также сходимости явной схемы к неявной. Для сходимости явной и неявной схемы E_2 и E_1 – это две ближайшие по разбиениям кривые, для сходимости явной схемы к неявной E_1 и E_2 – кривые, рассчитанные с помощью явной и неявной схемы при одинаковом числе разбиений.

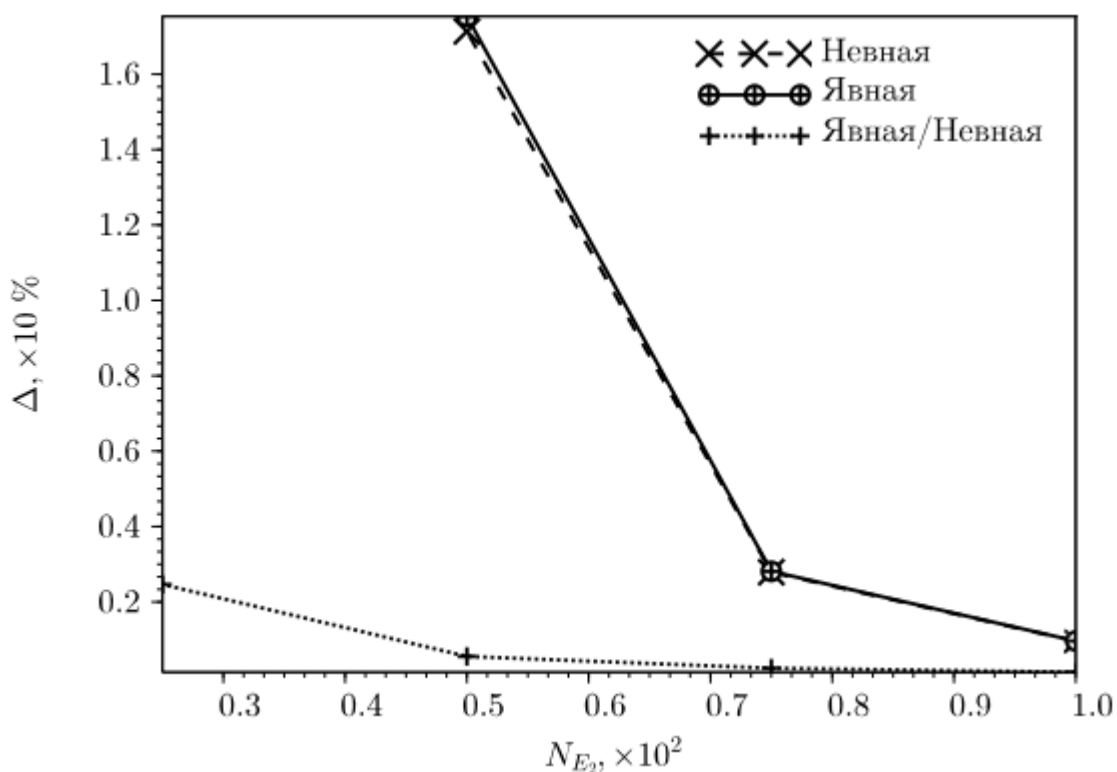


Рис. 28. Сходимость по размеру элемента пространственной сетке.

Из Рис. 28 можно заметить, что явная и неявная схемы сходятся, причем неявная сходится быстрее. Также видно, что явная схема сходится к неявной. Минимальная Δ при $N = 100$: явная схема 1%, неявная схема 1%, явная/неявная 0.1%.

По полученным данным можно сделать вывод, что разностные схемы сходятся, а результаты, полученные с помощью данных численных схем имеют погрешность, которая зависит от количества разбиений, при $N = 100$ не более 1%.

3.3.2 2D-модель

Для проверки сеточной сходимости в 2D-модели было проведено моделирование при следующих параметрах: ток дуги $I = 200$ А, параметр $k_q = 1000$. Моделирование производилось на следующей сетке:

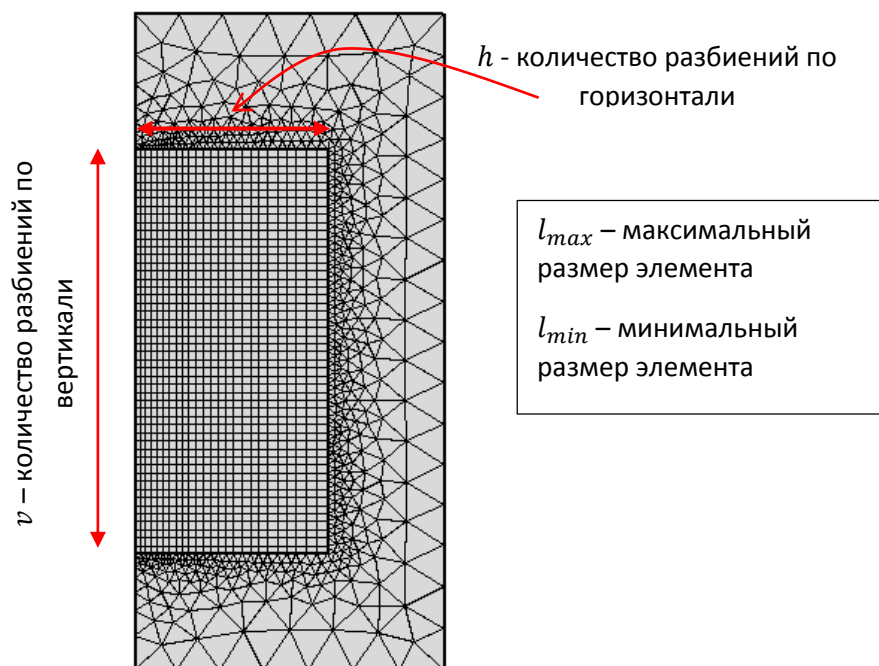


Рис. 29. Сетка

Для проверки сходимости был введен параметр $k = 1, 2, 3$, от которого зависят параметры разбиения следующим образом: $v = 50 \cdot k$, $h = 25 \cdot k$, $l_{max} = 10^{-2} \cdot k$, $l_{min} = 10^{-5} \cdot k$.

Как видно из Рис. 30 видно, что уменьшение размеров элементов в 3 раза не приводит к значительным изменениям напряженности электрического поля. Следовательно, в результатах, полученных при моделировании на сетке со значением параметра $k = 1$, отсутствует ошибка, связанная с качеством конечно-элементной сетки.

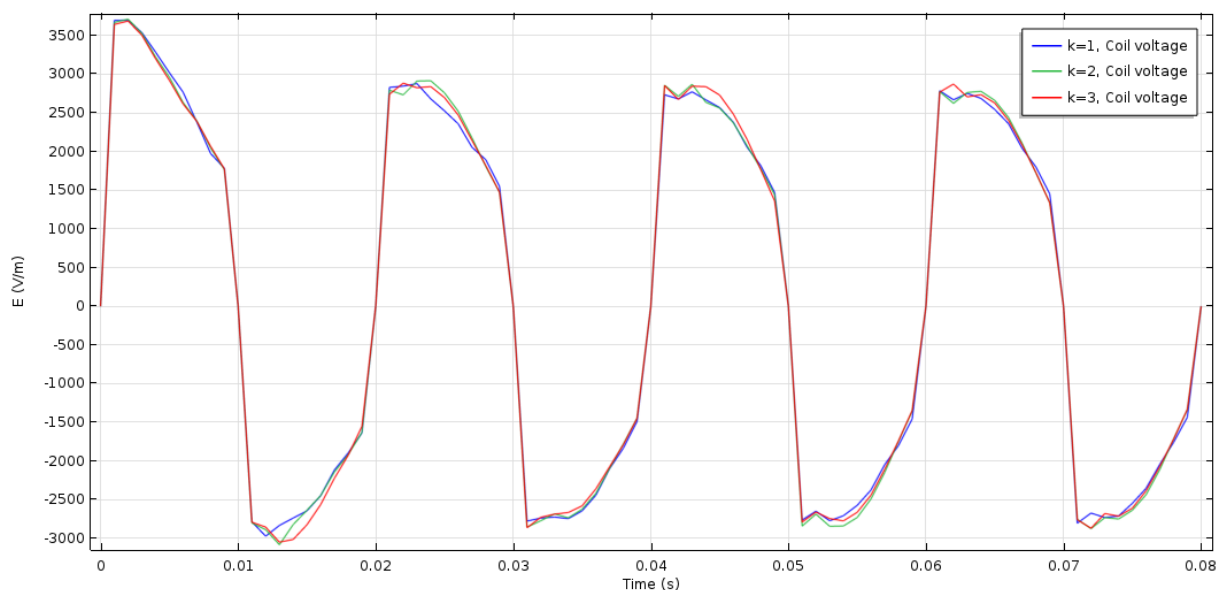


Рис. 30. Осциллограммы напряженности электрического поля

4. Верификация модели

4.1 Подбор параметров по экспериментальным данным

В предложенной модели, задав зависимость тока от времени и материальные свойства среды, остается два параметра, подлежащий определению – средняя скорость конвективных радиальных потоков u_{avg} и параметр, характеризующий мощность объемного излучения k_q (подробное описание данных параметров приведено в разделе 5.1).

В [7] представлены осциллограммы тока и напряжения стабилизированного дугового разряда в воздухе при атмосферном давлении (Рис. 31). Стабилизация дуги происходит путем тангенциального вдувания холодного газа. Чтобы оценить потери тепла, вызванные этим процессом, а также излучением, подберем параметры u_{avg} и k_q . В качестве модельного тока дуги будем использовать данные, представленные на Рис. 31 а. Также для верификации будем использовать осциллограмму напряжения (Рис. 31 б).

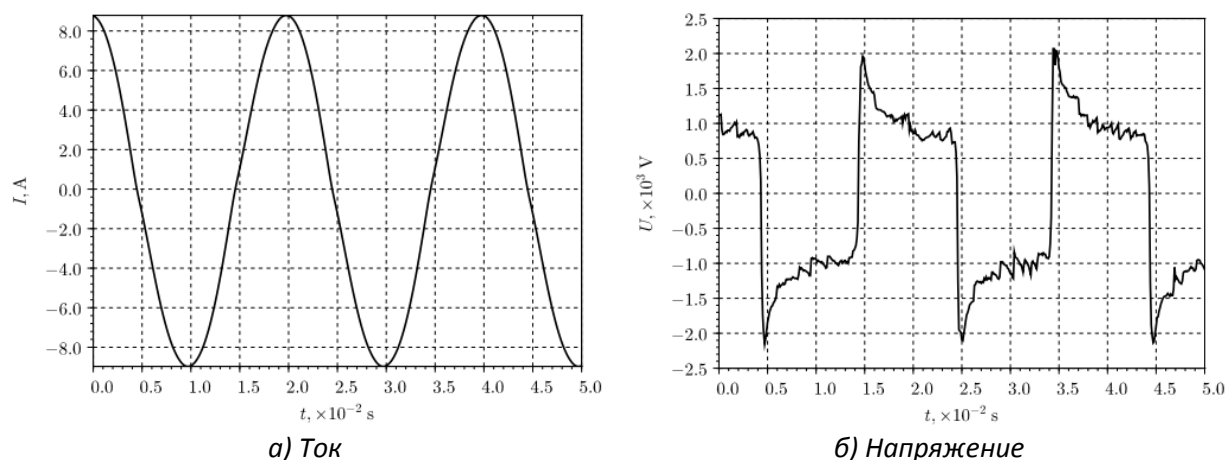


Рис. 31. Экспериментальные осциллограммы тока и напряжения [7].

Чтобы пересчитать напряжение в напряженность электрического поля, необходимо знать длину плазменного шнура. В имеющихся экспериментальных данных [7] нет информации о продольных размерах дуги. Известно лишь, что длина дуги имеет порядок $\approx 10 - 50 \text{ см}$. Поэтому вместо напряжения U экспериментального разряда [7] и напряженности поля E модельного используем их приведенные величины: $U' = U/U_{rms}$ и $E' = E/E_{rms}$, где индекс rms означает действующее значение величины за период. Безразмерные величины являются более удобными для оценки степени отличия осциллограмм, поэтому введем безразмерный ток $I' = I/I_{rms}$.

Определим функционал, являющийся мерой отличия результатов моделирования и экспериментальных данных (в терминах погонной мощности разряда) следующим образом:

$$\Delta P = \frac{\sum_j |(E_j - E'_j)I_j|}{N} \quad j: t_j \in [0, T] \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (97)$$

где I' – приведенный ток как экспериментального, так и модельного разряда, E' и U' – приведенная напряженность электрического поля модельного и приведенное напряжение экспериментального разрядов соответственно, T – период. Подбор параметров u_{avg} и k_q осуществим путем минимизации функционала (97), значение которого, что важно, является безразмерной величиной.

Данный подход позволит подобрать параметры таким образом, чтобы мощность модельного и экспериментального разряда как можно меньше отличались на качественном уровне (по форме кривых). Рассчитав E_{rms} модельного разряда, можно оценить длину $L = U_{rms}/E_{rms}$ дугового столба экспериментального разряда.

Для подбора параметров, а именно для выявления количества локальных минимумов, выполнялся расчет функционала (97) на сетке, представленной на Рис. 32. Как видно из рисунка, функционал имеет единственный минимум.

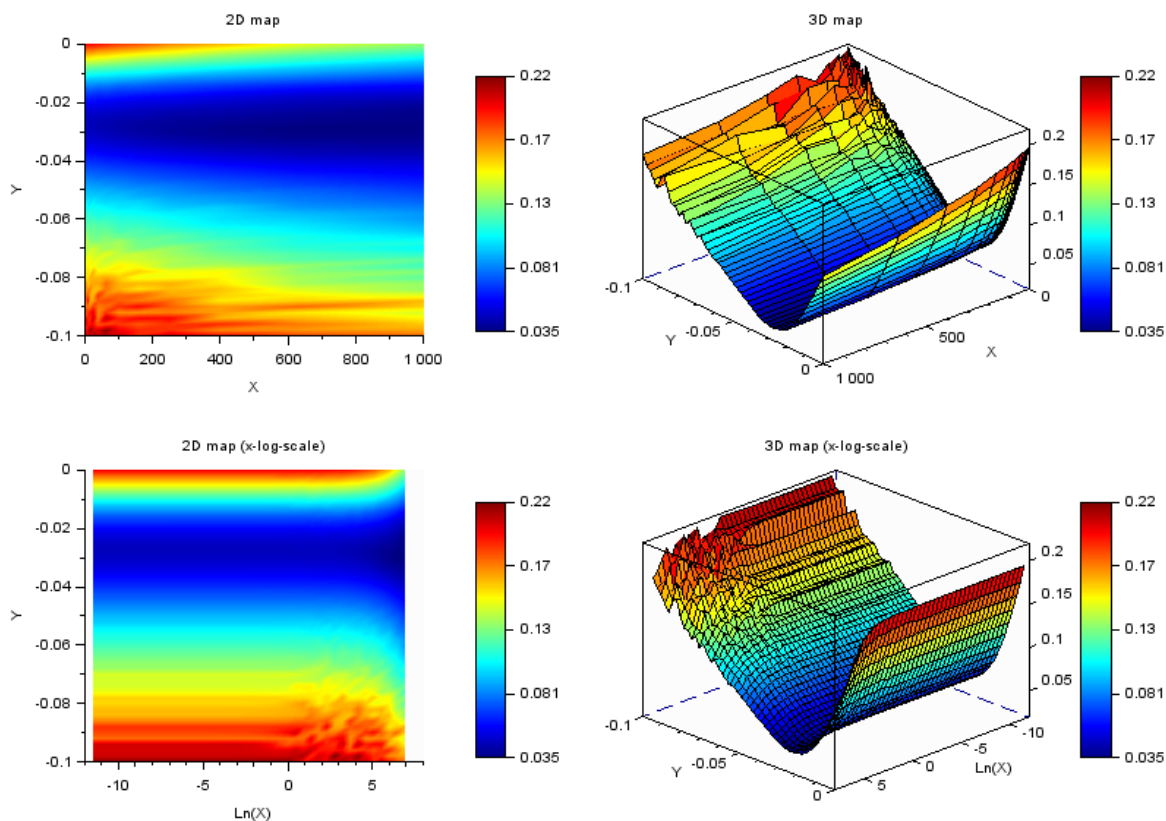


Рис. 32. Значения функционала ΔP (по оси Z) на сетке параметров u_{avg} (по оси Y) и k_q (по оси X)

Для уточнения минимума применялся метод двумерной бисекции (который в одномерном случае называется методом деления отрезка пополам). Область поиска: $(x_0 \pm 50\%, y_0 \pm 50\%)$, где (x_0, y_0) – стартовая точка – точка минимума, полученная на сетке (Рис. 32). Результаты расчетов методом двумерной бисекции показаны на Рис. 33. Значения параметров соответствующие минимуму функционала (97), который равен 0.034 (3.4%), равны: $u_{avg} = -0.028$ и $k_q = 1125$.

