

Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра теории систем управления электрофизической аппаратурой

Шароватова Дарья Сергеевна

Магистерская диссертация

**Анализ и синтез динамических систем управления
полетом квадрокоптера**

Направление 030401

Прикладные математика и физика

Магистерская программа математические и информационные технологии

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
старший преподаватель
Завадский С. В.

Санкт-Петербург

2017

Оглавление

Введение	3
Постановка задачи	5
Обзор литературы	7
1 Физическая постановка задачи	9
1.1 Задача стабилизации полета квадрокоптера	9
1.1.1 Матрица перехода	10
1.1.2 Принцип движения. Моменты силы тяги	11
1.1.3 Ускорение	12
1.1.4 Угловое ускорение	13
1.1.5 Стабилизация полета квадрокоптера	14
2 Синтез и оптимизация систем управления	16
2.1 Постановка задачи управления	16
2.2 Синтез начального приближения и параметризация для системы управ- ления	20
2.2.1 Параметризация объекта управления	22
2.2.2 Исследование модели системы управления: управляемость, ас- симптотическая устойчивость	23
2.3 Математическая модель оптимизации отдельного переходного процесса .	25
2.3.1 Теорема о представлении вариации функционала	25
2.4 Математическая модель исследования и оптимизации ансамбля траекторий	27
2.4.1 Модель оптимизации ансамбля траекторий	27
2.4.2 Теорема о представлении вариации функционала	29
2.5 Алгоритм численной оптимизации	32
3 Параметрическая оптимизация и результаты вычислительных экспе- риментов	33
3.1 Результаты оптимизации отдельного переходного процесса	33

3.2	Отклики систем на ступенчатое воздействие	36
3.3	Результаты оптимизации ансамбля траекторий	41
	Выводы	43
	Заключение	44
	Список литературы	45

Введение

Квадрокоптеры – это беспилотные летательные аппараты, получившие широкое распространение благодаря маневренности, простоте и компактности конструкции. До настоящего времени управление четырьмя независимыми винтами было практически невозможно без помощи электроники. Однако снижение стоимости современных микропроцессоров обеспечило прорыв в области управления квадрокоптерами для коммерческих, военных и даже любительских целей. В отличие от вертолета, шесть степеней свободы квадрокоптера обеспечиваются без помощи автомата перекоса, что значительно упрощает конструкцию винтов и снижает стоимость производства.

Однако беспилотным устройствам требуются качественные системы управления. Необходимость вызвана высоким требованиям к точности стабилизации при ограниченном запасе энергии.

В данной работе рассматривается параметрическая на примере задачи стабилизации положения квадрокоптера по показаниям бортовых сенсоров (гироскопа и акселерометра).

Цель работы — разработать алгоритм для оптимизации регуляторов в задачах стабилизации полёта квадрокоптера. Необходимо провести параметрическую оптимизацию системы, оценить качество оптимизированных регуляторов по нескольким критериям и выигрыш оптимизированного регулятора по сравнению с исходными. Сравнить полученные в результате численного эксперимента регуляторы по критериям точности, скорости стабилизации, величине энергетических затрат и отсутствию перерегулирования.

Актуальность поставленной задачи вызвана тем, что широко распространенных подходов синтеза регуляторов может быть не достаточно в реальных условиях. Постоянное наличие шумов в канале измерений, вызванных несовершенством датчиков, или возмущениями, например в виде случайных порывов ветра, усложняют задачу стабилизации. Стабилизирующие управления требуют расчета с учетом конкретных условий. Так становится актуальным расширение методов синтеза управления, одним из которых является параметрическая оптимизация. Параметрическая оптимизация позволяет рассмотреть широкий спектр возмущений и проводить оптимизацию одновременно по всем параметрам с учётом их влияния в структуре замкнутой динамической системы.

Содержание работы состоит из трех глав. Глава 1 посвящена физической постановке задачи. В параграфах 1.1.1 — 1.1.3 раздела 1.1 описывается устройство и принцип

движения квадрокоптера, приводится полный и подробный вывод уравнений динамики. Параграф 1.1.3 содержит постановку задачи стабилизации полета квадрокоптера по показаниям измерений бортовых сенсоров.

В разделе 2.1 главы 2 проводится вывод линеаризованных уравнений динамики для указанных в работе задач. Исследование полученных линейных стационарных систем на управляемость и наблюдаемость проводится в 2.2.2.

Раздел 2.2.1 содержит описание параметризации объектов, в 2.2 приведен алгоритм формирования замкнутой системы, соединяющей задачи управления и наблюдения, в 2.3 вводится интегральный критерий качества на траекториях замкнутой системы и приводится описание постановки задачи параметрической оптимизации. Так, в частности, в параграфе 2.3.1 приводится теорема о представлении вариации функционала с доказательством. Раздел 2.2.1 содержит математическую модель исследования и оптимизации ансамбля траекторий, включающую представление вариации функционала 2.4.2. Алгоритм численной оптимизации описывается в 2.5. Заключительная глава 3 содержит результаты численного эксперимента и анализ полученных в виде графиков и численных значениях интегрального критерия качества. Качество стабилизации исходного и оптимизированного регулятора предлагается сравнить для модели динамики отдельного переходного процесса и динамики ансамбля траекторий, возмущённых множеством начальных значений.

Постановка задачи

Поставлена задача стабилизации полета квадрокоптера, исходя из показаний бортовых датчиков. Необходимо вырабатывать управляющие напряжения рулевых винтов, обеспечивая стабильность полета. Пусть получена линеаризованная система, описывающая отклонения от положения равновесия компонент вектора состояния квадрокоптера:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{st} &= A_{st}x_{st} + B_{st}u \\ x_{st}(0) &= x_{st0}, \\ y &= C_{st}x_{st},\end{aligned}\tag{1}$$

где x_{st} — вектор отклонений фазовых переменных состояния, x_{st0} — вектор отклонения значений фазовых переменных в начальный момент времени, u — вектор управлений, y — вектор измерений. A_{st}, B_{st}, C_{st} — постоянные матрицы, полученные в результате процедуры линеаризации.

Так как система требует управления по выходной переменной y при наличии возмущений, то необходимо сформировать оптимальный наблюдатель, например, наблюдатель в виде фильтра Калмана-Бьюси [21]. Пусть матрица H_{klm} — это решение задачи наблюдения, а K_{lqr} — это матрица стабилизирующей обратной связи, полученная как результат решения LQR задачи [7]. Объединив решения этих задач, рассмотрим замкнутую систему. Тогда замыкающий стабилизирующий регулятор формируется в виде комбинирования задачи наблюдения и регулирования:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_{st}z + B_{st}u + H_{klm}(y - C_{st}z), \\ u &= K_{lqr}z,\end{aligned}\tag{2}$$

где z - вектор состояний наблюдателя.

Далее рассмотрим систему (1), замкнутую динамическим регулятором (2), с учетом внешних возмущений $f(t)$ и возмущений по начальным данным x_0

$$\begin{aligned}\dot{x}_{st} &= Ax_{st} + Bu + f(t), \\ x_{st}(0) &= x_{st0}, \\ y &= Cx_{st}, \\ \dot{z} &= A_cz + B_cy, \\ u &= C_cz,\end{aligned}\tag{3}$$

где $A_c = A_{st} + B_{st}K_{lqr} - H_{klm}C_{st}$, $B_c = H_{klm}$, $C_c = K_{lqr}$.

Пусть p — вектор независимых параметров, для которого сформирована параметризованная модель объекта управления в виде (4)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(p)x + f(t), \\ x(0) &= x_0, \\ u &= K(p)x(t, x_0, p), \end{aligned} \tag{4}$$

где $x = \begin{bmatrix} x_{st} \\ z \end{bmatrix}$ — расширенный вектор состояния системы, $x_0 = \begin{bmatrix} x_{st0} \\ O \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} A_{st} & B_{st}C_c \\ B_cC_{st} & A_c \end{bmatrix}$ и $K = \begin{bmatrix} O & C_c \end{bmatrix}$, $f(t)$ — возмущение в виде постоянно действующей силы. Компоненты матриц A_c, B_c, C_c выбраны в качестве вектора параметров $p = \{p_k\}$.

Пусть на движениях системы (4) введен квадратичный интегральный функционал качества

$$I(p) = \int_0^T (x^*(p)Qx(p) + u^*(p)Ru(p)) dt, \tag{5}$$

где Q, R — заданные исследователем весовые матрицы.

Требуется сформировать матрицы A_c, B_c, C_c таким образом, чтобы замкнутая система (4) была асимптотически устойчива и был минимизирован критерий качества (5):

$$I(p) = \int_0^T (x^*(p)Qx(p) + u^*(p)Ru(p)) dt \rightarrow \min. \tag{6}$$

Обзор литературы

Среди работ посвященных оптимизации и стабилизации движений динамических объектов стоит отметить книги Л. С. Понтрягина и В.И. Зубова [1, 2]. Новые математические модели оптимизации систем управления получены в работах [3, 4]. В [5, 6] проведена оптимизация динамики ансамбля пучка заряженных частиц в электростатическом поле. Обширное применение параметрическая оптимизация получила в задачах управления плазмой в токамаках. В работах [7] — [11] проведен синтез новых регуляторов стабилизации формы и тока плазмы с учетом динамики ансамбля траекторий и множества возмущений.

В настоящее время уже разработаны многие виды регуляторов для задачи управления полетом квадрокоптера. Среди них наиболее известные регуляторы пропорционально-интегро-дифференцирующий (ПИД) [12] — [15] и линейно квадратичный (LQR) — в [13, 14]. При больших отклонениях от положения равновесия контроль над устройством стабилизирующимся данными регуляторами может быть потерян. Иногда подбор коэффициентов ПИД регулятора на практике вызывает затруднения и приводит к падениям летательного аппарата [12]. Обширное применение в задачах стабилизации полета квадрокоптера, учитывающих шумы сигналов в каналах измерения датчиков, получил фильтр Калмана [16] и [17]. В работах [18], [20], [30] рассматривается комбинация применения вилтра Калмана с LQR и PID регуляторами, показывающие удовлетворительные результаты. Как видно, задача LQG синтеза в данной области уже достаточно хорошо изучена, однако параметрическая оптимизация в рамках поставленной задачи управления, еще не была затронута.

За период 2016–2017 гг. опубликовано несколько работ, предлагающих новые техники синтеза регуляторов на основе нечеткой логики и нейро-нечетких сетей [39], [37], [38], [39]. Полученные результаты обеспечивают высокую точность стабилизации при малых отклонениях, подбор оптимальных параметров регулятора проводится исследователями. В работе [31] представлен алгоритм оптимизации коэффициентов усиления вышперечисленных систем.

В статьях [33, 34] представлена стабилизация квадрокоптера на основе нелинейных моделей. В [33] представлены качественные результаты стабилизации методом управления с прогнозирующими моделями (англ. Nonlinear Model Predictive Control), техники функций Ляпунова. Однако нелинейная оптимизация до сих пор остается наиболее сложной в реализации по сравнению с линейной. В связи с ограничениями по

скорости вычислений, необходимых в реальном времени, данные методы зачастую пока не могут быть применены на практике.

В работе [32] проводится исследование точности стабилизации для сенсоров разных ценовых категорий, сравнение фильтров - комплементарного, рационального и Калмана.

Общие сведения теоретической механики, необходимые для исследования физических законов и вывода уравнений динамики содержатся в [25, 26], сведения из теории управления в [21, 28].

