

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Суратов Владислав Алексеевич

Магистерская диссертация

Моделирование изгиба заземленной пластинки
методом начальных функций

Направление 010402

Прикладная математика и информатика

Математическое моделирование в задачах естествознания

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Матросов А. В.

Санкт-Петербург
2017

Содержание

Введение	3
Постановка задачи	4
Обзор литературы	6
Глава 1. Метод начальных функций в задаче изгиба пластинки	8
1.1 Метод начальных функций	9
1.2 Частное решение	11
1.3 Общее решение однородного уравнения	12
Глава 2. Моделирование изгиба жестко заземленной пластинки	16
2.1 Удовлетворение граничным условиям	16
2.2 Поиск разрешающей функции $\varphi(\eta)$	18
2.3 Поиск частного решения неоднородной системы	19
2.4 Напряженно-деформированное состояние пластинки	19
2.5 Удовлетворение оставшимся граничным условиям	23
Глава 3. Вычислительный эксперимент	26
3.1 Процесс моделирования изгиба пластинки	26
3.2 Основные параметры модели	27
3.3 Оценка адекватности построенной модели	28
3.4 Оценка точности построенного решения	33
3.5 Сравнение построенных алгоритмов приближения	35
3.6 Результаты моделирования изгиба пластинки	39
Выводы	52
Заключение	54
Список литературы	55
Приложение А	59
Приложение В	63
Приложение С	64
Приложение D	66
Приложение E	68
Приложение F	71

Введение

Задачи прикладной теории упругости, в частности, о нагруженных пластинках с различными условиями закрепления и условиями нагрузки: жесткое защемление всех сторон, защемление только двух сторон, консольные пластинки (с защемлением только одной стороны), шарнирно-опертые пластинки, с равномерной нагрузкой, с сосредоточенной силой и др., не теряют актуальности по сей день [1–7]. Результаты исследований и расчетов активно применяются в строительной, судо-, авиа- и ракетостроительной отраслях, машиностроении и др.

В данной работе рассматривается одна из задач прикладной теории упругости: моделирование изгиба равномерно нагруженной тонкой жестко защемленной прямоугольной изотропной пластинки. Задача об изгибе такой пластинки представляет из себя двумерную краевую задачу, не имеющую точного аналитического решения, в связи с чем большую популярность приобретают не только численные решения, но и приближенные аналитические.

Процесс моделирования изгиба в данном исследовании основан на известном методе начальных функций, предложенным А. И. Лурье [8, 9] и В. З. Власовым [10], с использованием операторного исчисления, представленного В. А. Агаревым в [11]. Метод начальных функций позволяет построить аналитическое решение задачи, сводящееся к решению системы линейных алгебраических уравнений бесконечной размерности. Поэтому в данной работе также будут предложены и подробно рассмотрены три алгоритма (в том числе будут приведены результаты проведенного моделирования), позволяющих построить приближенно-аналитическое решение поставленной задачи путем ограничения размерности такой системы.

Постановка задачи

Рассматривается жестко заделанная по контуру тонкая прямоугольная изотропная пластинка со сторонами a и b , толщины δ на которую воздействует равномерно распределенная поперечная нагрузка интенсивности q (Рис. 1).

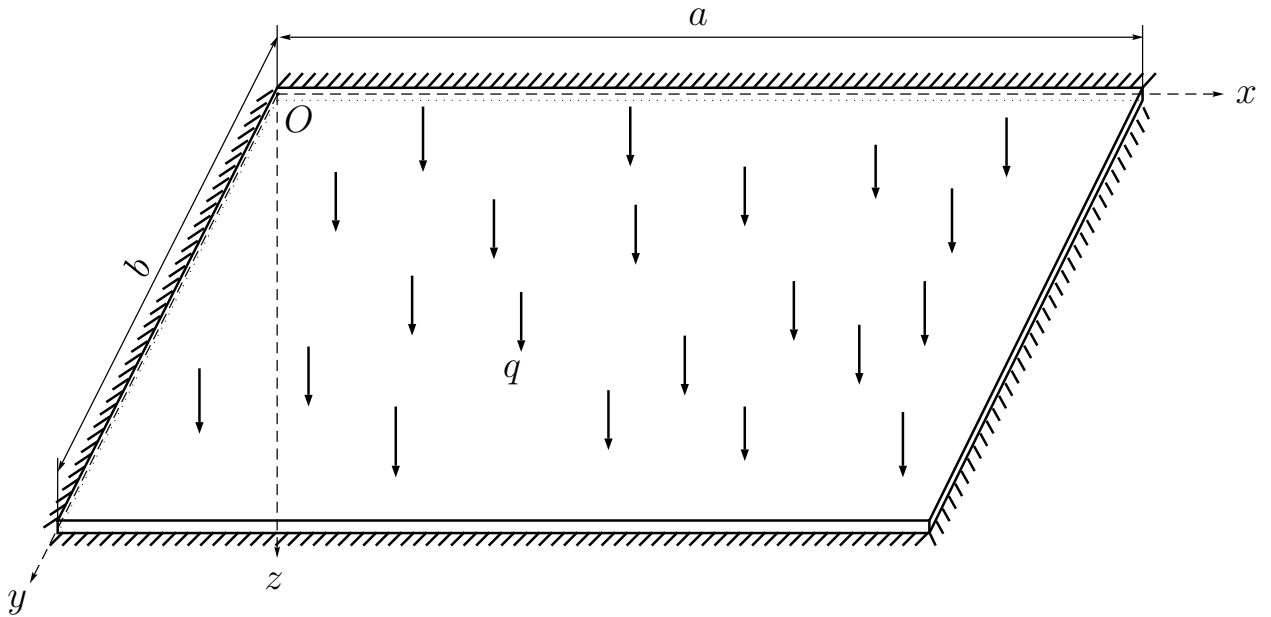


Рис. 1. Защемленная пластинка

Математическая модель прямоугольной пластинки представляет собой дифференциальное уравнение четвертого порядка в частных производных:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

где $w(x, y)$ — прогиб пластинки, а цилиндрическая жесткость пластины D вычисляется по формуле:

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1 - \mu^2)},$$

в которой E — модуль Юнга, а μ — коэффициент Пуассона: коэффициенты, характеризующие упругие свойства изотропной пластинки.

Защемление прямоугольной пластины по контуру выражается граничными условиями:

$$\begin{aligned}
w(x, y)|_{x=0} &= w(x, y)|_{x=a} = w(x, y)|_{y=0} = w(x, y)|_{y=b} = 0, \\
\frac{\partial}{\partial x} w(x, y) \Big|_{x=0} &= \frac{\partial}{\partial x} w(x, y) \Big|_{x=a} = 0, \\
\frac{\partial}{\partial y} w(x, y) \Big|_{y=0} &= \frac{\partial}{\partial y} w(x, y) \Big|_{y=b} = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Напряженно-деформированное состояние пластинки описывается компонентами:

$$\begin{aligned}
\theta_x &= \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}, \\
M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad V_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\
M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad V_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right),
\end{aligned} \tag{3}$$

где θ_x и θ_y — углы поворота, M_x и M_y — изгибающие моменты, V_x и V_y — обобщенные перерезывающие силы в сечениях $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ соответственно.

Стоит отметить, что данная двумерная краевая задача не имеет точного аналитического решения. Подходы к ее решению будут подробно рассмотрены в разделе «Обзор литературы».

Необходимо произвести моделирование рассматриваемой жестко заземленной по контуру тонкой прямоугольной пластинки, используя метод начальных функций, построить приближенно-аналитическое решение рассматриваемой двумерной краевой задачи, определить все компоненты напряженно-деформированного состояния пластинки, оценить полученное решение относительно других известных методов решения поставленной задачи, а также провести вычислительные эксперименты, позволяющие сравнить методы, используемые для приближения.

Обзор литературы

Решение дифференциального уравнения четвертого порядка в частных производных (уравнение Софи Жермен), описывающего изгиб пластинки, а также первые численные результаты по расчету прямоугольных жестко защемленных пластинок были представлены Б. М. Кояловичем в [12]. Автор свел решение двумерной краевой задачи к системе алгебраических уравнений бесконечной размерности, предложил для ее приближенного решения алгоритм, а также математически обосновал его сходимость [12, 13].

И. Г. Бубнов [14] в 1914 составил обширные таблицы рассчитанных прогибов и моментов для равномерно нагруженных пластинок с защемленными краями, используя для решения многочлен четвертой степени с двумя свободными коэффициентами и два ряда Фурье по двум переменным x и y , удерживая 13 членов в рядах. Б. Г. Галеркин [15] решал эту задачу, удерживая всего три члена в рядах для удовлетворения граничных условий. Пластины, защемленные по контуру, также рассматривали С. П. Тимошенко [16], М. В. Сухотерин [17], Я. С. Уфлянд [18], С. А. Лурье [19], П. Ф. Папкович [20] и др.

В 1938 г. на V Международном конгрессе по прикладной механике С. П. Тимошенко предложил в наиболее общем виде (для различных условий закрепления и нагружения) приближенный метод решения. А затем в [16] автором получены значения прогибов и моментов в различных точках пластины.

Я. С. Уфлянд [18] рассматривал метод интегральных преобразований и применял его для решения задачи об изогнутой защемленной по всем краям пластинке под равномерной нагрузкой. С. А. Лурье [19] построил решение задачи в рядах по системе однородных решений.

Также для решения этой задачи пользовались вариационными методами [21]. Д. П. Голоскоков и П. Г. Голоскоков [22] решили задачу приближенным вариационным методом, модифицировав метод Л. В. Канторовича [23].

V. V. Meleshko рассматривает устойчивость прямоугольных пластинок [24] и сравнивает известные приближенно-аналитические

методы с численными для решения задачи о жестко защемленной пластинке [25]. М. В. Сухотерин решил задачу об изгибе пластинке используя метод суперпозиции исправляющих функций [17].

Разработанный А. И. Лурье [8, 9] и В. З. Власовым [10] метод начальных функций применялся ими для решения задачи об изгибе пластинок. Затем В. А. Агарев [11], описав операторное исчисление, применил его к решению этой задачи используя метод начальных функций в основе своей работы. Методом начальных функций для решения этой задачи (и других задач с пластинками) также пользовались В. В. Власов [26], С. М. Галилеев и А. В. Матросов [27–29], А. Ю. Ушаков и М. Г. Ванюшенков [1, 2], Ю. Э. Волошановская [3]. А. В. Матросов изучил вычислительную устойчивость метода начальных функций [30] и сходимости степенных рядов в этом методе [31], и рассматривал другой приближенный аналитический метод — метод декомпозиций для решения этой и других задач [32].

Глава 1

Метод начальных функций в задаче изгиба пластинки

В этой главе будет рассмотрено моделирование изгиба жестко заделанной тонкой (толщины δ) прямоугольной в плане пластинки методом начальных функций, однако сначала будут сделаны некоторые допущения, связанные с симметричностью воздействующей на пластинку силы интенсивности q и защемления и введена соответствующая система координат.

В силу симметрии нагрузки и нулевых граничных условий для жестко защемленной по контуру пластинки можно рассматривать не всю пластинку целиком, а только четверть пластинки $OABC$ (Рис. 2). Для этого введем систему координат Oxy так, чтобы центр системы координат совпал с центром пластинки O , а оси выберем, как показано на Рис. 2.

Введем безразмерные координаты:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \left(\lambda = \frac{b}{a} \right).$$

Тогда дифференциальное уравнение четвертого порядка в частных производных (1) — математическая модель жестко заделанной пластины, — будет преобразовано в дифференциальное уравнение (4):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = \frac{qa^4}{D}, \quad (4)$$

а компоненты напряженно-деформированного состояния (3) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \eta}, & \theta_y &= \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi}, \\ M_x &= -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right), & V_x &= -\frac{D}{a^3} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} \right), \\ M_y &= -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right), & V_y &= -\frac{D}{a^3} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial \eta \partial \xi^2} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

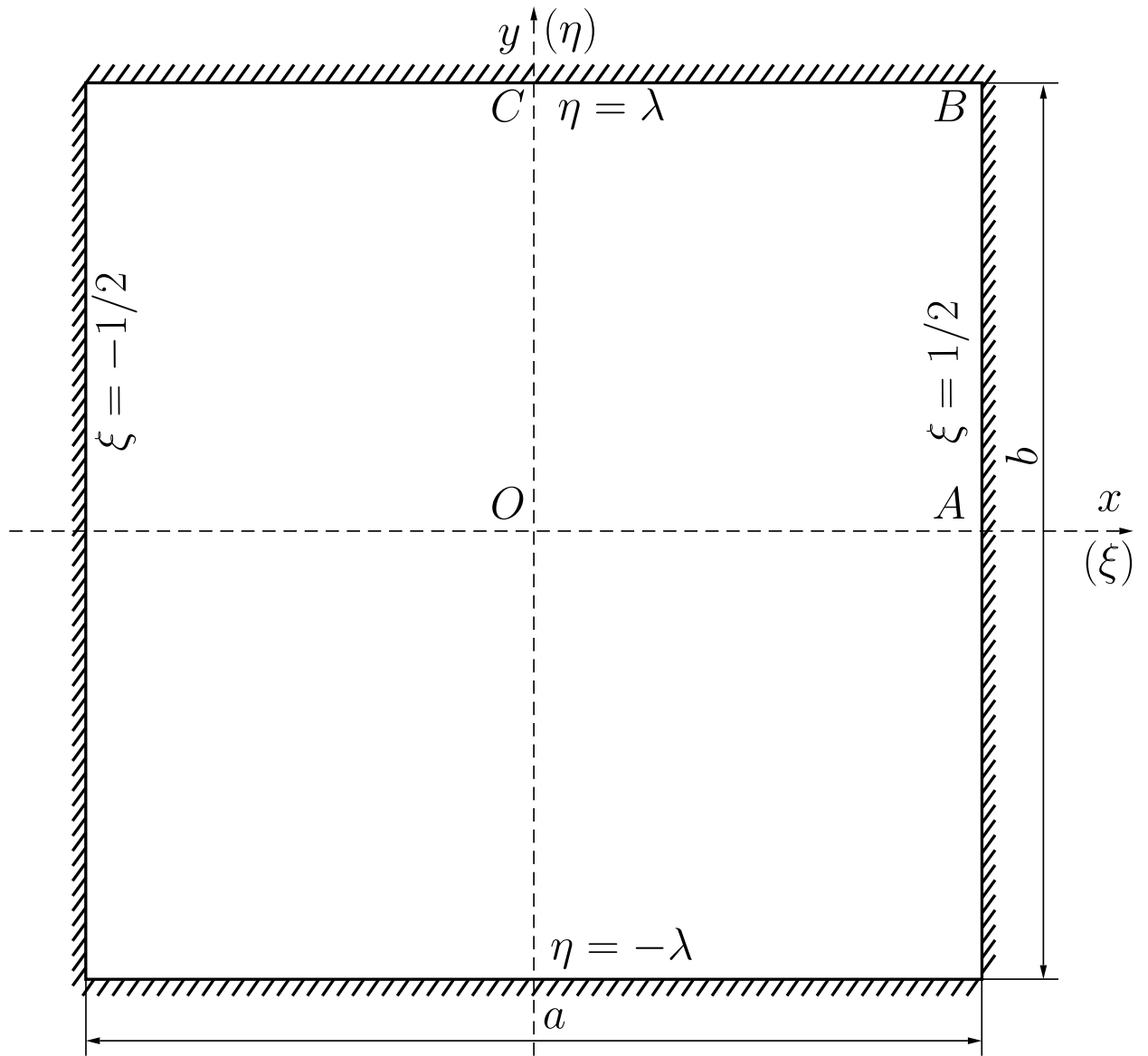


Рис. 2. Защемленная пластинка в плане

Граничные условия (2) в таком случае будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta)|_{\eta=\frac{\lambda}{2}} &= w(x, y)|_{\xi=\frac{1}{2}} = 0, \\
 \theta_x(\xi, \eta)|_{\eta=0, \frac{\lambda}{2}} &= \theta_y(\xi, \eta)|_{\xi=0, \frac{1}{2}} = 0, \\
 V_x(x, y)|_{\xi=0} &= V_y(x, y)|_{\eta=0} = 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

1.1 Метод начальных функций

Метод начальных функций является обобщением метода начальных параметров для двумерных краевых задач теории упругости. Все компоненты напряженно-деформированного состояния представляются в виде линейной комбинации начальных функций заданных на выбранной

начальной линии. В соответствии с идеологией метода, дифференциальное уравнение в частных производных (4) рассматривается как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменной ξ :

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 2\beta^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \beta^4 w = \frac{qa^4}{D}, \quad (7)$$

а оператор дифференцирования по второй переменной η принимается за символьную константу β :

$$\beta = \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (8)$$

Определим компоненты напряженно-деформированного состояния w, θ_x, M_x, V_x на начальной линии $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} W^0 &= \frac{1}{a} w(0, \eta), & \theta^0 &= \theta_y(0, \eta), \\ M^0 &= \frac{a}{D} M_x(0, \eta), & V^0 &= \frac{a^2}{D} V_x(0, \eta). \end{aligned} \quad (9)$$

Компоненты из (9) называются начальными функциями и могут задаваться независимо друг от друга на начальной линии.

Выразим неизвестную функцию прогиба пластинки через выбранные начальные функции в операторном виде:

$$w(\xi, \eta) = a \{L_{ww} W^0 + L_{w\theta} \theta^0 + L_{wM} M^0 + L_{wV} V^0\} + w_{part}, \quad (10)$$

где $L_{ww}, L_{w\theta}, L_{wM}, L_{wV}$ — неизвестные операторы-функции, зависящие от оператора дифференцирования β и переменной ξ .

Выпишем однородное уравнение, соответствующее (7):

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 2\beta^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \beta^4 w = 0. \quad (11)$$

и общее решение этого однородного уравнения в тех же обозначениях:

$$w(\xi, \eta) = a \{L_{ww} W^0 + L_{w\theta} \theta^0 + L_{wM} M^0 + L_{wV} V^0\}, \quad (12)$$

Функция прогиба (10) — решение уравнения (7), представленное в виде суммы частного решения w_{part} неоднородного уравнения (7) и общего решения (12) однородного уравнения (11).

Выразим остальные компоненты напряженно-деформированного

состояния через функцию прогиба (10), подставив ее в (5):

$$\begin{aligned}
\theta_x(\xi, \eta) &= L_{\theta_x w} W^0 + L_{\theta_x \theta} \theta^0 + L_{\theta_x M} M^0 + L_{\theta_x V} V^0 + \theta_{x,part}, \\
\theta_y(\xi, \eta) &= L_{\theta_y w} W^0 + L_{\theta_y \theta} \theta^0 + L_{\theta_y M} M^0 + L_{\theta_y V} V^0 + \theta_{y,part}, \\
M_x(\xi, \eta) &= \frac{D}{a} \{L_{M_x w} W^0 + L_{M_x \theta} \theta^0 + L_{M_x M} M^0 + L_{M_x V} V^0\} + M_{x,part}, \\
M_y(\xi, \eta) &= \frac{D}{a} \{L_{M_y w} W^0 + L_{M_y \theta} \theta^0 + L_{M_y M} M^0 + L_{M_y V} V^0\} + M_{y,part}, \\
V_x(\xi, \eta) &= \frac{D}{a^2} \{L_{V_x w} W^0 + L_{V_x \theta} \theta^0 + L_{V_x M} M^0 + L_{V_x V} V^0\} + V_{x,part}, \\
V_y(\xi, \eta) &= \frac{D}{a^2} \{L_{V_y w} W^0 + L_{V_y \theta} \theta^0 + L_{V_y M} M^0 + L_{V_y V} V^0\} + V_{y,part},
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{\theta_x^*} &= \beta L_{w^*}, \quad L_{M_x^*} = - \left(\mu \frac{d^2}{d\xi^2} + \beta^2 \right) L_{w^*}, \\
L_{\theta_y^*} &= \frac{dL_{w^*}}{d\xi}, \quad L_{M_y^*} = - \left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \mu \beta^2 \right) L_{w^*}, \\
L_{V_x^*} &= - \left[\frac{d^3}{d\xi^3} + (2 - \mu) \beta^2 \frac{d}{d\xi} \right] L_{w^*}, \\
L_{V_y^*} &= - \left[\beta^3 + (2 - \mu) \beta \frac{d^2}{d\xi^2} \right] L_{w^*}, \quad * \in (w, \theta, M, V).
\end{aligned} \tag{14}$$

1.2 Частное решение

Частное решение w_{part} для неоднородного уравнения (7) должно быть таким, чтобы вычисляемые через него компоненты напряженно-деформированного состояния на начальной линии равнялись нулю. Для равномерно распределенной нагрузки его можно взять в виде:

$$w_{part} = \frac{qa^4}{24D} \xi^4, \tag{15}$$

а $\theta_{x,part}$, $\theta_{y,part}$, $M_{x,part}$, $M_{y,part}$, $V_{x,part}$ и $V_{y,part}$ из (13) получаются путем подстановки (15) в (5):

$$\begin{aligned}
\theta_{y,part} &= \frac{qa^3}{6D} \xi^3, \quad M_{x,part} = -\mu \frac{qa^2}{2D} \xi^2, \quad M_{y,part} = -\frac{qa^2}{2D} \xi^2, \\
V_{x,part} &= -qa\xi, \quad \theta_{x,part} = V_{y,part} = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

1.3 Общее решение однородного уравнения

Теперь необходимо найти общее решение (12) однородного уравнения (11). Подставим однородное решение (12) в (11) и сгруппируем члены при одинаковых начальных функциях. Получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d^4 L_{ww}(\xi, \beta)}{d\xi^4} + 2\beta^2 \frac{d^2 L_{ww}(\xi, \beta)}{d\xi^2} + \beta^4 L_{ww}(\xi, \beta) \right) W^0 + \\
& + \left(\frac{d^4 L_{w\theta}(\xi, \beta)}{d\xi^4} + 2\beta^2 \frac{d^2 L_{w\theta}(\xi, \beta)}{d\xi^2} + \beta^4 L_{w\theta}(\xi, \beta) \right) \theta_x^0 + \\
& + \left(\frac{d^4 L_{wM}(\xi, \beta)}{d\xi^4} + 2\beta^2 \frac{d^2 L_{wM}(\xi, \beta)}{d\xi^2} + \beta^4 L_{wM}(\xi, \beta) \right) M_x^0 + \\
& + \left(\frac{d^4 L_{wV}(\xi, \beta)}{d\xi^4} + 2\beta^2 \frac{d^2 L_{wV}(\xi, \beta)}{d\xi^2} + \beta^4 L_{wV}(\xi, \beta) \right) V_x^0 = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

В силу независимости начальных функций, из (17) получаем одно обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения четырех неизвестных операторов-функций $L_{w*}(\xi, \beta)$, где $* \in (w, \theta, M, V)$:

$$\frac{d^4 L_{w*}(\xi, \beta)}{d\xi^4} + 2\beta^2 \frac{d^2 L_{w*}(\xi, \beta)}{d\xi^2} + \beta^4 L_{w*} = 0. \tag{18}$$

Начальные условия для уравнений (18) можно получить путем вычисления компонентов напряженно-деформированного состояния (12) и (13) при $\xi = 0$. Тогда, в силу независимости выбранных начальных функций, начальные условия будут выглядеть следующим образом.