На Рис. 34 представлены осциллограммы приведенной мощности $P' = P/P_{rms}$ и напряженности электрического поля модельного разряда с оптимальными параметрами и экспериментального разряда. По результатам расчетов можно оценить длину дуги $L \approx 34$ см.

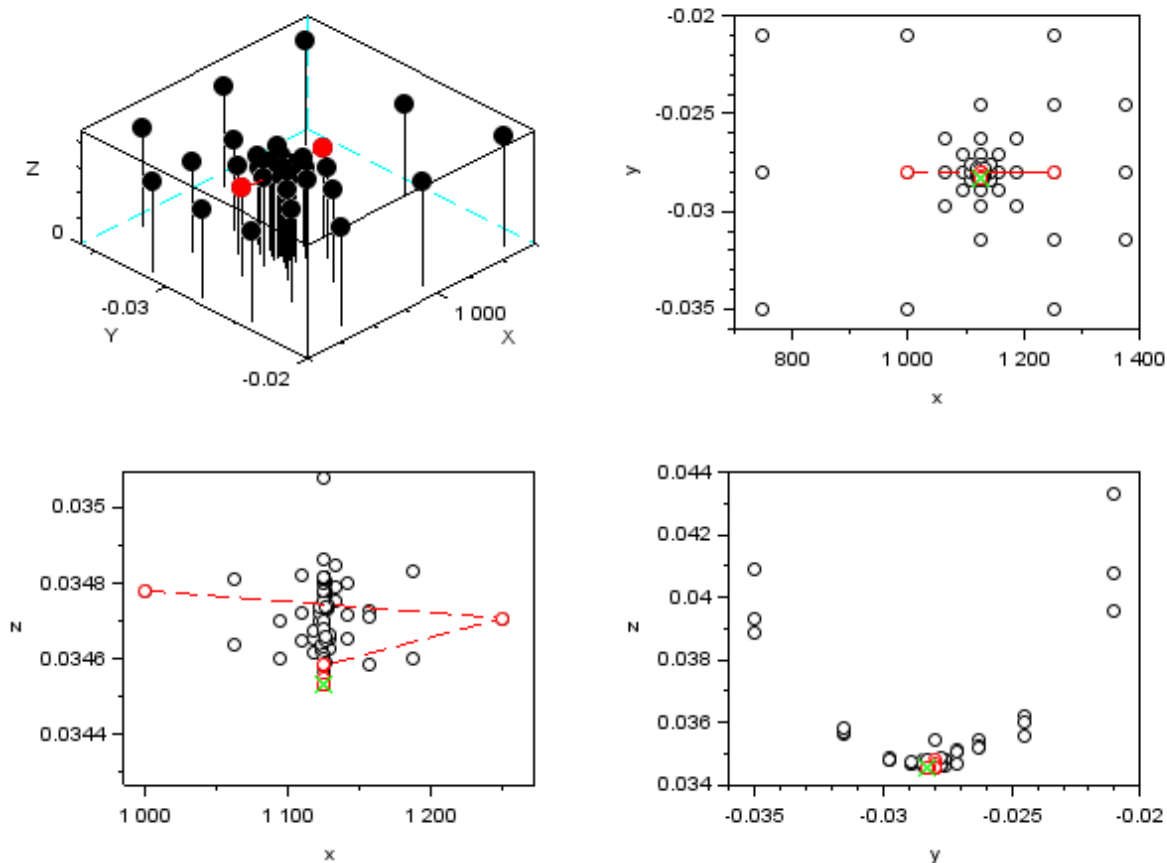


Рис. 33. Метод двумерной бисекции: значения функционала ΔP (по оси Z), u_{avg} (по оси Y) и k_q (по оси X). Красным цветом отмечен путь к минимуму, зеленым – минимум.

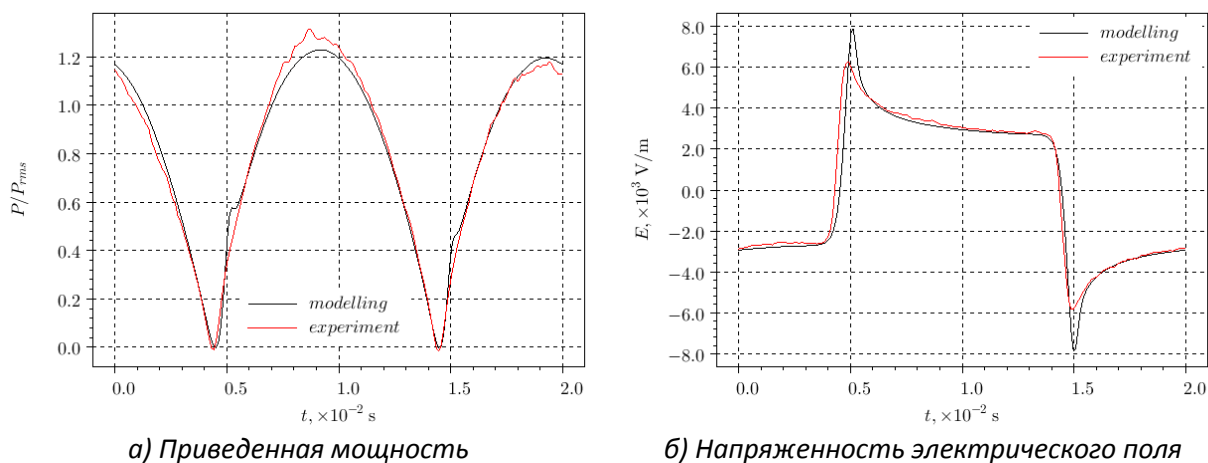


Рис. 34. Сравнение характеристик модельного и экспериментального разряда.

Для наглядности приведем графики зависимости ΔP от каждого из параметров, фиксируя второй в точке минимума (Рис. 35). Из графиков видно, что ΔP имеет сильно выраженный минимум по параметру u_{avg} (ошибка уменьшается больше, чем на 10%) и слабовыраженный – по параметру k_q (отличие всего в 1%). Далее (в разделе 5.3.4) будет показано, что при малых токах $I < 100$ А излучение практически не влияет на напряженность электрического поля, чем и объясняется. Из Рис. 35. б кажется, что при дальнейшем увеличении излучения ошибка продолжит уменьшаться, но,

во-первых, из Рис. 33 видно, что это не так, во-вторых, дальнейшее увеличение излучения не имеет физического смысла, применимо к данной задаче.

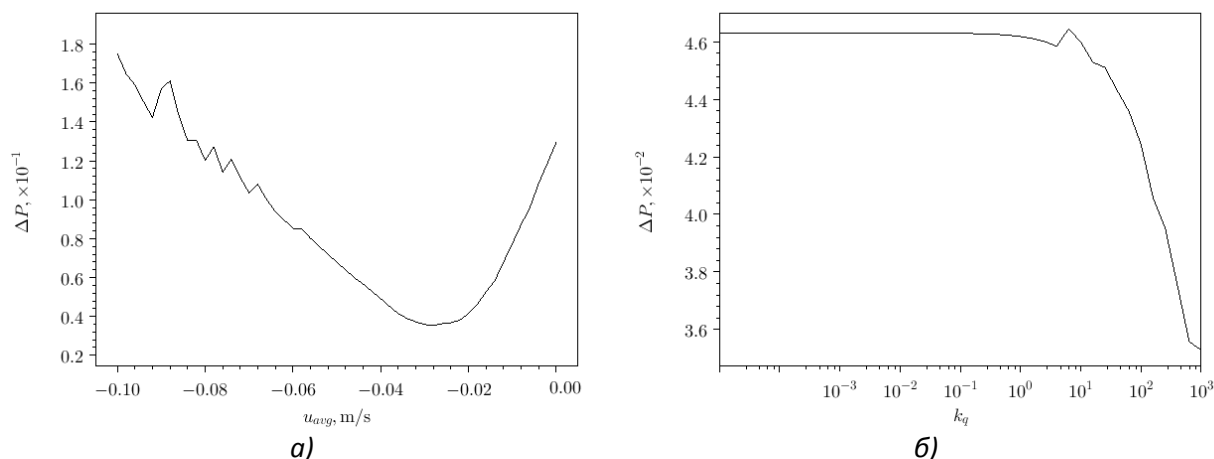


Рис. 35: а) зависимость ΔP от u_{avg} при $k_q = 1000$ б) зависимость ΔP от k_q при $u_{avg} = -0.028$ м/с

4.2 Верификация по температурному профилю

Подобрав параметры модели по осциллограммам напряжения реального разряда, сравним температурный профиль, полученный путем моделирования (с оптимальными параметрами), с профилем, измеренным экспериментальными методами (Рис. 36). Данные о температурном профиле дугового разряда, представленные в [7], получены с помощью спектральных измерений. Погрешность измерения температуры, как утверждают авторы, не превышает 20%.

Из графика на Рис. 36 а видно, что результаты моделирования совпадают с экспериментальными данными лишь в центральной части разряда. Ширина модельного температурного профиля заметно отличается от экспериментальных данных. Из анализа зависимости температурного профиля от мощности конвективного теплоотвода (раздел 5.3.5) известно, что конвекция сильно влияет на радиус дугового канала.

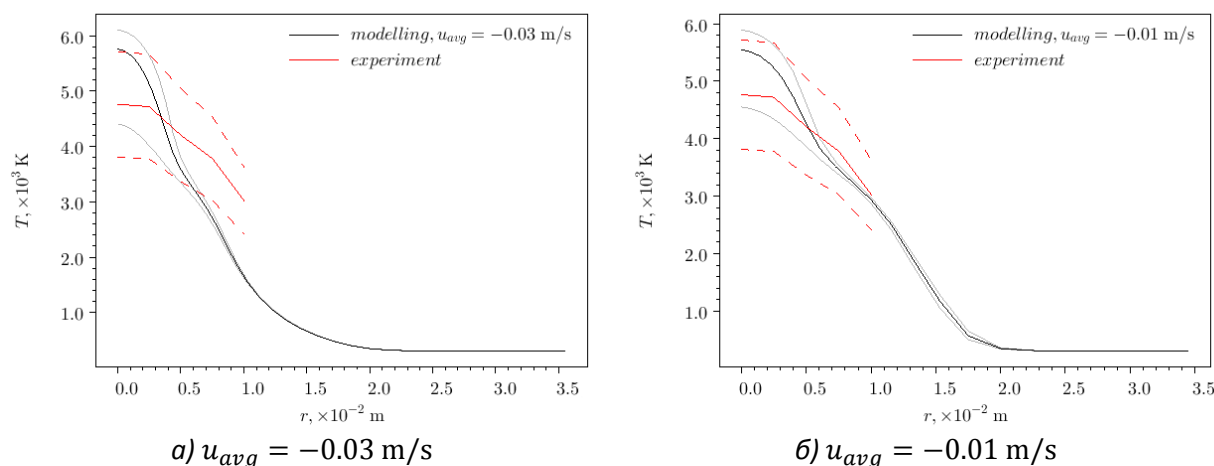


Рис. 36. Температурный профиль: красная сплошная линия – экспериментальные данные, пунктир – доверительная область ($\pm 20\%$), черным – усредненный по периоду температурный профиль модельного разряда, серым – максимальное и минимальное значение температуры за период.

Также известно, что при малых токах излучение практически не влияет на характеристики разряда. Поэтому уменьшив мощность конвективного теплоотода можно уменьшить различия между модельными и экспериментальными данными (Рис. 36 б), но при этом изменится форма осциллограмм напряженности электрического поля, и невязка модельной и экспериментальной осциллограмм возрастет с 3% до 8%.

4.3 Верификация по ВАХ

В литературе имеются данные о вольтамперных характеристиках дуговых разрядов, горящих в воздухе при различных условиях: [15] – различные длины дуг, материалы электродов, открытое/ограниченное пространство, [4] и [16] – дуговой разряд в открытом воздухе, Сравним модельную и экспериментальные ВАХ.

Из Рис. 37 видно, что модельные ВАХ (синяя и зеленая кривая), посчитанные с теми же параметрами, что и на Рис. 36, находятся выше облака экспериментальных данных. В связи с этим, учитывая тот факт, что при варьировании параметра k_q от 1 до 1000 ошибка (связанная с формой осциллограмм напряженности электрического поля) меняется всего на 1%, уменьшим мощность излучения так, чтобы ВАХ модельного разряда находилась в облаке экспериментальных точек – голубая и красная кривые на Рис. 37. Видно, что данные кривые находятся внутри облака экспериментальных данных. При этом ошибка ΔP , определенная в (97) относительно дугового разряда в плазмотроне [7], изменится от 8% до 11%, от зеленой к красной кривой соответственно.

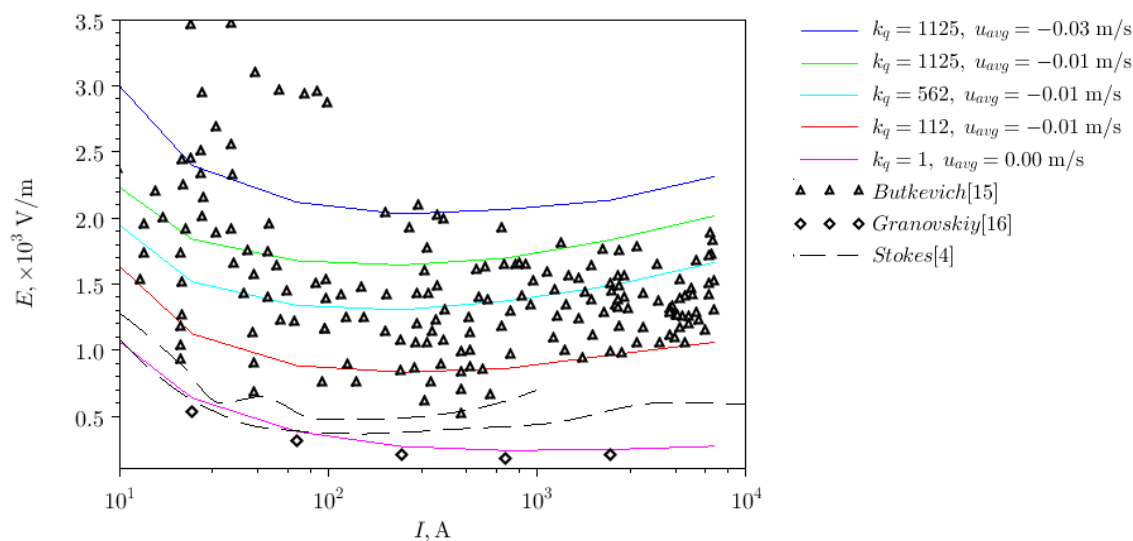


Рис. 37. ВАХ модельных и экспериментальных разрядов.