Глава 1

Физическая постановка задачи

1.1. Задача стабилизации полета квадрокоптера

Квадрокоптер — это беспилотный летательный аппарат обладающий 4 винтами, закрепленными на концах крестообразной рамы. На рисунке 1.1 изображена модель квадрокоптера с введенными локальной и связанной системах координат. Начало локальной

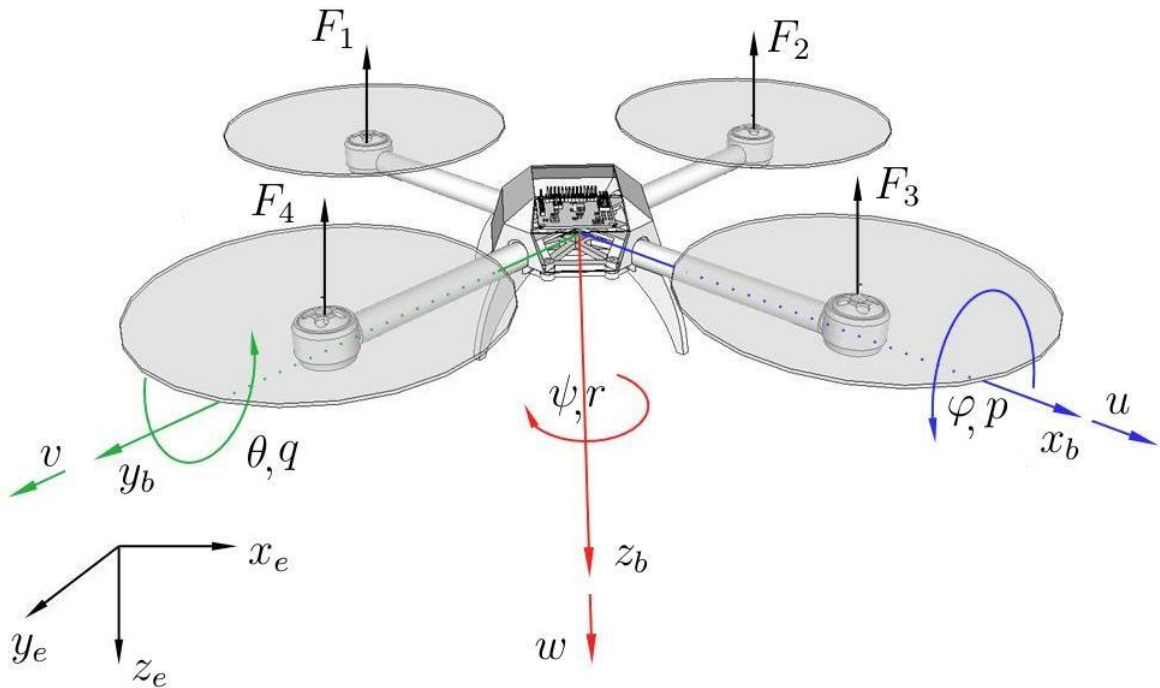


Рис. 1.1: Земная и связанная системы координат

системы фиксируется на поверхности земли, вертикальная ось z_e совпадает с направлением линии действия силы тяжести, оси y_e и x_e обычно направлены на север и восток.

Центр связанной системы совпадет с центром масс летального аппарата. Направление оси x_b соответствует основному направлению движения, а ось z_b направлена

перпендикулярно плоскости квадрокоптера, y_b — определяется по правилу правого винта.

Ориентация квадрокоптера в пространстве задается углами Эйлера, определяемыми как углы между осями связанной и земной систем. Эти углы совпадают с углами рысканья — ψ (поворот вокруг z_b), тангажа — θ (поворот вокруг y_b) и крена — φ (поворот вокруг x_b), обычно применяемыми в авиатехнике.

Координатами x , y и z обозначается положение летательного аппарата в земной системе. Компоненты скорости квадрокоптера, направленные вдоль осей связанной системы общепринято обозначать u, v, w . Компоненты угловой скорости вращения вокруг осей — p, q, r .

1.1.1. Матрица перехода

Поскольку измерения положения обеспечиваются бортовыми сенсорами, определяющими координаты в связанной системе, необходимо установить закон, по которому любой вектор в связанной системе координат может быть преобразован к вектору в земной и наоборот. Вращения вокруг трех осей декартовой системы координат [26] аналитически описывается следующими тремя матрицами:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

$$R_y = \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Последовательность поворотов вокруг осей $z \rightarrow y \rightarrow x$ определяется матрицей перехода из связанной системы координат в локальную:

$$D = R_x R_y R_z = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta \cos \psi - \cos \psi \sin \psi & \sin \varphi \sin \theta \sin \psi - \cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \psi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi \sin \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \cos \theta. \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

В силу ортогональности матрицы D существует обратная ей и используются для обратного перехода. Итак, первый набор уравнений описывает зависимость скорости квадрокоптера в земной системе от скорости, измеренной в связанной системе:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = D^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

1.1.2. Принцип движения. Моменты силы тяги

Движение квадрокоптера в любом направлении происходит за счет изменения угловых скоростей вращения винтов. Каждый мотор производит силу пропорционально квадрату его угловой скорости Ω_i и направленную перпендикулярно плоскости вращения пропеллера: $F_i = b\Omega_i^2$, где b - константа, коэффициент тяги. Модуль суммарной подъемной силы T , действующей на квадрокоптер вычислется как

$$\begin{aligned} &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = \\ &= b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Когда все винты одновременно ускоряют вращение, то квадрокоптер набирает высоту. Газ квадрокоптера — это среднее арифметическое между скоростями всех моторов, чем он больше, тем выше взлетает квадрокоптер [12].

На рис. 1.2 показаны направления вращения винтов: пара (1,3) по часовой стрелке, а пара (2,4) против. Это необходимо для того, чтобы противоположные вращающиеся

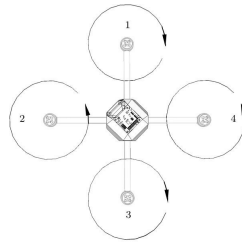


Рис. 1.2: Направление вращения винтов

моменты компенсировали друг друга.

Ненулевой суммарный момент сил обеспечивает поворот квадрокоптера вокруг оси z :

$$M_z = F_2 + F_4 - F_1 - F_3 = d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2), \quad (1.4)$$

где l это расстояние между моторами и центром масс квадрокоптера, а d — аэродинамический коэффициент сопротивления. Таким образом, чтобы повернуть квадрокоптер вокруг своей оси z_b одна пара моторов, вращающихся в одном направлении, должна замедлить вращения, а другая наоборот ускорить, как видно из рис. 1.3

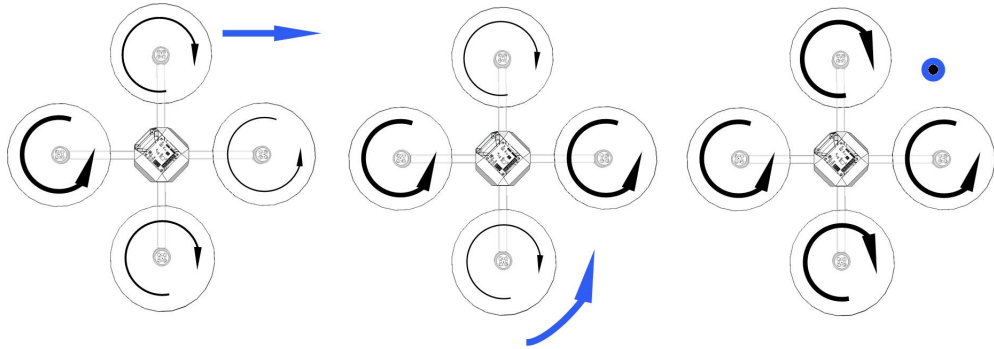


Рис. 1.3: Типы движения: в сторону, поворот и подъем вверх

Крутящий момент, поворачивающий квадрокоптер вокруг оси x_b это результат разницы между моментами сил левого и правого моторов

$$M_x = l(F_2 - F_4) = bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2). \quad (1.5)$$

Момент сил, вращающий коптер вокруг y_b в силу симметрии устройства вычисляется аналогично моменту M_x , но уже как разница между силами переднего и заднего моторов:

$$M_y = l(F_1 - F_3) = bl(\Omega_1^2 - \Omega_3^2). \quad (1.6)$$

Движение в сторону происходит за счет наклона квадрокоптера, т.е. изменения углов тангажа и крена (поворот вдоль осей x_b и y_b).

1.1.3. Ускорение

Пусть на квадрокоптер действуют только сила тяжести и сила тяги винтов T , вкладом аэродинамических эффектов можно пренебречь, а F — векторная сумма всех сил, приложенных к центру масс квадрокоптера. Тогда хорошо известный второй закон Нью-

тона

$$m \frac{d\dot{V}_i}{dt} = F \quad (1.7)$$

позволяет выразить производную вектора скорости V_i в земной системе через действующие силы. Связанная с квадрокоптером система координат неинерциальная, поэтому производная вектора скорости V_i в земной системе координат находится в зависимости от скорости V_b в связанной системе $\dot{V}_i = \dot{V}_b + \omega \times V_b$ [26]. Выражение (1.7) в векторном виде записывается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Очевидно, что $F_x = F_y = 0$, а вдоль оси z_b связанной системы на квадрокоптер действует сила тяги винтов T . Преобразование силы тяжести к проекции на z_b осуществляется с помощью матрицы поворота D из (1.1)

$$D \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{u} + qw - rv \\ \dot{v} + ru - pw \\ \dot{w} + pw - qu \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Тогда уравнения для компонент ускорения квадрокоптера примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= rv - qw - g \sin \theta \\ \dot{v} &= pw - ru + g \cos \theta \sin \varphi \\ \dot{w} &= qu - pv + g \cos \theta \cos \theta - \frac{T}{m}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

а (1.10) с учетом выражения (1.3):

$$\begin{aligned} \dot{u} &= rv - qw - g \sin \theta \\ \dot{v} &= pw - ru + g \cos \theta \sin \varphi \\ \dot{w} &= qu - pv + g \cos \theta \cos \theta - \frac{b}{m} (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2). \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.1.4. Угловое ускорение

Квадрокоптер это абсолютно тверде тело симметричное относительно плоскостей xz и yz , а оси его вращения совпадают с главными осями. Тензор инерции квадрокоптера имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Зависимость проекций вектора угловой скорости

$$\omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

на оси координат связанной системы от углов Эйлера ψ, τ, φ [25] выражается зависимостью

$$\begin{aligned} p &= \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ q &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi \\ r &= \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Для вращающегося твердого тела справедливо динамическое уравнение Эйлера [26] :

$$M = J\dot{\omega} + \omega \times J\omega \quad (1.14)$$

Тогда аналитическая зависимость моментов сил от моментов инерции и компонент угловой скорости выражается с учетом (1.12) и (1.14):

$$\begin{aligned} M_x &= \dot{p}I_x + qr(I_z - I_y) \\ M_y &= \dot{q}I_y + pr(I_x - I_z) \\ M_z &= \dot{r}I_z + pq(I_y - I_x) \end{aligned} \quad (1.15)$$

В силу симметрии квадрокоптера $I_y \approx I_x$ упрощается (1.15):

$$\begin{aligned} M_x &= \dot{p}I_x + qr(I_z - I_y) \\ M_y &= \dot{q}I_y + pr(I_x - I_z) \\ M_z &= \dot{r}I_z. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Подстановка формул моментов сил M_x, M_y, M_z (1.5)-(1.4) в (1.16) дает уравнения производных компонент угловой скорости ω :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{lb}{I_x}(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) - qr \frac{(I_z - I_y)}{I_x} \\ \dot{q} &= \frac{lb}{I_y}(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) - pr \frac{(I_x - I_z)}{I_y} \\ \dot{r} &= \frac{d}{I_z}(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2). \end{aligned} \quad (1.17)$$

1.1.5. Стабилизация полета квадрокоптера

За управление квадрокоптером отвечает полётный контроллер — плата с микропроцессором, радиомодулем и датчиками, установленная на раме квадрокоптера. Радиомодуль

отвечает за передачу команд от пилота с пульта управления. Для полного контроля над беспилотным летательным аппаратом, достаточно иметь доступ к четырем каналам управления — газу, углам тангажа, крена и рысканья. Микропроцессор считывает данные с каналов управления и с датчиков и в зависимости от показаний выдает управляющий сигнал моторам.

Полетный контроллер может быть оснащен GPS, компасом, барометром или ультразвуковой дальномером для более точного ориентирования в пространстве. Однако обязательным для любой модели квадрокоптера является наличие гироскопа и акселерометра. Акселерометр измеряет ускорение и скорость вдоль осей связанной системы координат, а гироскоп — угловые скорости вращения вокруг собственных осей. Предполагается, что перед интегрированием величин угловых скоростей, измеряемых акселерометром, сигнал фильтруется, как например в работе [32].

Квадрокоптер аэродинамически не устойчив к внешним возмущениям и требует стабилизации по трем углам поворота вокруг осей, связанной с ним системы координат. Для стабилизации его движения применяют системы автоматической стабилизации.