Для $L_{ww}(\xi, \beta)$:

$$\begin{aligned}
L_{ww}(\xi, \beta)|_{\xi=0} &= \frac{1}{a}, \quad \frac{d}{d\xi} L_{ww}(\xi, \beta)|_{\xi=0} = 0, \\
\frac{d^2}{d\xi^2} L_{ww}(\xi, \beta)|_{\xi=0} &= -\mu\beta^2 \frac{1}{a}, \quad \frac{d^3}{d\xi^3} L_{ww}(\xi, \beta)|_{\xi=0} = 0,
\end{aligned} \tag{19}$$

Для $L_{w\theta}(\xi, \beta)$:

$$\begin{aligned}
L_{w\theta}(\xi, \beta)|_{\xi=0} &= 0, \quad \frac{d}{d\xi} L_{w\theta}(\xi, \beta)|_{\xi=0} = 1, \\
\frac{d^2}{d\xi^2} L_{w\theta}(\xi, \beta)|_{\xi=0} &= 0, \quad \frac{d^3}{d\xi^3} L_{w\theta}(\xi, \beta)|_{\xi=0} = -(2 - \mu)\beta^2,
\end{aligned} \tag{20}$$

Для $L_{wM}(\xi, \beta)$:

$$\begin{aligned} L_{wM}(\xi, \beta)|_{\xi=0} &= 0, & \frac{d}{d\xi} L_{wM}(\xi, \beta)|_{\xi=0} &= 0, \\ \frac{d^2}{d\xi^2} L_{wM}(\xi, \beta)|_{\xi=0} &= -\frac{a}{D}, & \frac{d^3}{d\xi^3} L_{wM}(\xi, \beta)|_{\xi=0} &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

Для $L_{wV}(\xi, \beta)$:

$$\begin{aligned} L_{wV}(\xi, \beta)|_{\xi=0} &= 0, & \frac{d}{d\xi} L_{wV}(\xi, \beta)|_{\xi=0} &= 0, \\ \frac{d^2}{d\xi^2} L_{wV}(\xi, \beta)|_{\xi=0} &= 0, & \frac{d^3}{d\xi^3} L_{wV}(\xi, \beta)|_{\xi=0} &= -\frac{a^2}{D}, \end{aligned} \quad (22)$$

Решив четыре задачи Коши (18)–(22), получаем следующий вид операторов-функций $L_{w*}(\xi, \beta)$, $* \in (w, \theta, M, V)$:

$$\begin{aligned} L_{ww}(\xi, \beta) &= \frac{1-\mu}{2} \beta \xi \sin(\beta \xi) + \cos(\beta \xi), \\ L_{w\theta}(\xi, \beta) &= \frac{1-\mu}{2} \xi \cos(\beta \xi) + \frac{1+\mu}{2} \frac{\sin(\beta \xi)}{\beta}, \\ L_{wM}(\xi, \beta) &= -\frac{1}{2} \xi \frac{\sin(\beta \xi)}{\beta}, \\ L_{wV}(\xi, \beta) &= \frac{1}{2} \xi \frac{\cos(\beta \xi)}{\beta^2} - \frac{1}{2} \frac{\sin(\beta \xi)}{\beta^3}. \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда, подставляя найденные операторы-функции (23) в (12), получаем общее решение однородного уравнения (11).

Чтобы найти остальные неизвестные операторы-функции из (13), необходимо подставить найденные операторы-функции (23) в (14). Тогда остальные операторы-функции будут выглядеть следующим образом.

Для $\theta_x(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned} L_{\theta_x w}(\xi, \beta) &= \frac{1-\mu}{2} \beta^2 \xi \sin(\beta \xi) + \beta \cos(\beta \xi), \\ L_{\theta_x \theta}(\xi, \beta) &= \frac{1-\mu}{2} \beta \xi \cos(\beta \xi) + \frac{1+\mu}{2} \sin(\beta \xi), \\ L_{\theta_x M}(\xi, \beta) &= -\frac{1}{2} \xi \sin(\beta \xi), \\ L_{\theta_x V}(\xi, \beta) &= \frac{1}{2} \frac{\xi \cos(\beta \xi)}{\beta} - \frac{1}{2} \frac{\sin(\beta \xi)}{\beta^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для $\theta_y(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned}
L_{\theta_y w}(\xi, \beta) &= \frac{1-\mu}{2} \beta^2 \xi \cos(\beta\xi) - \frac{1+\mu}{2} \beta \sin(\beta\xi), \\
L_{\theta_y \theta}(\xi, \beta) &= \frac{\mu-1}{2} \beta \xi \sin(\beta\xi) + \cos(\beta\xi), \\
L_{\theta_y M}(\xi, \beta) &= -\frac{1}{2} \xi \cos(\beta\xi) - \frac{1}{2} \frac{\sin(\beta\xi)}{\beta}, \\
L_{\theta_y V}(\xi, \beta) &= -\frac{1}{2} \xi \frac{\sin(\beta\xi)}{\beta}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Для $M_x(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned}
L_{M_x w}(\xi, \beta) &= (\mu^2 - 1) \beta^2 \cos(\beta\xi) - \frac{(\mu-1)^2}{2} \beta^3 \xi \sin(\beta\xi), \\
L_{M_x \theta}(\xi, \beta) &= -\frac{(\mu-1)^2}{2} \beta^2 \xi \cos(\beta\xi) - \frac{(\mu-1)^2}{2} \beta \sin(\beta\xi), \\
L_{M_x M}(\xi, \beta) &= \frac{1-\mu}{2} \beta \xi \sin(\beta\xi) + \mu \cos(\beta\xi), \\
L_{M_x V}(\xi, \beta) &= \frac{\mu-1}{2} \xi \cos(\beta\xi) + \frac{\mu+1}{2} \frac{\sin(\beta\xi)}{\beta}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Для $M_y(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned}
L_{M_y w}(\xi, \beta) &= \frac{(\mu-1)^2}{2} \beta^3 \xi \sin(\beta\xi), \\
L_{M_y \theta}(\xi, \beta) &= \frac{(\mu-1)^2}{2} \beta^2 \xi \cos(\beta\xi) - \frac{(\mu-1)(\mu+3)}{2} \beta \sin(\beta\xi), \\
L_{M_y M}(\xi, \beta) &= \frac{\mu-1}{2} \beta \xi \sin(\beta\xi) + \cos(\beta\xi), \\
L_{M_y V}(\xi, \beta) &= \frac{1-\mu}{2} \xi \cos(\beta\xi) + \frac{1+\mu}{2} \frac{\sin(\beta\xi)}{\beta}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Для $V_x(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned}
L_{V_x w}(\xi, \beta) &= -\frac{(\mu-1)^2}{2} \beta^4 \xi \cos(\beta\xi) - \frac{(\mu-1)(\mu+3)}{2} \beta^3 \sin(\beta\xi), \\
L_{V_x \theta}(\xi, \beta) &= \frac{(\mu-1)^2}{2} \beta^3 \xi \sin(\beta\xi), \\
L_{V_x M}(\xi, \beta) &= -\frac{\mu-1}{2} \beta^2 \xi \cos(\beta\xi) - \frac{\mu+1}{2} \beta \sin(\beta\xi), \\
L_{V_x V}(\xi, \beta) &= \frac{1-\mu}{2} \beta \xi \sin(\beta\xi) + \cos(\beta\xi).
\end{aligned} \tag{28}$$

Для $V_y(\xi, \eta)$:

$$\begin{aligned}
 L_{V_y w}(\xi, \beta) &= \frac{(\mu - 1)^2}{2} \beta^4 \xi \sin(\beta \xi) - (\mu - 1)^2 \beta^3 \cos(\beta \xi), \\
 L_{V_y \theta}(\xi, \beta) &= \frac{(\mu - 1)^2}{2} \beta^3 \xi \cos(\beta \xi) + \frac{(\mu - 1)(\mu - 5)}{2} \beta^2 \sin(\beta \xi), \\
 L_{V_y M}(\xi, \beta) &= (2 - \mu) \beta \cos(\beta \xi) + \frac{\mu - 1}{2} \beta^2 \xi \sin(\beta \xi), \\
 L_{V_y V}(\xi, \beta) &= \frac{1 - \mu}{2} \beta \xi \cos(\beta \xi) + \frac{3 - \mu}{2} \sin(\beta \xi).
 \end{aligned} \tag{29}$$

Подставляя найденные операторы-функции (23) для $L_{w*}(\xi, \beta)$, где $* \in (w, \theta, M, V)$ и частное решение (15) в решение (10) неоднородного уравнения (7), а также полученные операторы-функции (24)–(29) и значения из (16) в (13), мы получаем аналитический вид компонентов напряженно-деформированного состояния рассматриваемой прямоугольной пластинки, выраженный через операторы-функции и выбранные начальные функции.

Глава 2

Моделирование изгиба жестко заземленной пластинки

В этой главе будет построено аналитическое решение для жестко заземленной пластинки, точно удовлетворяющее граничным условиям на двух противоположных сторонах пластинки, а также будут предложены подходы, которые позволят полученному решению приближенно удовлетворить граничным условиям на двух других сторонах пластинки, для того, чтобы определить приближенный аналитический вид для всех компонентов напряженно-деформированного состояния пластинки.

2.1 Удовлетворение граничным условиям

Стоит отметить, что для рассматриваемой жестко заземленной прямоугольной пластинки, на которую воздействует равномерно распределенная нагрузка, выбранные начальные функции θ^0 и V^0 равны нулю в силу граничных условий (5). Поэтому компоненты напряженно-деформированного состояния этой пластинки примут вид:

$$\begin{aligned}w(\xi, \eta) &= a \{L_{ww}(\xi, \beta) W^0 + L_{wM}(\xi, \beta) M^0\} + \frac{qa^4}{24D} \xi^4, \\ \theta_x(\xi, \eta) &= L_{\theta_x w}(\xi, \beta) W^0 + L_{\theta_x M}(\xi, \beta) M^0, \\ \theta_y(\xi, \eta) &= L_{\theta_y w}(\xi, \beta) W^0 + L_{\theta_y M}(\xi, \beta) M^0 + \frac{qa^3}{6D} \xi^3, \\ M_x(\xi, \eta) &= \frac{D}{a} \{L_{M_x w}(\xi, \beta) W^0 + L_{M_x M}(\xi, \beta) M^0\} - \mu \frac{qa^2}{2D} \xi^2, \\ M_y(\xi, \eta) &= \frac{D}{a} \{L_{M_y w}(\xi, \beta) W^0 + L_{M_y M}(\xi, \beta) M^0\} - \frac{qa^2}{2D} \xi^2, \\ V_x(\xi, \eta) &= \frac{D}{a^2} \{L_{V_x w}(\xi, \beta) W^0 + L_{V_x M}(\xi, \beta) M^0\} - qa\xi, \\ V_y(\xi, \eta) &= \frac{D}{a^2} \{L_{V_y w}(\xi, \beta) W^0 + L_{V_y M}(\xi, \beta) M^0\}.\end{aligned}\tag{30}$$

Если удовлетворить граничным условиям на правом крае пластинки,

т. е. на линии $\xi = \frac{1}{2}$:

$$w\left(\frac{1}{2}, \eta\right) = \theta_y\left(\frac{1}{2}, \eta\right) = 0,$$

то можно получить неоднородную систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} L_{ww}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) W^0(\eta) + L_{wM}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) M^0(\eta) &= -\frac{qa^3}{384D}, \\ L_{\theta_y w}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) W^0(\eta) + L_{\theta_y M}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) M^0(\eta) &= -\frac{qa^3}{48D}. \end{aligned} \quad (31)$$

Чтобы получить общее решение однородной системы:

$$\begin{aligned} L_{ww}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) W^0(\eta) + L_{wM}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) M^0(\eta) &= 0, \\ L_{\theta_y w}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) W^0(\eta) + L_{\theta_y M}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) M^0(\eta) &= 0, \end{aligned} \quad (32)$$

введем разрешающую функцию $\varphi(\eta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} W^0(\eta) &= \left[L_{wM}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) \right] \varphi(\eta), \\ M^0(\eta) &= -\left[L_{ww}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) \right] \varphi(\eta), \end{aligned} \quad (33)$$

при этом, подставляя (33) в первое уравнение из однородной системы (32) получаем тождество, а подставляя во второе, получаем трансцендентное дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять введенная разрешающая функция $\varphi(\eta)$:

$$\left[L_{\theta_y w}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) L_{wM}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) - L_{\theta_y M}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) L_{ww}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) \right] \varphi(\eta) = 0. \quad (34)$$

Чтобы упростить уравнение (34), необходимо в него подставить (23) и (25) и провести простые преобразования. Тогда уравнение (34) будет иметь следующий вид:

$$\left[\frac{-\beta - \sin(\beta)}{4\beta} \right] \varphi(\eta) = 0,$$

или, что то же самое

$$\left[1 + \frac{\sin \beta}{\beta} \right] \varphi(\eta) = 0. \quad (35)$$

2.2 Поиск разрешающей функции $\varphi(\eta)$

Общий интеграл (решение) трансцендентного дифференциального уравнения (35) можно представить двумя эквивалентными выражениями:

$$\varphi(\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \exp(k_i \eta),$$

или

$$\varphi(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} k_n \eta + B_n \operatorname{sh} k_n \eta + C_n \operatorname{ch} \bar{k}_n \eta + D_n \operatorname{sh} \bar{k}_n \eta), \quad (36)$$

где A_n, B_n, C_n и D_n — произвольные постоянные.

В данной работе для нахождения разрешающей функции $\varphi(\eta)$ воспользуемся вторым представлением. Подставим (36) в (35). Вспомним, что, согласно (8), β — дифференциальный оператор по переменной η . Используя разложение $\frac{\sin(\beta)}{\beta}$ в ряд Маклорена, а именно:

$$\frac{\sin(\beta)}{\beta} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2i} \beta^{2i+1}}{(2i+1)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2i} \beta^{2i}}{(2i+1)!},$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \left[\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right] \operatorname{ch}(k_n \eta) &= \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2i} \beta^{2i}}{(2i+1)!} \right] \operatorname{ch}(k_n \eta) = \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2i} k_n^{2i}}{(2i+1)!} \right) \operatorname{ch}(k_n \eta) = \frac{1}{k_n} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2i} k_n^{2i+1}}{(2i+1)!} \right) \operatorname{ch}(k_n \eta) = \\ &= \frac{\sin(k_n)}{k_n} \operatorname{ch}(k_n \eta). \end{aligned}$$

и, аналогичным образом, для $\operatorname{sh}(k_n \eta)$

$$\left[\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right] \operatorname{sh}(k_n \eta) = \frac{\sin(k_n)}{k_n} \operatorname{sh}(k_n \eta),$$

Таким образом, учитывая, что $\varphi(\eta)$ не равна нулю, мы получаем трансцендентное дифференциальное уравнение для нахождения k_n :

$$1 + \frac{\sin k_n}{k_n} = 0. \quad (37)$$

Решив уравнение (37), мы получим представление для функции $\varphi(\eta)$.

2.3 Поиск частного решения неоднородной системы

Для поиска частного решения неоднородной системы (31) также воспользуемся разложением в ряды входящих в нее операторов.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{8} \mu \frac{\partial}{\partial \eta} + \dots\right) W^0(\eta) + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{198} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \dots\right) M^0(\eta) &= -\frac{qa^3}{384D}, \\ \left(-\frac{1}{2} \mu \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \dots\right) W^0(\eta) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \dots\right) M^0(\eta) &= -\frac{qa^3}{48D}. \end{aligned}$$

Отсюда, получаем частное решение для неоднородной системы (31):

$$W_{part}^0 = \frac{qa^3}{384D}, \quad M_{part}^0 = \frac{qa^3}{24D}. \quad (38)$$

Таким образом, решением системы (31) будет сумма общего решения (33) однородной системы (32) и частного решения (38) неоднородной системы (31):

$$\begin{aligned} W^0(\eta) &= \frac{qa^3}{384D} + \left[L_{wM} \left(\frac{1}{2}, \beta \right) \right] \varphi(\eta), \\ M^0(\eta) &= \frac{qa^3}{24D} - \left[L_{ww} \left(\frac{1}{2}, \beta \right) \right] \varphi(\eta). \end{aligned} \quad (39)$$

или, если раскрыть операторы:

$$\begin{aligned} W^0(\eta) &= \frac{qa^3}{384D} - \left[\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{4\beta} \right] \varphi(\eta), \\ M^0(\eta) &= \frac{qa^3}{24D} - \left[-\frac{\mu-1}{4} \beta \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right] \varphi(\eta). \end{aligned}$$

2.4 Напряженно-деформированное состояние пластинки

В предыдущих параграфах мы смогли получить две неизвестные начальные функции, а именно $W^0(\eta)$ и $M^0(\eta)$. Поэтому теперь, подставив (39) в (30) можно получить все компоненты напряженно-деформированного состояния, выраженные в операторном виде через разрешающую функцию $\varphi(\eta)$.

Для начала, выпишем значения, которые получатся если воздействовать операторами-функциями $L_{ij}(\xi, \beta)$, где $i, j \in (w, \theta, M, V)$

на константу. Для этого можно воспользоваться разложением в ряд Маклорена полученных в (23) и (24)–(29) операторов:

$$\begin{aligned}
[L_{ww}(\xi, \beta)]\{1\} &= 1, & [L_{wM}(\xi, \beta)]\{1\} &= -\frac{\xi^2}{2}, \\
[L_{\theta_x w}(\xi, \beta)]\{1\} &= 0, & [L_{\theta_x M}(\xi, \beta)]\{1\} &= 0, \\
[L_{\theta_y w}(\xi, \beta)]\{1\} &= 0, & [L_{\theta_y M}(\xi, \beta)]\{1\} &= -\xi, \\
[L_{M_x w}(\xi, \beta)]\{1\} &= 0, & [L_{M_x M}(\xi, \beta)]\{1\} &= \mu, \\
[L_{M_y w}(\xi, \beta)]\{1\} &= 0, & [L_{M_y M}(\xi, \beta)]\{1\} &= 1, \\
[L_{V_x w}(\xi, \beta)]\{1\} &= 0, & [L_{V_x M}(\xi, \beta)]\{1\} &= \mu, \\
[L_{V_y w}(\xi, \beta)]\{1\} &= 0, & [L_{V_y M}(\xi, \beta)]\{1\} &= 0,
\end{aligned} \tag{40}$$

Учитывая (40), подставляя (39) в (30) и произведя несложные преобразования, получаем следующий вид для всех компонентов напряженно-деформированного состояния:

$$\begin{aligned}
w(\xi, \eta) &= \frac{qa^4}{24D} \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right)^2 + a [\psi_w(\xi, \beta)] \varphi(\eta), \\
\theta_x(\xi, \eta) &= [\psi_{\theta_x}(\xi, \beta)] \varphi(\eta), \\
\theta_y(\xi, \eta) &= \frac{qa^3}{6D} \left(-\frac{1}{4} + \xi^2 \right) + [\psi_{\theta_y}(\xi, \beta)] \varphi(\eta), \\
M_x(\xi, \eta) &= \frac{D}{a} \left(\frac{qa^2\mu}{2D} \left(\frac{a}{12} - \xi^2 \right) + [\psi_{M_x}(\xi, \beta)] \varphi(\eta) \right), \\
M_y(\xi, \eta) &= \frac{D}{a} \left(\frac{qa^2}{2D} \left(\frac{a}{12} - \xi^2 \right) + [\psi_{M_y}(\xi, \beta)] \varphi(\eta) \right), \\
V_x(\xi, \eta) &= \frac{D}{a^2} \left(-\frac{qa^2}{D} \xi + [\psi_{V_x}(\xi, \beta)] \varphi(\eta) \right), \\
V_y(\xi, \eta) &= \frac{D}{a^2} [\psi_{V_y}(\xi, \beta)] \varphi(\eta),
\end{aligned} \tag{41}$$

где $\psi_*(\xi, \beta)$, $*$ \in $(w, \theta_x, \theta_y, M_x, M_y, V_x, V_y)$ — операторы следующего вида:

$$\begin{aligned}
\psi_w(\xi, \beta) &= L_{ww}(\xi, \beta) L_{wM} \left(\frac{1}{2}, \beta \right) - L_{wM}(\xi, \beta) L_{ww} \left(\frac{1}{2}, \beta \right), \\
\psi_{\theta_x}(\xi, \beta) &= L_{\theta_x w}(\xi, \beta) L_{wM} \left(\frac{1}{2}, \beta \right) - L_{\theta_x M}(\xi, \beta) L_{ww} \left(\frac{1}{2}, \beta \right), \\
\psi_{\theta_y}(\xi, \beta) &= L_{\theta_y w}(\xi, \beta) L_{wM} \left(\frac{1}{2}, \beta \right) - L_{\theta_y M}(\xi, \beta) L_{ww} \left(\frac{1}{2}, \beta \right),
\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{M_x}(\xi, \beta) &= L_{M_x w}(\xi, \beta) L_{wM}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) - L_{M_x M}(\xi, \beta) L_{ww}\left(\frac{1}{2}, \beta\right), \\
\psi_{M_y}(\xi, \beta) &= L_{M_y w}(\xi, \beta) L_{wM}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) - L_{M_y M}(\xi, \beta) L_{ww}\left(\frac{1}{2}, \beta\right), \\
\psi_{V_x}(\xi, \beta) &= L_{V_x w}(\xi, \beta) L_{wM}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) - L_{V_x M}(\xi, \beta) L_{ww}\left(\frac{1}{2}, \beta\right), \\
\psi_{V_y}(\xi, \beta) &= L_{V_y w}(\xi, \beta) L_{wM}\left(\frac{1}{2}, \beta\right) - L_{V_y M}(\xi, \beta) L_{ww}\left(\frac{1}{2}, \beta\right).
\end{aligned} \tag{43}$$

Подставив (23) и (24)–(29) в (42)–(43), получим полный вид операторов $\psi_*(\xi, \beta)$, $*$ $\in (w, \theta_x, \theta_y, M_x, M_y, V_x, V_y)$:

$$\begin{aligned}
\psi_w(\xi, \beta) &= \frac{1}{4} \left(2\xi \sin(\beta\xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos(\beta\xi) \right) \frac{1}{\beta}, \\
\psi_{\theta_x}(\xi, \beta) &= -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos(\beta\xi) + \frac{1}{2} \xi \sin(\beta\xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right), \\
\psi_{\theta_y}(\xi, \beta) &= \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin(\beta\xi) + \frac{1}{2} \xi \cos(\beta\xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2\beta} \sin(\beta\xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right), \\
\psi_{M_x}(\xi, \beta) &= \frac{1}{4} \beta \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos(\beta\xi) + \frac{1}{2} \mu\xi\beta \sin(\beta\xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \xi\beta \sin(\beta\xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \frac{1}{4} \mu\beta \cos(\beta\xi) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) - \\
&\quad - \mu \cos(\beta\xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right), \\
\psi_{M_y}(\xi, \beta) &= \frac{1}{2} \mu\xi\beta \sin(\beta\xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \frac{1}{2} \xi\beta \sin(\beta\xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{4} \mu\beta \cos(\beta\xi) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) - \frac{1}{4} \beta \cos(\beta\xi) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) - \\
&\quad - \cos(\beta\xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right), \\
\psi_{V_x}(\xi, \beta) &= \frac{1}{4} \mu\beta^2 \sin(\beta\xi) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) - \frac{1}{4} \beta^2 \sin(\beta\xi) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \mu\xi\beta^2 \cos(\beta\xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \frac{1}{2} \xi\beta^2 \cos(\beta\xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \mu\beta \sin(\beta\xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \frac{1}{2} \beta \sin(\beta\xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right),
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{V_y}(\xi, \beta) = & \frac{1}{4} \mu \beta^2 \cos(\beta \xi) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) - \frac{1}{4} \beta^2 \cos(\beta \xi) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) + \\
& + \mu \beta \cos(\beta \xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - 2\beta \cos(\beta \xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \\
& - \frac{1}{2} \mu \xi \beta^2 \sin(\beta \xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \frac{1}{2} \xi \beta^2 \sin(\beta \xi) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right).
\end{aligned} \tag{45}$$