В дуговом разряде в открытом воздухе, как известно из литературы, роль конвекции пренебрежимо мала. Обычно такие разряды имеют большую длину. Поэтому присутствие примесей металлов, следовательно и мощность излучения малы. Смоделируем ВАХ такого разряда (фиолетовая кривая на Рис. 37). Для этого положим $u_{avg} = 0$ м/с (отсутствие конвективных потоков), $k_q = 1$ (излучение чистого воздуха). Видно, что модельная и экспериментальная ВАХ воздушной дуги в открытом пространстве практически совпадает. Это свидетельствует о том, что моделирование корректно воспроизводит характеристики дугового разряда не только на качественном уровне (форма осциллограмм напряженности), но и на количественном (температурный профиль и ВАХ).

5. Моделирование

5.1 Материальные свойства и параметры модели

При моделировании температурного профиля дугового разряда в воздухе при атмосферном давлении как в 1D, так и в 2D-модели использовались зависимости плотности, удельной теплоемкости, теплопроводности и электрической проводимости от температуры и давления из работы [20], представленные на *Рис. 38*. При этом в 1D модели зависимость от давления не учитывалась, т.к. в данной постановке давление считается постоянным.

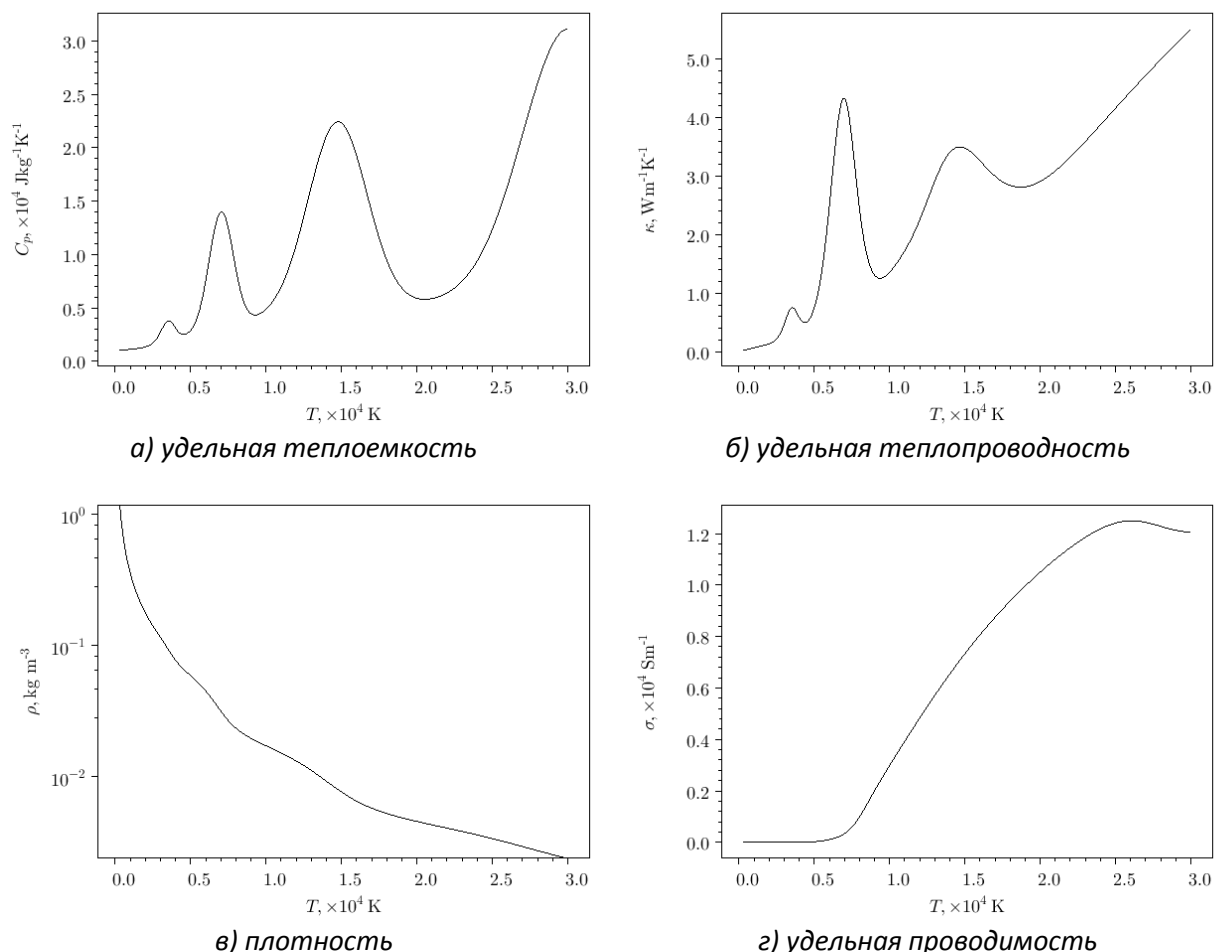


Рис. 38. Материальные свойства воздуха в зависимости от температуры [20].

Мощность объемного излучения, как говорилось ранее, сильно зависит от наличия примесей металлов (атомы металлов попадают в дуговой канал испаряясь с электродов) в воздушной плазме разряда. Даже присутствие нескольких процентов таких примесей может увеличить излучение на несколько порядков [21]. Также, мощность излучения зависит от выбора радиуса R_p в уравнении (10), что в свою очередь, также, достаточно сильно влияет на мощность излучения [21] [23]. Поэтому для описания мощности объемного излучения была взята некая средняя кривая (*Рис. 39*) из представленных в литературе зависимостей мощности излучения плазмы от температуры [21] [23] [24] [30] [31] и введен k_q , корректирующий мощность излучения в уравнениях (11) и (58) следующим образом: полная мощность объемного излучения есть произведение $k_q \cdot Q(T)$, где $Q(T)$ – зависимость, представленная на *Рис. 39*.

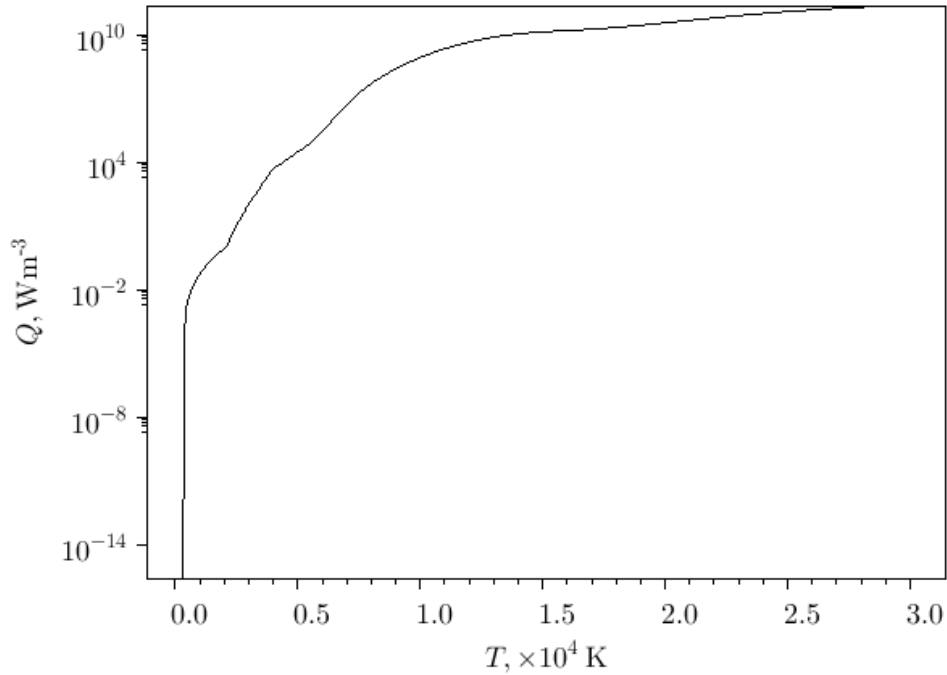


Рис. 39. Зависимость мощности объемного излучения горячего воздуха от температуры

Еще один параметр модели u_{avg} был введен для описания средней мощности теплоотода за счет конвекции. А член уравнения баланса энергии, отвечающий за конвективный теплоотвод, имеет следующий вид:

$$F = \rho C_p (\vec{u}_{avg}, \nabla T), \quad (98)$$

где $\vec{u}_{avg} = u_{avg} \cdot \vec{e}_r$, u_{avg} – параметр характеризующий среднюю мощность теплоотода за счет конвекции (в дальнейшем будем его называть средней скоростью радиальных конвективных потоков).

Таким образом, данная модель (при однозначно определенных материальных свойствах) имеет три параметра: зависимость тока от времени и два коэффициента, характеризующих мощность теплоотода за счет излучения и конвекции, которые зависят от условий горения и химического состава дуги.

5.2 Начальные условия

Согласно экспериментальным данным, например [7] [16], или результатам расчетов [9] устоявшийся температурный профиль дуги имеет форму, напоминающую распределение Гаусса. Поэтому начальное распределение для потенциала теплового потока задавалось формулой (99). Начальное распределение температуры и теплового потока представлены на Рис. 40.

$$w(r, 0) = w_0 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{R_0^2}\right), \quad (99)$$

где w_0, R_0 – константы, определяющие максимальное значение и ширину профиля, соответственно.

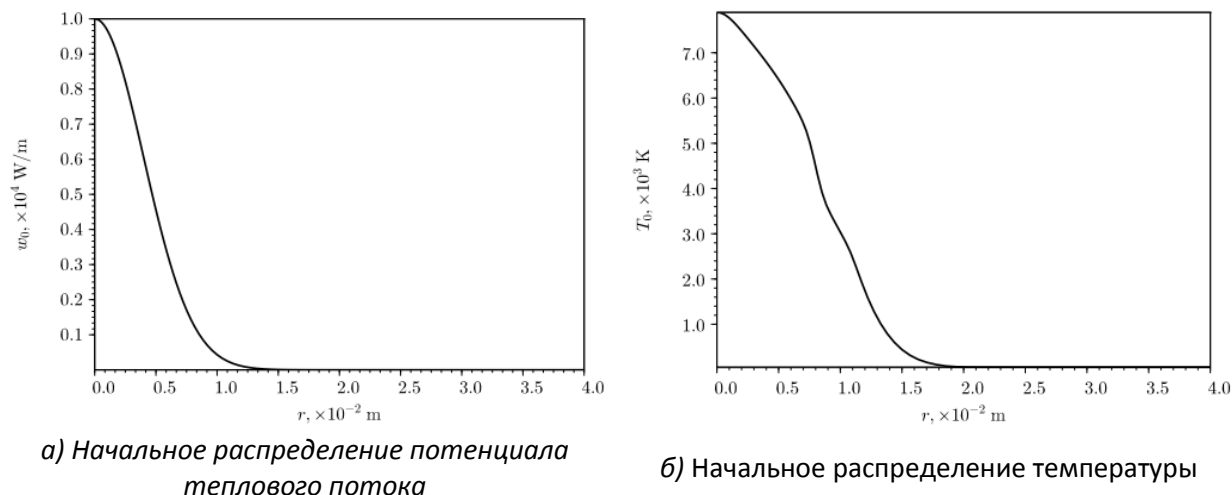


Рис. 40: Начальные условия

5.3 1D-моделирование

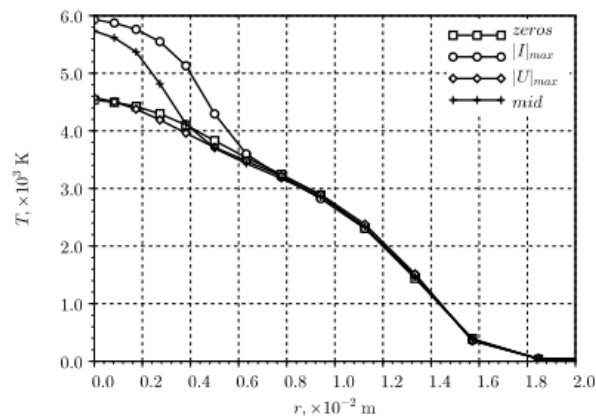
5.3.1 Динамика изменения температурного профиля. Релаксационные задержки

На Рис. 41 а представлен вид температурного профиля в различные моменты времени. Максимальная температура соответствует экстремумам тока (круг на Рис. 41), минимальная – моментам, когда ток равен нулю (квадрат на Рис. 41).

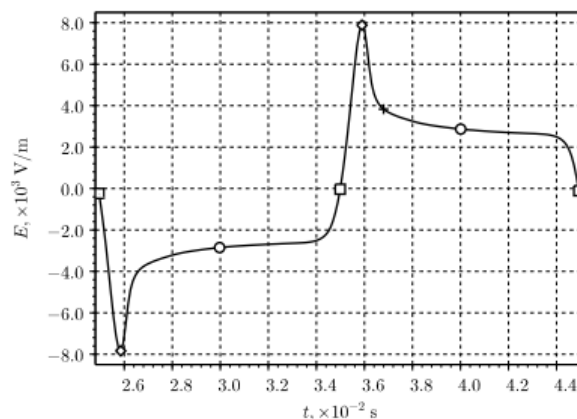
Полученная форма профиля температуры (в центре столба температура максимальна и спадает к периферии) объясняется тем, что в центре плазменного столба проводимость дуги больше, чем на периферии. Поэтому за счет джоулева тепла σE^2 дуга прогревается сильнее в центральной области. Вследствие теплопроводности энергия также распространяется от более горячей области дуги к холодной (тепло уходит в окружающее пространство).

Амплитуда осцилляции температуры в центре дуги больше по сравнению с краями области. Это связано с тем, что при больших температурах потери энергии за счет излучения гораздо интенсивнее. Дуга быстро остывает за счет излучения при спаде тока, а в моменты роста тока быстро прогревается за счет джоулева тепла. В областях отдаленных от центра эти процессы менее интенсивны.