Необходимо вырабатывать напряжения, подаваемые на рулевые винты, в зависимости от показаний датчиков об изменении высоты z , углов Эйлера φ , θ , ψ , угловых скоростей p , q , r и вертикальной составляющей скорости w .

Глава 2

Синтез и оптимизация систем управления

2.1. Постановка задачи управления

Положение равновесия квадрокоптера случае, когда оси связанной системы координат совпадают с осями локальной описывается следующим набором уравнений:

$$\begin{aligned}x_0 = 0 \quad \varphi_0 = 0 \quad u_0 = 0 \quad p_0 = 0 \\y_0 = 0 \quad \theta_0 = 0 \quad v_0 = 0 \quad q_0 = 0 \\z_0 = 0 \quad \psi_0 = 0 \quad w_0 = 0 \quad r_0 = 0 \\-\Omega_{10} = \Omega_{20} = -\Omega_{30} = \Omega_{40} = 463.1 \text{ рад/с.}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Физически состояние (2.1) означает, что летательный аппарат неподвижно парит в воздухе в точке с координатами x_0, y_0, z_0 . Винты вращаются с одинаковой величиной угловой скорости $\Omega_0 = 463.1$ рад/с.

Для вывода линеаризованных уравнений требуется продифференцировать и выписать из (1.2) (1.11) (1.17) систему в отклонениях от положения равновесия. В случае, когда оси связанной системы координат совпадают с осями локальной матрица перехода D единичная и из (1.2) следует:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= \Delta u \\ \Delta \dot{y} &= \Delta v \\ \Delta \dot{z} &= \Delta w,\end{aligned}\tag{2.2}$$

и из (1.13):

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\varphi} &= \Delta p \\ \Delta\dot{\theta} &= \Delta q \\ \Delta\dot{\psi} &= \Delta r.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Выполнение линеаризации для (1.11) с подстановкой значений $u_0, v_0, w_0, p_0, q_0, r_0$ в точке равновесия приводит к выражениям:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{u} &= r_0v\Delta r + rv_0\Delta v - qw_0\Delta w - g\cos\theta_0\Delta\theta \\ \Delta\dot{v} &= p_0w\Delta p + pw_0\Delta w - ru_0\Delta u - g\sin\theta_0\sin\varphi_0\Delta\theta + \\ &\quad + g\cos\theta_0\cos\varphi_0\Delta\varphi \\ \Delta\dot{w} &= q_0r\Delta q + qr_0\Delta r - pv_0\Delta v - g\sin\varphi_0\sin\theta_0\Delta\varphi - \\ &\quad - g\cos\varphi_0\cos\theta_0\Delta\theta - 2\Theta_0\frac{b}{m}Q,\end{aligned}\tag{2.4}$$

где $Q = \Delta\Omega_1 + \Delta\Omega_3 - \Delta\Omega_2 - \Delta\Omega_4$. То же для (1.17) делает с1q праведливым уравнения:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{p} &= 2\frac{lb}{I_x}(\Omega_0\Delta\Omega_2 - \Delta\Omega_4) - (q_0r\Delta q + qr_0\Delta r)\frac{I_z - I_y}{I_x} \\ \Delta\dot{q} &= 2\frac{lb}{I_y}(\Omega_0\Delta\Omega_1 - \Delta\Omega_3) - (p_0r\Delta p + pr_0\Delta r)\frac{I_x - I_z}{I_y} \\ \Delta\dot{r} &= 2\frac{d}{I_z}(\Omega_0(\Delta\Omega_1 + \Delta\Omega_2 + \Delta\Omega_3 + \Delta\Omega_4)).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Отбрасывание символа Δ для удобства чтения и подстановка значений из (2.1) позволяет записать (2.2) – (2.5) как систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \\ \dot{y} &= v \\ \dot{z} &= w, \\ \dot{\varphi} &= p \\ \dot{\theta} &= q \\ \dot{\psi} &= r, \\ \dot{u} &= -g\theta \\ \dot{v} &= g\varphi \\ \dot{w} &= -2\Omega_0\frac{b}{m}(\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4) \\ \dot{p} &= 2\frac{lb}{I_x}\Omega_0(\Omega_2 - \Omega_4) \\ \dot{q} &= 2\frac{lb}{I_y}\Omega_0(\Omega_1 - \Omega_3) \\ \dot{r} &= 2\frac{d}{I_z}\Omega_0(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Во время полета необходимо стабилизировать положение равновесия, определяемое величинами $z, \varphi, \theta, \psi, w, r, q, p, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$, получая с сенсоров значения w, r, q, p и вырабатывая управляющие напряжения U_1, U_2, U_3, U_4 . Тогда система уравнений, полученная из (2.6) и описывающая состояние квадрокоптера в соответствии с поставленной задачей имеет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= w \\
\dot{\varphi} &= p \\
\dot{\theta} &= q \\
\dot{\psi} &= r \\
\dot{w} &= qu - pv + g \cos \theta \cos \theta - \frac{b}{m}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\
\dot{p} &= \frac{lb}{I_x}(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) - qr \frac{(I_z - I_y)}{I_x} \\
\dot{q} &= \frac{lb}{I_y}(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) - pr \frac{(I_x - I_z)}{I_y} \\
\dot{r} &= \frac{d}{I_z}(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Воспользовавшись идентифицированными параметрами квадрокоптера из работы [13]

$$\Omega_0 = 463.1 \text{ рад/с},$$

$$l = 27.5 \text{ см},$$

$$b = 1.5108 \cdot 10^{-5} \text{ кг м},$$

$$m = 1,3225 \text{ кг},$$

$$I_x = 0.0093 \text{ кг м}^2,$$

$$I_y = 0.0092 \text{ кг м}^2,$$

$$I_z = 0.0151 \text{ кг м}^2,$$

$d = 4,406 \cdot 10^{-7} \text{ кг м}^2 \text{ с}^{-1}$ можно получить численные значения компонент матриц системы (2.8).

Теперь из (2.7) можно сформировать линейную стационарную систему вида:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{st} &= A_{st}x_{st}, \\
y &= C_{st}x_{st},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$x_{st} = \left[z \quad \varphi \quad \theta \quad \psi \quad w \quad r \quad q \quad p \quad \Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \Omega_3 \quad \Omega_4 \right]^*,$$

- вектор фазовых переменных в отклонении от положения равновесия, а матрица (!уточ-

нить коэффициенты A2)

$$A_{st} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{b}{m}\Omega_0 & -\frac{b}{m}\Omega_0 & -\frac{b}{m}\Omega_0 & -\frac{b}{m}\Omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\Omega_0\frac{lb}{I_x} & 0 & -2\Omega_0\frac{lb}{I_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\Omega_0\frac{lb}{I_y} & 0 & -2\Omega_0\frac{lb}{I_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\Omega_0\frac{d}{I_z} & 2\Omega_0\frac{d}{I_z} & 2\Omega_0\frac{d}{I_z} & 2\Omega_0\frac{d}{I_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

В рамках поставленной физической задачи доступен для наблюдения

$$y = [z \ \varphi \ \theta \ \psi \ w \ r \ q \ p]^* .$$

Тогда матрица коэффициентов наблюдения

$$C_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (2.10)$$

Матрица A_{st} имеет положительные собственные числа, следовательно система (2.8) не устойчива и система требует управления.

Тогда необходимо сформировать вектор управлений

$$U = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4]^* .$$

В работе [13] произведена идентификация динамики моторов в зависимости от подаваемых напряжений U_1, U_2, U_3, U_4 :

$$\dot{\Omega}_i = -10\Omega_i + 7U. \quad (2.11)$$

Итак, система (2.8) с введенным управлением u :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{st} &= A_{st}x_{st} + B_{st}u, \\ y &= Cx_{st}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где с учетом (2.11) матрица

$$B_{st} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

2.2. Синтез начального приближения и параметризация для системы управления

Рассмотрим линеаризованную систему (2.8) с учетом внешних возмущений $\varphi(t)$ и возмущений по начальным данным x_0 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{st} &= Ax_{st} + Bu + \varphi(t), \\ x_{st}(0) &= x_{st0}, \\ y &= C_{st}x_{st}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Для представления системы в виде параметризованного объекта необходимо провести постановку задачи линейно-квадратичного гауссовского управления (англ. Linear quadratic Gaussian control, LQG control) и LQG-оптимизации [2,44].

$$\begin{aligned} \dot{x}_{st} &= Ax_{st} + Bu + G\varphi(t), \\ x_{st}(0) &= x_{st0}, \\ y &= C_{st}x_{st} + \psi(t), \end{aligned} \tag{2.15}$$

Первый этап заключается в нахождении линейного регулятора для системы (2.14) в виде

$$u = Kx, \quad (2.16)$$

минимизирующего квадратичный критерий

$$I(1) = \int_0^\infty (y^*(p)Ry + u^*Qu) dt = \int_0^\infty (x^*C^*(p)RCx + c_0u^*Qu) dt. \quad (2.17)$$

Матрица K ищется в виде

$$K = -Q^{-1}B^*, \quad (2.18)$$

где матрица Y – симметричная положительно определенная матрица, являющаяся решением матричного алгебраического уравнения Рикатти

$$-\frac{1}{c_0}YQ^{-1}B^*Y + A^* + YA + C^*RC = 0. \quad (2.19)$$

При этом все корни полинома $\det(A - BQ^{-1}B^*Y)$ лежат в левой открытой полуплоскости.

Второй этап заключается в поиске решения задачи линейного оптимального наблюдения при наличии возмущающих воздействий $\varphi(t)$ и помех в канале измерения $\psi(t)$. Система для поставленной задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{st} &= Ax_{st} + Bu + G\varphi(t), \\ x_{st}(0) &= x_{st0}, \\ y &= C_{st}x_{st} + \psi(t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Требуется построить наблюдатель вида

$$\dot{z} = Az + Bu + H_{klm}(y - Cz), \quad (2.21)$$

оптимальный в смысле Калмана, что означает минимизирующий среднеквадратичный функционал, оценивающий вектор невязок наблюдателя $\zeta(t) = x(t) - z(t)$:

$$I^2 = \langle \zeta^*(t)\zeta(t) \rangle = \langle (x(t) - z(t))^*(x(t) - z(t)) \rangle \rightarrow \min.$$

Матрица наблюдателя H_{klm} находится в виде

$$H_{klm} = TC^*\Theta_\Psi^{-1}, \quad (2.22)$$

где T – симметричная положительно определенная матрица, являющаяся решением матричного алгебраического уравнения Рикатти

$$-TC^*\Theta_\Psi^{-1}T + AT + TA^* + G\Theta_\varphi G^* = 0. \quad (2.23)$$

Все корни полинома $\det(A + TC^* \Theta_{\Psi}^{-1} C)$ лежат в левой открытой полуплоскости. Алгоритм нахождения всех требуемых матриц формируется следующим образом:

- 1 Задать исходные данные модели (2.15), то есть матрицы $A, B, C, G, R, Q, \Theta, \Psi, \Theta_{\varphi}$ и постоянную c_0 .
- 2 Решить матричные алгебраические уравнения Рикатти (2.19)-(2.23)
- 3 Вычислить матрицы $K = K(A, B, C, R, Q, c_0)$ и $H = H(A, B, C, G, \Theta, \Psi, \Theta_{\varphi})$ линейного закона и наблюдателя по формулам (2.18)-(2.22)
- 4 Построить динамический оптимальный регулятор в виде (1.3.11).

Весовые матрицы R, Q , матрицы спектральных плотностей $\Theta_{\varphi}, \Theta_{\psi}$ и константа c_0 заранее не задаются и должны назначаться исследователем так, чтобы замкнутая система управления обладала приемлемыми характеристиками. В результате комбинирования задач из выше описанных этапов сформируем систему, где матрица H_{klm} — это решение задачи наблюдения, а K_{lqr} — это матрица стабилизирующей обратной связи, полученная как результат решения LQR задачи [7]. Объединив решения этих задач, рассмотрим замкнутую систему. Тогда замыкающий стабилизирующий регулятор формируется в виде комбинирования задачи наблюдения и регулирования:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bu + H_{klm}(y - Cz), \\ u &= K_{lqr}z. \end{aligned} \tag{2.24}$$

2.2.1. Параметризация объекта управления

Приведём постановку задачи параметрической оптимизации для рассматриваемой системы (2.24). Укажем параметризацию объекта управления и используем соотношения, представленные в работе [9] для выражения приращения функционала введённой модели.