Введенные операторы (42)–(43) — вещественны, поэтому для вещественности компонентов напряженно-деформированного состояния (41) необходима вещественность введенной разрешающей функции $\varphi(\eta)$. Для этого в (36) надо положить следующее:

$$C_n = \bar{A}_n, \quad D_n = \bar{B}_n. \tag{46}$$

Далее проверим четность оператора $\psi_w(\xi, \beta)$, разложив его представление в тригонометрических функциях в ряд Маклорена и воздействуя им на гиперболические синус $\text{sh}(k_n \eta)$ и косинус $\text{ch}(k_n \eta)$:

$$\begin{aligned}
[\psi_w(\xi, \beta)] \text{ch}(k_n \eta) &= \psi_w(\xi, k_n) \text{ch}(k_n \eta), \\
[\psi_w(\xi, \beta)] \text{sh}(k_n \eta) &= \psi_w(\xi, k_n) \text{sh}(k_n \eta).
\end{aligned} \tag{47}$$

Из (47) видно, что оператор $\psi_w(\xi, \beta)$ — четный, а значит четность функции $w(\xi, \eta)$ по η зависит от четности функции $\varphi(\eta)$. Однако в силу равномерно распределенной нагрузки и симметричности граничных условий всей пластинки, функция прогиба пластинки $w(\xi, \eta)$ — четная функция по ξ и η . Поэтому в (36) дополнительно следует положить, что:

$$B_n = 0. \tag{48}$$

Раскроем остальные операторы из (42)–(43) относительно $\text{ch}(k_n \eta)$:

$$\begin{aligned}
[\psi_{\theta_x}(\xi, \beta)] \text{ch}(k_n \eta) &= \psi_{\theta_x}(\xi, k_n) \text{sh}(k_n \eta), \\
[\psi_{\theta_y}(\xi, \beta)] \text{ch}(k_n \eta) &= \psi_{\theta_y}(\xi, k_n) \text{ch}(k_n \eta), \\
[\psi_{M_x}(\xi, \beta)] \text{ch}(k_n \eta) &= \psi_{M_x}(\xi, k_n) \text{ch}(k_n \eta), \\
[\psi_{M_y}(\xi, \beta)] \text{ch}(k_n \eta) &= \psi_{M_y}(\xi, k_n) \text{ch}(k_n \eta), \\
[\psi_{V_x}(\xi, \beta)] \text{ch}(k_n \eta) &= \psi_{V_x}(\xi, k_n) \text{ch}(k_n \eta), \\
[\psi_{V_y}(\xi, \beta)] \text{ch}(k_n \eta) &= \psi_{V_y}(\xi, k_n) \text{sh}(k_n \eta).
\end{aligned} \tag{49}$$

Пусть

$$A_n = a_n + ib_n,$$

где a_n и b_n — произвольные постоянные. Тогда, учитывая (46)–(49), компоненты напряженно-деформированного состояния будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
w(\xi, \eta) &= \frac{qa^4}{24D} \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right)^2 + 2a \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \psi_w(\xi, k_n) \operatorname{ch}(k_n \eta), \\
\theta_x(\xi, \eta) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \psi_{\theta_x}(\xi, k_n) \operatorname{sh}(k_n \eta), \\
\theta_y(\xi, \eta) &= \frac{qa^3}{6D} \left(-\frac{1}{4} + \xi^2 \right) + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \psi_{\theta_y}(\xi, k_n) \operatorname{ch}(k_n \eta), \\
M_x(\xi, \eta) &= \frac{D}{a} \left(\frac{qa^2 \mu}{2D} \left(\frac{a}{12} - \xi^2 \right) + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \psi_{M_x}(\xi, k_n) \operatorname{ch}(k_n \eta) \right), \\
M_y(\xi, \eta) &= \frac{D}{a} \left(\frac{qa^2}{2D} \left(\frac{a}{12} - \xi^2 \right) + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \psi_{M_y}(\xi, k_n) \operatorname{ch}(k_n \eta) \right), \\
V_x(\xi, \eta) &= \frac{D}{a^2} \left(-\frac{qa^2}{D} \xi + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \psi_{V_x}(\xi, k_n) \operatorname{ch}(k_n \eta) \right), \\
V_y(\xi, \eta) &= 2 \frac{D}{a^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \psi_{V_y}(\xi, k_n) \operatorname{sh}(k_n \eta).
\end{aligned} \tag{50}$$

2.5 Удовлетворение оставшимся граничным условиям

Удовлетворим оставшимся граничным условиям на краях пластинки $\eta = \pm \lambda/2$:

$$w\left(\xi, \pm \frac{\lambda}{2}\right) = \theta_x\left(\xi, \pm \frac{\lambda}{2}\right) = 0.$$

Тогда из (50), подставляя операторы $\psi_*(\xi, \beta)$, $*$ $\in (w, \theta_x, \theta_y, M_x, M_y, V_x, V_y)$ из (44)–(45), получаем, что

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + ib_n)}{4k_n} \left(2\xi \sin(k_n \xi) \cos\left(\frac{k_n}{2}\right) - \sin\left(\frac{k_n}{2}\right) \cos(k_n \xi) \right) \operatorname{ch} \frac{k_n \lambda}{2} &= \\
&= -\frac{qa^3}{768D} (1 - 4\xi^2)^2, \\
\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + ib_n)}{4} \left(2\xi \sin(k_n \xi) \cos\left(\frac{k_n}{2}\right) - \sin\left(\frac{k_n}{2}\right) \cos(k_n \xi) \right) \operatorname{sh} \frac{k_n \lambda}{2} &= \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{51}$$

Таким образом, удовлетворив оставшимся граничным условиям, мы получили систему уравнений бесконечной размерности для нахождения коэффициентов a_n и b_n . Однако найти точный аналитический вид этих коэффициентов вряд ли возможно, поэтому далее в этой главе будут изложены способы получения приближенных значений этих коэффициентов.

Для начала, стоит отметить, что трансцендентное дифференциальное уравнение (37) имеет бесконечное количество комплексных корней k_n , поэтому для нахождения приближенных значений коэффициентов a_n и b_n из системы уравнений (51) необходимо ограничиться первыми N комплексными корнями.

Первый подход предполагает разложение левых и правых частей системы (51) в ряды Тейлора в окрестности нуля. Затем необходимо взять такое количество первых членов полученных рядов, чтобы получилась система линейных алгебраических уравнений, замкнутая относительно неизвестных a_n и b_n в ней, и приравнять соответствующие. Очевидно, что чем больше взять число N корней k_n , тем больше членов ряда Тейлора будет задействовано для вычисления значений a_n и b_n , соответственно, решение поставленной двумерной краевой задачи будет точнее.

Второй подход — метод коллокаций — предполагает вычисление уравнений системы (51) в точках из заданного набора равноотстоящих точек на сторонах пластинки $\eta = \pm \frac{\lambda}{2}$. Количество точек, а соответственно, расстояние между ними, напрямую зависит от количества N взятых корней k_n , поэтому снова получится система линейных алгебраических уравнений, замкнутая относительно неизвестных a_n и b_n в ней, а точность решения рассматриваемой двумерной краевой задачи будет увеличиваться с числом N .

Третий подход предполагает совмещение двух первых методов, а именно, задание набора равноотстоящих точек на сторонах пластинки $\eta = \pm \frac{\lambda}{2}$, а затем разложение в каждой точке из полученного набора левых и правых частей системы (51) в ряды Тейлора. Для замыкания получающейся системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_n и b_n нужно управлять двумя параметрами, зависящими друг от друга: количеством равноотстоящих точек и количеством первых членов рядов Тейлора, однако, очевидно, что увеличивая число N

корней k_n трансцендентного дифференциального уравнения (37) решение поставленной двумерной краевой задачи будет точнее.

Таким образом, все предложенные выше подходы позволят получить конечномерную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения приближенных значений коэффициентов a_n и b_n . Решив такую систему, мы сможем провести моделирование изгиба жестко заделанной тонкой (толщины δ) прямоугольной изотропной пластинки со сторонами a и b , на которую воздействует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q и построить функции (50), определяющие напряженно-деформированное состояние такой пластинки.

Стоит отметить, что полученное таким образом решение поставленной задачи будет являться приближенным аналитическим решением, так как граничные условия на двух противоположных сторонах $x = \pm \frac{a}{2}$ пластинки будут удовлетворяться точно, а на двух других сторонах $y = \pm \frac{b}{2}$ — приближенно.

Глава 3

Вычислительный эксперимент

Для моделирования изгиба жестко заземленной прямоугольной изотропной пластинки и построения приближенно-аналитического решения поставленной задачи был использован программный продукт Maple — это программный пакет для символьного и численного компьютерного вычисления, позволяющий строить точные аналитические решения для большинства математических задач, моделировать и имитировать разной сложности математические и компьютерные модели, а также проводить вычислительные эксперименты с заданной точностью вычислений и наглядно сравнивать полученные результаты [33–35]. Почти все формулы и уравнения, встречаемые в настоящей работе были выведены и решены при помощи этой программной среды.

3.1 Процесс моделирования изгиба пластинки

Моделирование изгиба пластинки методом начальных функций было проведено в несколько этапов:

1. Постановка задачи и формализация модели (4)–(6) рассматриваемой пластинки.
2. Составление четырех задач Коши (18)–(22) из исходной двумерной краевой задачи (4) путем применения метода начальных функций, а затем поиск их аналитического решения.
3. Поиск аналитического решения исходной двумерной краевой задачи и построение аналитического вида компонентов-напряженно-деформированного состояния (50), которое удовлетворяет только нескольким граничным условиям.
4. Реализация трех предложенных подходов приближения:
 - метод разложения в ряды Тейлора в окрестности нуля,
 - метод коллокаций,
 - совмещенный метод,

— для приближенного удовлетворения оставшимся граничным условиям путем составления конечномерной СЛАУ и поиска приближенных значений коэффициентов a_n и b_n .

5. Оценка адекватности построенной модели.

6. Оценка точности построенного решения.

7. Тестирование и сравнение реализованных методов приближения.

Оценить адекватность построенной модели методом начальных функций достаточно просто — необходимо проверить насколько близки к нулю функции $w(\xi, \eta)$ и $\theta_x(\xi, \eta)$ на тех краях пластинки, на которых мы удовлетворяем граничным условиям приближенно, а именно, на $\eta = \pm \frac{\lambda}{2}$. При этом, функция $w(\xi, \eta)$ должна достигать своего максимума в точке $\xi = 0, \eta = 0$. Также, функция $w(\xi, \eta)$ должна оказаться четной по обоим переменным ξ и η , а ее трехмерный график выглядеть куполообразным и симметричным относительно максимального значения функции.

Оценить точность построенного решения позволит сравнение результатов полученных данными методами приближения с известными результатами, в частности, с [16].

Чтобы сравнить реализованные подходы для приближения, будем увеличивать число N найденных корней трансцендентного дифференциального уравнения (37). Таким образом размерность конечномерных СЛАУ для нахождения a_n и b_n будет увеличиваться, точность получаемого решения, соответственно, увеличиваться, а мы, построив графики функций-компонентов напряженно-деформированного состояния, сможем наглядно посмотреть и сравнить результаты, полученные каждым методом.

3.2 Основные параметры модели

В качестве основных параметров пластинки были выбраны следующие значения:

- Пластинка квадратная со сторонами $a = b = 1$ м.
- Толщина пластинки $\delta = 0,01$ м.
- Коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$.

- Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.
- Интенсивность нагрузки $q = 1$ Н/м².

Число значащих знаков после запятой для построения приближенного решения было выбрано равным 300.

Исходные коды программ аналитического вычисления основных уравнений модели а также программ реализации методов приближения, расчета СЛАУ и построения приближенно-аналитического вида компонентов напряженно-деформированного состояния приведены в приложениях А–F.

3.3 Оценка адекватности построенной модели

Для начала оценим адекватность построенной модели методом начальных функций. Возьмем $N = \overline{1, 5}$ корней уравнения (37) для каждого из алгоритмов приближения:

$$k_1 = 4.21239223049066 \dots + i \cdot 2.25072861160186 \dots,$$

$$k_2 = 10.7125373972793 \dots + i \cdot 3.10314874582525 \dots,$$

$$k_3 = 17.0733648531518 \dots + i \cdot 3.55108734702208 \dots,$$

$$k_4 = 23.3983552256513 \dots + i \cdot 3.85880899310557 \dots,$$

$$k_5 = 29.7081198252760 \dots + i \cdot 4.09370492476533 \dots$$

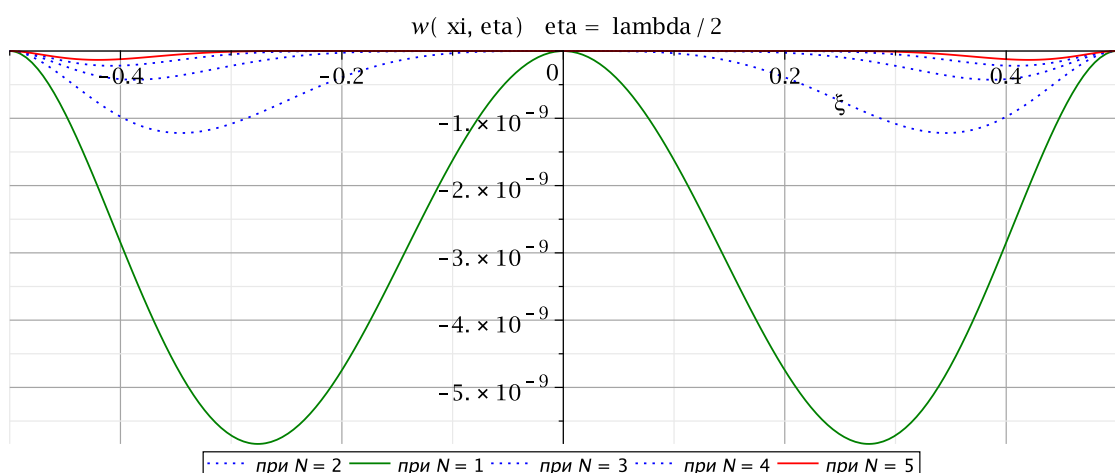


Рис. 3. Прогиб пластинки методом Тейлора на стороне $\eta = \frac{\lambda}{2}$

Для первого метода (разложение в ряд Тейлора в окрестности нуля), необходимо взять из каждого построенного ряда по N первых членов

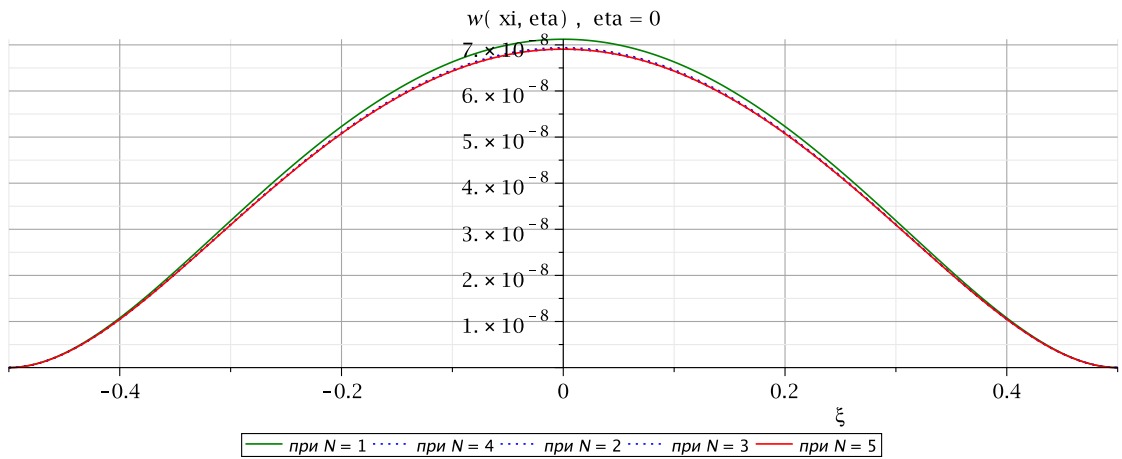


Рис. 4. Прогиб пластинки методом Тейлора вдоль $\eta = 0$

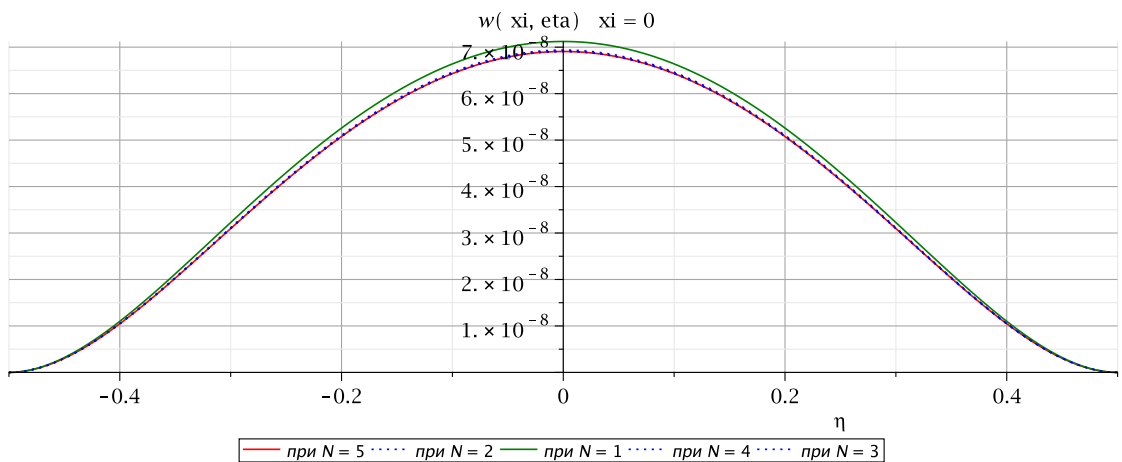


Рис. 5. Прогиб пластинки методом Тейлора вдоль $\xi = 0$

ряда (при этом так, чтобы потом не получались уравнения вида $0 = 0$) и приравнять соответствующие уравнению из системы (51) члены из левой и правой части уравнения. Для метода коллокаций следует задать набор из N равноотстоящих точек на стороне $\eta = \frac{\lambda}{2}$ и вычислить в них граничные условия для этого края. Для совмещенного метода построим три реализации для сравнения:

- Задаем набор из двух равноотстоящих точек, раскладываем в них левые и правые части уравнений системы (51) в ряды Тейлора и приравниваем $\frac{N}{2}$ первых членов каждого ряда (при этом так, чтобы потом не получались уравнения вида $0 = 0$) соответственно уравнениям. Затем для каждого N берем, начиная с самой левой точки, уравнения для составления СЛАУ. Количество взятых уравнений должно строго соответствовать количеству $2N$ неизвестных a_n и b_n ,

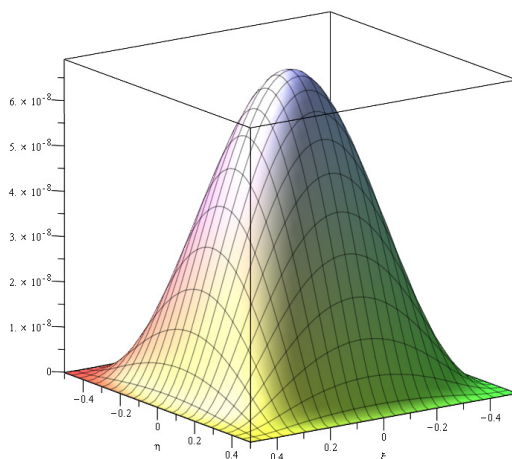


Рис. 6. Прогиб пластинки методом Тейлора в 3D

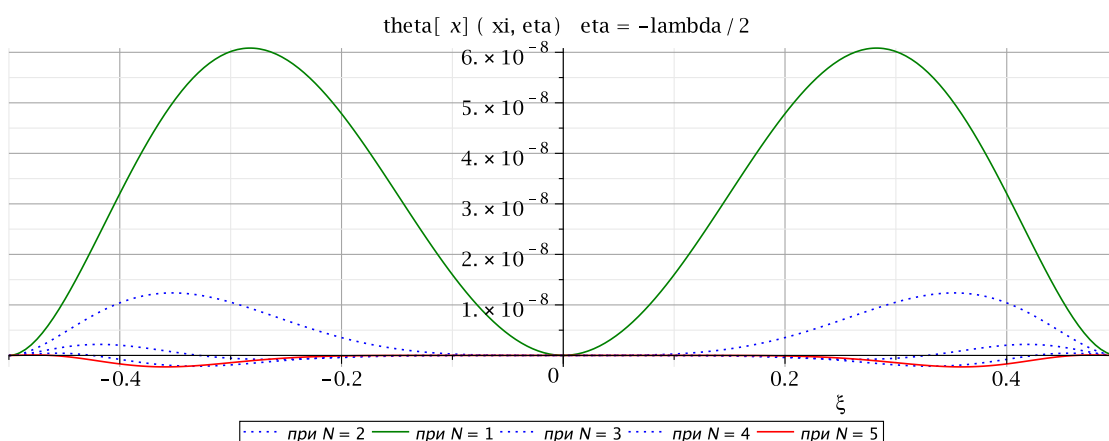


Рис. 7. Функция $\theta_x(\xi, \eta)$ методом Тейлора вдоль $\eta = -\frac{\lambda}{2}$

чтобы системы получились замкнутыми. Если для какого-то N не хватит разложения в ряды до $\frac{N}{2}$, то будем брать следующие члены ряда так, чтобы построить замкнутую систему.

- Производим аналогичные процедуры задавая три равноотстоящие точки.
- Производим аналогичные процедуры задавая десять равноотстоящих точек.

Постепенно увеличивая размерность СЛАУ (от двух до десяти уравнений, соответственно числу N) для нахождения a_n и b_n для каждого из пяти приведенных выше алгоритма приближения построим графики двух функции $w(\xi, \eta)$ и $\theta_x(\xi, \eta)$ на стороне $\eta = \frac{\lambda}{2}$.