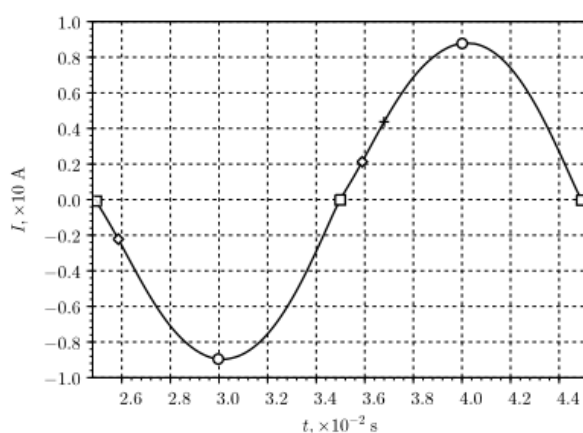
Осциллограммы напряженности электрического поля $E(t)$ на Рис. 41 б имеют характерные выбросы в точках, где ток $I(t)$ обращается в ноль (квадрат на Рис. 41), что объясняется конечным временем релаксации температурного профиля $T(r, t)$. В результате реальная проводимость $\Sigma(t)$ отстает от своего равновесного значения $\Sigma_r(t)$. Под равновесным значением проводимости в момент времени t_j с током $I(t)$ понимается проводимость, рассчитанная при постоянном токе, амплитуда которого равна мгновенному значению тока $I(t)$ в момент времени t_j . На Рис. 41 в представлены графики погонной проводимости дуги: сплошная линия – реальная проводимость, прерывистая – равновесная. После прохождения нулевого значения (квадрат на Рис. 41) ток начинает стремительно возрастать, а проводимость, вследствие конечной скорости релаксации температурного профиля, продолжает убывать, пока плазма снова не прогреется. В результате для поддержания заданного тока в разряде формируется выброс напряженности поля. При этом минимумы реальной проводимости (ромб на Рис. 41) соответствуют максимумам на осциллограммах поля $E(t)$ (ромб на Рис. 41).



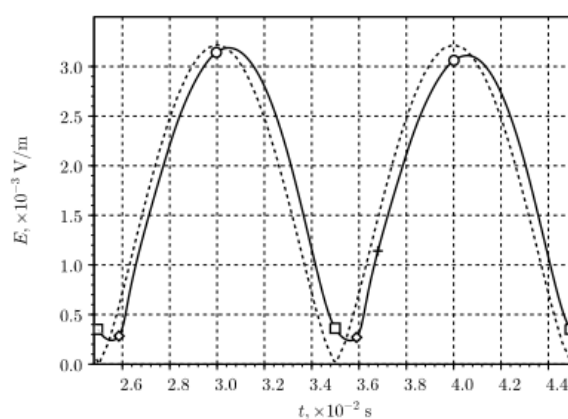
а) температурный профиль



б) напряженность эл. поля



в) ток



г) погонная проводимость

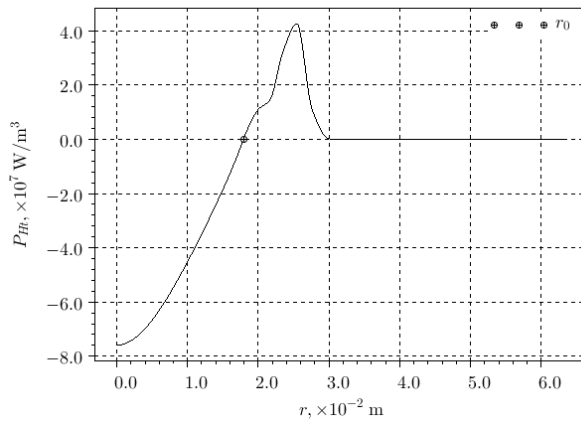
Рис. 41. Динамические характеристики дугового разряда. Круг – экстремумы тока, квадрат – нули тока, ромб – экстремумы напряженности поля, крест – некоторая промежуточная точка.

5.3.2 Радиус дугового канала

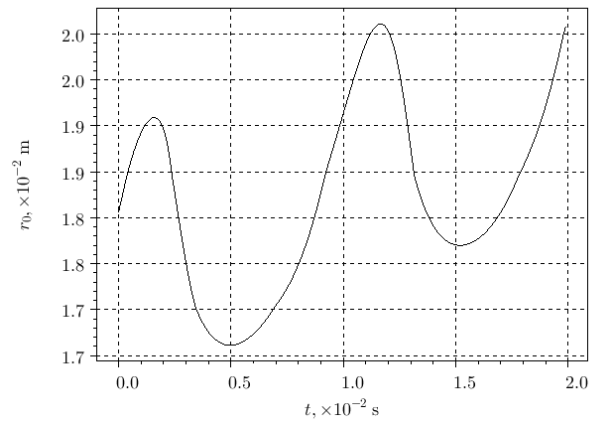
Одной из важных характеристик дугового разряда является радиус плазменного канала. При этом нет однозначного определения для этого параметра. Например, если определять границу канала по температуре/излучению, то возникает не однозначность, какую граничную температуру/интенсивность выбирать (т.к. для различных дуговых разрядов данные параметры могут отличаться). В данной работе за радиус дугового канала принимается точка, в которой мощность (дивергенция теплового потока), связанная с теплопроводностью, меняет свой знак (Рис. 42 а). Другими словами, за плазменный канал принимается центральная область разряда в которой происходит генерация тепла за счет джоулева нагрева, а также отвод тепла по средствам теплопроводности. В оставшаяся области нагрев происходит только за счет тепловых потоков, идущих от горячей центральной области.

Если рассматривать температурный профиль разряда, то точка, являющиеся границей канала, соответствует $70 \div 80 \%$ от максимальной температуры (Рис. 42 в). Но более корректно анализировать границы плазменного канала, основываясь на распределении проводимости (т.к. на интуитивном уровне понятно, что дуговой канал – это проводящая область). Здесь точка, характеризующая радиус канала, соответствует $10 \div 20 \%$ от максимальной проводимости (Рис. 42 г). Следовательно, практически весь ток будет протекать через область $r < r_0$. Поэтому

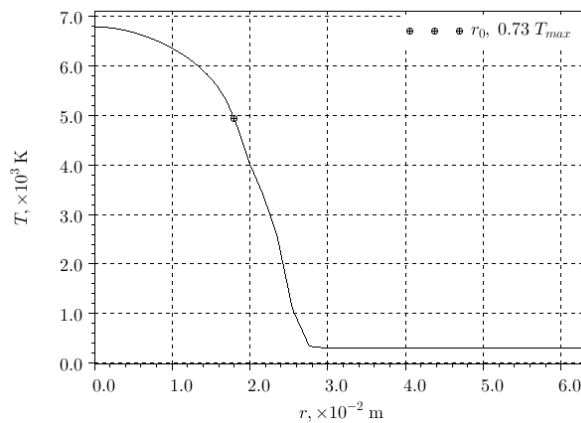
данное определение границы плазменного канала корректно. Более того данное определение универсально и однозначно определяет радиус дуги для всех разрядов.



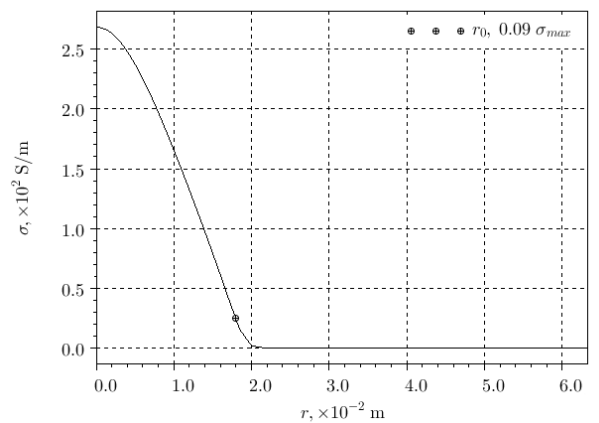
а) дивергенция потока теплопроводности (объемная мощность)



б) изменение радиуса за период



в) температурный профиль



г) проводимость

Рис. 42. Радиус дугового канала

5.3.3 Зависимость от амплитуды тока

Для анализа зависимости характеристик дугового разряда от амплитуды тока проведем моделирование при следующих параметрах: $u_{avg} = -0.028$ и $k_q = 1125$, I варьируется от 5 А до 10 кА.

На Рис. 43 а представлен усредненный по периоду температурный профиль разряда с различной амплитудой тока. Как видно из графика, с увеличением амплитуды тока растет радиус дуги. А именно, увеличиваются размеры области с максимальной температурой – появляется четко выраженная ступенька.

С ростом тока от 5 до 100 А максимальная температура дуги растет. При дальнейшем увеличении тока этот рост прекращается. Значение тока, после которого прекращается рост температуры, а также предельная температура, определяются, как будет показано далее, мощностью теплоотвода. Аналогично ведет себя амплитуда колебаний максимальной температуры за период, представленная на Рис. 43 б.

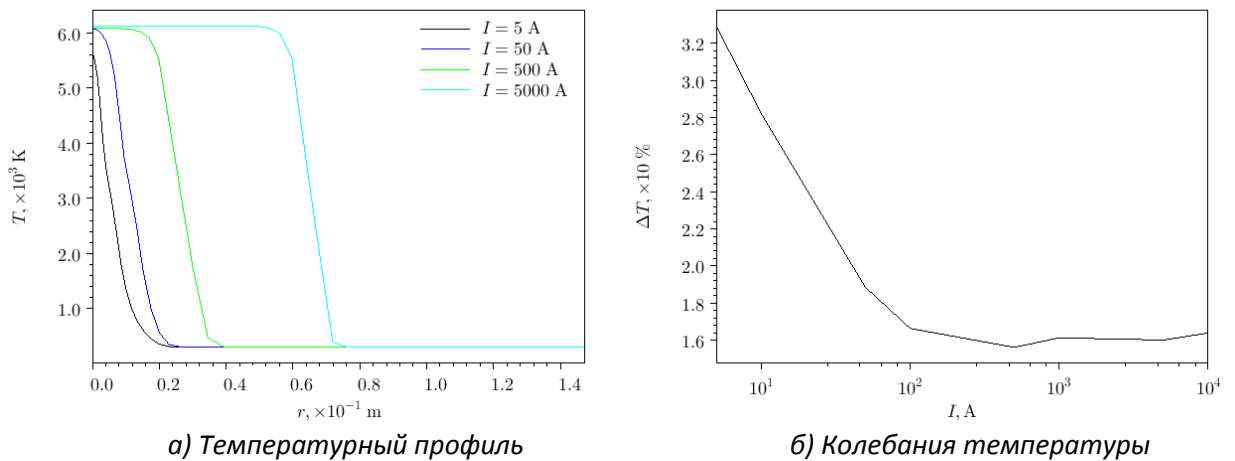


Рис. 43. Температура дуги в зависимости от амплитуды тока

На Рис. 44 а показано изменение формы осциллограмм напряженности электрического поля в зависимости от амплитуды тока. При малых токах (порядка десятков ампер) имеют место значительные выбросы напряженности в окрестностях нулей тока, просадка в максимуме тока, а также наличие второго менее выраженного пика на спаде тока. При больших токах выбросов напряженности практически не наблюдается. А в окрестности максимумов тока наблюдается рост, а не просадка напряженности, как было при малых токах.

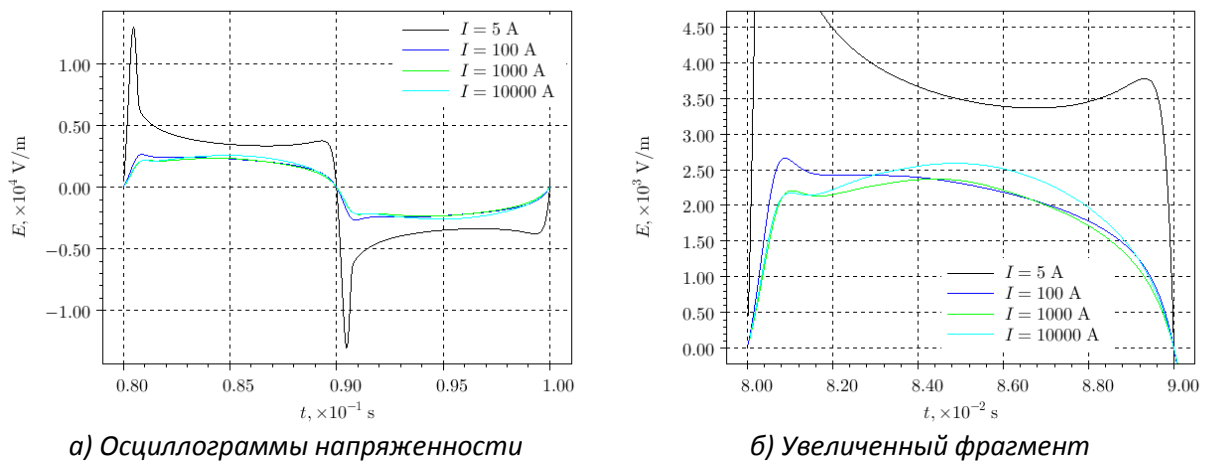


Рис. 44. Напряженность электрического поля в зависимости от амплитуды тока

Объяснить поведение осциллограмм напряженности электрического поля можно взглянув на осциллограммы генерируемой (за счет джоулева нагрева) мощности и суммарной мощности теплоотвода при малой и большой амплитуде тока. На Рис. 45 представлены осциллограммы напряженности электрического поля, осциллограммы производных по времени от приведенных тока и проводимости, а также осциллограммы генерируемой (за счет джоулева нагрева) и суммарной отводимой мощности.

При малых токах в окрестности нулей тока мощность теплоотвода гораздо выше генерируемой мощности. В эти моменты дуга остывает. Причем из-за инерционности проводимость продолжает уменьшаться (спадает практически до нуля), в то время как ток быстро растет. Из-за этого происходит скачок напряженности (момент времени 1). После скачка дуга

начинает быстро нагреваться, увеличивая свою проводимость, т.к. мощность генерации становится значительно больше мощности теплоотвода. Причем скорость роста проводимости выше скорости роста тока, поэтому напряженность поля уменьшается. До момента пока теплоотвод не начнет преобладать (момент времени 2) напряженность поля падает. Затем дуга снова начинает остывать, проводимость падает быстрее тока, и поле вновь увеличивается – формируется второй экстремум. Затем происходит быстрый спад напряженности, проводимость падает медленнее тока (момент времени 3).