Динамический регулятор 2.24 формируется в виде

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c z + B_c u, \\ u &= C_c z. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Введем параметры $p = \{p_k\}$ являющиеся компонентами матриц оптимизируемого регулятора A_c, B_c, C_c . Тогда введя расширенный вектор $x = \begin{pmatrix} x_{st} & z \end{pmatrix}^*$ динамическую

систему (3) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(p)x + f(t), \\ x(0) &= x_0, \\ u &= K(p)x(t, x_0, p),\end{aligned}\tag{2.26}$$

где $x_0 = (x_{st0} \ O)^*$, $P = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}$ и $K = \begin{bmatrix} O & C_c \end{bmatrix}$.

Здесь для матриц регулятора (2.25) справедливы равенства

$$A_c = A_{st} + B_{st}K_{lqr} - H_{klm}C_{st}, \quad B_c = H_{klm}, \quad C_c = K_{lqr}.$$

На движениях системы (2.26) задан функционал качества и рассматривается задача его минимизации:

$$I = \left(\int_0^T x^*(p)Qx(p) + u^*(p)Ru(p) \right) dt.\tag{2.27}$$

2.2.2. Исследование модели системы управления:

управляемость, асимптотическая устойчивость

Для решения задач управления важно знать, обладает ли система свойством быть управляемой в смысле перевода из любого заданного состояния в любое другое заданное состояние [21]. Чтобы оценить управляемость системы (2.8) достаточно определить ранг матрицы управляемости системы, воспользовавшись критерием Калмана [28]. Сформируем матрицу $P_c = [B_{st}, A_{st}B_{st}, \dots, A_{st}^7 B_{st}]$. Итак, система (2.8) полностью управляема, так как $rank(P) = 8$.

Чтобы восстановить значения фазового вектора x необходимо убедиться, что система (2.8) полностью наблюдаема. Для этого воспользуемся критерием полной наблюдаемости [21]. Для этого необходимо выписать матрицу восстанавливаемости $Q_o = [C_{st}, C_{st}A_{st}^2, \dots, C_{st}A_{st}^7]^T$. Ее ранг также совпадает с размерностью системы, что означает, что система полностью наблюдаема.

Численный вид матриц A_{st}, P_c, Q_o рассчитывается и представлен в программе.

Напомним что линейная система с простоянной матрицей асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы системы имеют отрицательные вещественные части. Собственные числа матрицы P системы 2.26

ИМЕЮТ ВИД:

$$-46.1156 + 45.6251i,$$

$$-46.1156 - 45.6251i,$$

$$-40.4114 + 39.8507i,$$

$$-40.4114 - 39.8507i,$$

$$-22.5684 + 22.5684i,$$

$$-22.5684 - 22.5684i,$$

$$-2.5464 + 2.7257i,$$

$$-2.5464 - 2.7257i,$$

$$-9.7466 + 7.0865i,$$

$$-9.7466 - 7.0865i,$$

$$-3.2316 + 0.0000i,$$

$$-10.1183 + 0.0000i,$$

$$-8.0416 + 12.2282i,$$

$$-8.0416 - 12.2282i,$$

$$-7.6998 + 11.5764i,$$

$$-7.6998 - 11.5764i,$$

$$-7.4094 + 11.0202i,$$

$$-7.4094 - 11.0202i,$$

$$-10.0000 + 0.0000i,$$

$$-16.4382 + 0.0000i,$$

$$-15.2833 + 0.0000i,$$

$$-15.8096 + 0.0000i,$$

$$-3.1624 + 0.0000i,$$

$$-3.1624 + 0.0000i.$$

2.3. Математическая модель оптимизации отдельного переходного процесса

Приведем модель переходного процесса замкнутой системы в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(p)x + N(p)f(t), \\ x(0) &= x_0, \\ u &= K(p)x(t, x_0, p), \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$I = \int_0^T (x^*(t)Qx(t) + u^*(p)Ru(p)) dt + x^*(T)Q_1x(T) \rightarrow \min. \tag{2.29}$$

Рассмотрим вариацию k -го параметра $\tilde{p}_k = p_k + \Delta p_k$. Представим приращения матриц модели объекта управления в виде

$$\Delta P = \Delta_{p_k} P = \frac{\partial P(p)}{\partial p_k} \Delta p_k, \quad \Delta K = \Delta_{p_k} K = \frac{\partial K(p)}{\partial p_k} \Delta p_k.$$

Символом Δp_k обозначается приращение выражения при приращении только оптимизируемого параметра p_k . Минимизация функционала происходит в сторону убывания его первой вариации методом наискорейшего спуска.

2.3.1. Теорема о представлении вариации функционала

Утверждение. Полное приращение функционала (2.29) при вариации (линейно от параметров) параметра $\tilde{p}_k = p_k + \Delta p_k$ представимо в виде

$$\begin{aligned} I(p, \Delta p_k) &= - \left(\int_0^T \psi^*(t) \left(\frac{\partial P}{\partial p_k} x(t) + \frac{\partial N}{\partial p_k} f(t) \right) - 2x^*(t) \frac{\partial K^*}{\partial p_k} RK(p)x(t) dt \right) \cdot \Delta p_k + \\ &\quad + o(|\Delta p_k|), \end{aligned} \tag{2.30}$$

где $o(|\Delta p_k|)$ — величина более высокого порядка малости чем $|\Delta p_k|$ при $|\Delta p_k| \rightarrow 0$; $\psi(t)$ — вспомогательная вектор-функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению с условием на правом конце

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= -P(p)^* \psi + 2(Q + K(p)^* RK(p))^* x(t), \\ \psi(T) &= -2Q_1 x(T). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Доказательство. Система (2.28) и функционал качества (2.29) представимы как

$$\dot{x} = F(t, p, x(t)), x(0) = x_0, I(p) = \int_0^T \varphi(p, x(t)) dt + g(x(T)),$$

где $F(t, p, x(t))$ — правая часть системы (2.28) и справедливо

$$F(t, p, x(t)) = P(p)x(t) + N(p)f(t),$$

$$\varphi(p, x(t)) = x^*(t)Qx(t) + u^*(t)Ru(t) = x^*(t)x(t) +$$

$$+ x^*(t)K^*(p)RK(p)x(t), g(x(T)) = x^*(T)Q_1e(T) = x^*(T)Q_1x(T).$$

При вариации k -го управляющего параметра $\delta p_k = \tilde{p}_k - p_k$

$$\Delta_{p_k} F = \Delta P x(t) - \Delta N \cdot f(t) = \left(\frac{\partial P}{\partial p_k} x(t) + \frac{\partial N}{\partial p_k} f(t) \right) \cdot \Delta p_k,$$

$$\| \Delta_{p_k} F \|_L = \int_0^T \| \Delta_{p_k} F \| dt = \int_0^T \left\| \left(\frac{\partial P}{\partial p_k} x(t) + \frac{\partial N}{\partial p_k} f(t) \right) \right\| dt \cdot \Delta p_k = c_1 \cdot | \Delta p_k |,$$

$$\Delta_{p_k} \varphi = x^*(t)(K + \Delta K)^* R(K + \Delta K)x(t) - x^*(t)K^* RKx(t) =$$

$$x^*(t)K^*(p)R\Delta Kx(t) + x^*(t)\Delta K^* RKx(t) + x^*(t)\Delta K^* R\Delta Kx(t) =$$

$$= \left(x^*(t)K^* R \frac{\partial K}{\partial p_k} x(t) \right)^* \cdot \Delta p_k + x^*(t) \frac{\partial K^*}{\partial p_k} RKx(t) \cdot \Delta p_k + x^*(t) \frac{\partial K^*}{\partial p_k} R \frac{\partial K}{\partial p_k} x(t) \cdot \Delta p_k^2 =$$

$$= 2x^*(t) \frac{\partial K^*}{\partial p_k} R \frac{\partial K}{\partial p_k} x(t) \cdot \Delta p_k + o(| \Delta p_k |).$$

Частные производные по компонентам вектора $x(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, p, x(t))}{\partial x} &= P(p), \\ \frac{\partial \varphi F(t, p, x(t))}{\partial x} &= 2((L^*QL + K^*RK)^* x(t))^* \\ \frac{\partial(x(T))}{\partial x} &= 2(Q_1^* x(T))^*. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Тогда в соответствии с выражениями для частных производных (2.32) и представлениями вариации функционала [3]:

$$\delta I(u, \Delta u) = \int_0^T (-\psi^* \cdot \Delta_u F + \Delta_u \varphi) dt,$$

$$\Delta I(u, \Delta u) = \delta I(u, \Delta u) + o(\| \Delta_u F \|)$$

полное приращение функционала (2.29) представимо в виде

$$\begin{aligned} I(p, \Delta p_k) &= - \left(\int_0^T \psi^*(t) \left(\frac{\partial P}{\partial p_k} x(t) + \frac{\partial N}{\partial p_k} f(t) \right) - 2x^*(t) \frac{\partial K^*}{\partial p_k} RK(p)x(t) dt \right) \cdot \Delta p_k + \\ &+ o(| \Delta p_k |), \end{aligned} \quad (2.33)$$

где ψ – вспомогательная вектор функция, удовлетворяющая вдоль траекторий системы (2.28) дифференциальному уравнению с условием на правом конце

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= -P(p)^*\psi + 2(Q + K(p)^*RK(p))^*x(t), \\ \psi(T) &= -2Q_1x(T).\end{aligned}\tag{2.34}$$

Утверждение доказано.

Следствие. Компоненты градиента функционала (2.29) по параметрам $p = \{p_k\}$ представимы в виде

$$\frac{\partial I(p)}{\partial p_k} = - \int_0^T \psi^*(t) \frac{\partial P(p)}{\partial p_k} x(t) - 2x^*(t) \frac{\partial K^*}{\partial p_k} RK(p)x(t) dt.\tag{2.35}$$

2.4. Математическая модель исследования и оптимизации ансамбля траекторий

2.4.1. Модель оптимизации ансамбля траекторий

Чтобы оценить качество стабилизации системы (2.28) рассмотрим не одну траекторию, а множество траекторий $\{x(t, x_0)\}$, возмущенных множеством начальных отклонений $\{x_0\}$ Пусть множество начальных отклонений эллипсоид с центром в начале координат. Тогда имеем ансамбль траекторий системы (2.28)

$$\{x(t) \triangleq x(t, x_0) : x_0 C x_0^* \leq 1\},\tag{2.36}$$

где C заданная положительно определенная симметрическая матрица определяющая квадратичную форму эллипсоида начальных возмущений.

Ансамбль движений (2.36) системы (2.28) дает ансамбль переходных процессов стабилизируемых переменных

$$\begin{aligned}\{z(t, x_0), \varphi(t, x_0), \psi(t, x_0), \theta(t, x_0), p(t, x_0), q(t, x_0), r(t, x_0), w(t, x_0) : \\ x_0 C x_0^* \leq 1\}.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Для исследования ансамбля траекторий переменных можно построить оценки сверху для их модулей. Тогда математическая задача может быть сформулирована следующим образом. Необходимо построить оценки

$$S_z(t), S_\varphi(t), S_\psi(t), S_\theta(t), S_p(t), S_q(t), S_r(t), S_w(t)\tag{2.38}$$

для ансамбля движений (2.36) системы (2.28) такие, что

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0, T], \forall x_0 : x_0 C x_0^* &\leq 1, \\
|z(t, x_0)| &\leq \sqrt{S_z(t)}, \\
|\varphi(t, x_0)| &\leq \sqrt{S_\varphi(t)}, \\
|\psi(t, x_0)| &\leq \sqrt{S_\psi(t)}, \\
|\theta(t, x_0)| &\leq \sqrt{S_\theta(t)}, \\
|p(t, x_0)| &\leq \sqrt{S_p(t)}, \\
|q(t, x_0)| &\leq \sqrt{S_q(t)}, \\
|r(t, x_0)| &\leq \sqrt{S_r(t)}, \\
|w(t, x_0)| &\leq \sqrt{S_w(t)}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Оценки управляющих напряжений для ансамбля (2.36) системы (2.28), чтобы учитывать энергетические затраты во всем ансамбле переходных процессов.