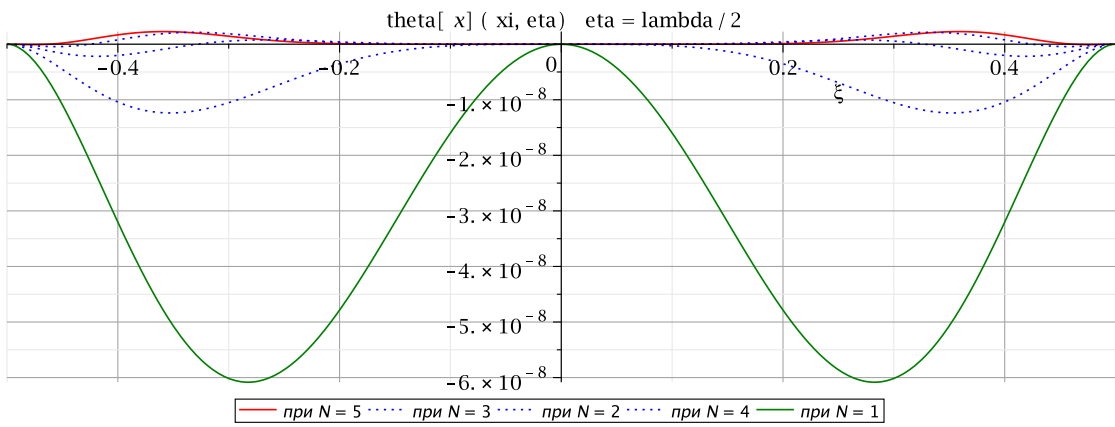


Рис. 8. Функция $\theta_x(\xi, \eta)$ методом Тейлора вдоль $\eta = \frac{\lambda}{2}$

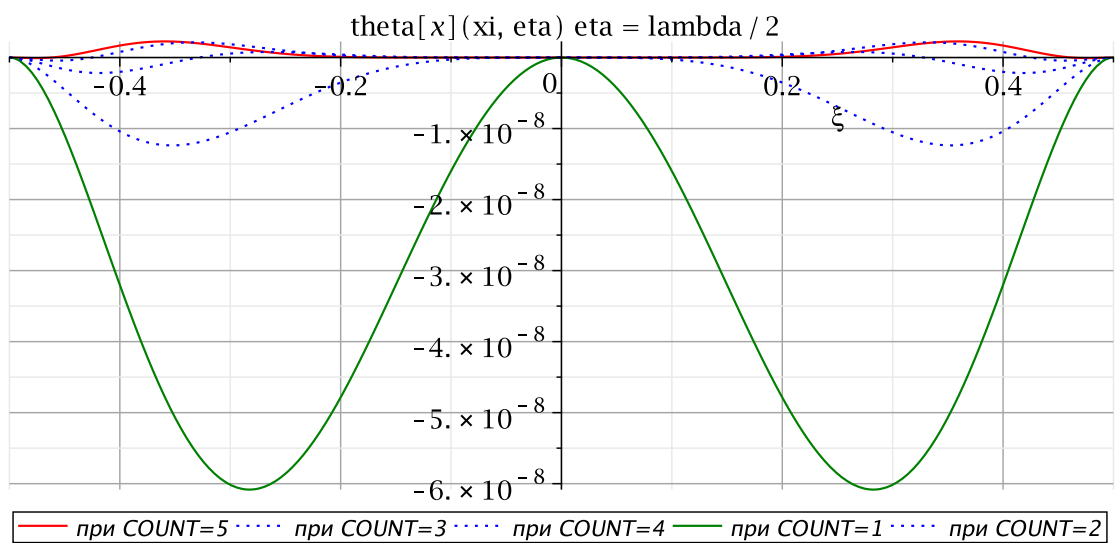


Рис. 9. Функция $\theta_x(\xi, \eta)$ методом коллокаций вдоль $\eta = \frac{\lambda}{2}$

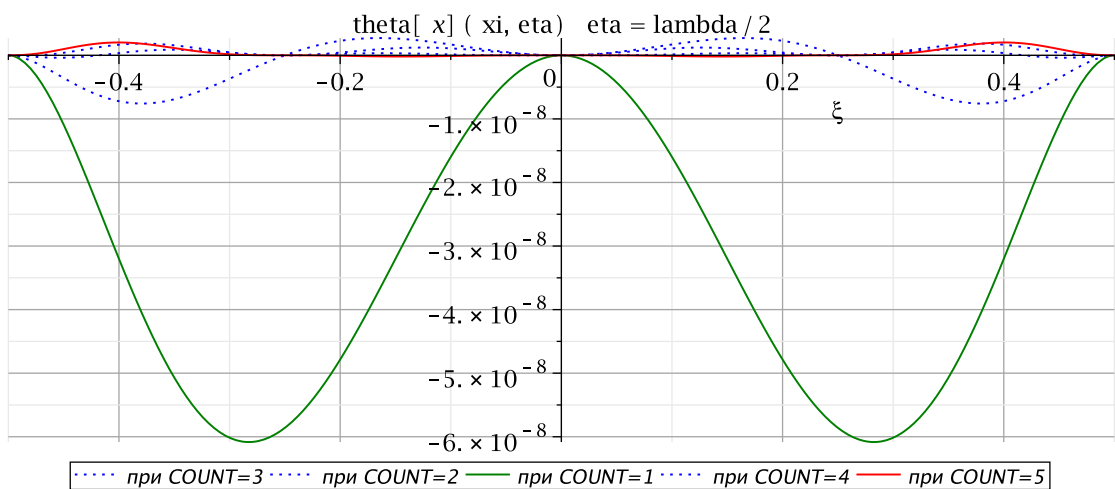


Рис. 10. Функция $\theta_x(\xi, \eta)$ совмещенным методом (2 точки) вдоль $\eta = \frac{\lambda}{2}$

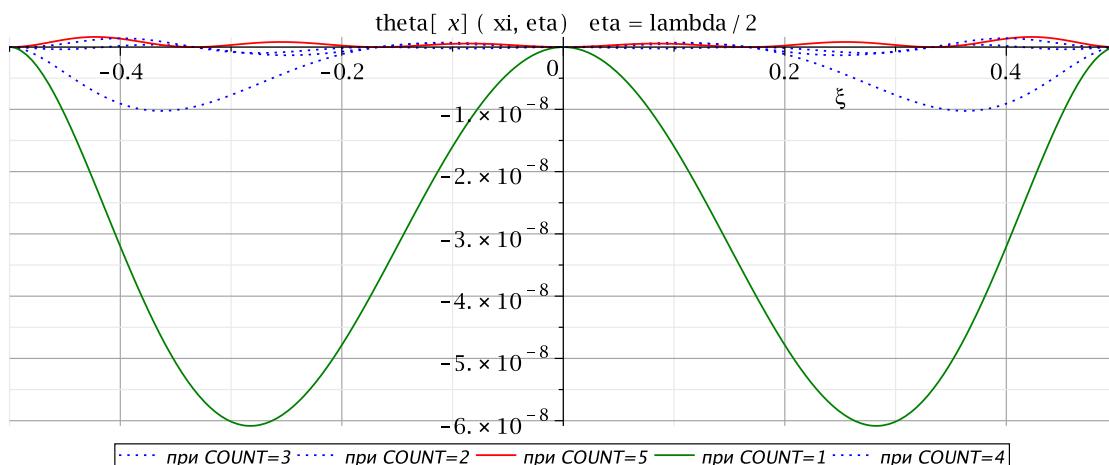


Рис. 11. Функция $\theta_x(\xi, \eta)$ совмещенным методом (3 точки) вдоль $\eta = \frac{\lambda}{2}$

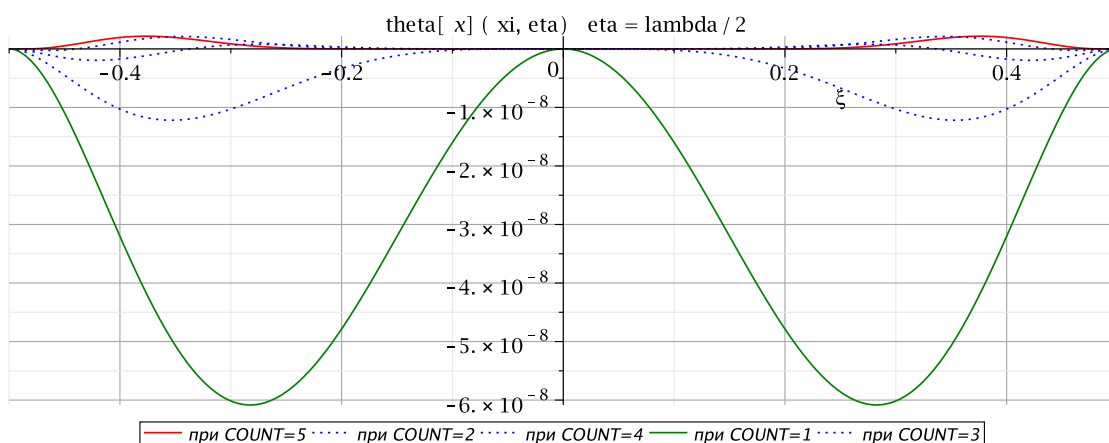


Рис. 12. Функция $\theta_x(\xi, \eta)$ совмещенным методом (10 точек) вдоль $\eta = \frac{\lambda}{2}$

На Рис. 3 изображен график функции $w(\xi, \eta)$ на стороне $\eta = \frac{\lambda}{2}$. Коэффициенты a_n и b_n для данной функции были получены первым методом приближения. Из графика видно, что значения функции на этих краях близки к нулю и при увеличении числа N , некоторые колебания угасают, а сама функция стремится к нулю.

Из графиков на Рис. 4 и Рис. 5 видно, что функция $w(\xi, \eta)$ достигает своего максимального значения в точке $\xi = 0, \eta = 0$, а также, что функция четна по этим переменным. При этом, с увеличением N колебания функции прогиба около нуля уменьшаются (от 10^{-9} порядка до 10^{-10} порядка, учитывая порядок максимального значения 10^{-8}), и, соответственно, становятся незначительнее относительно максимального значения функции.

На Рис. 6 изображена функция прогиба, как и ожидалось, она

куполообразная с максимумом в центральной точке.

Рассмотрим теперь графики функции $\theta_x(\xi, \eta)$ на краях $\eta = \pm \frac{\lambda}{2}$ — они представлены на Рис. 7 и Рис. 8. Во-первых, можно видеть, что они друг другу симметричны относительно горизонтальной оси. Во-вторых, функция $\theta_x(\xi, \eta)$, также как и $w(\xi, \eta)$, близка к нулю и колеблется около него, при этом, при увеличении числа N стремится к нулю.

Приближение методом коллокаций и тремя версиями совмещенного метода дают схожие результаты оценки адекватности построенной модели. Это можно видеть из графиков на Рис. 9 – Рис. 12.

Таким образом, по вышеприведенным графикам можно сделать вывод, что, во-первых, модель адекватна, т. е. четность функции прогиба по обоим переменным и соблюдается приближенное удовлетворение граничным условиям на краях $\eta = \pm \frac{\lambda}{2}$ вне зависимости метода приближения, а, во-вторых, что при увеличении числа N точность решения возрастает.

3.4 Оценка точности построенного решения

Чтобы оценить точность решения, необходимо сравнить полученные значения с известными результатами, полученными другими методами.

В [16] приведены значения для функции прогиба $w(\xi, \eta)$ в центре пластинки, для функции изгибающего момента $M_x(\xi, \eta)$ на двух краях $\eta = \pm \frac{\lambda}{2}$ пластинки и для функции изгибающего момента $M_y(\xi, \eta)$ на двух других краях пластинки $\xi = \pm \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) &= 0.00126 qa^4/D, \\ M_x(\xi, \eta) &= -0.0513 qa^2, \\ M_y(\xi, \eta) &= -0.0513 qa^2, \end{aligned}$$

Далее приведены расчеты этих функций в этих же точках (на этих же линиях). Расчеты построенных методов производились для $N = \overline{1, 100}$.

Из приведенных таблиц 1–5 для каждого метода приближения видно, что значения функций изгибающих моментов на выбранных сторонах и функции прогиба пластинки совпадают со значениями из [16], а это означает, что решение поставленной задачи построено верно. При этом,

стоит отметить, что при увеличении числа N каждый метод приближения позволяет строить все более точное решение.

N	$w(\xi, \eta) \cdot D/qa^4$	$M_x(\xi, \eta)/qa^2$	$M_y(\xi, \eta)/qa^2$
5	0.00126499684608	-0.051317040391171	-0.051321857226716
30	0.00126531596073	-0.051333634741061	-0.051333638978046
50	0.00126531851661	-0.051333742370850	-0.051333742541150
80	0.00126531897300	-0.051333760550218	-0.051333760711342
100	0.00126531903649	-0.051333762960954	-0.051333762935744

Таблица 1. Расчет для приближения методом Тейлора

N	$w(\xi, \eta) \cdot D/qa^4$	$M_x(\xi, \eta)/qa^2$	$M_y(\xi, \eta)/qa^2$
5	0.00126499796808	-0.051317112987484	-0.051321894955609
30	0.00126531663030	-0.051333663528654	-0.051333666316167
50	0.00126531884458	-0.051333755686936	-0.051333755646854
80	0.00126531908329	-0.051333764629694	-0.051333764624905
100	0.00126531908748	-0.051333765824308	-0.051333764741009

Таблица 2. Расчет для приближения методом коллокаций

N	$w(\xi, \eta) \cdot D/qa^4$	$M_x(\xi, \eta)/qa^2$	$M_y(\xi, \eta)/qa^2$
5	0.00126533016647	-0.051357247688719	-0.051332956320794
30	0.00126531838617	-0.051333736406066	-0.051333736812611
50	0.00126531899963	-0.051333761725799	-0.051333761669471
80	0.00126531906595	-0.051333763956173	-0.051333763950121
100	0.00126531907323	-0.051333764190626	-0.051333764189160

Таблица 3. Расчет для приближения совмещенным методом (2 точки)

N	$w(\xi, \eta) \cdot D/qa^4$	$M_x(\xi, \eta)/qa^2$	$M_y(\xi, \eta)/qa^2$
5	0.00126468632412	-0.051209524055809	-0.051314086617793
30	0.00126531892638	-0.051333758852183	-0.051333758804650
50	0.00126531906041	-0.051333763878860	-0.051333763855829
80	0.00126531908295	-0.051333764618785	-0.051333764613705
100	0.00126531908441	-0.051333764639731	-0.051333764637930

Таблица 4. Расчет для приближения совмещенным методом (3 точки)

N	$w(\xi, \eta) \cdot D/qa^4$	$M_x(\xi, \eta)/qa^2$	$M_y(\xi, \eta)/qa^2$
5	0.00126511865845	-0.051324330078126	-0.051326118489583
30	0.00126531909835	-0.051333765332664	-0.051333765320029
50	0.00126531908715	-0.051333764739937	-0.051333764738691
80	0.00126531908693	-0.051333764718979	-0.051333764718905
100	0.00126531908713	-0.051333764726472	-0.051333764726437

Таблица 5. Расчет для приближения совмещенным методом (10 точек)

3.5 Сравнение построенных алгоритмов приближения

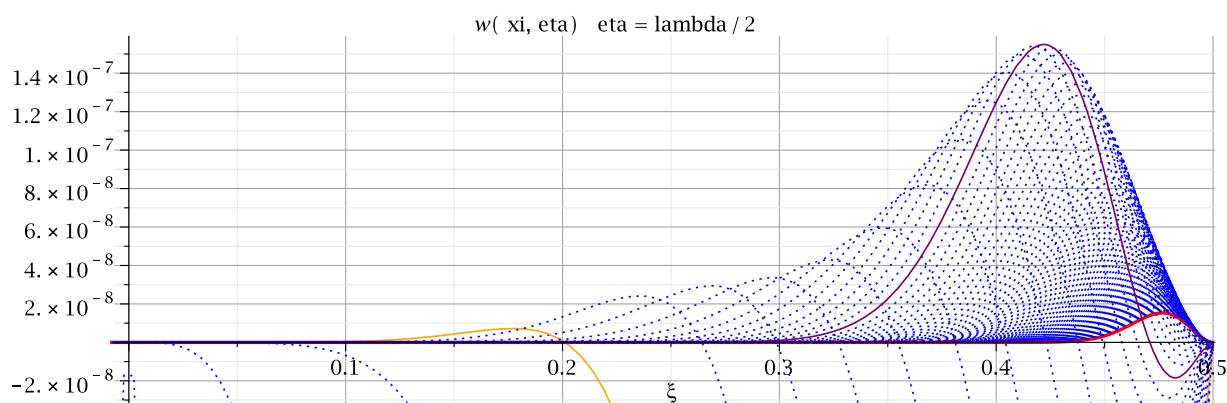


Рис. 13. Прогиб пластинки методом Тейлора на стороне $\eta = \frac{\lambda}{2}$

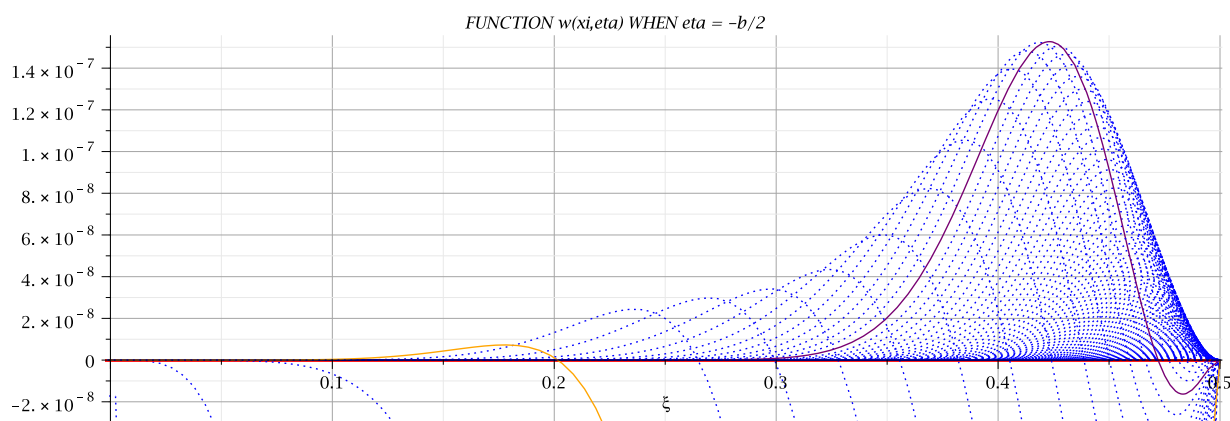


Рис. 14. Прогиб пластинки методом коллокаций на стороне $\eta = \frac{\lambda}{2}$

Выше было не раз отмечено, что каждый построенный и реализованный алгоритм приближения увеличивает точность решения с увеличением N . Однако необходимо сравнить алгоритмы между собой.

За функционал качества построенных алгоритмов приближения

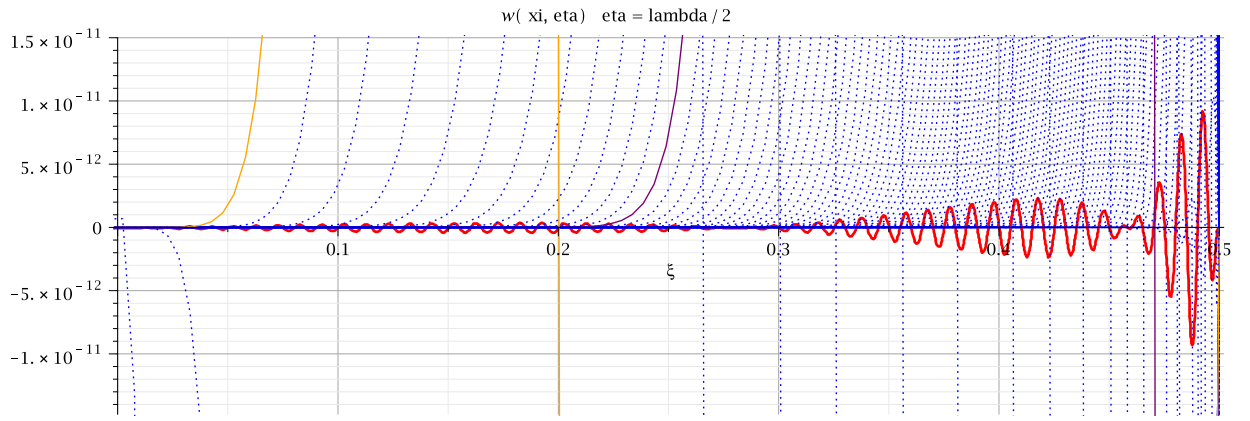


Рис. 15. Прогиб пластинки методом коллокаций на стороне $\eta = \frac{\lambda}{2}$ (с масштабom)

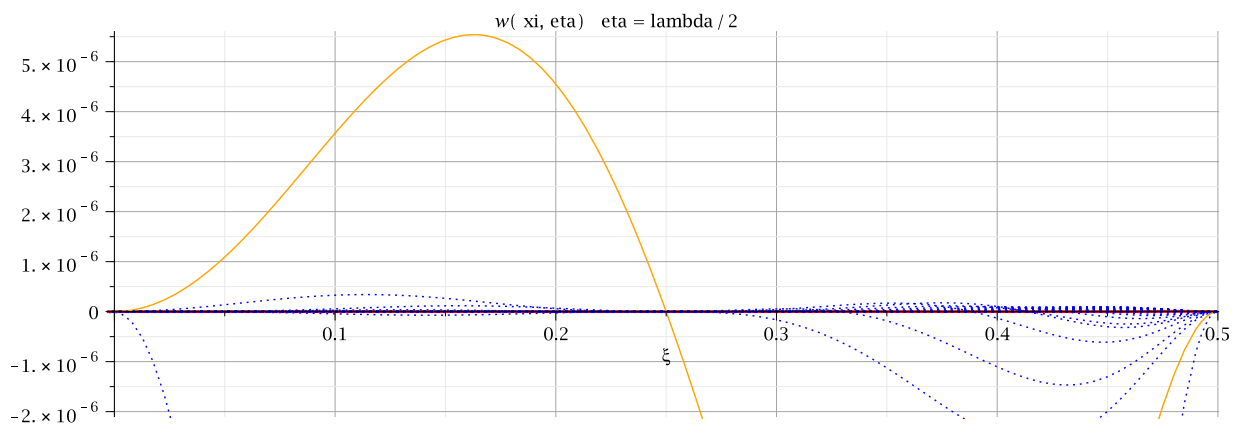


Рис. 16. Прогиб пластинки совмещенным методом (2 точки) на стороне $\eta = \frac{\lambda}{2}$

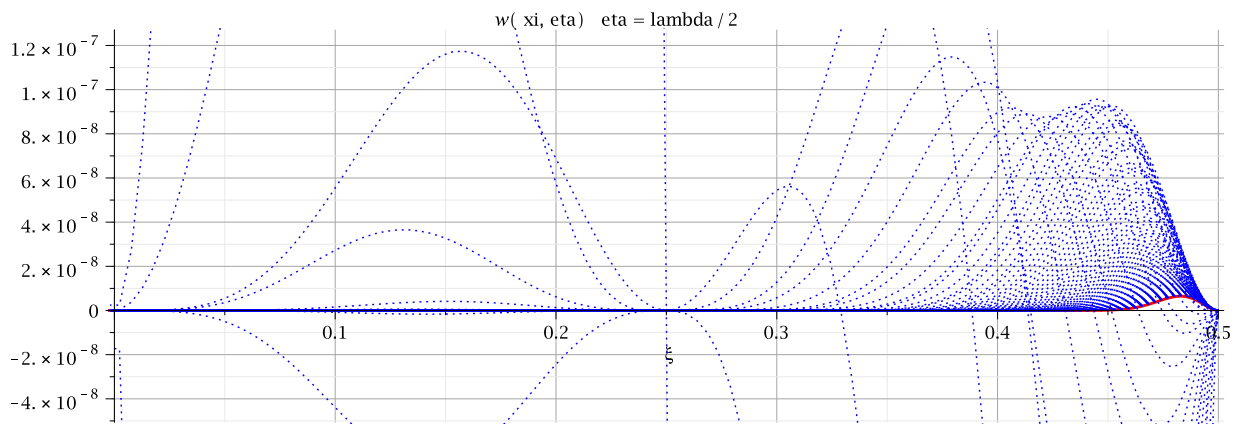


Рис. 17. Прогиб пластинки совмещенным методом (2 точки) на стороне $\eta = \frac{\lambda}{2}$ (с масштабom)

можно принять сумму квадратов значений функции прогиба $w(\xi, \eta)$ на всем крае $\eta = \frac{\lambda}{2}$ — так как на этом краю реальное значение этой функции равно нулю, то значение такого функционала покажет качество работы алгоритмов.