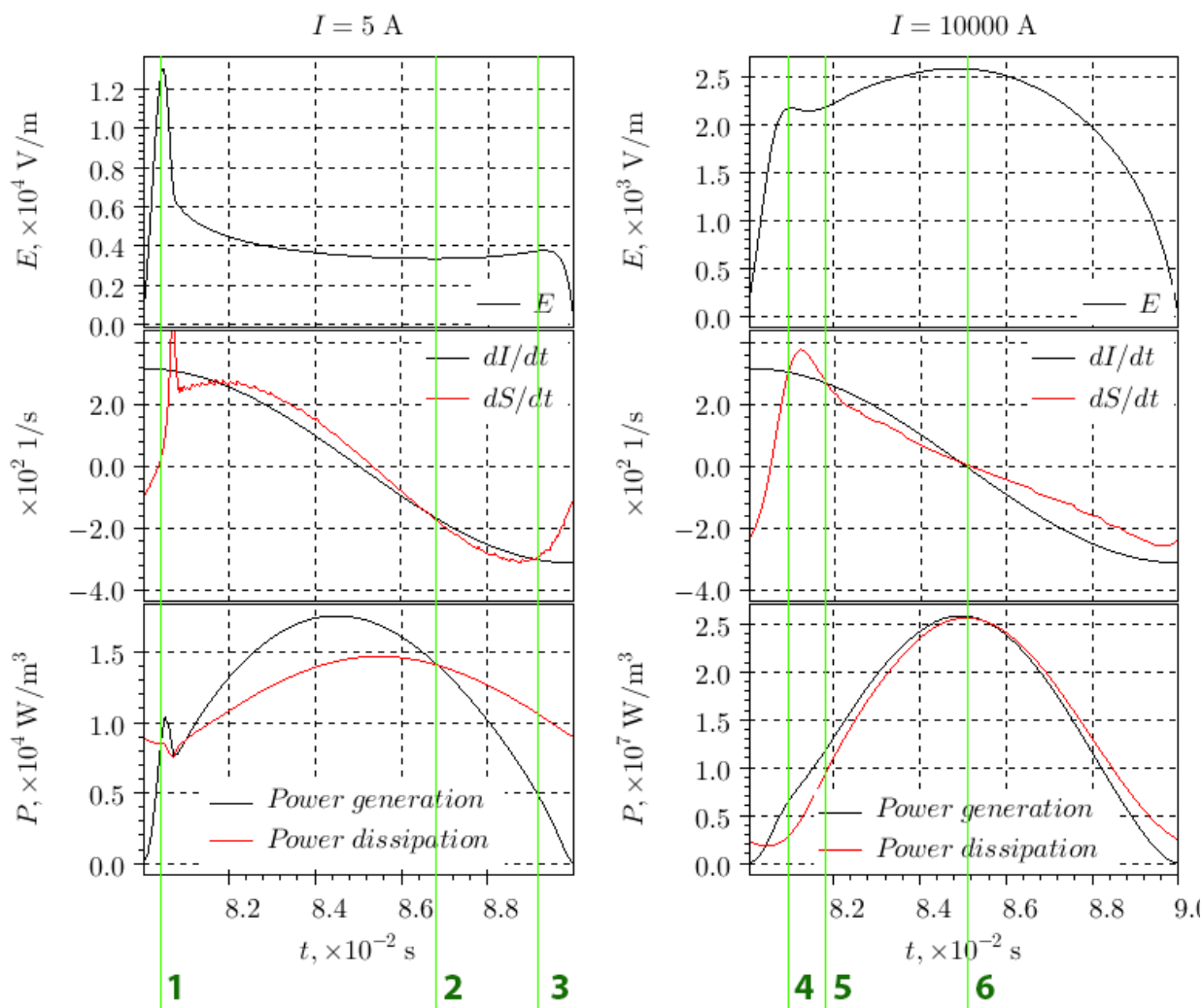


Рис. 45. Осциллограммы напряженности электрического поля, осциллограммы производных по времени от приведенных тока и проводимости, а также осциллограммы генерируемой и отводимой мощности (сверху вниз соответственно).

При больших токах картина иная. В окрестности нулей тока разница между теплоотводом и генерацией тепла значительно меньше по сравнению с малыми токами (момент времени 4). Проводимость падает не столь сильно, как в случае малых токов. Следовательно, и амплитуда выбросов напряженности гораздо меньше. Затем на небольшом участке проводимость растет быстрее тока и напряженность поля немного проседает (между моментами 4 и 5). После напряженность начинает расти (в отличие от малых токов), несмотря на то, что дуга все еще греется (генерация тепла преобладает). Это происходит из-за того, что ток растет быстрее проводимости. После прохождения током максимального значения (момент 6) дуга начинает медленно остывать, т.к. разница между отводом и генерацией тепла незначительна. Напряженность поля уменьшается, т.к. проводимость падает медленнее тока.

На *Рис. 46* представлена зависимость действующего значения, а также амплитуды выбросов напряженности электрического поля от амплитуды тока. Из графика видно, что как действующее, так и максимальное значение напряженности падает, а затем растет с увеличением тока.

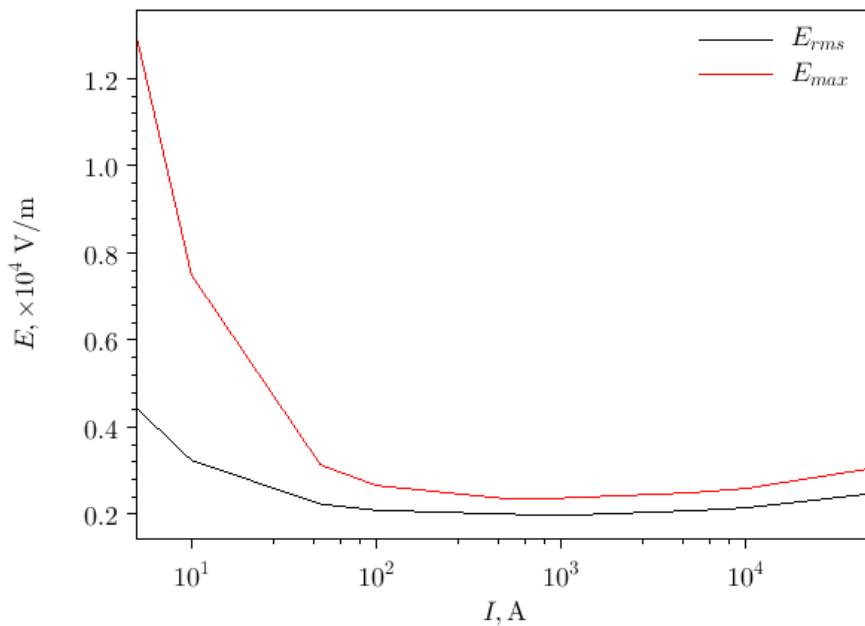


Рис. 46. ВАХ – черным цветом, амплитуда выбросов – красным.

Объяснить поведение ВАХ можно взглянув на графики производных от радиуса и от максимальной температуры дуги по току (*Рис. 47*). Напряженность электрического поля определяется проводимостью канала при заданном токе. Проводимость в свою очередь пропорциональна радиусу канала и его температуре. Как видно из *Рис. 47 а*, радиус канала быстро растет при малых токах, затем его рост практически прекращается. Максимальная температура ведет себя аналогичным образом. Отсюда можно сделать вывод, что при малых токах погонная проводимость канала быстро растет как за счет увеличения радиуса канала, так и за счет роста температуры (следовательно, напряженность электрического поля падает). Затем рост проводимости сильно замедляется, и для поддержания столь высоких токов напряженность электрического поля начинает возрастать.

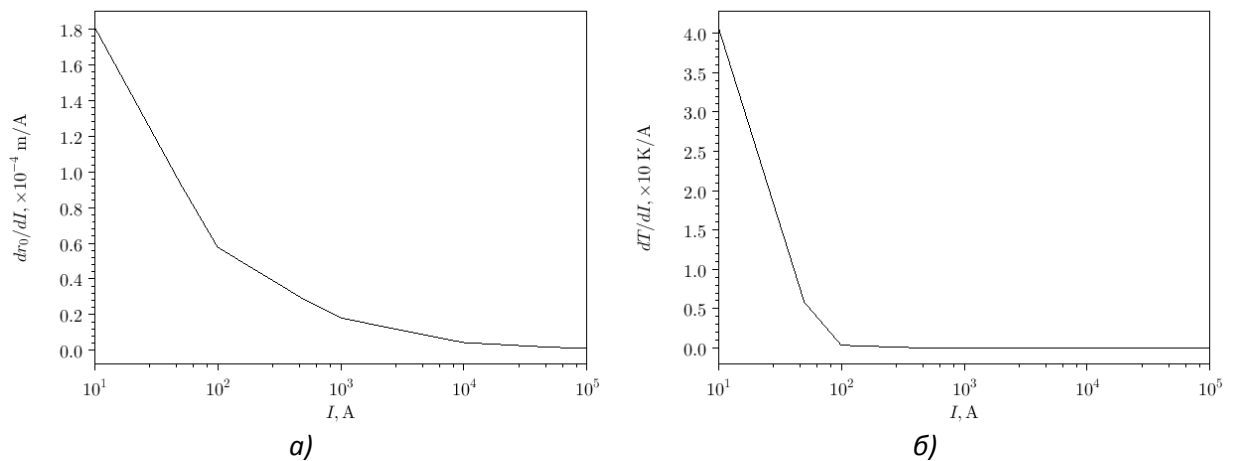


Рис. 47. Производные по току: а) от радиуса дуги, б) от максимальной температуры.

Таким образом по ВАХ можно разбить режимы горения разряда на две группы: режим малых токов – до точки перегиба ВАХ и режим больших токов – после точки перегиба ВАХ. Каждый режим имеет свои отличительные особенности. Точка (значение амплитуды тока) перегиба, определяется соотношением мощностей генерации/отвода тепла (как будет показано далее).

5.3.4 Зависимость от мощности излучения

Для анализа зависимости характеристик дугового разряда от мощности тепловых потерь проведем моделирование при следующих параметрах: $u_{avg} = -0.028$ и $k_q = 1125 \cdot x$, где x варьируется от 0 до 100.

На Рис. 48 показано, как изменяется температурный профиль в зависимости от мощности излучения при малых токах (а) и при больших токах (б). На Рис. 48 в и г представлены зависимости изменения радиуса дуги и максимальной температуры, соответственно. Из графиков видно, что при малых токах излучение практически не влияет на температурный профиль дуги (Рис. 48 а). При больших токах излучение оказывает заметное воздействие как на форму температурного профиля, так и на максимальную температуру (Рис. 48 б). Это связано с тем, что при малых токах дуговой канал прогревается незначительно. Следовательно, мощность излучения, которая экспоненциально зависит от температуры, будет мала по сравнению с другими механизмами отвода тепла и не будет оказывать существенного влияния на разряд.

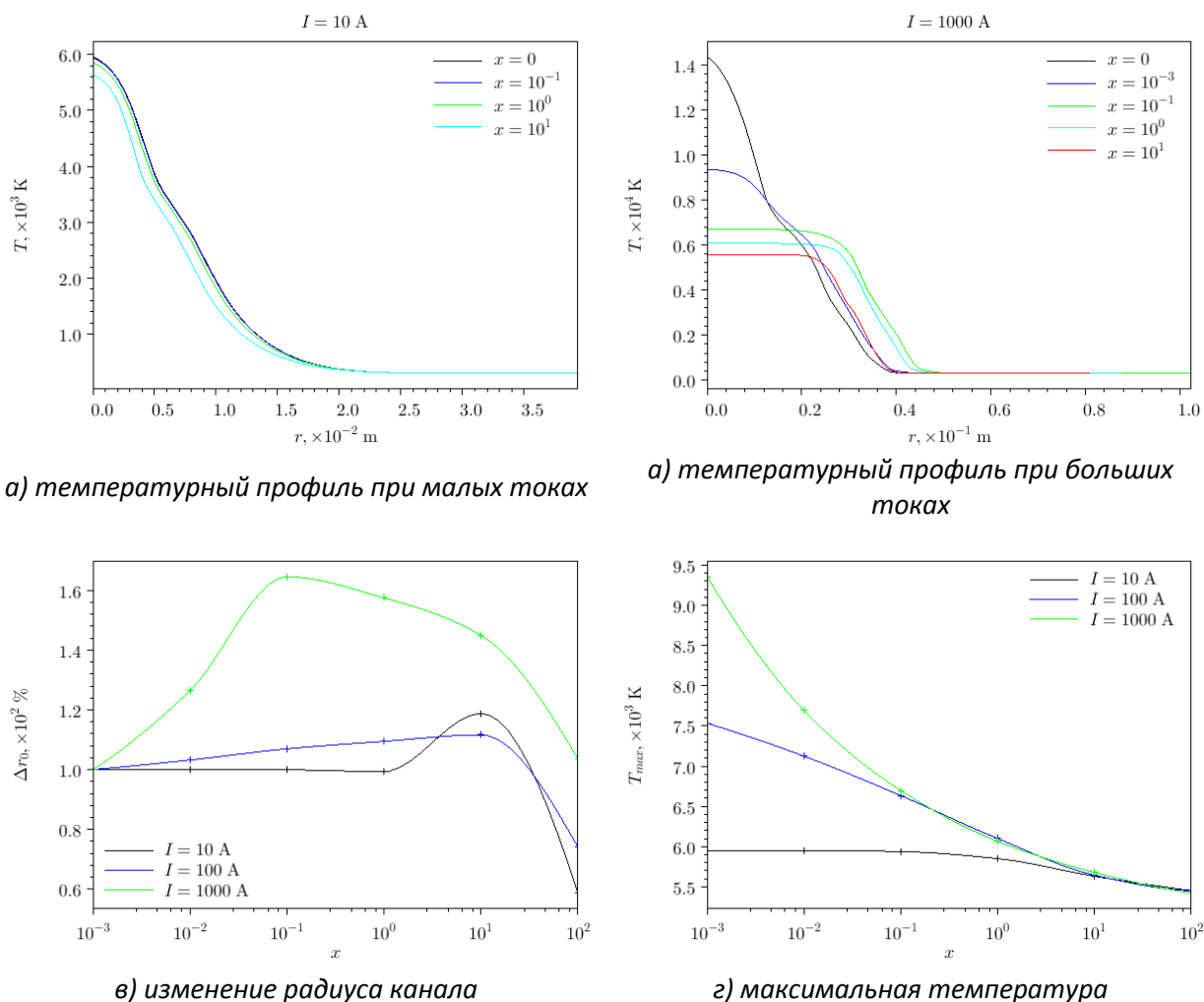


Рис. 48. Характеристики температурного профиля дугового разряда в зависимости от мощности излучения

Из Рис. 48 в видно, что с увеличением мощности излучения радиус дуги сначала увеличивается, а затем начинает уменьшаться. Причем значение параметра x при котором дуга имеет максимальный радиус зависит от амплитуды тока.

Максимальная температура в дуговом канале с ростом мощности излучения падает (Рис. 48 в). Причем при $x > 10$ максимальная температура практически не зависит от амплитуды тока.

Из Рис. 49 видно, что мощность излучения влияет как на действующее значение напряженности электрического поля, так и на амплитуды выбросов напряженности в окрестностях нулей тока. Как было сказано ранее, при малых токах (следовательно, малых температурах) влияние излучения незначительно.