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0, T], \forall x_0 : \\
x_0 C x_0^* &\leq 1
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$|U_i(t, x_0)| \leq \sqrt{S_{U_i}(t)}, i = 1..4.$$

Чтобы сформировать оценки контролируемых переменных $x_i(t)$ и управляющих напряжений $U_i(t)$ движений возмущенных множеством используем матрицу $D(t) = D(t, p)$, являющуюся решением уравнения

$$\dot{D} = P(p)D + DP^*(p)D(0) = 0.$$

В [3] показано, что с учетом представления оценок 2.39 - 2.40 справедливо следующее соотношение

$$\begin{aligned}
|x(t)_i^2| &\leq \text{diag}(D(t))_i = S_{x_i}^2 \\
|u(t)_i^2| &\leq \text{diag}(KD(t)K^*)_i = S_{u_i}^2
\end{aligned} \tag{2.41}$$

, где diag – операция взятия вектора, состоящего из элементов матрицы, стоящих на главной диагонали.

Функционал качества может быть представлен в виде

$$I = \int_0^T (\text{diag}(D(t)W_1) + (\text{diag}(KD(t)W_2K^*))) dt \rightarrow \min, \tag{2.42}$$

где W_1, W_2 - симметрические, неотрицательно определенные весовые матрицы.

2.4.2. Теорема о представлении вариации функционала

Аналогично предыдущему параграфу получим представление приращения вариации функционала при вариации параметра $\tilde{p}_k = p_k + \Delta p_k$.

Приведем модель переходного процесса замкнутой системы в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(p)x, \\ x(0) &= x_0, \\ u &= K(p)x(t, x_0, p), \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$I = \int_0^T (\text{diag}(D(t)W_1) + (\text{diag}(KD(t)W_2K^*))) dt \rightarrow \min. \quad (2.44)$$

Представим приращения матриц модели объекта управления в виде

$$\Delta P = \Delta_{p_k} P = \frac{\partial P(p)}{\partial p_k} \Delta p_k, \quad \Delta K = \Delta_{p_k} K = \frac{\partial K(p)}{\partial p_k} \Delta p_k.$$

Символом Δ_{p_k} обозначается приращение выражения при приращении только оптимизируемого параметра p_k . Минимизация функционала происходит в сторону убывания его первой вариации методом наискорейшего спуска.

Утверждение. Полное приращение функционала (2.44) при вариации (линейно от параметров) параметра $\tilde{p}_k = p_k + \Delta p_k$ представимо в виде

$$I(p, \Delta p_k) = -2 \left(\int_0^T \text{diag}(\Theta D(t)) \frac{\partial P^*}{\partial p_k} - \frac{\partial K^*}{\partial p_k} W_2 K(p) D(t) dt \right) \cdot \Delta p_k + o(|\Delta p_k|), \quad (2.45)$$

где $o(|\Delta p_k|)$ — величина более высокого порядка малости чем $|\Delta p_k|$ при $|\Delta p_k| \rightarrow 0$.

$\Theta(t)$ — вспомогательная вектор-функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению с условием на правом конце

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} &= -\Theta P(p) - P^* \Theta + W_1 + K^* W_2 K, \\ \Theta(T) &= 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Доказательство.

Пусть \tilde{p} — вектор оптимизируемых параметров, содержащий \tilde{p}_k , p — начальный вектор. Тогда приращения матриц представимы приращения вектора параметров $\Delta_{p_k} = \tilde{p}_k - p_k$ в виде:

$$\tilde{P} = P(\tilde{p}) = P(p) + \Delta_{p_k} P = P(p) + \frac{\partial P}{\partial p_k} \Delta p_k,$$

$$\tilde{K} = K(\tilde{p}) = K(p) + \Delta_{p_k} K = K(p) + \frac{\partial K}{\partial p_k} \Delta_{p_k},$$

Пусть \tilde{D} и D решения дифференциального уравнения при \tilde{p} и p соответственно, тогда приращение решения при вариации параметра имеет вид:

$$\Delta D = \tilde{D}(t, \tilde{p}) - D(t, p).$$

Матрица ΔD удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\Delta \dot{D} = \tilde{P} \tilde{D} + \tilde{D} \tilde{P}^* - PD - DP^* \quad (2.47)$$

с начальным условием

$$D(0) = 0. \quad (2.48)$$

Причем $\|\Delta D\| = \max \sqrt{\sum d_{i,j}^2}$ при $|p_k| \rightarrow 0$, $d_{i,j}$ – элемент матрицы ΔD с индексами i , j .

Правую часть уравнения (2.47) можно записать в виде:

$$\Delta \dot{D} = P \Delta D + \Delta D P^* + \Delta P D + D \Delta P^* + \Delta P \Delta D + \Delta D \Delta P^*.$$

Тогда приращение функционала при приращение параметра $\Delta p_k = \tilde{p}_k - p_k$ представимо в виде

$$\begin{aligned} \Delta I(p, \Delta p_k) &= I(\tilde{p}) - I(p) = \\ &= \left(\int_0^T \text{diag}(W_1 * \tilde{D}(t) + W_2 \tilde{K} \tilde{D} \tilde{K}^*) \right) dt - \mu^2 \left(\int_0^T \text{diag}(W_1 * D(t) + W_2 K D K^*) \right) dt = \\ &= \left(\int_0^T \text{diag}(W_1 * \Delta D(t) + K^* W_2 K D + 2 \Delta K^* W_2 K D) \right) dt \end{aligned}$$

Рассмотрим вспомогательную матрицу $\Theta(t)$, являющуюся решением матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\Theta P - P^* \Theta + W_1 + K^* W_2 K, \quad (2.49)$$

с условием на правом конце

$$\Theta(T) = 0 \quad (2.50)$$

Очевидно, что равенство (2.49) можно записать как

$$\left(\int_0^T \text{diag}(\Theta \cdot (\Delta \dot{D} - P \Delta D - \Delta D P^* - \Delta P D - D \Delta P^* - \Delta P \Delta D - \Delta D \Delta P^*)) \right) dt = 0. \quad (2.51)$$

Тогда используя выражения (2.49) для Θ

$$\begin{aligned}
\Delta I(p, \Delta p_k) &= \int_0^T (diag(W_1 + K^*W_2)\Delta D + \\
&\quad + 2\Delta K^*W_2KD + \Theta\Delta\dot{D} - \Theta P\Delta D \\
&\quad - \Theta\Delta DP^* - \Theta\Delta DP - D\Delta P^*)dt + o(|\Delta p_k|) = \\
&\left(\int_0^T diag(W_1 + K^*W_2 - \Theta P - P^*\Theta)\Delta D + \Theta\Delta\dot{D} - \Theta\Delta DP - D\Delta P^* \right) dt + \\
&\quad + o(|\Delta p_k|) = \\
&\left(\int_0^T diag(W_1 + K^*W_2 - \Theta P - P^*\Theta)\Delta D + \Theta\Delta\dot{D} - \Theta\Delta DP - D\Delta P^* \right) dt + \\
&\quad + o(|\Delta p_k|) = \\
&\left(\int_0^T diag(\dot{\Theta}\Delta D + \Theta\Delta\dot{D} - \Theta\Delta DP - D\Delta P^* 2\Delta K^*W_2KD) \right) dt + \\
&\quad + o(|\Delta p_k|).
\end{aligned} \tag{2.52}$$

С учетом выражений (2.49) и (2.51) получаем

$$\begin{aligned}
I(p, \Delta p_k) &= \\
&-2 \left(\int_0^T diag(\Theta D(t)) * \frac{\partial P^*}{\partial p_k} - \frac{\partial K^*}{\partial p_k} W_2 K(p) D(t) dt \right) \cdot \Delta p_k + o(|\Delta p_k|),
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Утверждение доказано.

Следствие. Компоненты градиента функционала (2.29) по параметрам $p = \{p_k\}$ представимы в виде

$$\frac{\partial I(p)}{\partial p_k} = -2 \left(\int_0^T diag(\Theta D(t)) \frac{\partial P^*}{\partial p_k} - \frac{\partial K^*}{\partial p_k} W_2 K(p) D(t) dt \right) \cdot \Delta p_k dt. \tag{2.54}$$

2.5. Алгоритм численной оптимизации

Благодаря выражениям (2.35), (2.46) компоненты градиента функционала (2.27) могут быть найдены численно, аналогично [10, 11], и рассчитываются с использованием программы на языке MATLAB.

Управление динамической системой с большим числом параметров может потребовать длительного времени [6]. Применение параллельного подхода — это один из самых подходящих способов сократить время расчета и облегчить работу исследователя. Для реализации параллельного алгоритма параметрической оптимизации на языке MatLab применен оператор цикла `parfor`. Он удобен для использования всех ядер вычислительного комплекса, при этом каждая итерация цикла выполняется параллельно на каждом из доступных ядер. В методе наискорейшего спуска направление движения по каждой из координат не зависит от остальных [27]. Поэтому форму метода можно преобразовать так, чтобы спуск по каждому параметру рассчитывался параллельно остальным:

$$p_k^{i+1} = p_k^i - \lambda \frac{\partial I(p^i)}{\partial p_k},$$

где λ — величина шага в направлении наискорейшего спуска.

Глава 3

Параметрическая оптимизация и результаты вычислительных экспериментов

3.1. Результаты оптимизации отдельного переходного процесса

Для вычислительного эксперимента была проинтегрирована система 2.28 с выбранными начальными данными

$$x_0 = \left(z_0 \quad \varphi_0 \quad \theta_0 \quad \psi_0 \quad w_0 \quad r_0 \quad q_0 \quad p_0 \quad \Omega_{10} \quad \Omega_{20} \quad \Omega_{30} \quad \Omega_{40} \right)^* = \\ = \left(0,050 \quad 0,030 \quad -0,016 \quad 0,018 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \right)^* .$$

Переходные процессы стабилизируемых величин представлены на графике рис.

3.1. В таблице [3.1] даны значения интеграла 2.29.

Таблица 3.1: Численные значения интегрального критерия качества для исходного и оптимизированного регуляторов

Рассматриваемый регулятор	Значение	Точность стабилизации	Энергетические затраты
Исходный	0,6833	0,5488	0,1344
Оптимизированный	0,3683	0,2530	0,1152

Таблица [3.1] со значениями интегрального критерия качества также демонстрирует выигрыш по обоим критериям для оптимизированного регулятора.

На рис. 3.1 и 3.2 представлены графики фазовых переменных в отклонениях от положения равновесия и управляющих напряжений. Фазовые переменные – высота z , углы Эйлера φ , θ , ψ , угловые скорости r , q , p и ускорения w вдоль оси z , управляющие напряжения U_1 , U_2 , U_3 , U_4 .

Как видно из графика 3.1 оптимизированный регулятор выигрывает по скорости стабилизации отклонений от положения равновесия исследуемых величин.