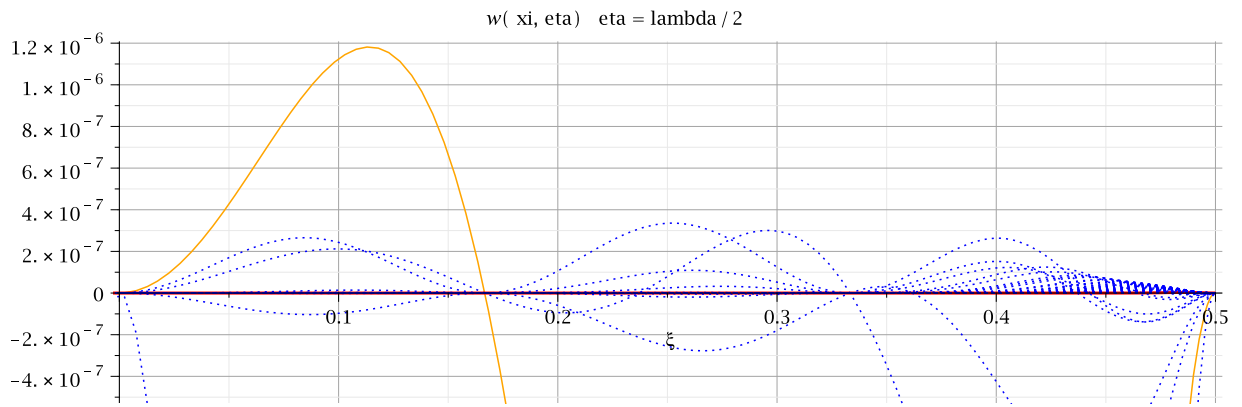


Рис. 18. Прогиб пластинки совмещенным методом (3 точки) на стороне $\eta = \frac{\lambda}{2}$

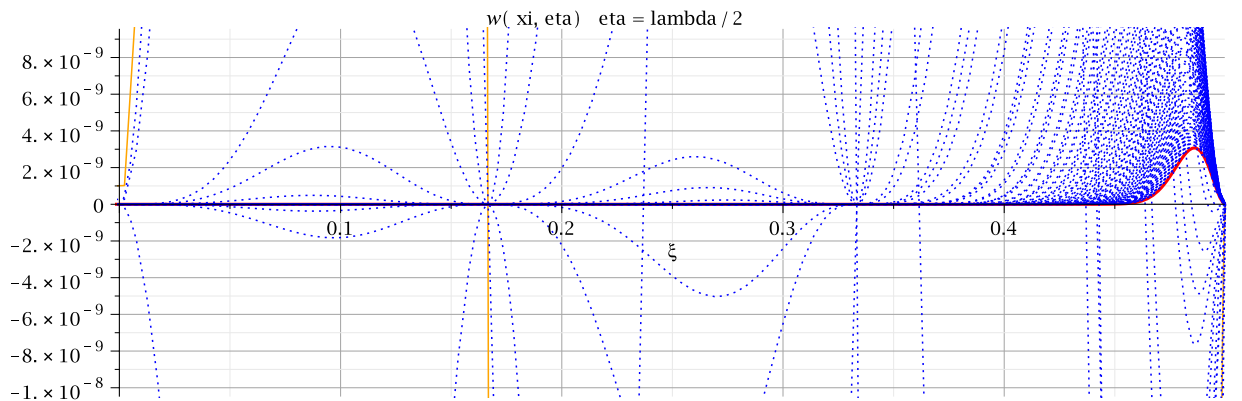


Рис. 19. Прогиб пластинки совмещенным методом (3 точки) на стороне $\eta = \frac{\lambda}{2}$ (с масштабом)

На Рис. 13 изображен масштабированный график прогиба $w(\xi, \eta)$ пластинки на том краю, где граничные условия были удовлетворены приближенно методом Тейлора. Красной линией на этом графике представлен прогиб при $N = 100$, пурпурной линией — максимальное отклонение от нуля над осью ξ , получившееся при $N = 16$, оранжевой линией — первое отклонение от нуля над осью ξ , получившееся при $N = 4$. Очевидно, что взяв $N > 100$, отклонение от нуля будет еще меньше.

На Рис. 14 тоже изображен график прогиба с тем же масштабом, но приближение осуществлялось методом коллокаций, и аналогичными цветами выделены: первое отклонение над осью (оранжевый, при $N = 4$), максимальное отклонение над осью (пурпурный при $N = 16$), и красной — при $N = 100$. График наглядно показывает, что на больших N приближение методом коллокаций дает результат лучше, чем приближение методом Тейлора, что можно проверить посчитав предложенный функционал качества. На Рис. 15 можно видеть порядок

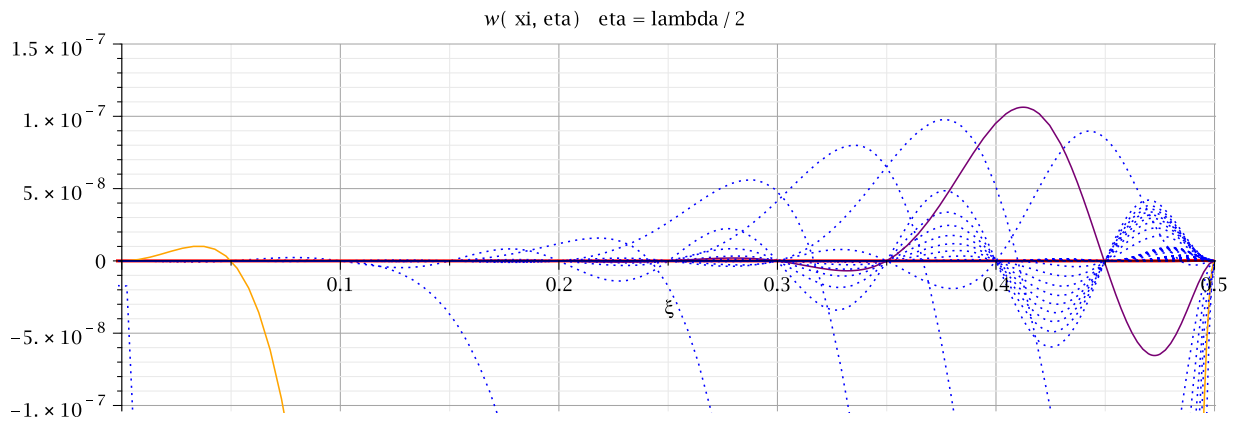


Рис. 20. Прогиб пластинки совмещенным методом (10 точек) на стороне $\eta = \frac{\lambda}{2}$

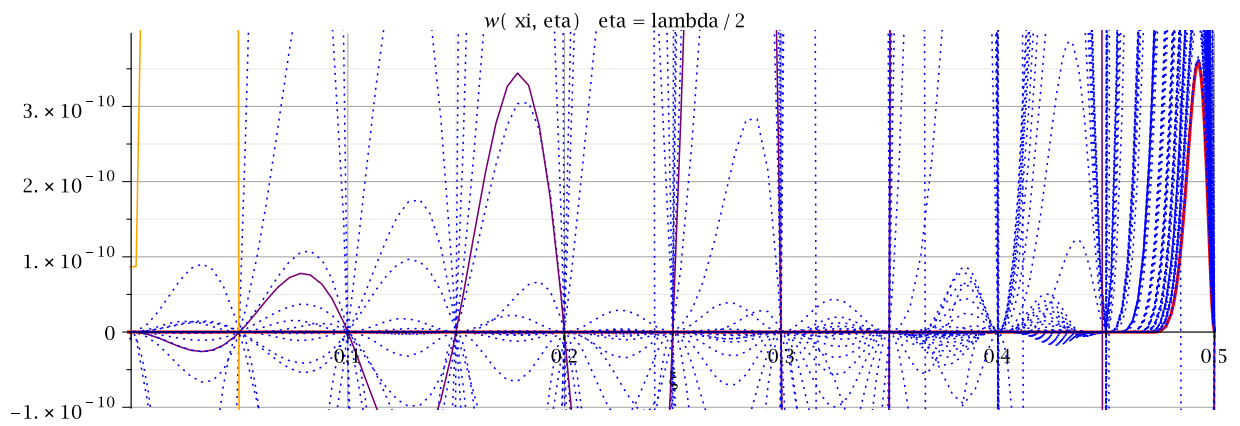


Рис. 21. Прогиб пластинки совмещенным методом (10 точек) на стороне $\eta = \frac{\lambda}{2}$ (с масштабom)

колебания функции прогиба при $N = 100$ на этом же краю около нуля.

На Рис. 16 изображен график прогиба пластинки на том же краю построенного с помощью совмещенного метода (2 точки). Из графика видно, что при малых значениях $N = 1, 2$ значение функционала качества существенно больше двух первых методов ($N = 2$ — оранжевая линия), однако, как видно из Рис. 17, при увеличении N этот метод показывает себя лучше метода разложения в ряды Тейлора в одной точке, но хуже метода коллокаций.

Аналогичный результат получается, если раскладывать в ряды Тейлора в трех точках в совмещенном методе (Рис. 18): при малых N значение функционала качества должно быть больше, чем в разложении рядами Тейлора в одной точке и в методе коллокаций, но меньше, чем в разложении в двух точках. При этом из Рис. 19 видно, что разложение в трех точках больших N даст результат лучше, чем разложение в меньшем

количестве точек, но хуже, чем метод коллокаций.

На Рис. 20 показан график прогиба $w(\xi, \eta)$ на том же крае и с тем же масштабом, что и на Рис. 13 и Рис. 14. Оранжевым цветом также показан график первого отклонения от нуля над осью, которое произошло при $N = 2$, пурпурным цветом — максимальное отклонение от нуля над осью (при $N = 8$), а красным цветом — график при $N = 100$. Видно, что этот метод при маленьких N дает результат приближения лучше всех остальных методов. Однако, на Рис. 21 показан порядок отклонения функции от нуля при $N = 100$. Из этого можно сделать вывод, при больших N совмещенный метод с разложением в десяти точках дает лучшее приближение по сравнению с методом Тейлора, и разложением в ряды в меньшем количестве точек, и при этом почти на порядок худшее приближение по сравнению с методом коллокаций (что подтвердится предложенным функционалом качества).

Приведенное выше сравнение качества алгоритмов приближения показывает, метод коллокаций среди построенных алгоритмов при $N = 100$ дает лучший результат приближения. Очевидно, что увеличив число равноотстоящих точек, в которых будем раскладывать в ряды Тейлора левые и правые части системы (51) в совмещенном методе, можно добиться лучшего приближения по сравнению с методом коллокаций даже при $N = 100$.

При этом можно сделать предположение, что равноотстоящих точек для совмещенного метода понадобится намного меньше по сравнению с методом коллокаций, чтобы добиться лучшего приближения. Также, необходимо отметить, что совмещенный метод начиная с некоторого количества точек (между тремя и десятью) при малых N дает результат точнее, чем разложение методом Тейлора и приближение методом коллокаций.

3.6 Результаты моделирования изгиба пластинки

Особый интерес для исследователей составляют функции изгибающих моментов $M_x(\xi, \eta)$ и $M_y(\xi, \eta)$ и перерезывающих сил $V_x(\xi, \eta)$ и $V_y(\xi, \eta)$ на границах пластинки. Точные значения этих функций на краях и в особенности на углах пластинки неизвестны, поэтому

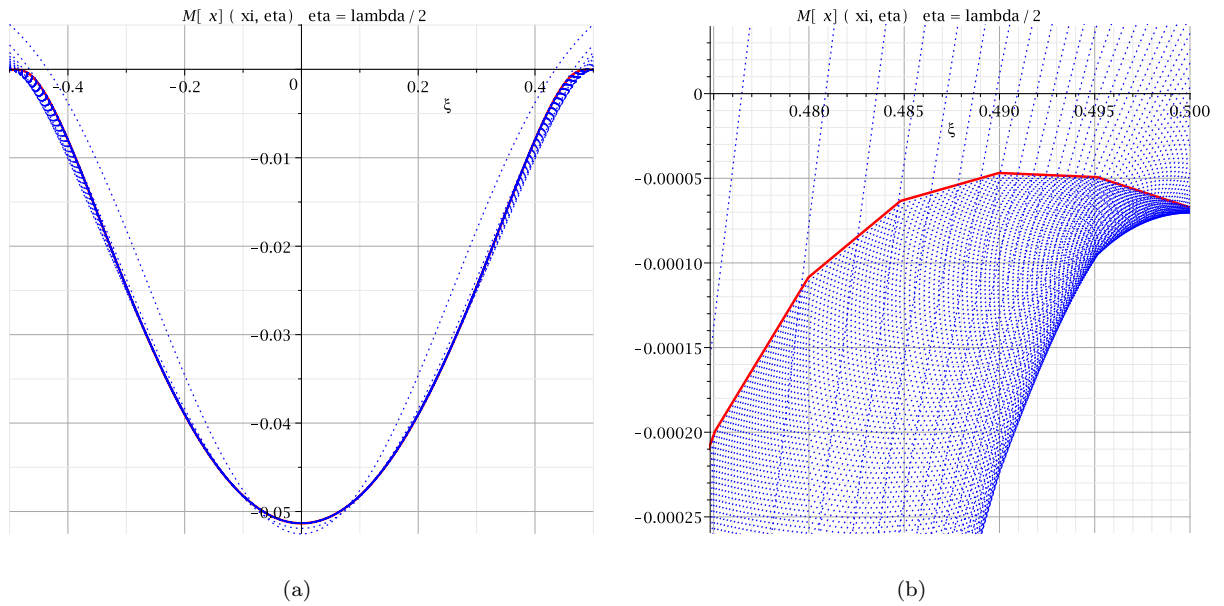


Рис. 22. $M_x(\xi, \eta)$ пластинки методом Тейлора на стороне $\eta = \pm \frac{\lambda}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

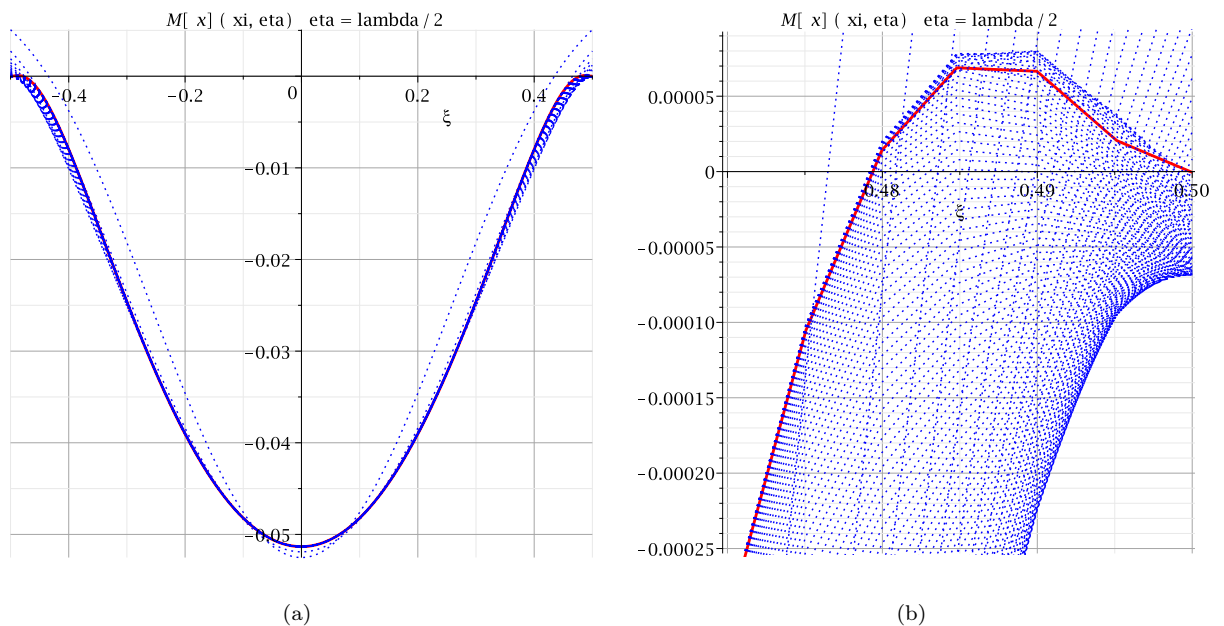


Рис. 23. $M_x(\xi, \eta)$ пластинки методом коллокаций на стороне $\eta = \pm \frac{\lambda}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

построение более точных решений оправдано. Далее в этом параграфе будут приведены расчеты и графики для этих функций, полученные предложенными подходами для приближения (не включая совмещенный метод, основанный на двух точках). Сравнить полученные результаты также можно с работами [7, 24].

На Рис. 22 – Рис. 25 изображены графики функции изгибающего

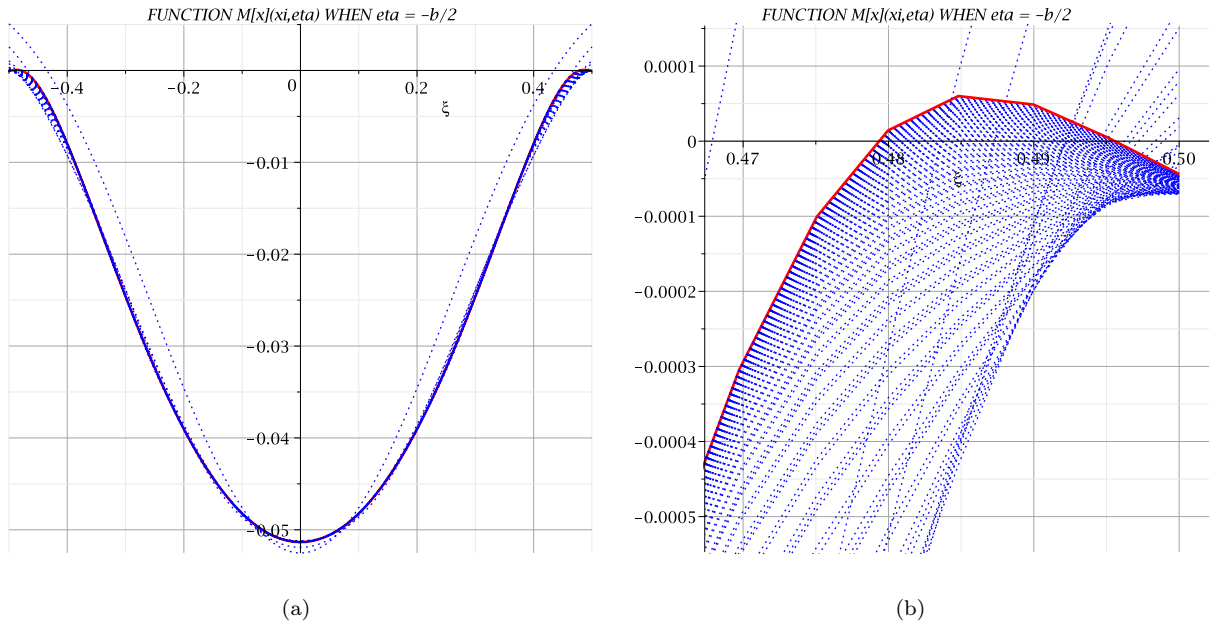


Рис. 24. $M_x(\xi, \eta)$ пластинки совмещенным методом (3 точки) на стороне $\eta = \pm \frac{\lambda}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

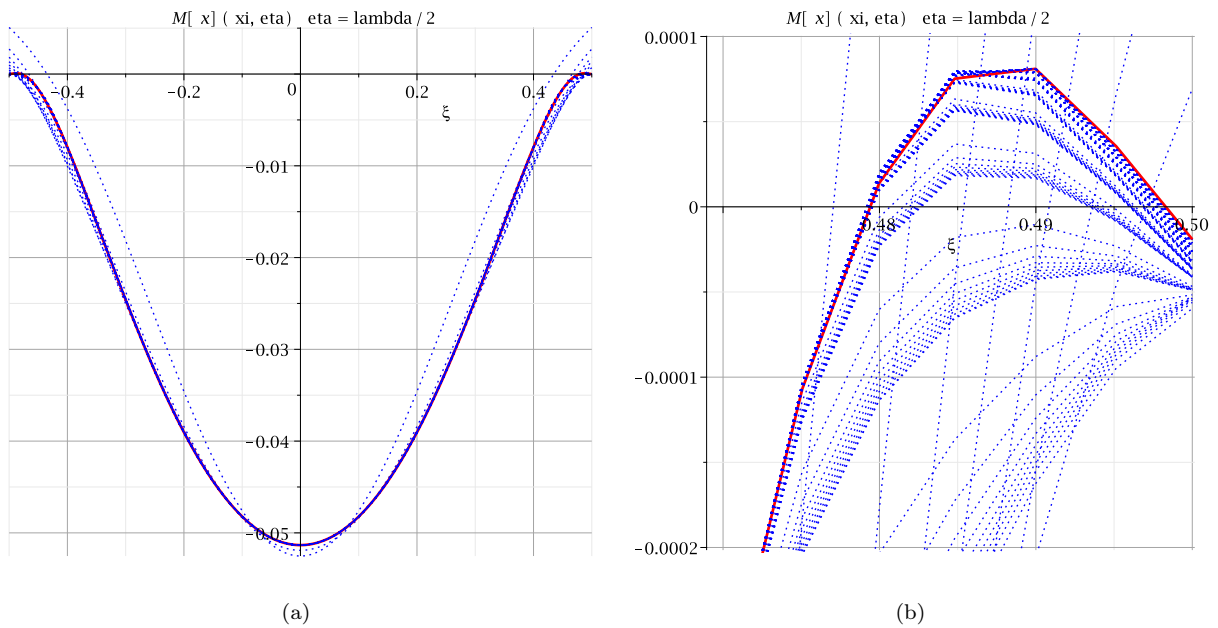
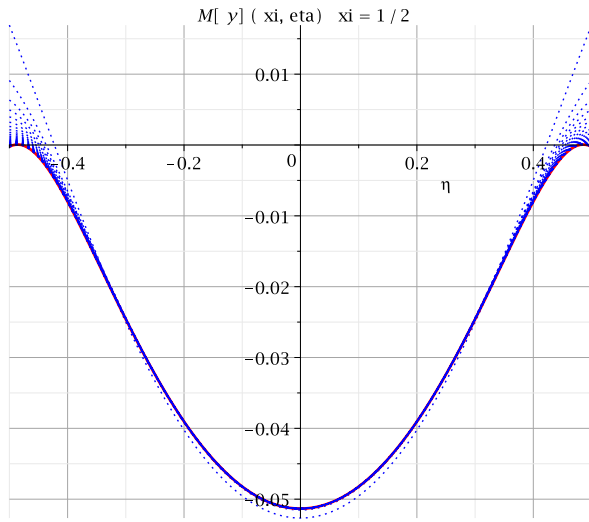


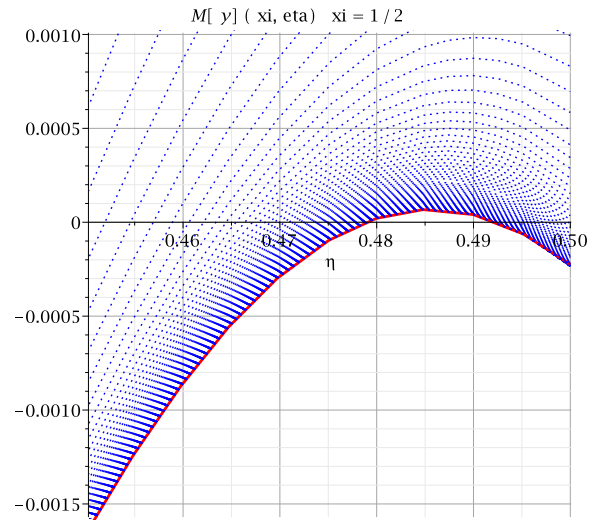
Рис. 25. $M_x(\xi, \eta)$ пластинки совмещенным методом (10 точек) на стороне $\eta = \pm \frac{\lambda}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

момента $M_y(\xi, \eta)$ построенные с использованием каждым алгоритмом приближения. Красными линиями обозначены графики этой функции при $N = 100$.