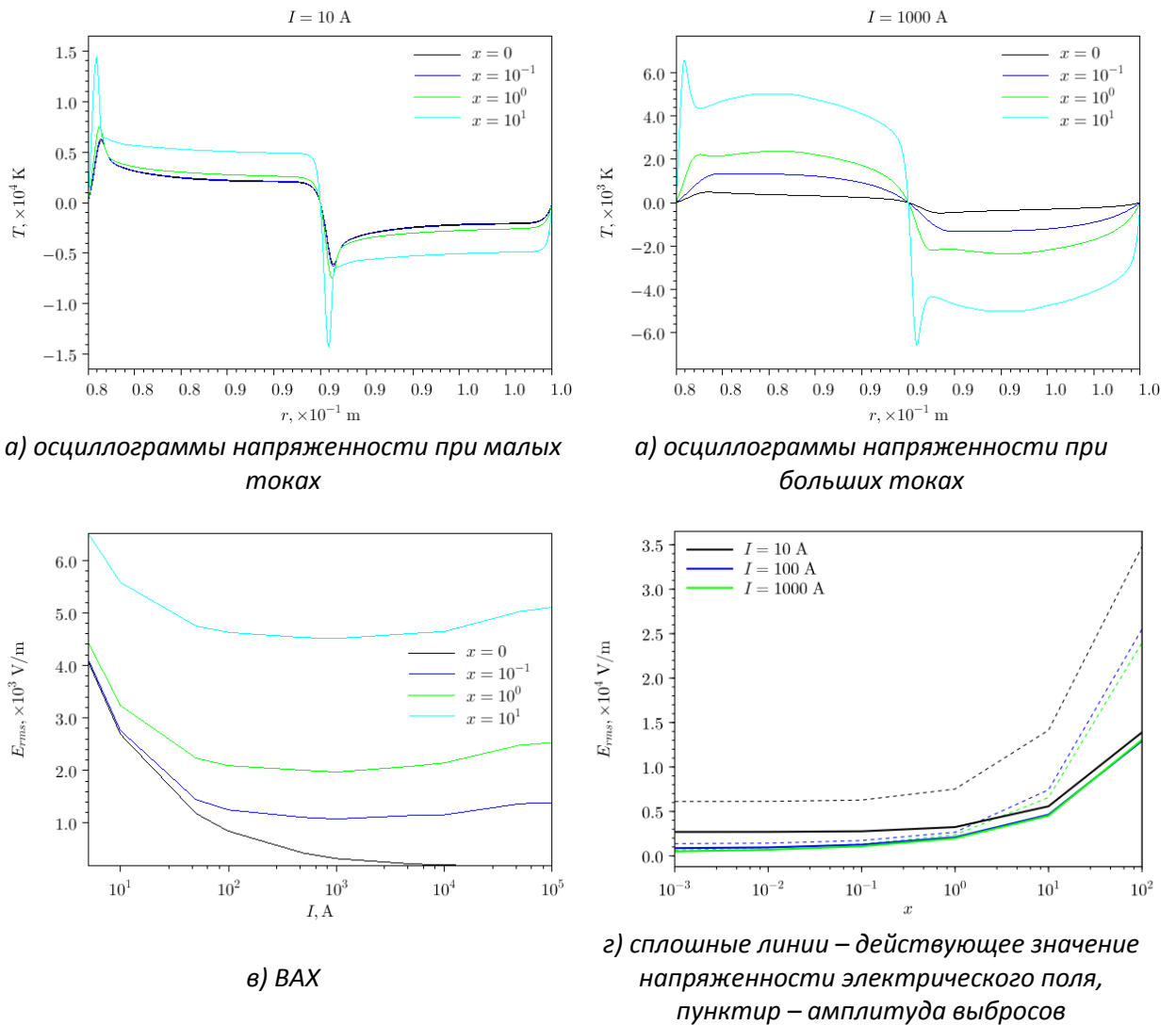
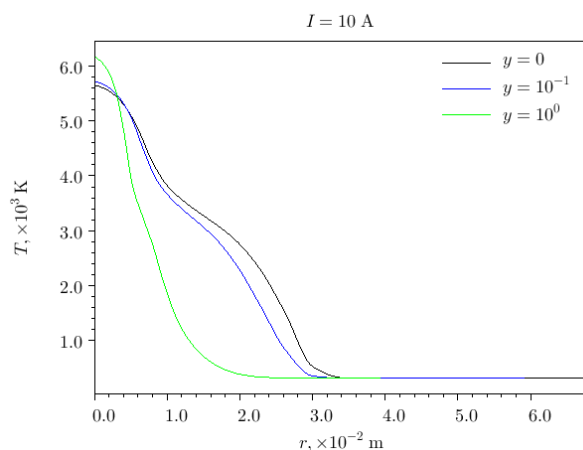


Рис. 49. Зависимость напряженности электрического поля от мощности излучения.

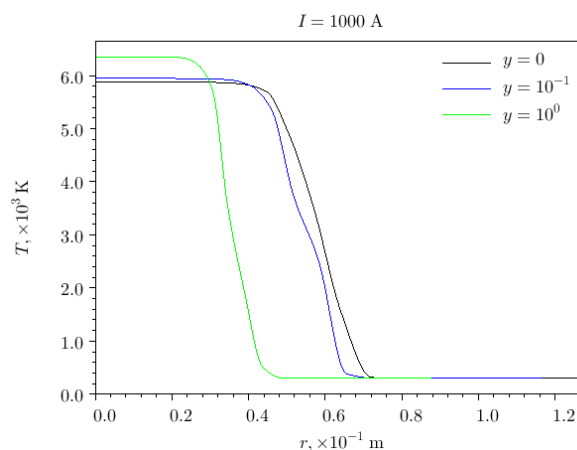
5.3.5 Зависимость от мощности конвективного теплоотвода

Для анализа зависимости характеристик дугового разряда от мощности тепловых потерь проведем моделирование при следующих параметрах: $k_q = 1125$ и $u_{avg} = -0.028 \cdot y$, где y варьируется от 0 до 1.

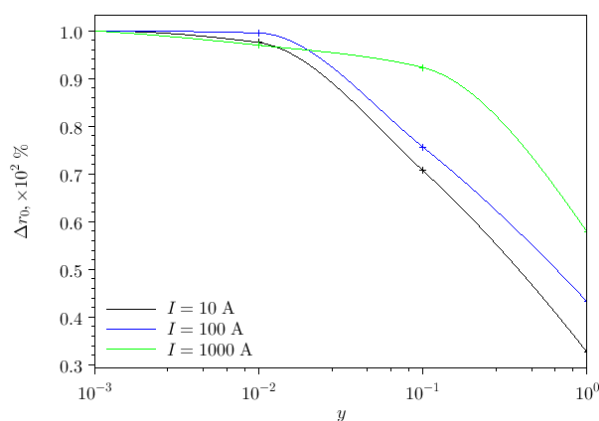
Из Рис. 50 показана зависимость температурного профиля от мощности конвективного теплоотвода. В отличие от излучения, конвективный теплоотвод зависит от градиента, а не от самой температуры. Анализируя графики, представленные на Рис. 50, можно заметить, что с увеличением мощности конвективного теплоотвода радиус канала уменьшается, а максимальная температура растет. Данная зависимость соответствует экспериментальным данным [15], представленным на Рис. 4: диаметр подверженной обдуву дуги меньше, чем свободно горящей. Взглянув на график распределения объемной мощности вдоль радиуса канала (Рис. 51), видно, что конвекция «мешает» расширению температурного профиля за счет теплопроводности.



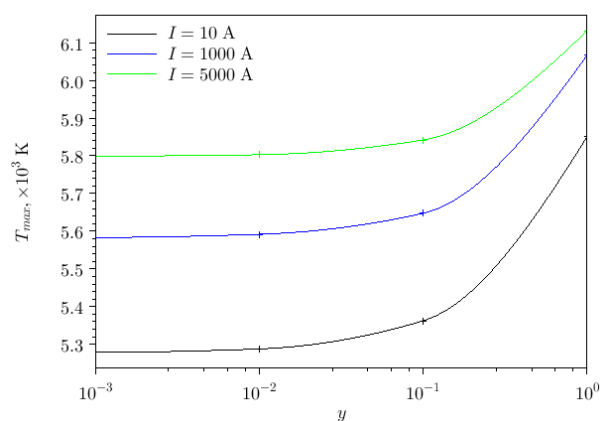
а) температурный профиль при малых токах



а) температурный профиль при больших токах



в) изменение радиуса канала



г) максимальная температура

Рис. 50. Характеристики температурного профиля дугового разряда в зависимости от мощности конвективного теплоотвода

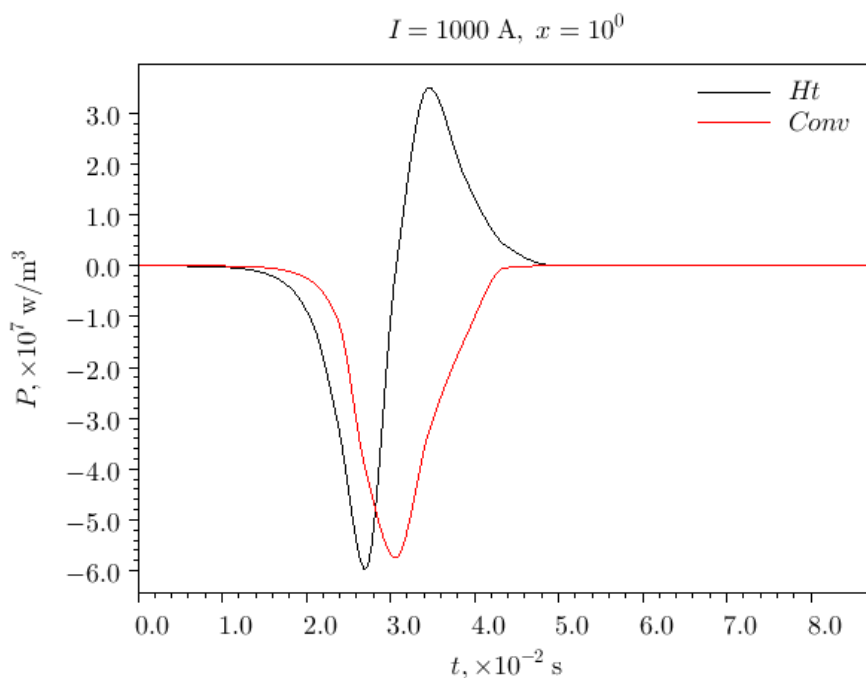


Рис. 51. Распределение объемной мощности теплопроводности (Ht) и конвекции ($Conv$) вдоль радиуса канала.

Рассмотрим, как изменяется максимальная температура дугового канала за один период (Рис. 52). Из графиков видно, что, во-первых, температура отстаёт по фазе от тока, т.к. точки минимума температуры смещены вправо от точек, соответствующих нулям тока. Это связано с релаксационными задержками, описанными в разделе 5.3.1. Во-вторых, с увеличением мощности конвективного теплоотвода уменьшается разность фаз между температурой и током: без конвекции – $\Delta\varphi \approx 18^\circ$, а при $y = 1$ – $\Delta\varphi \approx 6^\circ$. Это вызвано тем, что увеличение мощности теплоотвода вызывает более быстрое охлаждение плазмы канала. Более того, с ростом мощности конвективного теплоотвода, как было отмечено ранее, растет максимальная температура канала (Рис. 50 г). Следовательно, растет и мощность объемного излучения, которая в свою очередь способствует более быстрому охлаждению. Выявленная закономерность, а также результаты расчета разности фаз между током и температурой находятся в хорошем количественном соответствии с экспериментальными данными [15], представленными на Рис. 3.

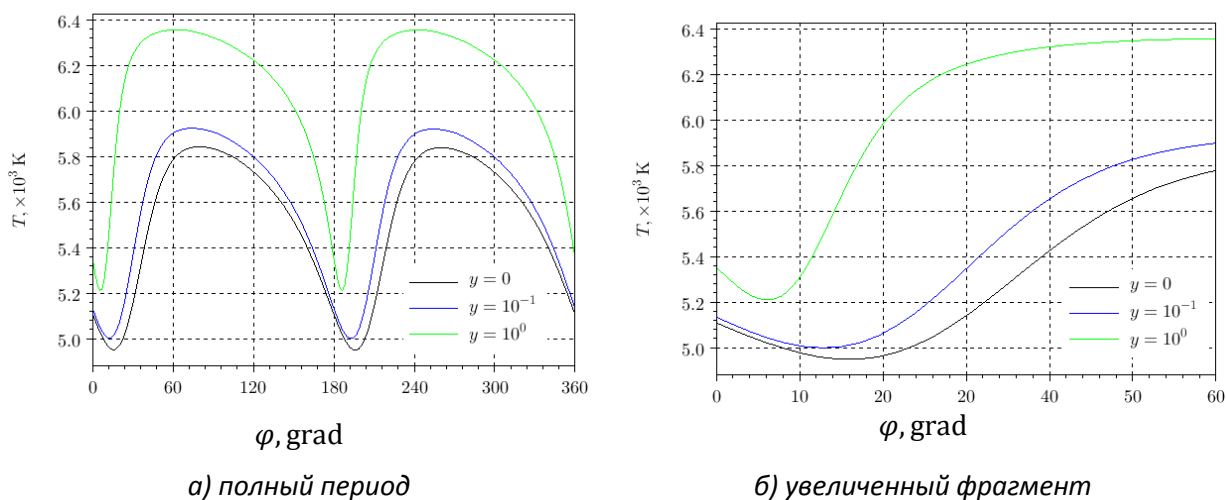
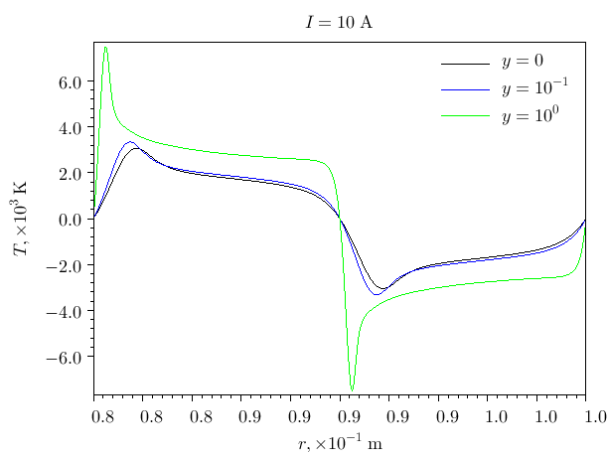


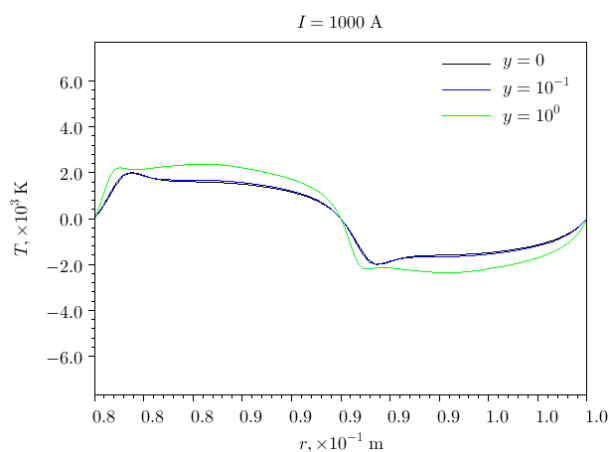
Рис. 52. Зависимость максимальной температуры от фазы тока, $I = 50$ А.

Также с экспериментальными данными [15] совпадает и диапазон колебания максимальной температуры разряда. Совпадение результатов моделирования и экспериментальных данных является хорошим доказательством корректности разработанной модели.

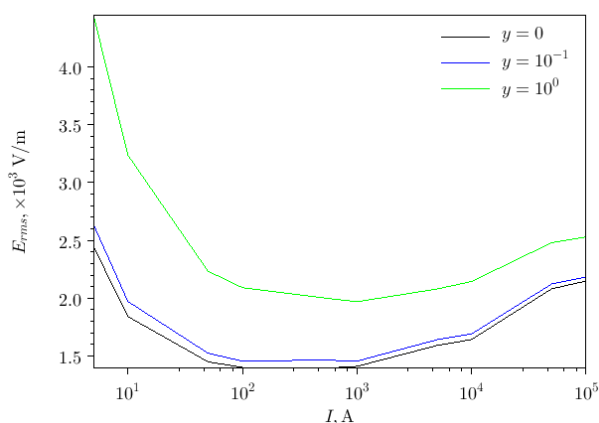
Из Рис. 53 видно, что с увеличением мощности конвективного теплоотода напряженность электрического поля растет (как действующее значение, так и амплитуда выбросов). В отличие от излучения, конвекция практически одинаково проявляется, как при низких, так и при больших амплитудах тока. Также следует отметить, что увеличение конвективной мощности теплоотода сильно влияет на крутизну выбросов напряженности электрического поля. Это вызвано тем, что в моменты, когда ток проходит через ноль, конвекция обеспечивает дополнительный теплоотвод. За счет этого проводимость канала снижается быстрее, формируя тем самым более резких фронт выброса напряженности.