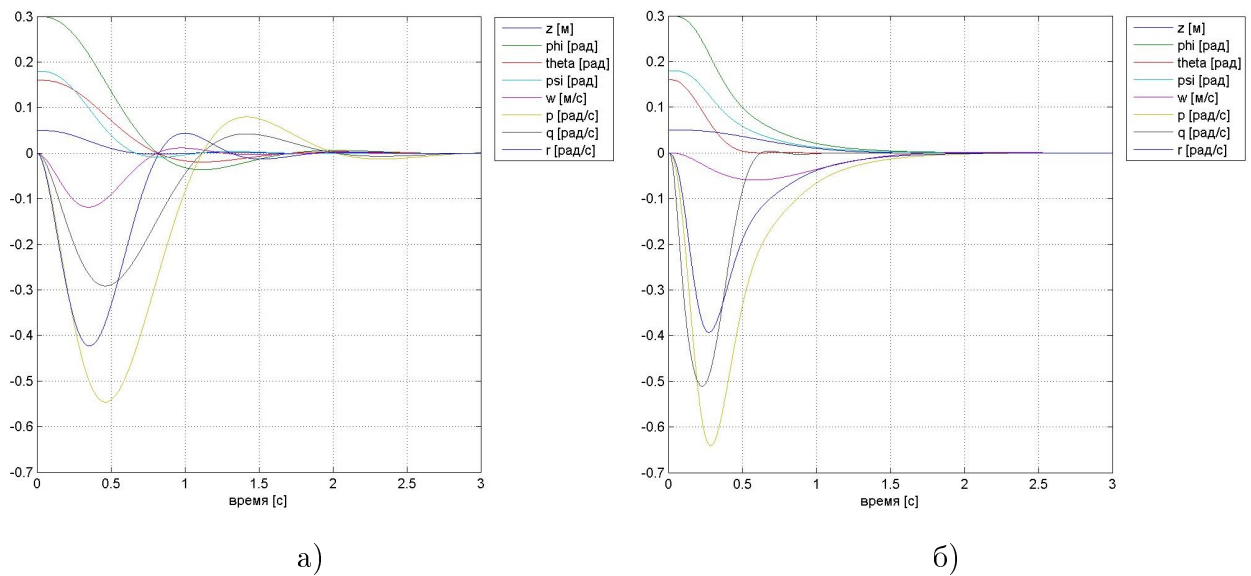
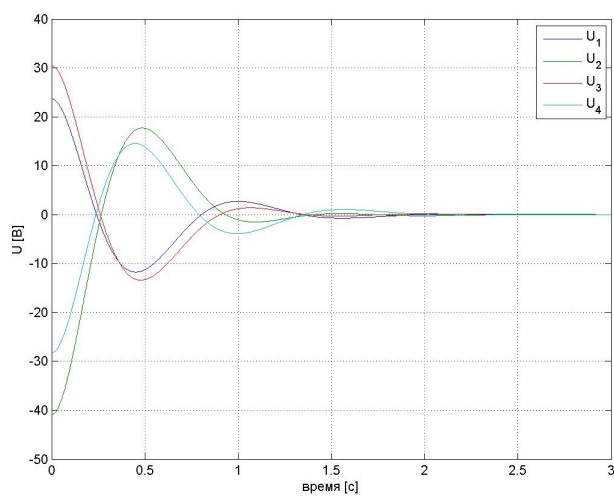
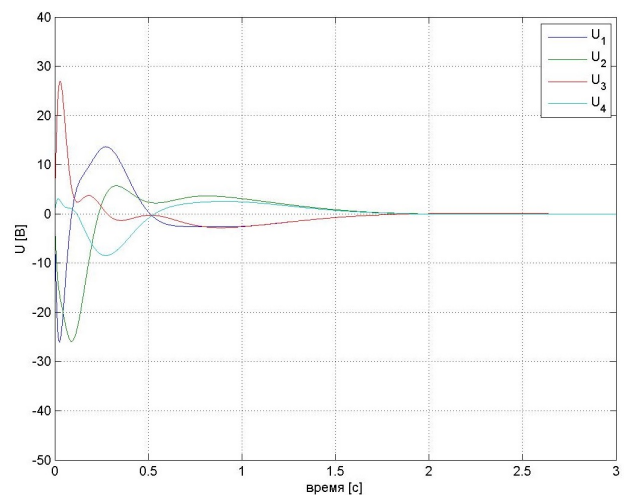


Рис. 3.1: Переходный процесс наблюдаемых величин z , φ , θ , ψ , p , q , r , w с а) исходным б) оптимизированным регулятором



а)



б)

Рис. 3.2: Переходный процесс управляющих напряжений U_1, U_2, U_3, U_4 с а) исходным б) оптимизированным регулятором

3.2. Отклики систем на ступенчатое воздействие

Ниже рассмотрен случай отклика системы на единичное ступенчатое воздействие y_{sr} при нулевых начальных условиях. Данный эксперимент моделирует качество исполнения системой управления команд по быстрому изменению наблюдаемых величин. В физическом смысле данный эксперимент позволяет оценить насколько быстро и точно квадрокоптер выполнит приказ о смене своего положения в пространстве.

Для моделирования отклика на ступенчатое воздействие была проинтегрирована модифицированная система 2.26, где для динамического регулятора 2.25

$$\dot{z} = A_c z + B_c (y - y_{sr}).$$

В качестве вектора ступенчатого воздействия выбран

$$y_{sr} = \begin{pmatrix} z_0 & \varphi_0 & \theta_0 & \psi_0 & w_0 & r_0 & q_0 & p_0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*.$$

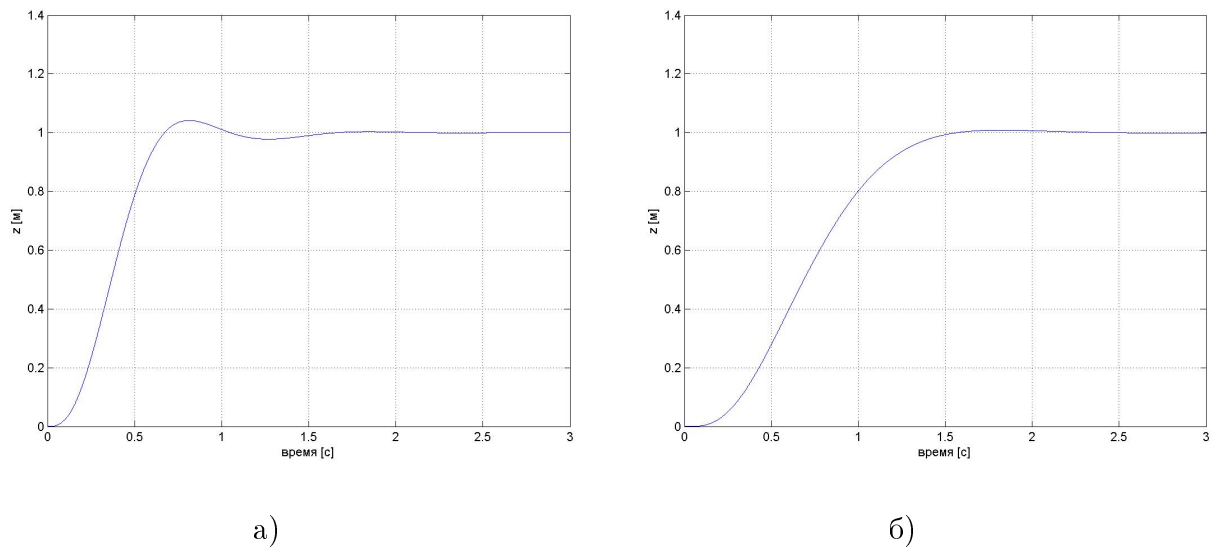
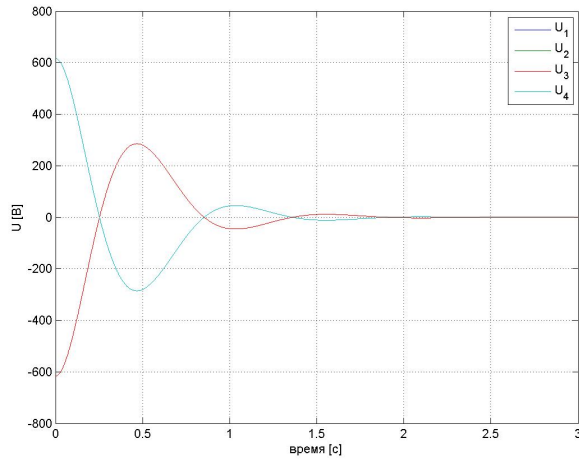
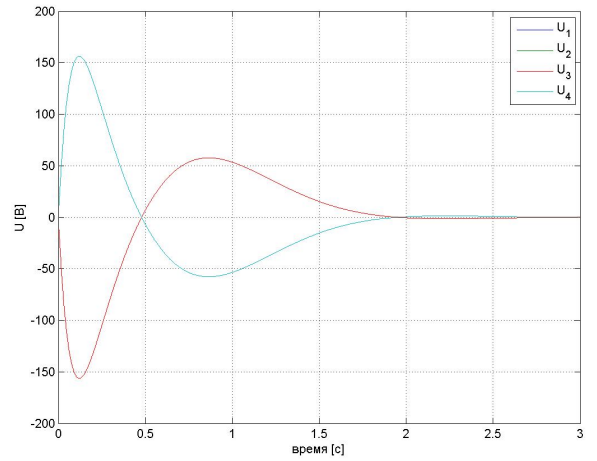


Рис. 3.3: Реакция на ступенчатое воздействие изменения высоты z с а) исходным б) оптимизированным регулятором



а)

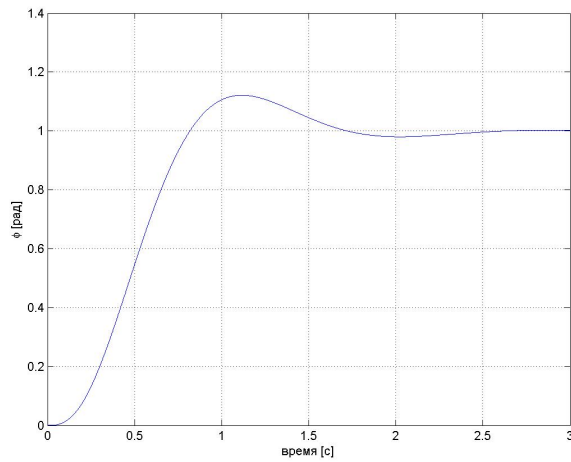


б)

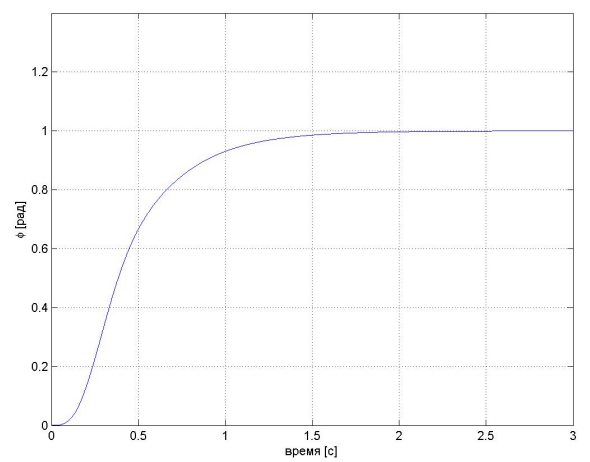
Рис. 3.4: Реакция на ступенчатое воздействие управляющих напряжений U_1, U_2, U_3, U_4 с а) исходным б) оптимизированным регулятором

Далее представлены графики с аналогично выбранными ступенчатыми воздействиями:

$$y_{sr} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

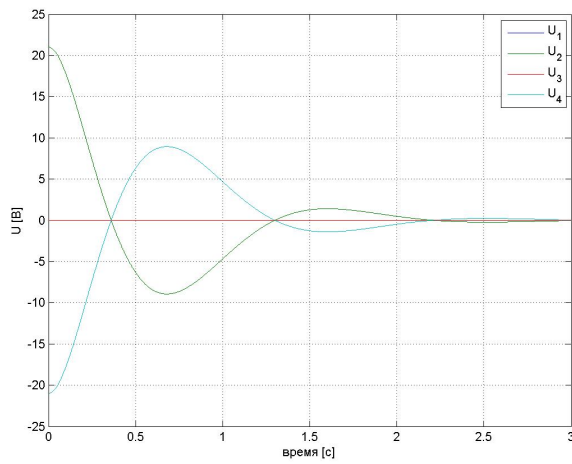


а)

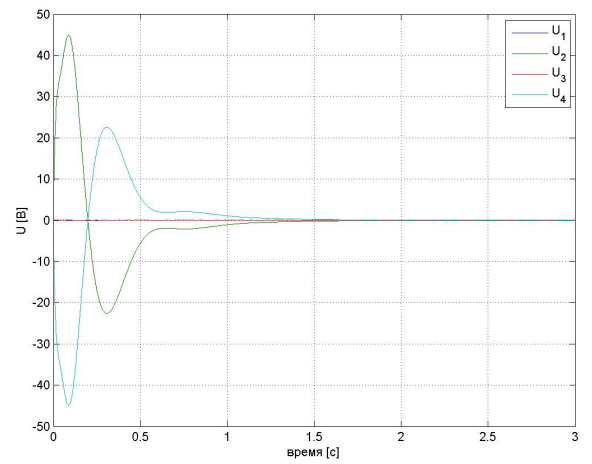


б)

Рис. 3.5: Реакция на ступенчатое воздействие изменения угла крена φ с а) исходным б) оптимизированным регулятором