На Рис. 26 – Рис. 29 изображены графики функции изгибающего момента $M_y(\xi, \eta)$ также построенные с помощью предложенных

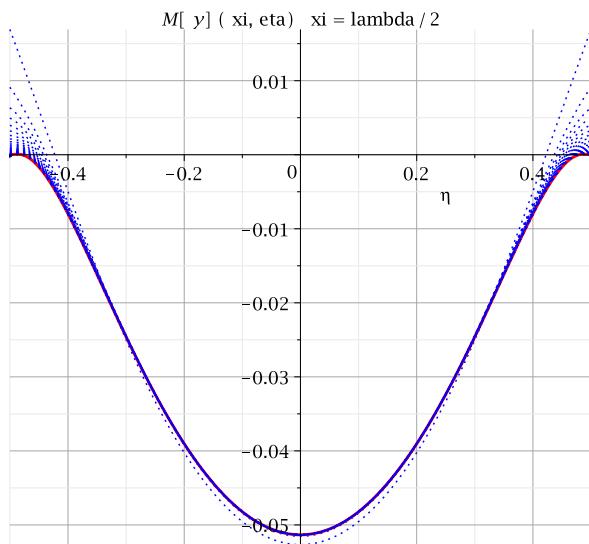


(a)

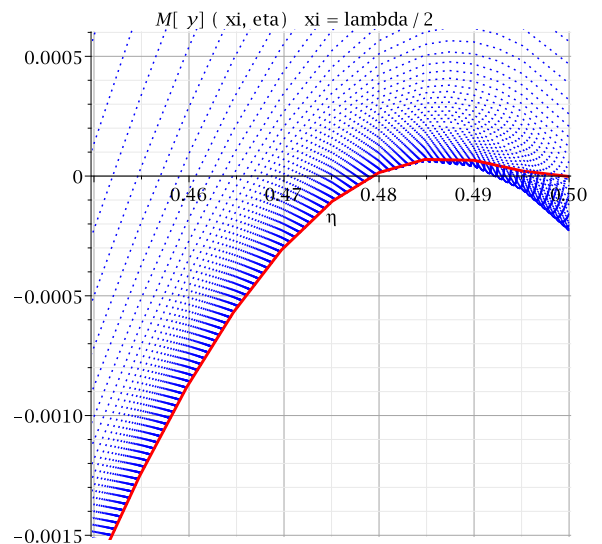


(b)

Рис. 26. $M_y(\xi, \eta)$ пластинки методом Тейлора на стороне $\eta = \pm \frac{1}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки



(a)



(b)

Рис. 27. $M_y(\xi, \eta)$ пластинки методом коллокаций на стороне $\eta = \pm \frac{1}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

алгоритмов.

В таблицах 1–5 были представлены значения функций $M_x(\xi, \eta)$ и $M_y(\xi, \eta)$ на краях $\eta = \pm \frac{\lambda}{2}$ и $\xi = \pm \frac{1}{2}$ соответственно.

На Рис. 39 – Рис. 45 представлены графики функции перерезывающей силы $V_x(\xi, \eta)$, полученные при приближении рассматриваемыми алгоритмами. Красная линия также обозначает график

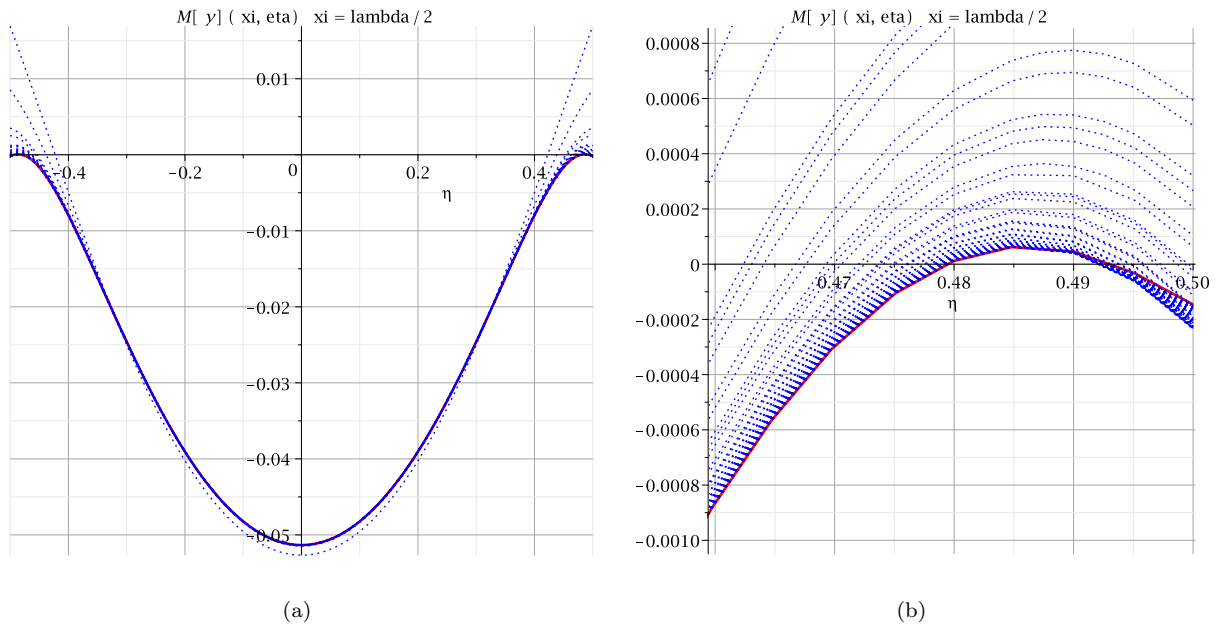


Рис. 28. $M_y(\xi, \eta)$ пластинки совмещенным методом (3 точки) на стороне $\eta = \pm \frac{1}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

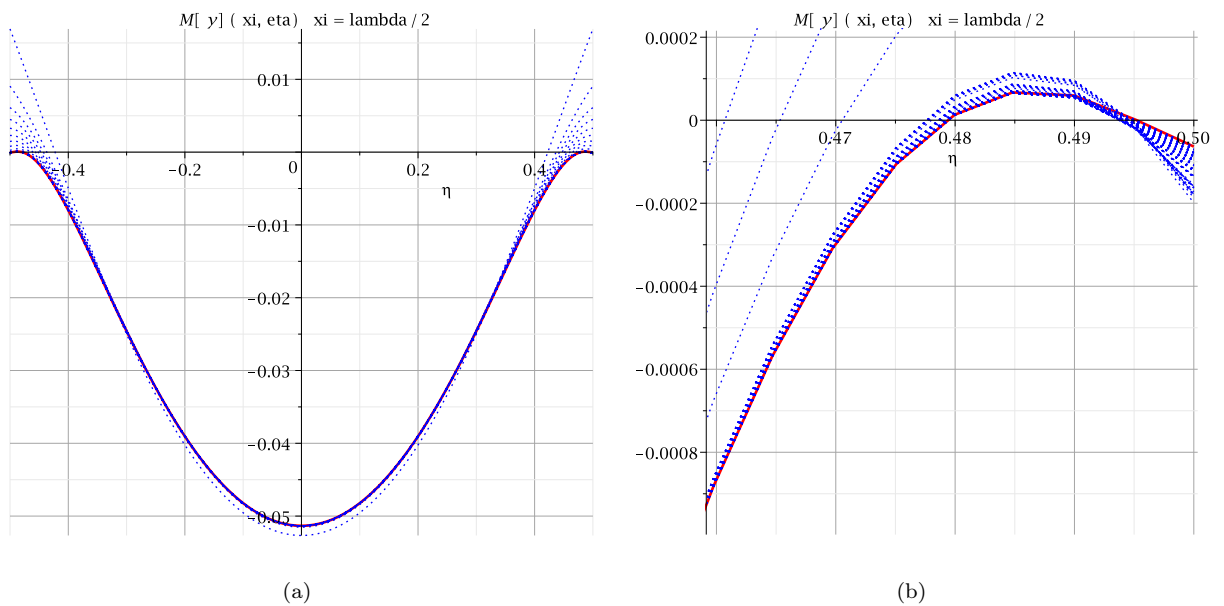


Рис. 29. $M_y(\xi, \eta)$ пластинки совмещенным методом (10 точек) на стороне $\eta = \pm \frac{1}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

функции при $N = 100$.

В таблицах 6–9 представлены значения функций перерезывающих сил $V_x(\xi, \eta)$ и $V_y(\xi, \eta)$ на краях $\xi = \pm \frac{1}{2}$ и $\eta = \pm \frac{\lambda}{2}$ соответственно.

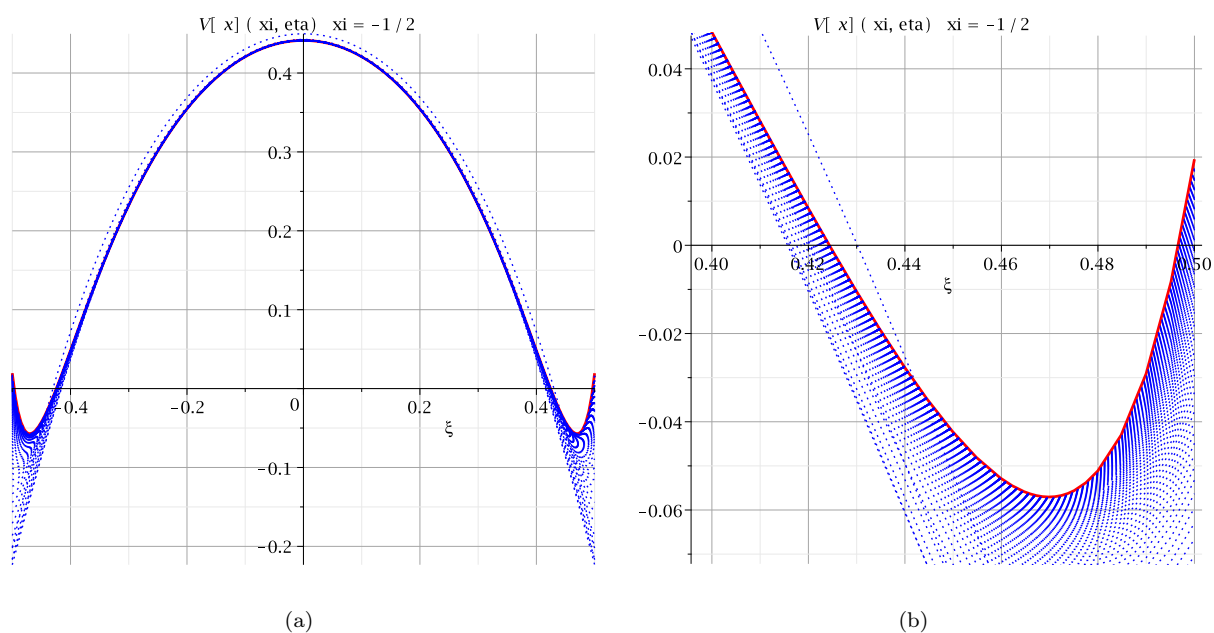


Рис. 30. $V_x(\xi, \eta)$ пластинки методом Тейлора на стороне $\xi = -\frac{1}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

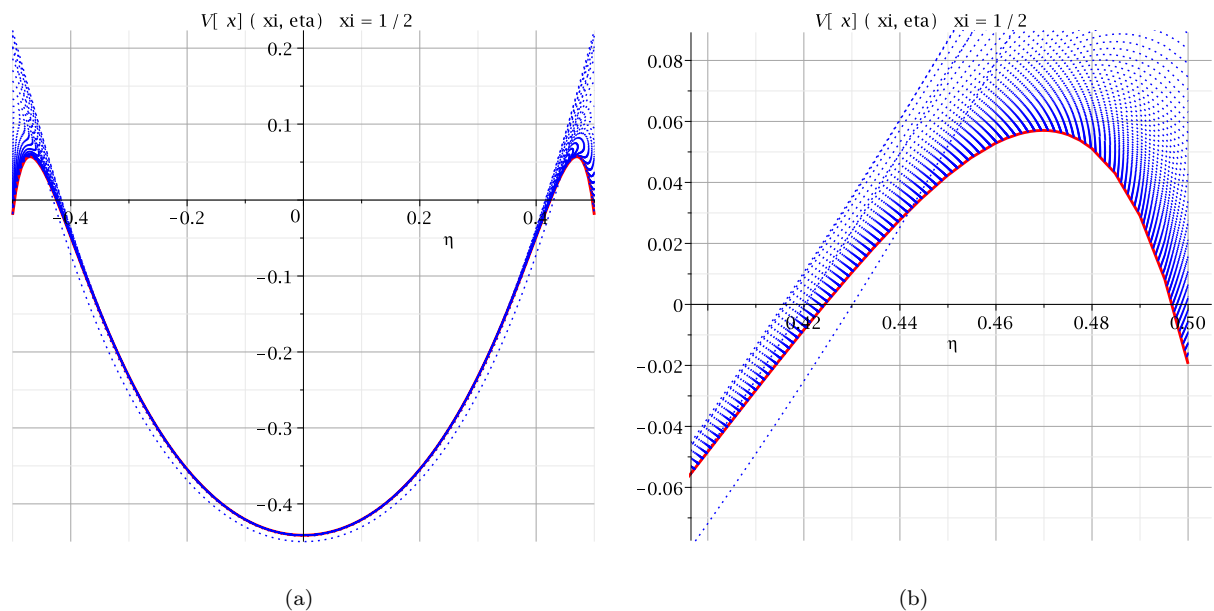


Рис. 31. $V_x(\xi, \eta)$ пластинки методом Тейлора на стороне $\xi = \frac{1}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

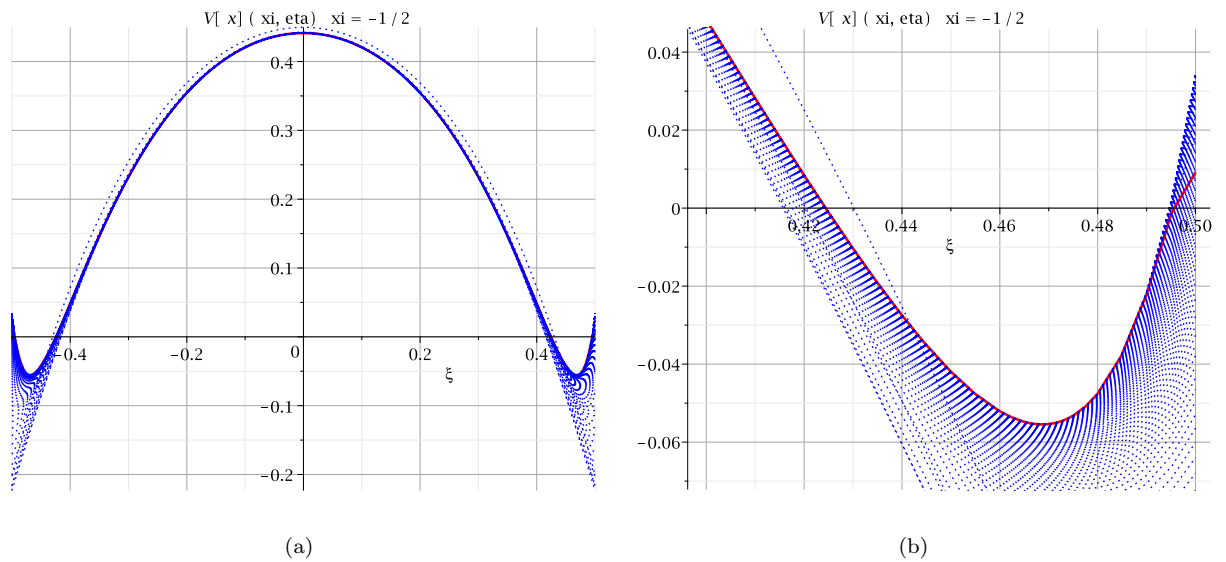


Рис. 32. $V_x(\xi, \eta)$ пластинки методом коллокаций на стороне $\xi = -\frac{1}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

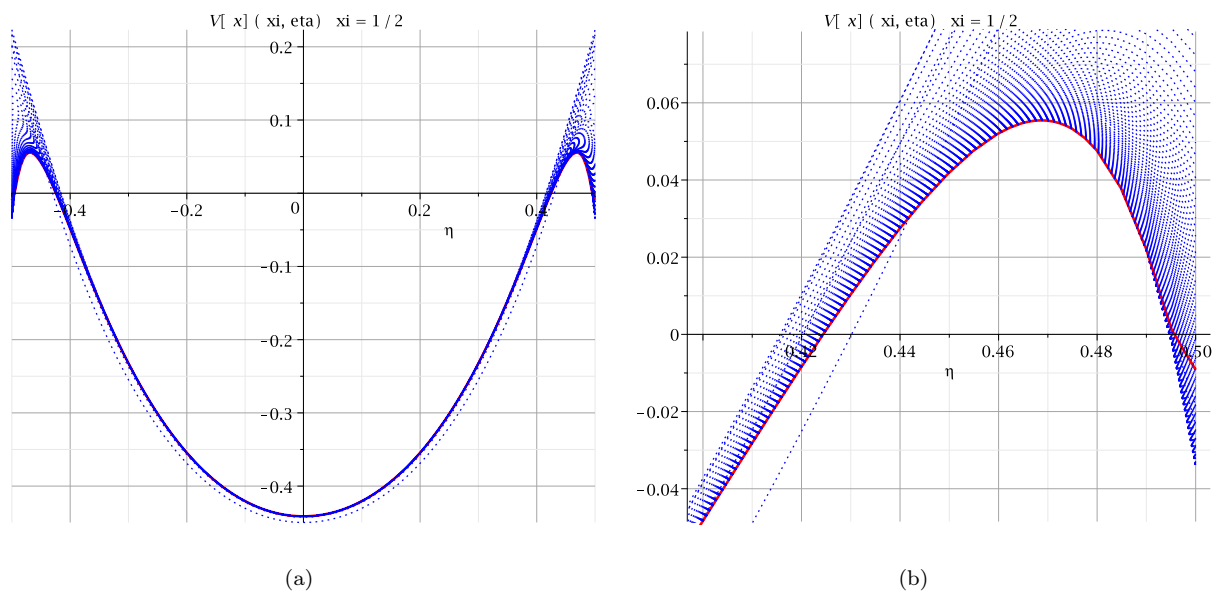
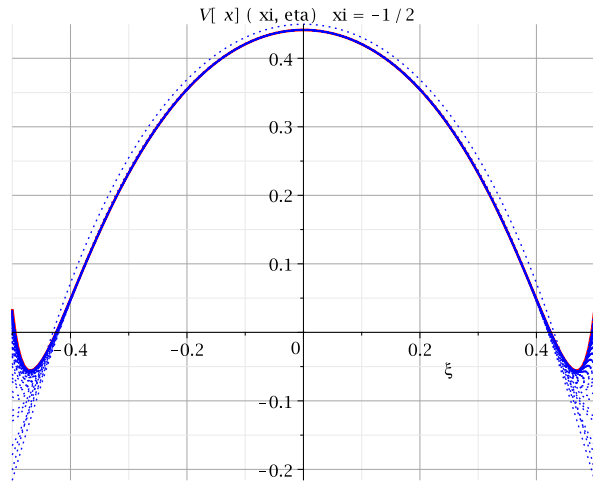


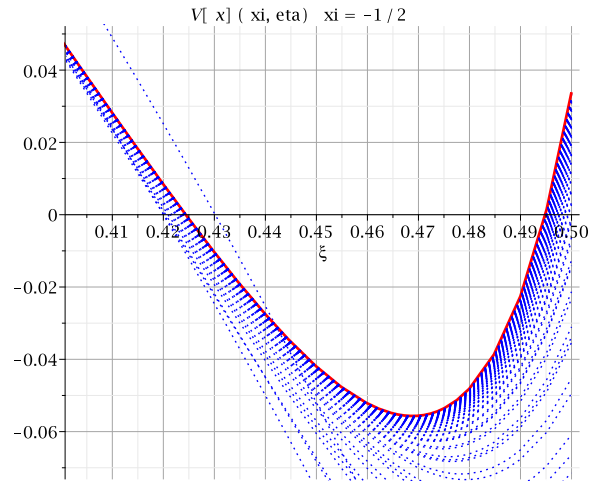
Рис. 33. $V_x(\xi, \eta)$ пластинки методом коллокаций на стороне $\xi = \frac{1}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

N	$V_x(\xi, \eta) / qa$	$V_y(\xi, \eta) / qa$
5	± 0.44135291132982933	± 0.44143899829954388
30	± 0.44130208604378361	± 0.44130224445840237
50	± 0.44130140782059911	± 0.44130143167020891
80	± 0.44130122196039264	± 0.44130122601273154
100	± 0.44130118748131722	± 0.44130118918327741

Таблица 6. Расчет для приближения методом Тейлора

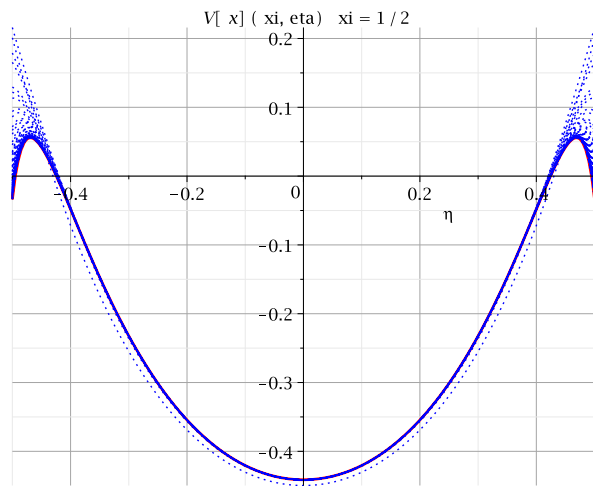


(a)

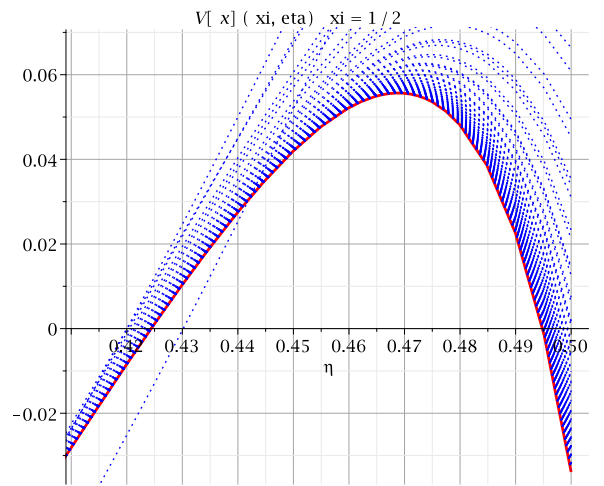


(b)

Рис. 34. $V_x(\xi, \eta)$ пластинки совмещенным методом (3 точки) на стороне $\xi = -\frac{1}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки



(a)



(b)