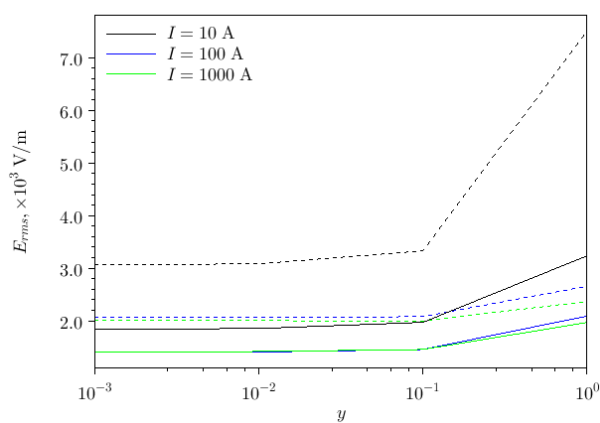
а) осциллограммы напряженности при малых токах



а) осциллограммы напряженности при больших токах



в) ВАХ



г) сплошные линии – действующее значение напряженности электрического поля, пунктир – амплитуда выбросов

Рис. 53. Зависимость напряженности электрического поля от мощности конвективного теплоотода.

5.4 2D- моделирование

Моделирование проводилось при следующих параметрах: $k_q = 1$, $I = 200$ А. Материальные свойства воздуха являются функциями температуры и давления. Учтена естественная конвекция (ускорение свободного падения направлено вниз по оси y). Также учитывается скин-эффект и магнитные силы.

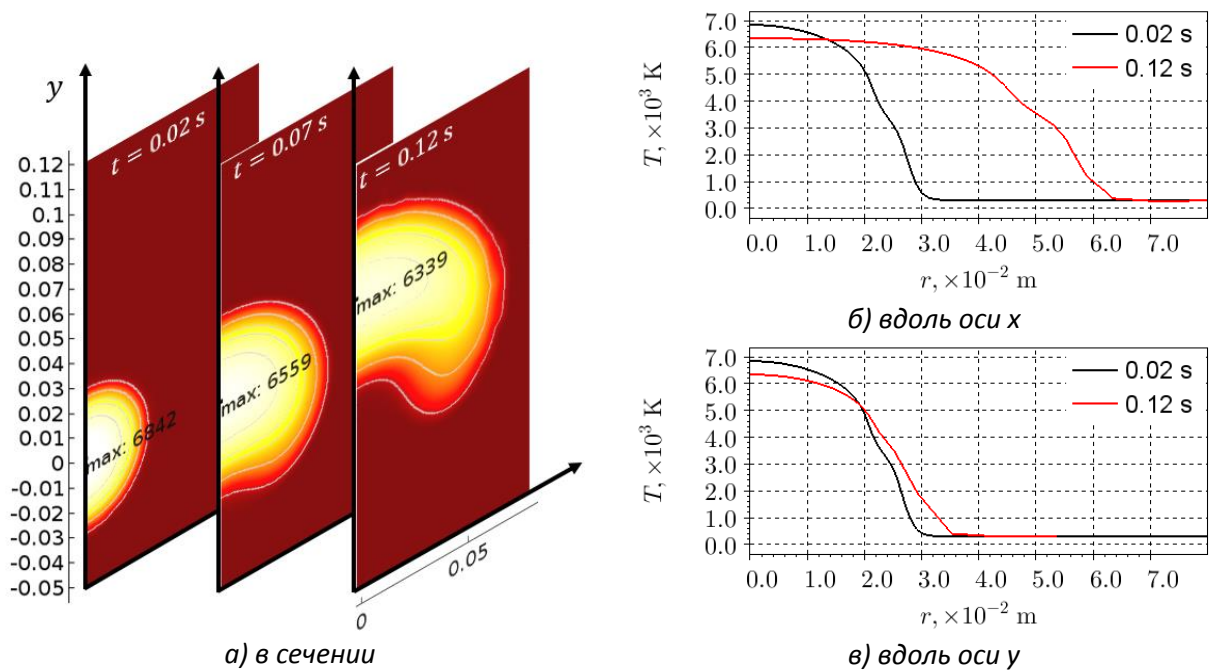


Рис. 54. Распределение температуры в разные моменты времени

На Рис. 55 представлена зависимость мощности генерации тепла за счет джоулева нагрева, отвода тепла за счет излучения, а также за счет работы, совершаемой давлением. Как видно из графиков тепла в дугу вкачивается больше, чем отводится (отвод тепла за счет конвекции и теплопроводности пренебрежимо мал (на 2-3 порядка меньше) по сравнению с другими механизмами). Следовательно, большую часть времени газ нагревается (внутренняя энергия системы растет). Нагреваясь, воздух расширяется и тем самым создает в центре дуги область повышенного давления. Вследствие чего дуговой канал расширяется (Рис. 57 а).

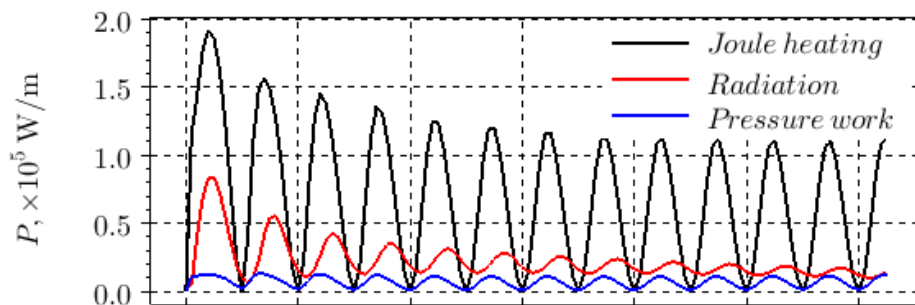


Рис. 55. Мощности генерации и отвода тепла (мощности связанные с теплопроводностью и конвекцией имеют порядок 10^3 W/m^3 и на графике не показаны)

Под действием силы Архимеда нагретый дуговой канал поднимается вверх как целое (Рис. 54 а). На Рис. 56 представлена зависимость координаты центра дуги (точка с наибольшей температурой) от времени – $y(t)$, а также зависимость скорости движения центра дуги от времени – $v(t)$. Для расчета скорости зависимость $y(t)$ была аппроксимирована полиномом 3й степени, затем была вычислена производная dy/dt . Как видно из графика, скорость подъема дуги сначала растет, затем выходит на стационар.

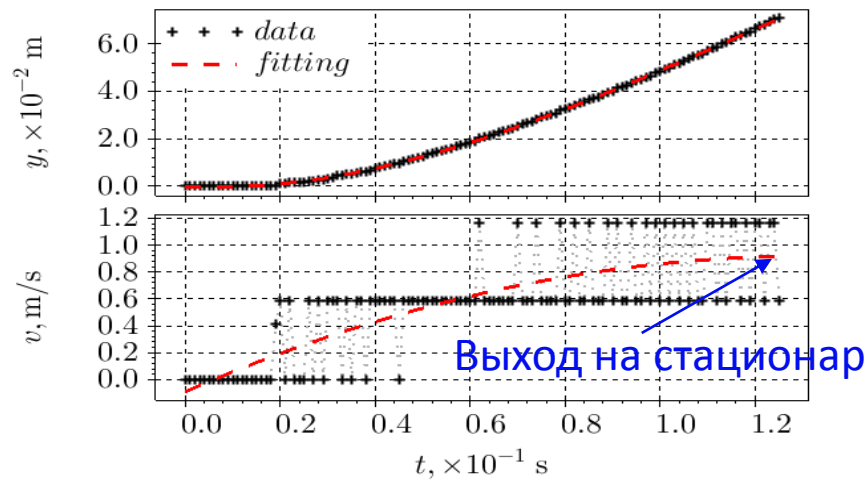


Рис. 56. Движение центра дуги: координата и скорость

На Рис. 57 б показано распределение скорости относительно скорости движения центра дуги (движение дуги как целого). Из графика видно, что холодный воздух поступает в область разряда сверху и снизу, охлаждая центр канала, и уносит тепло к периферии канала. Вследствие этого центральная область дуги охлаждается, а дуговой канал расширяется в горизонтальном направлении (Рис. 54 б). При этом вертикальные размеры канала практически не меняются (Рис. 54 в). В нижней правой части дугового канала образуется вихрь (Рис. 57 б). Теряется цилиндрическая симметрия дугового канала.

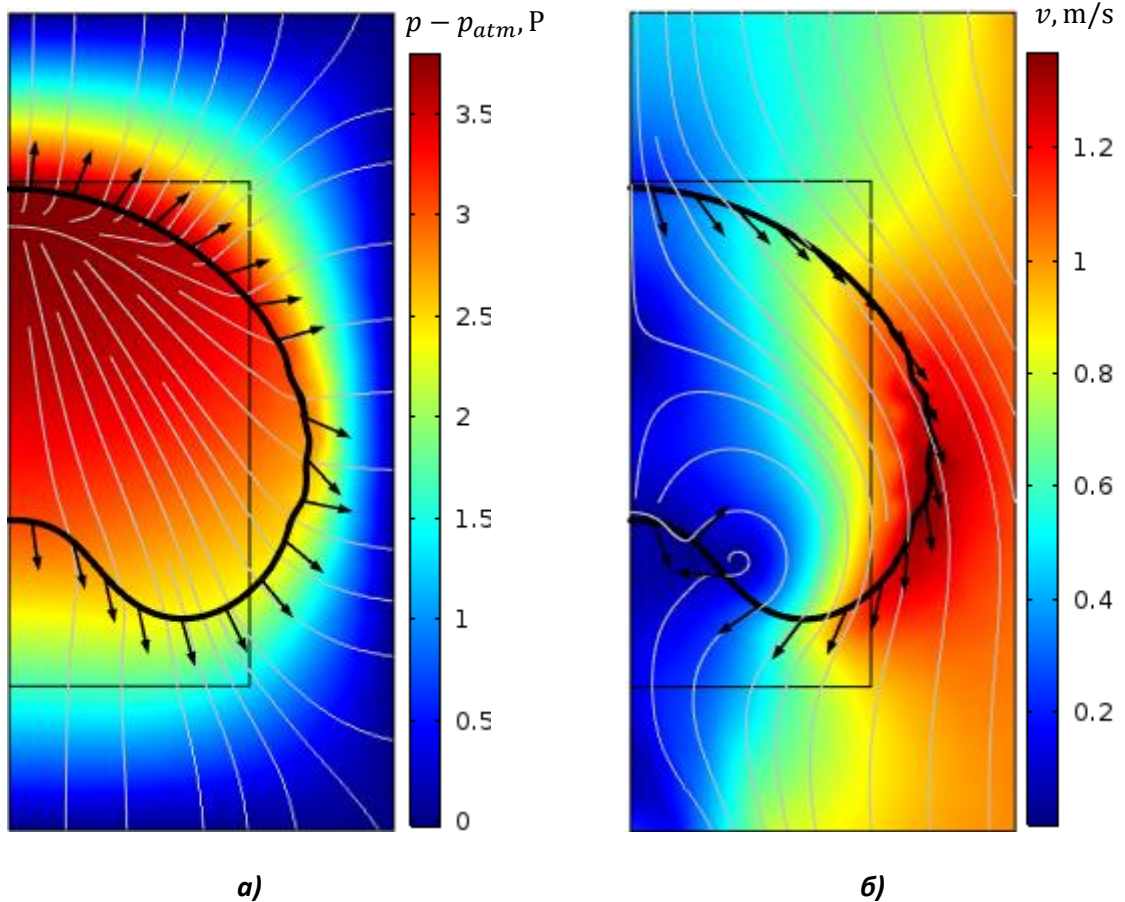


Рис. 57. а) контурный график давления p , векторный график силы: $-\nabla p$, б) распределение скоростей относительно центра дуги (точка с максимальной температурой)

5.5 Сравнение результатов 2D и 1D моделирования

В данном разделе сравниваются две модели: 2D модель с учетом естественной конвекции, без учета магнитных сил и 1D модель без учета конвективного теплопереноса. Ток дуги 200 А, $k_q = 1$.

Как видно из *Рис. 58* температуры, рассчитанные с помощью разных моделей, хорошо совпадают в центральной области канала, но значительно отличаются на периферии. В 2D модели температурный профиль вдоль оси y расширяется медленнее, чем в 1D модели, а вдоль оси x – гораздо быстрее.

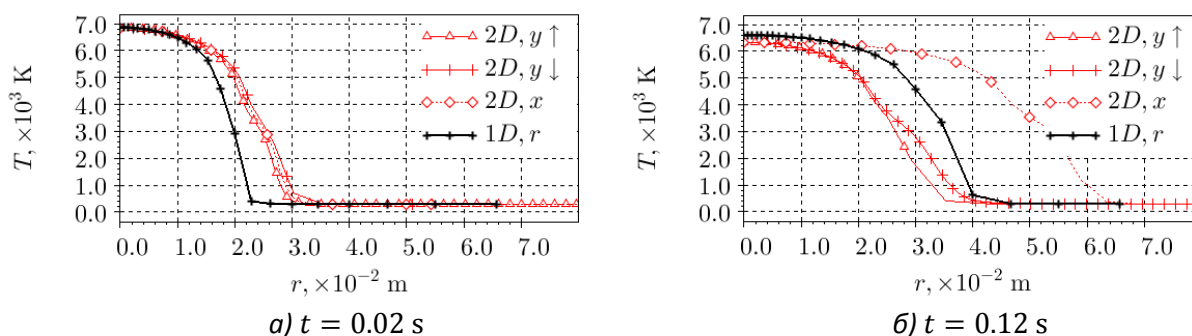


Рис. 58. Температурный профиль в 2 момента времени

Так как температуры в центральных областях дуги в обеих моделях, а также площади сечения каналов не сильно отличаются, погонная проводимость, рассчитанная в разных моделях, отличается в среднем на 20% (*Рис. 59*).

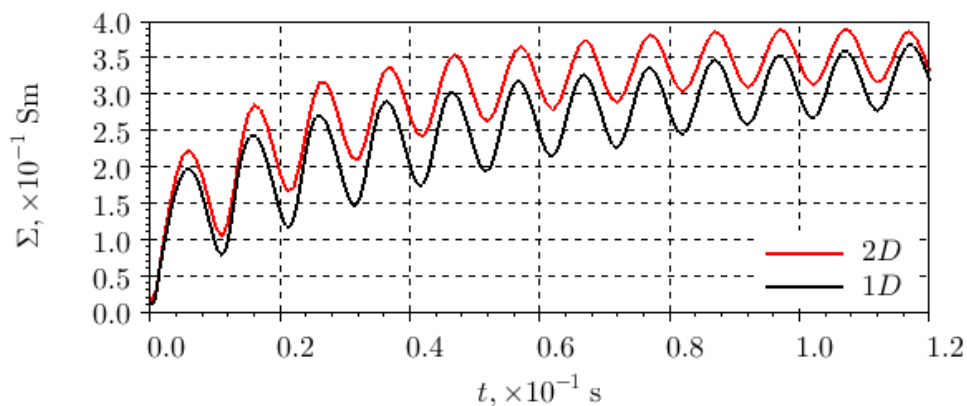


Рис. 59. Погонная проводимость

Для тестирования систем идентификации дуговых КЗ важно не столько количественное совпадение реальных и модельных осциллограмм, сколько качественное (т.е. их формы). Из *Рис. 60* видно, что формы нормированных осциллограмм напряженности электрического поля в одномерной и двумерной моделях совпадают с большой точностью.