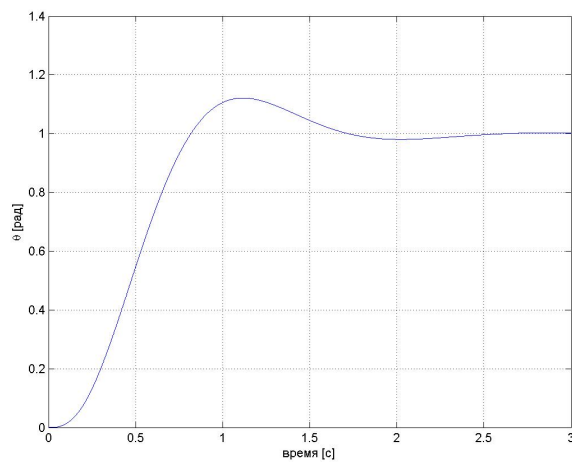
а)



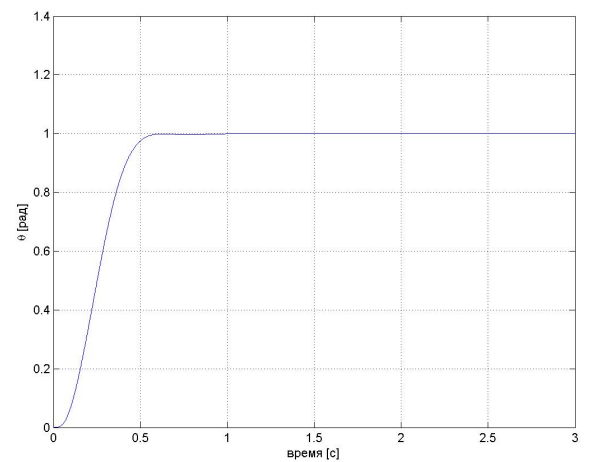
б)

Рис. 3.6: Реакция на ступенчатое воздействие управляющих напряжений U_1 , U_2 , U_3 , U_4 с а) исходным б) оптимизированным регулятором

$$y_{sr} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

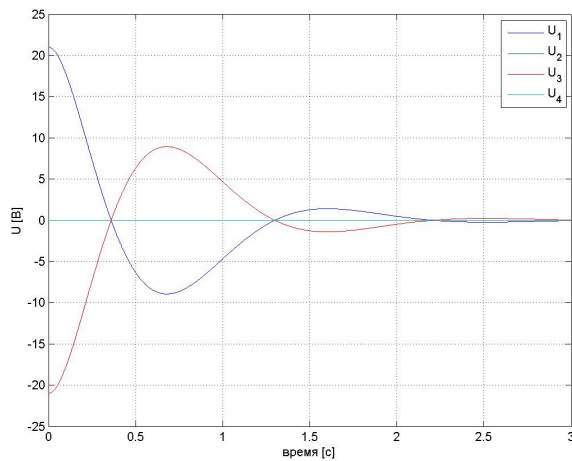


а)

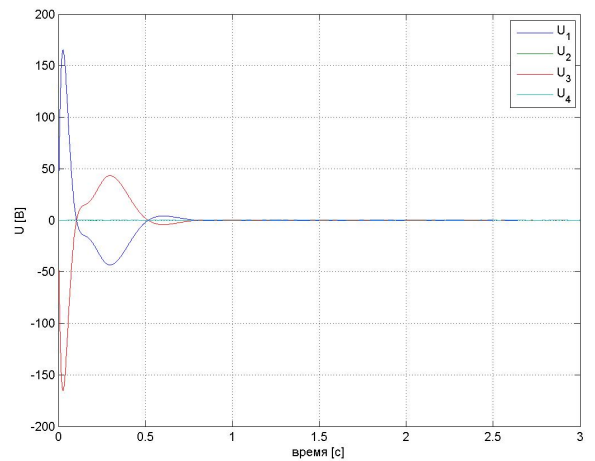


б)

Рис. 3.7: Реакция на ступенчатое воздействие изменения угла тангажа θ с а) исходным б) оптимизированным регулятором



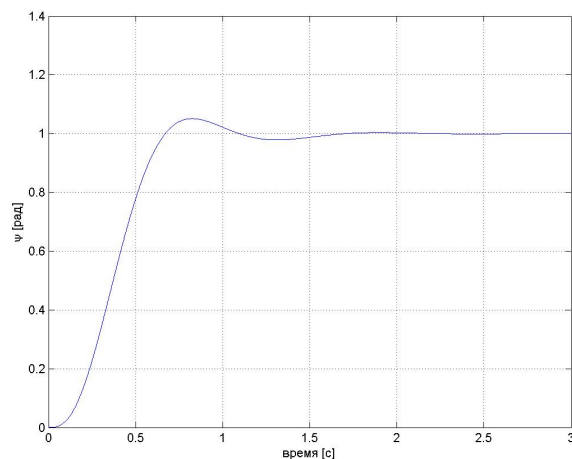
а)



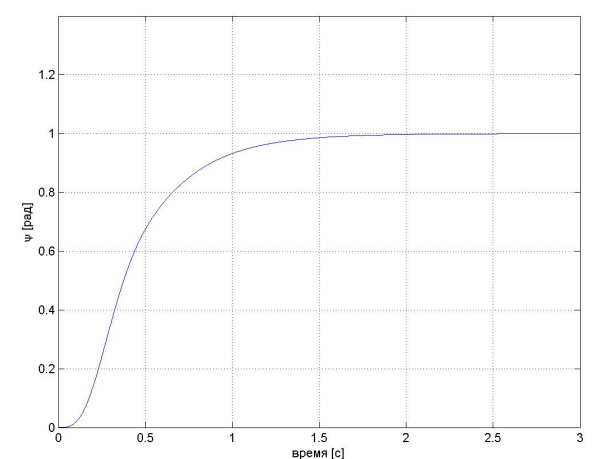
б)

Рис. 3.8: Реакция на ступенчатое воздействие управляющих напряжений U_1, U_2, U_3, U_4 с а) исходным б) оптимизированным регулятором

$$y_{sr} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



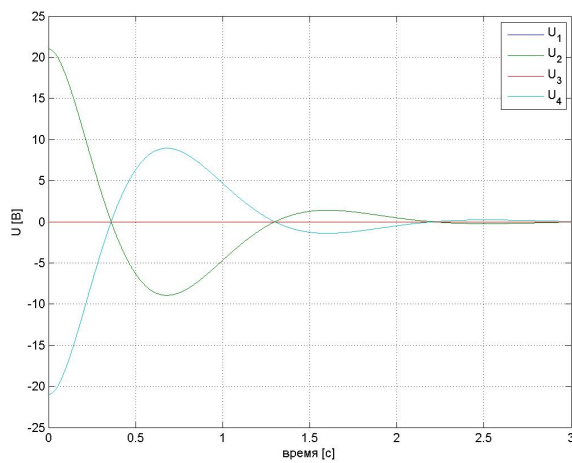
а)



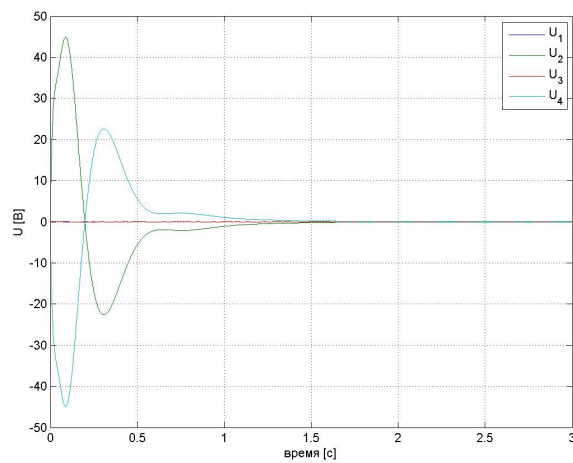
б)

Рис. 3.9: Реакция на ступенчатое воздействие изменения угла рысканья ψ с а) исходным б) оптимизированным регулятором

Графики на рис. 3.3, 3.5, 3.7, 3.9 демонстрируют следующие результаты: система с оптимизированным регулятором переходит в требуемое положение быстрее, чем с исходным; у оптимизированного регулятора, в отличие от исходного, отсутствует перерегулирование.



а)



б)

Рис. 3.10: Реакция на ступенчатое воздействие управляющих напряжений U_1 , U_2 , U_3 , U_4 с а) исходным б) оптимизированным регулятором

3.3. Результаты оптимизации ансамбля траекторий

Для модели ансамбля траекторий качество стабилизации определяют оценки 2.39. Ниже представлены результаты моделирования оценок при множестве возмущений 2.36 с диагональными значениями матрицы начального эллипсоида

$$\begin{aligned} \text{diag}D_0 &= \left(z_0 \quad \varphi_0 \quad \theta_0 \quad \psi_0 \quad w_0 \quad r_0 \quad q_0 \quad p_0 \quad \Omega_{10} \quad \Omega_{20} \quad \Omega_{30} \quad \Omega_{40} \right)^* = \\ &= \left(0,050 \quad 0,030 \quad -0,016 \quad 0,018 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \right)^*. \end{aligned}$$

Результаты даны в графическом и численном виде для верхних оценок модулей управляемых величин $|z|$, $|\varphi|$, $|\theta|$, $|\psi|$, $|p|$, $|q|$, $|r|$, $|w|$ и верхних оценок модулей управляющих напряжений $|U_1|$, $|U_2|$, $|U_3|$, $|U_4|$. Для того, чтобы сохранить на графиках физическую размерность рассмотрим квадратные корни оценок рассматриваемых величин $\sqrt{S_z}$, $\sqrt{S_\varphi}$, $\sqrt{S_\theta}$, $\sqrt{S_\psi}$, $\sqrt{S_p}$, $\sqrt{S_q}$, $\sqrt{S_r}$, $\sqrt{S_w}$ и управлений $\sqrt{S_{U_i}}$, $i = 1..4$.

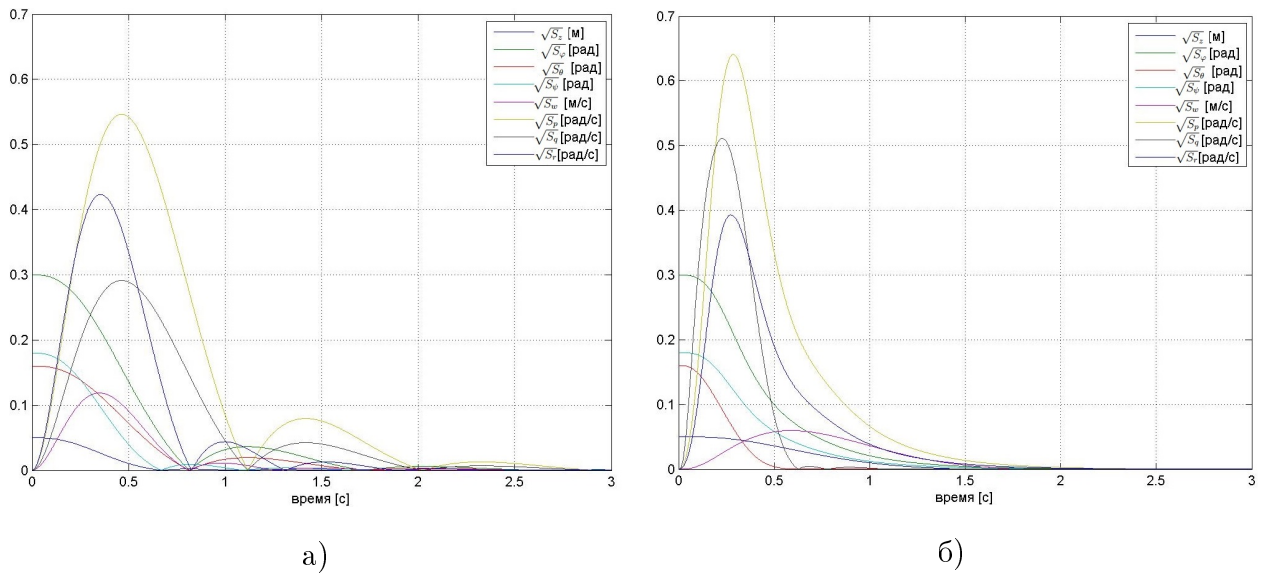


Рис. 3.11: Оценки наблюдаемых величин $\sqrt{S_z}$, $\sqrt{S_\varphi}$, $\sqrt{S_\theta}$, $\sqrt{S_\psi}$, $\sqrt{S_p}$, $\sqrt{S_q}$, $\sqrt{S_r}$, $\sqrt{S_w}$ с а) исходным б) оптимизированным регулятором