Рис. 35. $V_x(\xi, \eta)$ пластинки совмещенным методом (3 точки) на стороне $\xi = \frac{1}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

N	$V_x(\xi, \eta) / qa$	$V_y(\xi, \eta) / qa$
5	± 0.44135274247733421	± 0.44143829394255102
30	± 0.44130194056859501	± 0.44130206229370819
50	± 0.44130129217058742	± 0.44130130214710113
80	± 0.44130115371243747	± 0.44130115383617085
100	± 0.44130114764613412	± 0.44130518134663447

Таблица 7. Расчет для приближения методом коллокаций

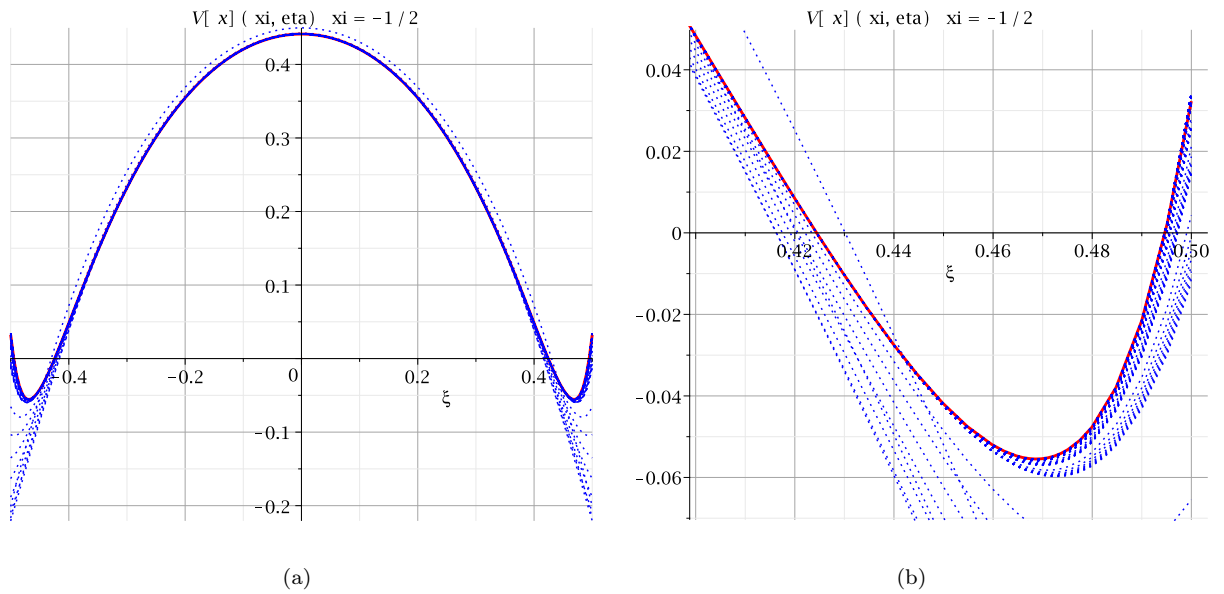


Рис. 36. $V_x(\xi, \eta)$ пластинки совмещенным методом (10 точек) на стороне $\xi = -\frac{1}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

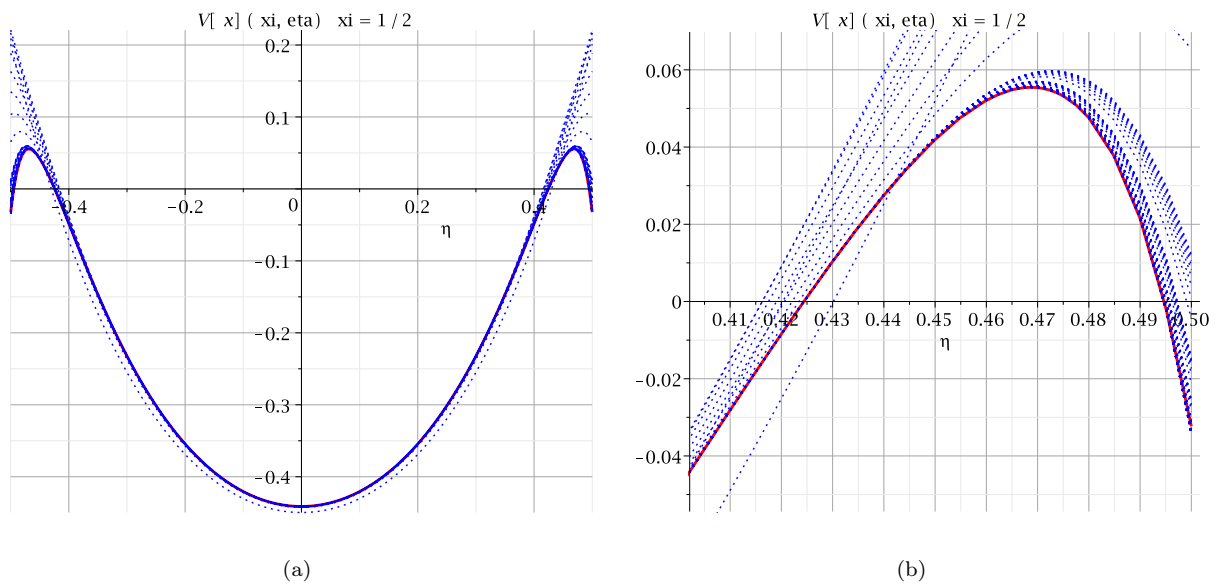
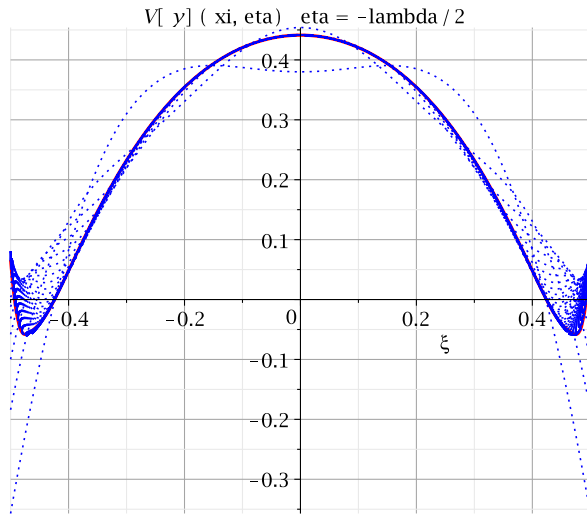


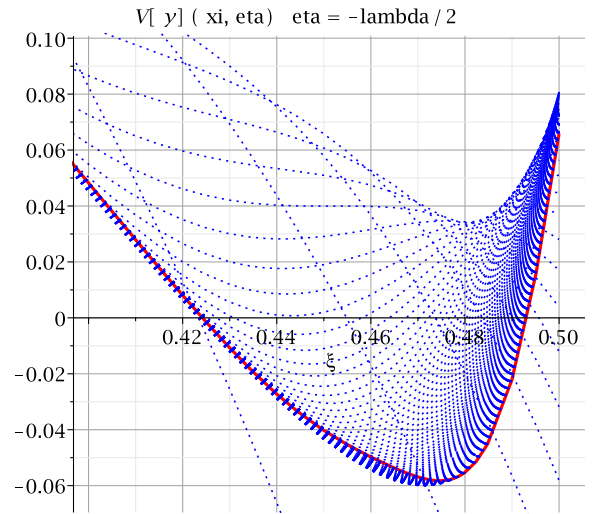
Рис. 37. $V_x(\xi, \eta)$ пластинки совмещенным методом (10 точек) на стороне $\xi = \frac{1}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

N	$V_x(\xi, \eta) / qa$	$V_y(\xi, \eta) / qa$
5	± 0.44123418885718421	± 0.44570319394514344
30	± 0.44130125252097399	± 0.44130125857966327
50	± 0.44130117526630928	± 0.44130117622863519
80	± 0.44130115405877634	± 0.44130115419354609
100	± 0.44130115055301562	± 0.44130115060453695

Таблица 8. Расчет для приближения совмещенным методом (3 точки)

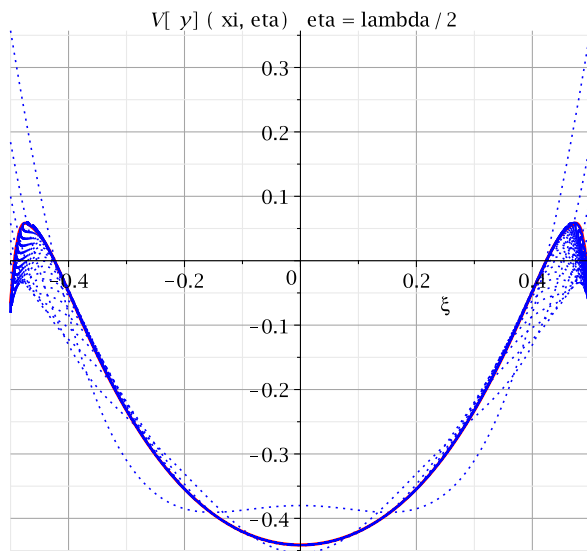


(a)

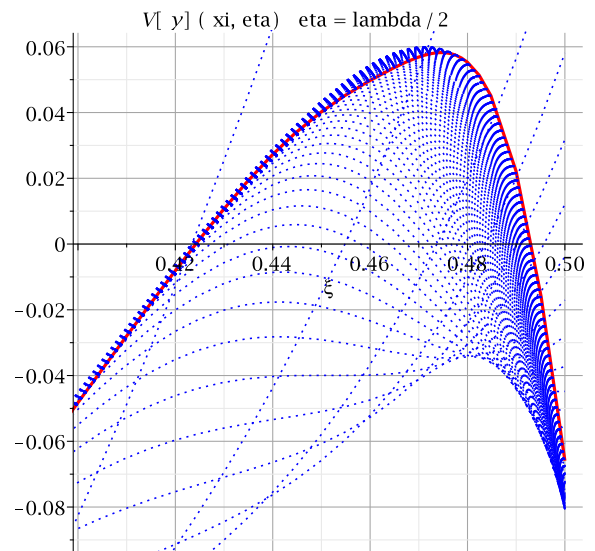


(b)

Рис. 38. $V_y(\xi, \eta)$ пластинки методом Тейлора на стороне $\xi = -\frac{\lambda}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки



(a)



(b)

Рис. 39. $V_y(\xi, \eta)$ пластинки методом Тейлора на стороне $\xi = \frac{1}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

N	$V_x(\xi, \eta) / qa$	$V_y(\xi, \eta) / qa$
5	± 0.44133814498875355	± 0.44138690483419811
30	± 0.44130115597221851	± 0.44130115629927892
50	± 0.44130114871855957	± 0.44130114873457008
80	± 0.44130114785897516	± 0.44130114786085934
100	± 0.44130114775717785	± 0.44130114775804973

Таблица 9. Расчет для приближения совмещенным методом (10 точек)

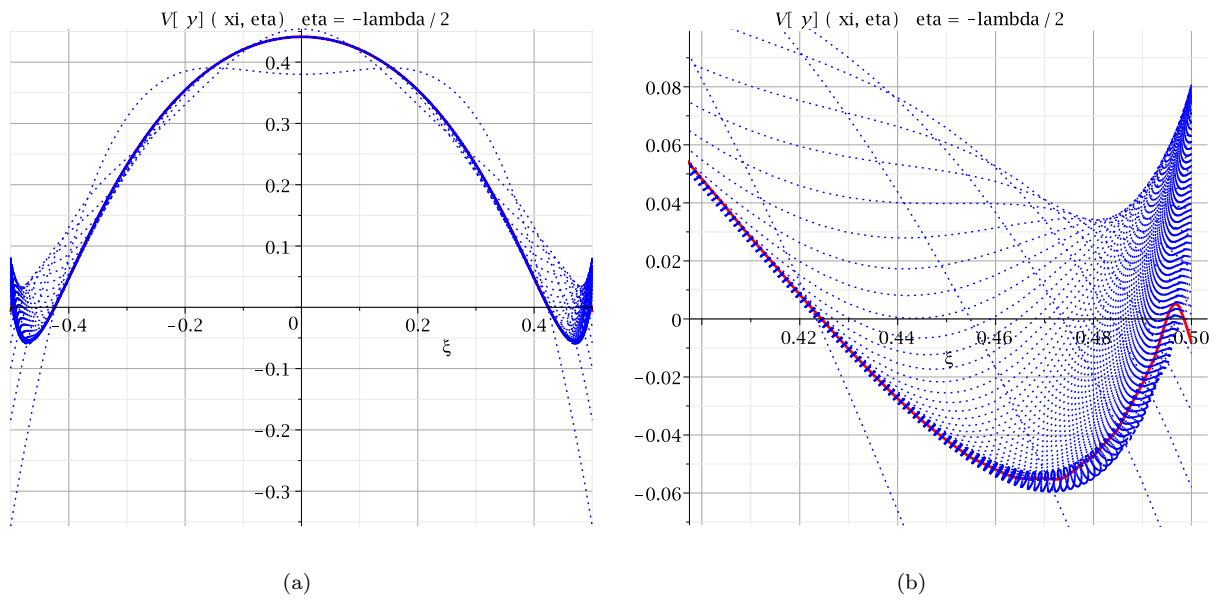


Рис. 40. $V_y(\xi, \eta)$ пластинки методом коллокаций на стороне $\xi = -\frac{1}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

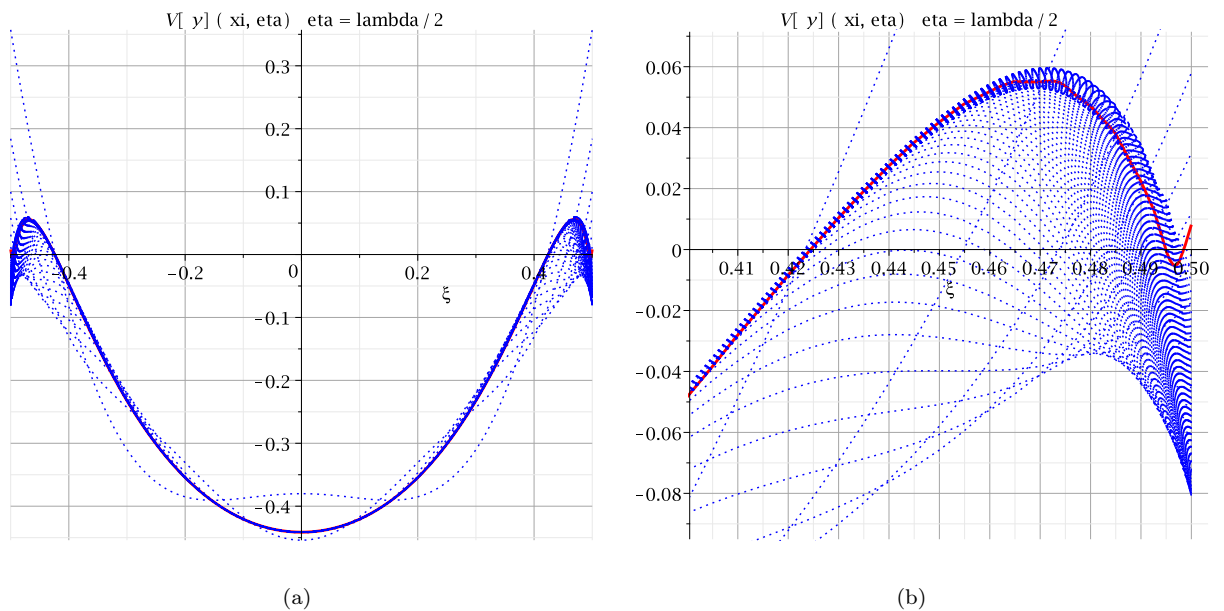


Рис. 41. $V_y(\xi, \eta)$ пластинки методом коллокаций на стороне $\xi = \frac{1}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

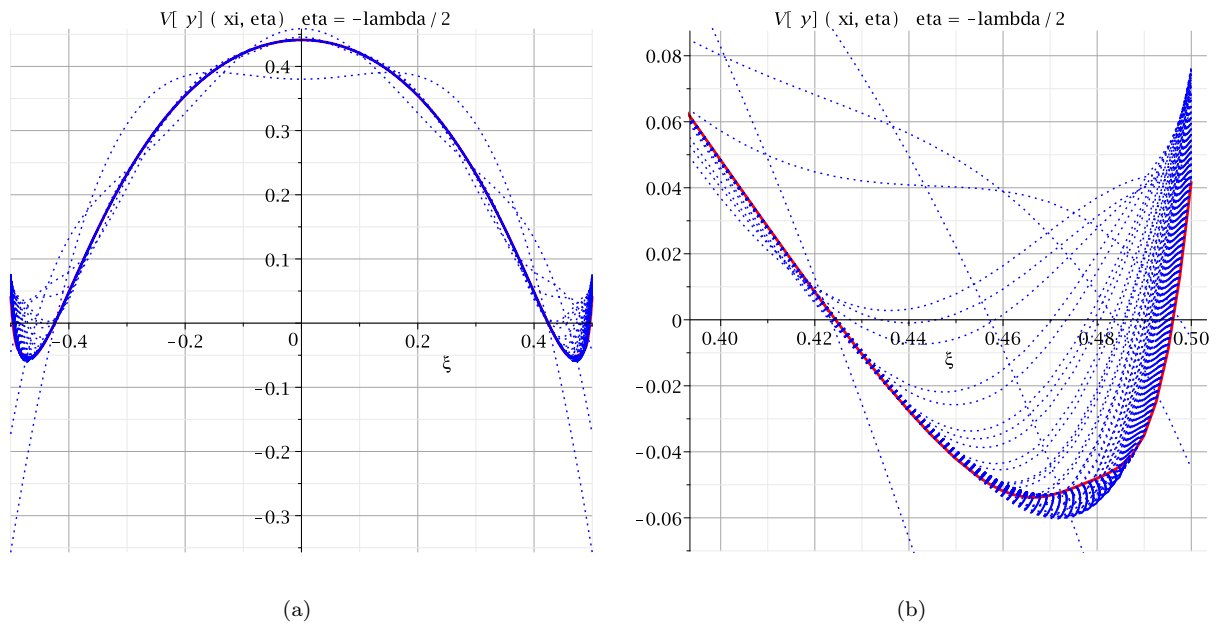


Рис. 42. $V_y(\xi, \eta)$ пластинки совмещенным методом (3 точки) на стороне $\xi = -\frac{\lambda}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

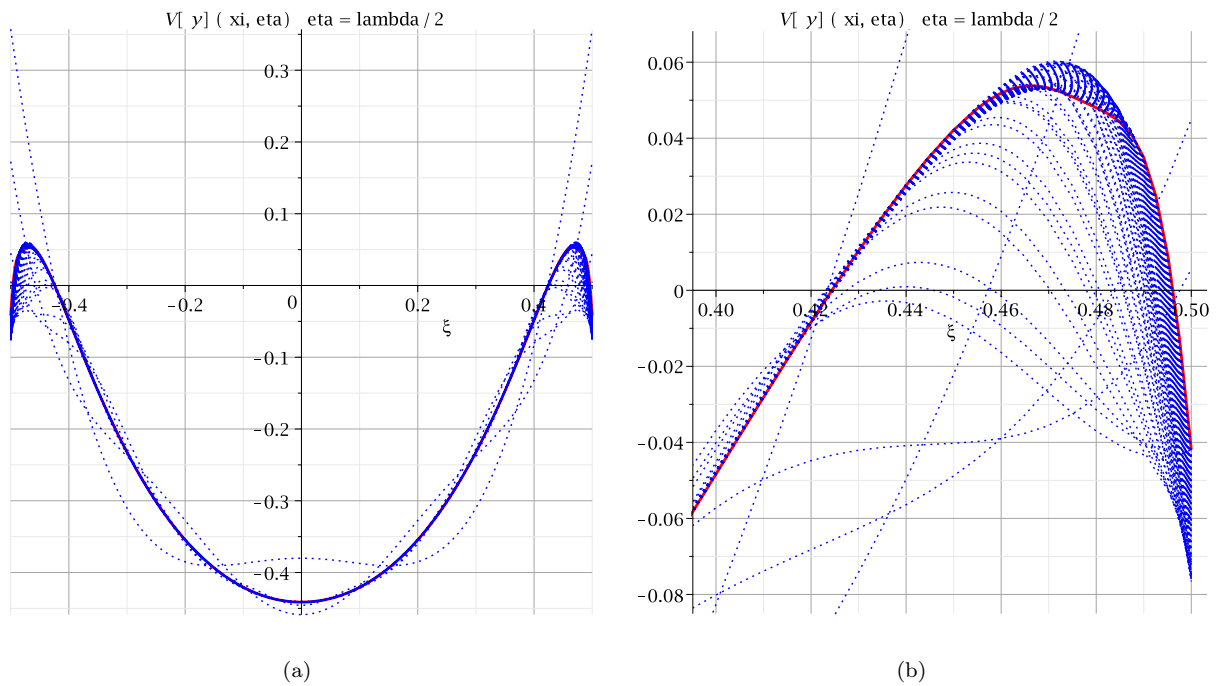


Рис. 43. $V_y(\xi, \eta)$ пластинки совмещенным методом (3 точки) на стороне $\xi = \frac{\lambda}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

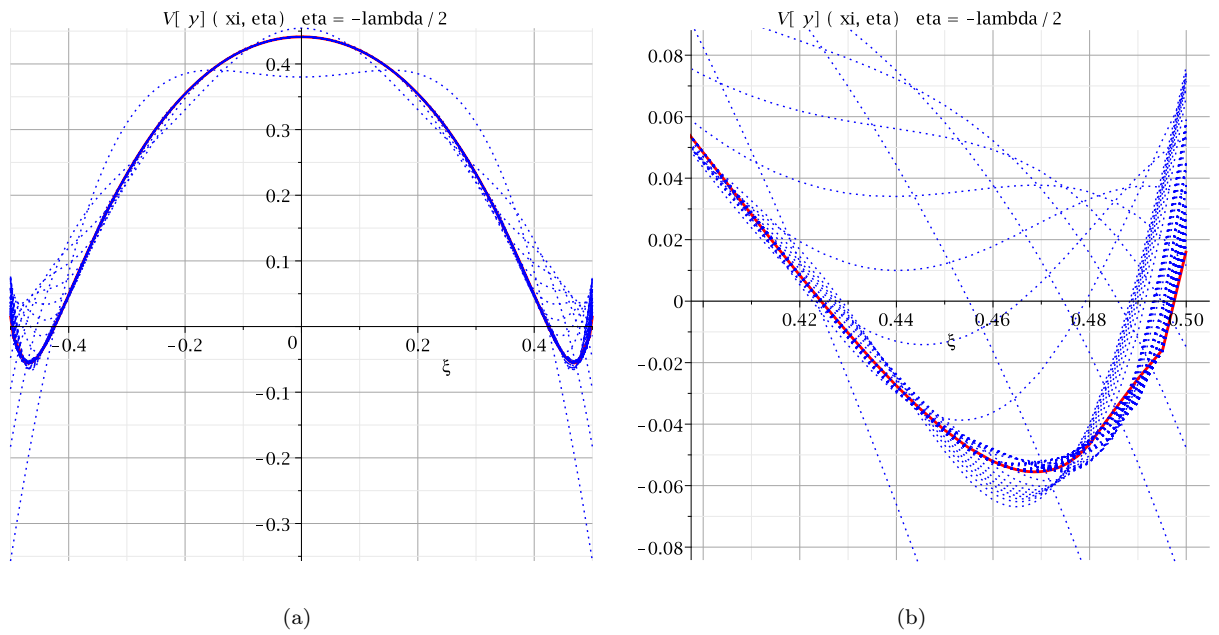


Рис. 44. $V_y(\xi, \eta)$ пластинки совмещенным методом (10 точек) на стороне $\xi = -\frac{\lambda}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

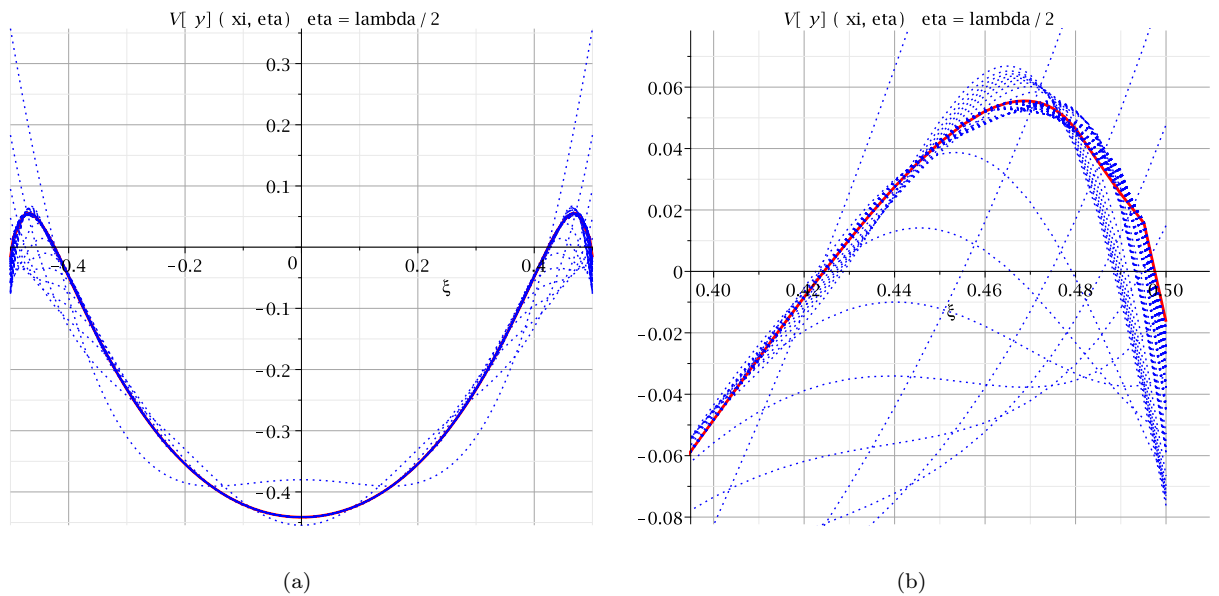


Рис. 45. $V_y(\xi, \eta)$ пластинки совмещенным методом (10 точек) на стороне $\xi = \frac{\lambda}{2}$: (a) полное представление; (b) масштаб возле угла пластинки

Выводы

В данной работе были достигнуты следующие результаты:

1. Методом начальных функций построено аналитическое решение двумерной краевой задачи, точно удовлетворяющее граничным условиям на двух противоположных сторонах пластинки.
2. Предложены и разработаны три подхода для приближенного удовлетворения граничным условиям на остальных двух противоположных сторонах.
3. Построено приближенное аналитическое решение задачи изгиба жестко заземленной пластинки.
4. Проведено компьютерное моделирование рассматриваемой задачи, включающее в себя вывод аналитического решения, реализацию методов предложенных методов приближения, оценку адекватности построенной модели, оценку точности полученных решений, а также качественное сравнение используемых методов приближения в системе аналитических вычислений Maple.