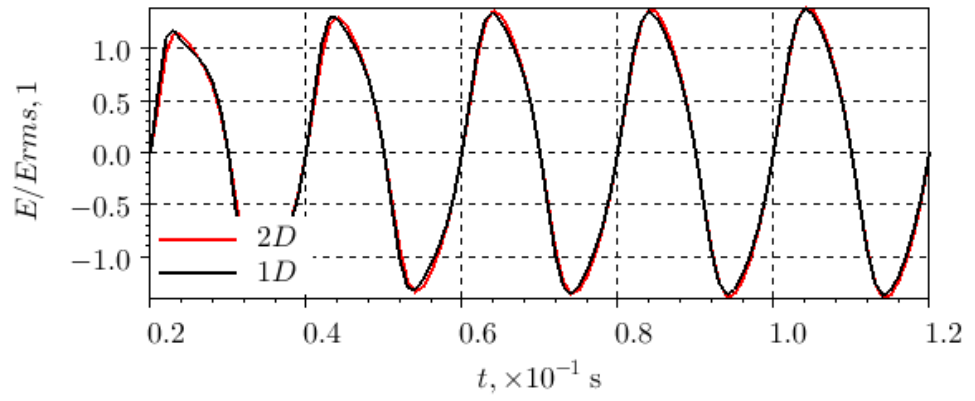


Рис. 60. Нормированная на RMS напряженность электрического поля

6. Заключение

В ходе данной работы была разработана модель, описывающая динамику погонной проводимости, а также температуры и напряженности электрического поля дугового разряда, горящего в свободной атмосфере воздуха. Данная модель учитывает следующие механизмы генерации/отвода тепла: джоулев нагрев, теплопроводность, конвекция, излучение.

Для реализации данной модели была разработана оригинальная численная схема с использованием техники адаптивного временного шага, что повысило скорость и устойчивость решения по сравнению со стандартными пакетами численного моделирования. Данная численная схема реализована в математическом пакете SciLab. А также создана высокопроизводительная версия программы для моделирования погонных характеристик дуговых разрядов на языке C.

Разработанная модель позволяет проводить расчеты описанных выше характеристик дугового разряда в зависимости от следующих параметров модели: материальных свойств среды (плотность, удельная электрическая проводимость, удельные теплопроводность и теплоемкость), зависимости амплитуды тока от времени и двух коэффициентов, отвечающих за мощности теплоотвода за счет излучения и конвекции.

Был проведен глубокий анализ решаемых в модели уравнений. Обоснована их применимость для дугового воздушного разряда атмосферного давления. Был проведен анализ приближений, используемых при моделировании, таких как: локальное термодинамическое равновесие воздушной плазмы при атмосферном давлении, цилиндрическая симметрия дугового канала, пренебрежение магнитными силами.

На основе проведенного анализа было получено, что разработанная модель применима для разрядов промышленной частоты с амплитудой тока от десятков ампер до десятков килоампер. В условиях естественной конвекции (без учета магнитных сил) дуговой разряд теряет цилиндрическую симметрию. Учет естественной конвекции и асимметрии разряда вызывает ошибку 20% в расчете погонной проводимости по сравнению с моделью без учета конвекции и асимметрии и не влияет на форму осциллограмм напряженности электрического поля. Также выявлено, что магнитные силы, возникающие в дуговом канале, способствуют сохранению цилиндрической симметрии и вызывают изменения давления среды в пределах 10% (при амплитуде тока 10 kA). Роль конвекции по сравнению с другими механизмами теплоотвода увеличивается с уменьшением амплитуды тока.

Также была рассчитана уникальная (не встречающаяся в литературе) зависимость времени химической релаксации (т.е. времени за которое плазма приходит в состояние ЛТР после малого возмущения) воздушной плазмы от температуры на основе анализа совокупной кинетики 94 химических реакций, протекающих в воздушной плазме.

В ходе верификации было выявлено, что результаты, полученные с помощью данной модели, находятся в хорошем количественном соответствии с экспериментальными данными. Таким образом можно сделать вывод, что данная модель способна корректно и с хорошей точностью воспроизводить характеристики реальных дуговых замыканий.

Представленные результаты объясняют характер поведения осциллограмм напряженности электрического поля и погонной проводимости дугового столба с точки зрения релаксационных задержек температурного профиля.

Было введено и обосновано определение для радиуса дугового канала на основе анализа тепловых потоков, обусловленных теплопроводностью.

Были выявлены зависимости характеристик разряда от параметров моделирования, что может в значительной степени облегчить подбор параметров модели по характеристикам (форме осциллограмм напряженности электрического поля, температурному профилю, ВАХ) реальных разрядов.

Выявлено существование предельной температуры разряда, выше которой дуговой канал не прогревается. А дальнейший рост проводимости происходит за счет увеличения радиуса канала. Данная температура зависит от условий горения разряда (мощности теплоотвода).

Показано, что диапазон токов горения разряда можно разбить на 2 области. В области малых токов температурный профиль имеет форму, напоминающую гауссов профиль, максимальная температура претерпевает сильные колебания $\approx 30\%$, напряженность электрического поля имеет значительные выбросы в окрестностях нулей тока, а также просадку в максимумах тока, с ростом амплитуды тока действующее значение напряженности падает, а радиус канала и максимальная температура (следовательно, и погонная проводимость) быстро растут. В области больших токов форма температурного профиля напоминает ступеньку, максимальная температура претерпевает слабые колебания $\approx 15\%$, напряженность электрического поля имеет слабовыраженный выброс после прохождения током нулевого значения, затем растет до точки максимума тока, с ростом амплитуды тока действующее значение напряженности растет, максимальная температура практически не изменяется, скорость роста радиуса канала значительно замедляется.

На основе анализа баланса мощностей отвода/генерации энергии выявлены и объяснены причины описанного выше разделения режимов горения разряда на малые и большие токи.

Выявлено, что при малых токах излучение слабо влияет на характеристики дугового разряда. При больших токах с увеличением мощности излучения (при одинаковой амплитуде тока) радиус канала сначала растет, затем уменьшается, напряженность электрического поля (как амплитуда выбросов, так и действующее значение) растет, максимальная температура уменьшается. Причем максимальные температуры разрядов с разной амплитудой тока с увеличением мощности излучения стремятся к одному значению.

Конвекция оказывает большее влияние при малых токах (при слабом излучении, когда она является основным механизмом теплоотвода). С ростом скорости конвективных потоков от 0 до 0.03 м/с радиус канала уменьшается на 40÷70% в зависимости от амплитуды тока, максимальная температура увеличивается, напряженность электрического поля (как амплитуда выбросов, так и действующее значение) растет.

Показано, что с уменьшением мощности теплоотвода растет разница фаз между температурой и током (увеличиваются релаксационные задержки). О данной особенности поведения реальных разрядов было отмечено в [11], что является доказательством корректности разработанной модели.

Из двумерного моделирования выявлено, что распределение температуры в дуге в условиях естественной конвекции имеет грибовидную форму. Скорость всплывания дуги с амплитудой тока 200 А составляет около 1 м/с. В нижней части сечения канала образуется вихрь, обуславливающий его форму.

На основе проделанной работы можно сформулировать следующие основные выводы:

1. Разработана и реализована в виде готового программного продукта модель для расчета динамики температурного профиля, погонной проводимости и напряженности электрического поля свободно горящего дугового разряда в воздухе при атмосферном

давлении. Результаты моделирования находятся в хорошем количественном соответствии с экспериментальными данными.

2. Данная модель применима для разрядов промышленной частоты с амплитудой тока от десятков ампер до десятков килоампер. Обоснована корректность используемых приближений. Впервые рассчитана зависимость времени химической релаксации воздушной плазмы от температуры на основе анализа совокупной кинетики 94 химических реакций, протекающих в воздушной плазме. На основе 2D-моделирования выявлено, что пренебрежение естественной конвекцией вызывает ошибку $\approx 20\%$ в расчете погонной проводимости дугового канала и не влияет на форму осциллограмм напряженности электрического поля, учет магнитных сил способствует сохранению цилиндрической симметрии канала и вызывает изменения давления среды в пределах 10% (при амплитуде тока 10 кА).
3. Выявлены и объяснены некоторые характерные особенности дугового разряда (предельная температура, выбросы напряженности электрического поля), а также зависимости характеристик разряда от амплитуды тока, объемной мощности излучения и конвективного теплоотвода. В том числе показано, что диапазон токов горения разряда можно разбить на 2 области с различной динамикой основных характеристик разряда. При малых токах излучение слабо влияет на характеристики разряда.

Благодарности

Автор выражает благодарность за научные консультации и плодотворные дискуссии по обсуждению полученных результатов техническому директору ООО «ЦМ ТЭЛ» Меркушеву Алексею Георгиевичу.

Список литературы

- [1] А. Г. Васильев, Моделирование температурного профиля в плазме дугового разряда, Санкт-Петербург: СПбГУ, 2015.
- [2] A. Merkushev and J. Triaskin, Implementation of electric arc model in Simulink/SimPowerSystems, ICSTPEA, 2014, pp. 114-115.
- [3] В. О. Герман, А. П. Глинов, А. П. Головин, П. В. Козлов и Г. А. Любимов, О некоторых особенностях визуализации процессов в протяженном дуговом разряде в свободной атмосфере воздуха, т. 6, Прикладная физика, 2012.
- [4] A. D. Stokes and W. T. Oppenlandert, Electric arcs in open air, vol. 24, J. Phys. D: Appl. Phys., 1991, pp. 26-35.
- [5] А. Г. Меркушев, Я. В. Тряскин и А. Г. Васильев, Моделирование эволюции температурного профиля плазмы воздушной дуги при атмосферном давлении, Петергоф: Сборник докладов СПЭФЭГД, 2015, pp. 148-151.
- [6] R. L. Phillips, The behavior of Dynamic electric arcs, Michigan: The University of Michigan, 1964.
- [7] Ф. Г. Рутберг, А. В. Павлов, С. Д. Попов, А. И. Саков, Е. О. Серб, В. А. Сподобин и А. В. Суров, Сектральные измерения газовой и электронной температур в факеле однофазного плазмотрона переменного тока, т. 47(2), Теплофизика высоких энергий, 2009, pp. 193-199.
- [8] Е. Н. Васильев, Анализ энергетического баланса дугового разряда, ограниченного стенками, т. 17(3), Теплофизика и аэромеханика, 2010.
- [9] Е. Н. Васильев, Диаграммы состояния стационарного дугового разряда в воздухе, т. 82(12), Журнал технической физики, 2012.
- [10] А. Г. Меркушев, Я. В. Тряскин и А. Г. Васильев, МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПРОФИЛЯ ВОЗДУШНОЙ ДУГИ ПРИ АТМОСФЕРНОМ ДАВЛЕНИИ, т. 2, Новосибирск: СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ ЭЭЭ, 2015, p. 82.
- [11] А. Г. Васильев, Моделирование температурного профиля в плазме дугового разряда, Казань: Сборник тезисов участников форума НБНМ, 2016, p. 393.
- [12] A. G. Vasilev and A. G. Merkushev, INVESTIGATION OF ENERGY BALANCE IN AN AIR ARC DISCHARGE, Chisinau: MSCMP PROCEEDINGS, 2016, p. 341.
- [13] А. Г. Васильев, ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПРОФИЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДУГОВОГО РАЗРЯДА В ВОЗДУХЕ ПРИ АТМОСФЕРНОМ ДАВЛЕНИИ, т. 2(1), СПНИО, 2015.
- [14] Л. М. Биберман, В. С. Воробьев и И. Е. Якубов, Кинетика Неравновесной низкотемпературной плазмы, Москва: Наука, 1982.

- [15] Г. В. Буткевич, Дуговые процессы при коммутации электрических цепей, Москва: Высшая школа, 1967.
- [16] В. Л. Грановский, Электрический ток в газе, Москва: Наука, 1971.
- [17] Ю. П. Райзер, Физика газового разряда, Долгопрудный: Издательский дом Интеллект, 2009.
- [18] J. P. Trelles, C. Chazelas, A. Vardelle and J. V. R. Heberlein, Arc Plasma Torch Modeling, vol. 18, Journal of thermal spray technology, 2009, pp. 5-6.
- [19] G. Colonna and A. D'Angola, A hierarchical approach for fast and accurate equilibrium calculation, vol. 163, Computer Physics Communications, 2004, p. 177-190.
- [20] A. D'Angola, G. Colonna, C. Gorse and M. Capitelli, Thermodynamic and transport properties in equilibrium air plasmas in a wide pressure and temperature range, vol. 46, Eur. Phys. J. D, 2008, pp. 129-150.
- [21] Y. Cressault, R. Hannachi, P. Teulet, A. Gleizes, J.-P. Gonnet and J.-Y. Battandier, Influence of metallic vapours on the properties of air thermal plasmas, vol. 17(9), Plasma Sources Sci. Technol., 2008.
- [22] K. Eisazadeh-Far, H. Metghalchi and J. C. Keck, Thermodynamic Properties of Ionized Gases at High Temperatures, vol. 133(2), J. Energy Resour. Technol., 2011.
- [23] V. Aubrecht and M. Bartlova, Radiation Transfer In Arc Plasmas, vol. 338, AIP Conference Proceedings 876, 2006.
- [24] P. Kloc, V. Aubrecht, M. Bartlova and O. Coufal, Radiation transfer in air and air-Cu plasmas for two temperature profiles, vol. 48, J. Phys. D: Appl. Phys., 2015, p. 13.
- [25] S. Selle and U. Riedel, Transport Coefficients of Reacting Air at High Temperatures, 38th Aerospace Sciences, 2000.
- [26] Г. Г. Антонов, В. Б. Ковшечников и А. В. Гнедовский, Сопоставление характеристик однофазной дуги с медными и стальными электродами в атмосфере азота и воздуха, т. 81(1), Журнал технической физики, 2011.
- [27] Е. Н. Васильев и Д. А. Нестеров, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ РАДИАЦИОННО-КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В НЕОДНОРОДНЫХ МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ, т. 10(6), Вычислительные технологии, 2005.
- [28] A. Khakpour, S. Franke, D. Uhrlandt, S. Gorchakov and R.-P. Methling, Electrical Arc Model Based on Physical Parameters and Power Calculation, vol. 43(8), IEEE TRANSACTIONS ON PLASMA SCIENCE, 2015, pp. 2721-2729.
- [29] G. Colonna, Improvements of hierarchical algorithm for equilibrium calculation, vol. 177, Computer Physics Communications, 2007, pp. 493-499.
- [30] M. BARTLOVA, V. AUBRECHT and O. COUFAL, NET EMISSION COEFFICIENTS OF RADIATION IN THERMAL PLASMAS OF AIR WITH CARBON ADMIXTURE, vol. 89, Publ. Astron. Obs. Belgrade, 2010, pp. 241-244.

- [31] Y. Cressault, A. Gleizes and G. Riquel, Calculation of the radiation emitted by isothermal arc plasmas in air and air-metal mixtures, Philadelphia: ISPC 20 Proceedings, 2011.
- [32] W. H. Kurt, Modeling of a high energy, high pressure, plasma discharge, The Ohio State University, 1995.
- [33] О. Зинкевич и К. Морган, Конечные элементы и аппроксимация, Москва: Мир, 1986.
- [34] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика (нерелятивистская теория), 4 ред., Москва: Наука, 1989.
- [35] П. Бриджмен, Анализ размерностей, Ижевск: Москва, 2001.