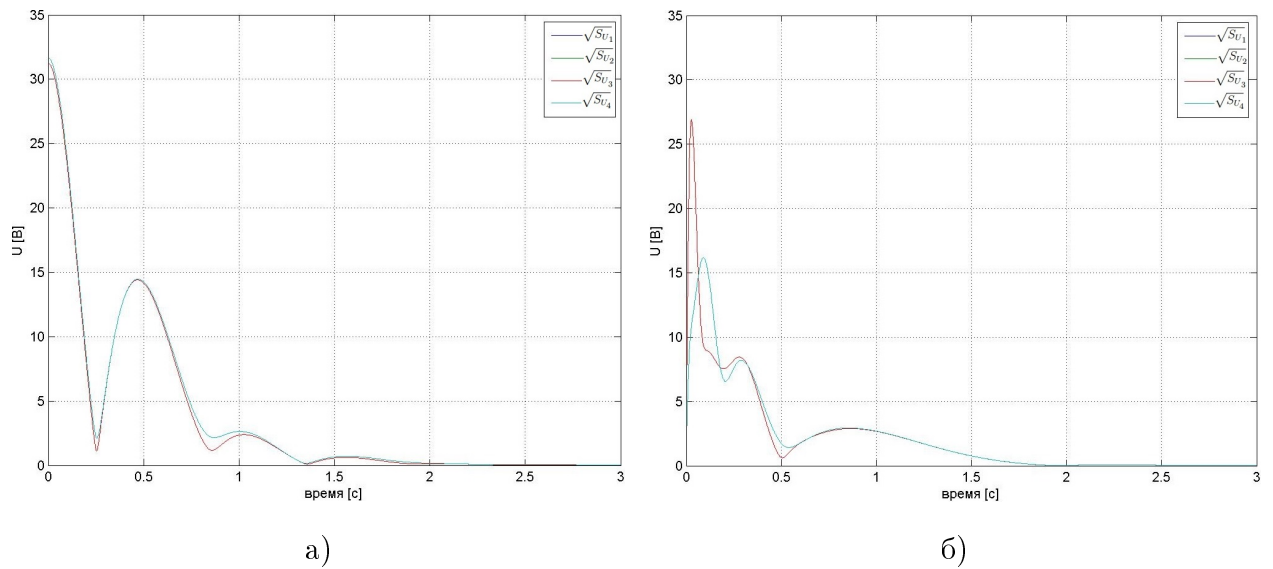


Рис. 3.12: Оценки управляющих напряжений $\sqrt{S_{U_i}}$, $i = 1..4$ с а) исходным б) оптимизированным регулятором

Далее представлены численные результаты моделирования с начальным и оптимизированным регулятором. В таблице [3.2] приведены значения величин интегрального критерия качества 2.44: оптимизированный регулятор выигрывает по энергетически затратам и точности одновременно.

Таблица 3.2: Численные значения интегрального критерия качества для исходного и оптимизированного регуляторов

Рассматриваемый регулятор	Значение	Точность стабилизации	Энергетические затраты
Исходный	684,2225	0,0533	684,1692
Оптимизированный	205,9442	0,0445	205,8997

Выводы

Работа посвящена теме стабилизации полета квадрокоптера. В связи с распространенностью областей применения этих беспилотных летательных аппаратов [40], [41] задача поиска оптимального регулятора продолжает оставаться актуальной.

Обзор литературы показал, что классические ПИД, LQR, LQG регуляторы уже достаточно хорошо изучены, однако параметрическая оптимизация и управление границей ансамбля траекторий впервые выполнено для задачи стабилизации положения квадрокоптера.

С целью раскрытия физической постановки задач стабилизации проведен вывод уравнений динамики и их линеаризация. Построены математические модели в виде линейных стационарных систем, требующих программного управления. Для анализа и синтеза стабилизирующих регуляторов предложены модели оптимизации как отдельной траектории, так и ансамбля траекторий. В работе представлены вариации функционалов вышеуказанных моделей. Предлагаемый в работе подход позволил оптимизировать динамику системы стабилизации положения квадрокоптера. В процессе параметрической оптимизации минимизирован функционал качества, заданный на траекториях системы, возмущенной множеством начальных значений.

Проведенный численный эксперимент показал преимущества, которые дает параметрическая оптимизация. Достигнуто увеличение точности управления при одновременном снижении энергетических затрат. Полученные в результате численного эксперимента регуляторы приводят системы в равновесие быстрее, отклик на единичное ступенчатое воздействие осуществляется без перерегулирования. Для выполнения вычислительного эксперимента была реализована программа на языке MATLAB.

Заключение

Результатами работы являются

- предложенные модели анализа и синтеза систем управления положением квадрокоптера для отдельной траектории и для ансамбля;
- представлены выражения для вариации функционалов данных моделей и на их основе предложена схема алгоритма численной оптимизации;
- в результате численного эксперимента получен регулятор, обеспечивающий системе управления оптимизированные динамические характеристики.

Список литературы

- [1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
- [2] Зубов В. И. Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л.: Судостроение, 1966
- [3] Завадский С. В. Математическое моделирование и параметрическая оптимизация систем стабилизации плазмы в токамаках: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Спб., 2008.
- [4] Завадский С. В. Совместная оптимизация совокупности регуляторов в системах управления плазмой в токамаках // В сборнике: XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 4297–4302.
- [5] Овсянников Д. А. Об оптимизации динамики заряженных частиц в электростатическом поле // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. No 2. С. 54–59.
- [6] Алцыбеев В. В. Об одной задаче оптимизации пучка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. No 1. С. 17–23.
- [7] Ovsyannikov D., Veremey E., Zhabko A. Mathematical methods of plasma vertical stabilization in modern tokamaks // Nuclear Fusion. 2006. Vol. 46. P. 652–657.
- [8] Zavadskiy S., Kiktenko A. Simultaneous parametric optimization of plasma controllers for vertical position and shape // Cybernetics and Physics. 2014. Vol. 3, No 3. P. 147–150.

- [9] Zavadskiy S. Concurrent optimization of plasma shape and vertical position controllers for ITER tokamak // 20th International Workshop on Beam Dynamics and Optimization (BDO). 2014. P. 196–197.
- [10] Zavadskiy S., Ovsyannikov D., Chung, S.-L. Parametric optimization methods for the tokamak plasma control problem // International Journal of Modern Physics A. 2009. Vol. 24, No 5. P. 1040–1047.
- [11] Zavadskiy S., Ovsyannikov D., Sakamoto N. Parametric Optimization for Tokamak Plasma Control System // From physics to control through an emergent view. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series B. 2010. Vol 15. P. 353–358.
- [12] Программируем квадрокоптер на Arduino (часть 1) [Электронный ресурс] // Хаб-рахабр <http://habrahabr.ru/post/227425/> (дата обращения: 15.06.2015).
- [13] Jiinec T. Stabilization and control of unmanned quadcopter : Master's thesis ... Space Engineering - Space Master: 30.05.2011. Prague, 2011.
- [14] Argentim L., Rezende W., Santos P., Aguiar R. PID, LQR and LQR-PID on a Quadcopter Platform // Informatics, Electronics & Vision (ICIEV). 2013 P. 1–6.
- [15] Naidoo Y., Stopforth R. Bright G. Quad-rotor unmanned aerial vehicle helicopter modelling & control //Intech Journal Adv Robotic Sy. 2011. Vol. 8. No. 4. P 139–149.
- [16] Ascorti L. An application of the extended kalman filter to the attitude control of a quadrotor : Master's thesis ... Milan, 2013.
- [17] Sarhang A., Mohammadi A. A New Method for Quadrotor Attitude Estimation Based on Kalman-Bucy Filtering // International Journal of Mechatronics, Electrical and Computer Technology 2014. P. 170–186.
- [18] Dong X-C., Yan F. Design of Attitude Control System for Quadrotor // International Journal of Digital Content Technology and its Applications(JDCTA) 2013. Vol. 7. No 5. P. 350-357.
- [19] Nuchkrua T., Parnichkun M. Identification and Optimal Control of Quadrotor// Thammasat International Journal of Science and Technology 2012. Vol. 17. No. 4. P. 36–53.

- [20] Henriques B. Estimation and Control of a Quadrotor Attitude: Master's thesis ... , Junho: .2011
- [21] Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир , 1977. 650 с.
- [22] Федосов Б. Т. Управление неустойчивыми объектами. Обратный маятник [Электронный ресурс]: http://model.exponenta.ru/bt/bt_152_Inv_Pend_control_1.htm (дата обращения: 17.03.2015).
- [23] Золотов А. В., Разработка интеллектуального алгоритма управления объектами типа перевернутый маятник // Научный вестник Московского Государственного Горного Университета. М. 2012. № 8 (29). С. 48–61
- [24] Федюков А. А. Синтез динамических регуляторов, обеспечивающих стабилизацию систем с ограничениями на фазовые переменные // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 2(1). С. 152–159
- [25] Айзерман М. А. Классическая механика. Изд. 2-е, переработ. М.: Наука, 1980. 367 с.
- [26] Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Часть 1. Изд. 3-е, переработ. М.: Высшая школа, 1966. 439 с.
- [27] Атамуратов А. Ж. Использование методик параллельного программирования при численном решении задач оптимизации методами координатного и градиентного спусков на примере задач гашения колебаний // Молодой ученый. 2014. № 1. С. 13–18.
- [28] Тамасян Г. Ш, Программные управления и наблюдаемость. СПб., 2008. 74 с.
- [29] Praveen V., Pillai A. Modeling and Simulation of Quadcopter using PID Controller // International Journal of Computer Technology and Applications(IJCTA) 2016. Vol. 15. No 9. P. 7151-7158.
- [30] Zaid T., Mohsin J., Saad A. L., Lubva M., Waleed T., Syed O. G. Design and Development of Optimal Control System for Quad Copter UAV // Indian Journal of Science and Technology, 2016. Vol. 9. No 25.
- [31] Tran H., Chiou J. PSO-Based Algorithm Applied to Quadcopter Micro Air Vehicle Controller Design // Micromachines, 2016. Vol. 7. No 168.

- [32] Johansson A., Wallen D. Quadcopter Sensor and filter evaluation : Bachelor's thesis ... Stockholm, 2016.
- [33] Wang Y., Ramirez-Jaime A., Xu F., Puig V. Nonlinear Model Predictive Control with Constraint Satisfaction for a Quadcopter // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series, 2017. Vol. 783.
- [34] Elliott S. T., Carr T. W. Robust Nonlinear Control of BLDC Motor in Quadcopter Applications // American Journal of Undergraduate Research, 2016. Vol. 12. Issue 2
- [35] Kyaw M. T, Gavrilov A. Designing and Modeling of Quadcopter Control System Using L1 Adaptive Control // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research , 2017. Vol. 6. No 2
- [36] Anjum A. S. K. , Sufian R. A., Abbas Z., Qureshi I. M. Attitude Control of Quadcopter Using Adaptive Neuro Fuzzy Control// International Journal of Hybrid Information Technolo , 2016. Vol. 9. No 4
- [37] Chanuan U., Chart R. Attitude Control of Quadcopter Using Fuzzy PD+I Controller// International Journal of the Computer, the Internet and Management , 2016. Vol. 24. No 2 P. 69–74.
- [38] Yoo H. H., Choi B. J. Design of Vectored Sum Defuzzification Based Fuzzy Logic System for Hovering Control of Quad-Copter// International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems , 2016. Vol. 16. No 4 P. 69–74.
- [39] Santoso F., Garratt M., Anavatti S. Fuzzy System Identification for the Dynamics of the AR.Drone Quadcopter // Papers of Australasian Conference on Robotics and Automation, 2016. Vol. 16. No 4 P. 69–74.
- [40] It Came From Above: Why Copters Are The Next Big Thing In Robotics [Электронный ресурс]: <http://readwrite.com/2013/10/29/quadcopters-robotics/> (дата обращения: 01.05.2017).
- [41] 10 Incredibly interesting uses for Drones [Электронный ресурс]: <https://dronebuff.com/uses-for-drones/> (дата обращения: 01.05.2017).