Таким образом, задача была решена полностью, т. е. было проведено моделирование изгиба жестко заделанной прямоугольной изотропной пластинки со сторонами a и b и толщиной δ методом начальных функций.

Стоит отметить, что в данной работе вид операторов-функций $L_{ij}(\xi, \beta)$, где $i, j \in (w, \theta, M, V)$ и аналитическое представление компонентов напряженно-деформированного состояния (50) несколько отличается от построенных компонентов в [11], хотя и результаты полученные в моей работе и в работе этого автора совпадают с результатами [16]. Данное явление возможно объяснить всего лишь опечатками в работе [11].

Построенные алгоритмы приближения для удовлетворения некоторым граничным условиям позволяют увеличивать точность решения с увеличением параметра N . Было установлено, что среди реализованных методов, метод коллокаций дает более точное решение по сравнению с остальными методами при больших N , но если требуется выбрать N небольшим, то совмещенный метод подразумевающий разложения в ряды

Тейлора в десяти точках может показать результат несколько точнее даже метода коллокаций.

Также, как было сказано выше, если увеличить число точек, в которых следует раскладывать в ряды Тейлора, в совмещенном методе, то число N , при котором будет достигаться требуемая точность решения для этого метода и метода коллокаций будет различным, при этом для метода коллокаций придется взять большее N по сравнению с совмещенным методом.

Заключение

В данной работе была рассмотрена одна из задач прикладной теории упругости — задача о равномерно нагруженной тонкой прямоугольной пластинке, края которой жестко зафиксированы. Для ее решения была построена математическая модель такой пластинки с использованием метода начальных функций. Решение данной задачи было получено в приближенно-аналитическом виде, которое на двух противоположных краях пластики даст точные результаты, а на двух оставшихся — приближенные. Точность приближения в данной модели регулируется двумя параметрами: размерность системы линейных алгебраических уравнений, которую надо решить, чтобы получить все компоненты, описывающие напряженно-деформированное состояние такой пластинки, и точность компьютерного вычисления.

Для приближения было предложено два немодифицируемых метода, качество которых напрямую зависит от размерности системы, и один модифицируемый метод, включающий достоинства двух предыдущих методов, качество которого будет зависеть не только от размерности системы, но и от модификации самого алгоритма.

Построенная модель может быть в дальнейшем модифицирована для решения других схожих задач, связанных с пластинкой, например для другого вида нагрузки, или для другого закрепления самой пластинки. Также можно модифицировать последний предложенный алгоритм приближения таким образом, чтобы требуемая точность решения достигалась при меньших размерностях СЛАУ, и вычислить оптимальное количество точек для заданного N , что позволит уменьшить временные и другие вычислительные затраты.

Результаты данного исследования могут быть использованы в различных, более сложных, задачах, использующих жестко защемленные пластинки.

Список литературы

- [1] Ушаков А. Ю., Ванюшенков М. Г. Расчет сжато-изогнутых пластинок со смешанными вдоль края граничными условиями методом начальных функций // Промышленное и гражданское строительство, 2016. № 11. С. 14–18.
- [2] Ванюшенков М. Г., Ушаков А. Ю. Определение критической сжимающей нагрузки упругих тонких пластинок методом начальных функций // Промышленное и гражданское строительство, 2010. № 11. С. 71–73.
- [3] Волошановская Ю. Э. Расчет тонкой квадратной жестко защемленной на двух противоположных краях плиты методом начальных функций // Наука, Техника, Инновации 2014: сборник статей Международной научно-технической конференции / Под общей редакцией А. Л. Сафонова. Брянск: НДМ, 2014. С. 367–370.
- [4] Kennedy J. B. Clamped Skew Plate under Uniform Normal Loading // The Aeronautical Journal, 1968. Vol. 72, No 688. P. 338–339.
- [5] Young D. Clamped Rectangular Plates with a Central Concentrated Load // The Aeronautical Journal, 1940. Vol. 44, No 352. P. 350–354.
- [6] Imrak C. E., Gerdemeli I. A numerical method for clamped thin rectangular plates carrying a uniformly distributed load // International Applied Mechanics, 2007. Vol 43, No 6. P. 701–705.
- [7] Лычев С. А., Салеев С. В. Замкнутое решение задач об изгибе жестко закрепленной прямоугольной пластины // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, 2006. № 2. С. 62–73.
- [8] Лурье А. И. К теории толстых плит // Прикладная математика и механика, 1942. Т. 6. Вып. 2-3. С. 151–168.
- [9] Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: ГИТТЛ, 1955. 491 с.

- [10] Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
- [11] Агарёв В. А. Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Киев: Изд. АН УССР, 1963. 204 с.
- [12] Коялович Б. М., Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка. СПб.: тип. Имп. Акад. наук, 1902. 125 с.
- [13] Коялович Б. М. Исследования о бесконечных системах линейных уравнений // Изв. Физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1930. Т. 3. С. 41–167.
- [14] Бубнов И. Г. Строительная механика корабля: Ч. 1-2 СПб.: тип. Мор. м-ва, 1912-1914. 2 т.
- [15] Галеркин Б. Г. Упругие тонкие плиты. Госстройиздат, 1933. 371 с.
- [16] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматлит, 1966. 636 с.
- [17] Сухотерин М. В. Метод суперпозиции исправляющих функций в задачах теории пластин. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 265 с.
- [18] Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 347 с.
- [19] Лурье С. А. Изгиб прямоугольной ортотропной пластинки, защемленной по контуру. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1982. № 1. - С. 159–168.
- [20] Папкович П. Ф. Труды по строительной механике корабля. Ленинград: Судпромгиз, 1962. 640 с.
- [21] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
- [22] Голоскоков Д. П., Голоскоков П. Г. Метод полиномов в задачах теории тонких плит. СПб.: СПГУВК, 2008. 254 с.
- [23] Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М. -Л.: Физматлит, 1962, 708 с.

- [24] Meleshko V. V. Equilibrium of elastic rectangle: Mathieu-Inglis-Pickett solution revisited // Journal of Elasticity, 1995. Vol. 40, No 3. P. 207–238.
- [25] Meleshko V. V. Bending of an Elastic Rectangular Clamped Plate: Exact Versus ‘Engineering’ Solutions // Journal of Elasticity, 1997. Vol. 48, No 1. P. 1–50.
- [26] Власов В. В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М.: Стройиздат, 1975, 224 с.
- [27] Galileev S. M., Matrosov A. V. Method of initial functions: stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures // Composite Structure, 1997. Vol. 39, No 3–4. P. 255–262.
- [28] Галилеев С. М., Матросов А. В. Метод начальных функций в расчете слоистых плит. Прикладная механика, 1995. Т. 31. № 6. С. 64–71.
- [29] Galileev S. M., Matrosov A. V. Method of initial functions in the computation of sandwich plates. // International Applied Mechanics, 1995. Vol. 31, No 6. P. 469–476.
- [30] Матросов А. В. Вычислительная устойчивость алгоритма метода начальных функций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, 2010. № 4. С. 30–39.
- [31] Матросов А. В. Сходимость степенных рядов в методе начальных функций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, 2012. № 1. С. 41–51.
- [32] Matrosov A. V. A numerical-analytical decomposition method in analyses of complex structures // 2014 International conference on computer technologies in physical and engineering applications (ICCTPEA) / Editor: E. I. Veremey. St.-Petersburg: SPSU, 2014. P. 104–105.
- [33] Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. / Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. СПб.: ООО «ПаркКом», 2010. 643 с.

- [34] Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики / Практическое руководство. СПб.: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.
- [35] Кирсанов М. Н. Практика программирования в системе Maple. М.: Изд. дом «МЭИ», 2011. 208 с.

Приложение А

Далее представлен программный код (Maple) для поиска операторов-функций $L_{ij}(\xi, \beta)$, где $i, j \in (w, \theta, M, V)$ и аналитического вида компонентов напряженно-деформированного состояния.

```
> equation1 := diff(L_1[w,w](xi), xi$4)
> + 2*beta^2*diff(L_1[w,w](xi),xi$2)
> + beta^4*L_1[w,w](xi) = 0;
> initial_conditions1 := L_1[w,w](0) = 1/a, D(L_1[w,w])(0) = 0,
> D(D(L_1[w,w]))(0) = -mu*beta^2 / a, D(D(D(L_1[w,w])))(0) = 0;
> solution1 := dsolve({equation1, initial_conditions1});
> solution1 := simplify(a * rhs(solution1));
> L[w,w] := unapply(solution1, xi);
> equation2 := diff(L_1[w,theta](xi), xi$4)
> + 2*beta^2*diff(L_1[w,theta](xi),xi$2)
> + beta^4*L_1[w,theta](xi) = 0;
> initial_conditions2 := L_1[w,theta](0) = 0, D(L_1[w,theta])(0) = 1,
> D(D(L_1[w,theta]))(0) = 0,
> D(D(D(L_1[w,theta])))(0) = -(2 - mu)*beta^2;
> solution2 := dsolve({equation2, initial_conditions2});
> solution2 := simplify(rhs(solution2));
> L[w,theta] := unapply(solution2, xi);
> equation3 := diff(L_1[w,M](xi), xi$4)
> + 2*beta^2*diff(L_1[w,M](xi),xi$2)
> + beta^4*L_1[w,M](xi) = 0;
> initial_conditions3 := L_1[w,M](0) = 0, D(L_1[w,M])(0) = 0,
> D(D(L_1[w,M]))(0) = -a/D, D(D(D(L_1[w,M])))(0) = 0;
> solution3 := dsolve({equation3, initial_conditions3});
> solution3 := simplify(D / a * rhs(solution3));
> L[w,M] := unapply(solution3, xi);
> equation4 := diff(L_1[w,V](xi), xi$4)
> + 2*beta^2*diff(L_1[w,V](xi),xi$2)
> + beta^4*L_1[w,V](xi) = 0;
> initial_conditions4 := L_1[w,V](0) = 0, D(L_1[w,V])(0) = 0,
> D(D(L_1[w,V]))(0) = 0, D(D(D(L_1[w,V])))(0) = -a^2/D;
> solution4 := dsolve({equation4, initial_conditions4});
> solution4 := simplify(D / a^2 * rhs(solution4));
> L[w,V] := unapply(solution4, xi);
> simplify(eval(equation1, [L_1[w,w](xi) = L[w,w](xi)]));
> simplify(eval(equation2, [L_1[w,theta](xi) = L[w,theta](xi)]));
> simplify(eval(equation3, [L_1[w,M](xi) = L[w,M](xi)]));
> simplify(eval(equation4, [L_1[w,V](xi) = L[w,V](xi)]));
> L[w,w](xi);
> L[w,theta](xi);
> L[w,M](xi);
> L[w,V](xi);
```

```

> L[theta[x], w] := simplify(beta * L[w,w](xi)):
> L[theta[x], w] := unapply(L[theta[x], w], xi);
> L[theta[x], theta] := unapply(beta * L[w,theta](xi), xi);
> L[theta[x], M] := unapply(beta * L[w,M](xi), xi);
> L[theta[x], V] := unapply(beta * L[w,V](xi), xi);
> L[theta,w] := simplify(diff(L[w,w](xi), xi$1)):
> L[theta,w] := unapply(L[theta,w], xi);
> L[theta, theta] := simplify(diff(L[w, theta](xi), xi$1)):
> L[theta, theta] := unapply(L[theta, theta], xi);
> L[theta, M] := simplify(diff(L[w, M](xi), xi$1)):
> L[theta, M] := unapply(L[theta, M], xi);
> L[theta, V] := simplify(diff(L[w, V](xi), xi$1)):
> L[theta, V] := unapply(L[theta, V], xi);
> L[M[x], w] := - simplify(mu * diff(L[w,w](xi), xi$2) + beta^2 *
L[w,w](xi)):
> L[M[x], w] := unapply(L[M[x],w], xi);
> L[M[x], theta] := - simplify(mu * diff(L[w,theta](xi), xi$2) + beta^2
* L[w,theta](xi)):
> L[M[x], theta] := unapply(L[M[x],theta], xi);
> L[M[x], M] := - simplify(mu * diff(L[w,M](xi), xi$2) + beta^2 *
L[w,M](xi)):
> L[M[x], M] := unapply(L[M[x], M], xi);
> L[M[x], V] := - simplify(mu * diff(L[w,V](xi), xi$2) + beta^2 *
L[w,V](xi)):
> L[M[x], V] := unapply(L[M[x],V], xi);
> L[M,w] := - simplify( ( diff(L[w,w](xi), xi$2) + mu * beta^2 *
L[w,w](xi))):
> L[M,w] := unapply(L[M,w], xi);
> L[M,theta] := - simplify( ( diff(L[w,theta](xi), xi$2) + mu * beta^2 *
L[w,theta](xi))):
> L[M,theta] := unapply(L[M,theta], xi);
> L[M,M] := - simplify( ( diff(L[w,M](xi), xi$2) + mu * beta^2 *
L[w,M](xi))):
> L[M,M] := unapply(L[M,M], xi);
> L[M,V] := - simplify( ( diff(L[w,V](xi), xi$2) + mu * beta^2 *
L[w,V](xi))):
> L[M,V] := unapply(L[M,V], xi);
> L[V,w] := - simplify( ( diff(L[w,w](xi), xi$3) + (2 - mu) * beta^2 *
diff(L[w,w](xi), xi$1))):
> L[V,w] := unapply(L[V,w], xi);
> L[V,theta] := - simplify( ( diff(L[w,theta](xi), xi$3) + (2 - mu) *
beta^2 * diff(L[w,theta](xi), xi$1))):
> L[V,theta] := unapply(L[V,theta], xi);
> L[V,M] := - simplify( ( diff(L[w,M](xi), xi$3) + (2 - mu) * beta^2 *
diff(L[w,M](xi), xi$1))):
> L[V,M] := unapply(L[V,M], xi);

```

```

> L[V,V] := - simplify( ( diff(L[w,V](xi), xi$3) + (2 - mu) * beta^2 *
diff(L[w,V](xi), xi$1))):
> L[V,V] := unapply(L[V,V], xi);
> L[V[y], w] := - simplify(expand( beta^3 * L[w, w](xi) + (2 - mu) *
beta * diff(L[w, w](xi), xi$2))):
> L[V[y], w] := unapply(L[V[y], w], xi);
> L[V[y], theta] := - simplify(expand( beta^3 * L[w, theta](xi) + (2 -
mu) * beta * diff(L[w, theta](xi), xi$2))):
> L[V[y], theta] := unapply(L[V[y], theta], xi);
> L[V[y], M] := - simplify(expand( beta^3 * L[w, M](xi) + (2 - mu) *
beta * diff(L[w, M](xi), xi$2))):
> L[V[y], M] := unapply(L[V[y], M], xi);
> L[V[y], V] := - simplify(expand( beta^3 * L[w, V](xi) + (2 - mu) *
beta * diff(L[w, V](xi), xi$2))):
> L[V[y], V] := unapply(L[V[y], V], xi);
> psi[w] := L[w,w](xi) * eval(L[w,M](xi), [xi = 1/2]) - L[w,M](xi) *
eval(L[w,w](xi), [xi = 1/2]);
> psi[w] := (simplify(expand(psi[w])));
> psi[theta[x]] := L[theta[x], w](xi) * eval(L[w, M](xi), [xi = 1/2]) -
L[theta[x], M](xi)* eval(L[w,w](xi), [xi=1/2]);
> psi[theta[x]] := (simplify(expand(psi[theta[x]])));
> #theta = theta[y]
> psi[theta] := L[theta, w](xi) * eval(L[w, M](xi), [xi = 1/2]) -
L[theta, M](xi)* eval(L[w,w](xi), [xi=1/2]);
> psi[theta] := ((expand(psi[theta])));
> psi[M[x]] := L[M[x], w](xi) * eval(L[w, M](xi), [xi = 1/2]) - L[M[x],
M](xi)* eval(L[w,w](xi), [xi=1/2]);
> psi[M[x]] := ((expand(psi[M[x]])));
> # M = M[Y];
> psi[M] := L[M, w](xi) * eval(L[w, M](xi), [xi = 1/2]) - L[M, M](xi)*
eval(L[w,w](xi), [xi=1/2]);
> psi[M] := ((expand(psi[M])));
> # V = V[X];
> psi[V] := L[V, w](xi) * eval(L[w, M](xi), [xi = 1/2]) - L[V, M](xi)*
eval(L[w,w](xi), [xi=1/2]);
> psi[V] := ((expand(psi[V])));
> psi[V[y]] := L[V[y], w](xi) * eval(L[w, M](xi), [xi = 1/2]) - L[V[y],
M](xi)* eval(L[w,w](xi), [xi=1/2]);
> psi[V[y]] := ((expand(psi[V[y]])));

```

Здесь для w

```

> f[1](xi, eta) := eval(psi[w], [beta = k[n]]) ;
> f[1](xi, eta) := f[1](xi, eta) * cosh(k[n] * eta);
> f[1](xi, eta) := (a[n] + I * b[n]) * f[1](xi, eta);
> f[1](xi, eta) := Sum(f[1](xi, eta),n=1..N);

```

Здесь для theta(x)

```

> f[2](xi, eta) := eval(psi[theta[x]], [beta = k[n]]) ;
> f[2](xi, eta) := f[2](xi, eta) * sinh(k[n] * eta);
> f[2](xi, eta) := (a[n] + I * b[n]) * f[2](xi, eta);
> f[2](xi, eta) := Sum(f[2](xi, eta),n=1..N);

```

Здесь для $M[x]$

```

> f[3](xi, eta) := eval(psi[M[x]], [beta = k[n]]) ;
> f[3](xi, eta) := f[3](xi, eta) * cosh(k[n] * eta);
> f[3](xi, eta) := (a[n] + I * b[n]) * f[3](xi, eta);
> f[3](xi, eta) := Sum(f[3](xi, eta),n=1..N);

```

Здесь для $M[y] = M$

```

> f[4](xi, eta) := eval(psi[M], [beta = k[n]]) ;
> f[4](xi, eta) := f[4](xi, eta) * cosh(k[n] * eta);
> f[4](xi, eta) := (a[n] + I * b[n]) * f[4](xi, eta);
> f[4](xi, eta) := Sum(f[4](xi, eta),n=1..N);

```

Здесь для $\theta[y] = \theta$

```

> f[5](xi, eta) := eval(psi[theta], [beta = k[n]]) ;
> f[5](xi, eta) := f[5](xi, eta) * cosh(k[n] * eta);
> f[5](xi, eta) := (a[n] + I * b[n]) * f[5](xi, eta);
> f[5](xi, eta) := Sum(f[5](xi, eta),n=1..N);

```

Здесь для $V[x] = V$

```

> f[6](xi, eta) := eval(psi[V], [beta = k[n]]) ;
> f[6](xi, eta) := f[6](xi, eta) * cosh(k[n] * eta);
> f[6](xi, eta) := (a[n] + I * b[n]) * f[6](xi, eta);
> f[6](xi, eta) := Sum(f[6](xi, eta),n=1..N);

```

Здесь для $V[y]$

```

> f[7](xi, eta) := eval(psi[V[y]], [beta = k[n]]) ;
> f[7](xi, eta) := f[7](xi, eta) * sinh(k[n] * eta);
> f[7](xi, eta) := (a[n] + I * b[n]) * f[7](xi, eta);
> f[7](xi, eta) := Sum(f[7](xi, eta),n=1..N);

```

Частные и однородные решения

```

> w_part[result, 0] := p * a^4 / 24 / D * (1/4 - xi^2)^2;
> M_part[result, x[0]] := D / a * p * a^2 * mu / 2 / D * (a / 12 -
xi^2);
> M_part[result, y[0]] := D / a * p * a^2 / 2 / D * (a/12 - xi^2);
> theta_part[result, x[0]] := 0;
> theta_part[result, y[0]] := p * a^3 / 6 / D * xi * (-1/4 + xi^2);
> V_part[result, x[0]] := - D / a^2 * p * a^2 * xi / D;
> V_part[result, y[0]] := 0;
> w_homo[result, 0] := a * 2 * Re( f[1](xi, eta) );
> M_homo[result, x[0]] := D / a * 2 * Re( f[3](xi, eta) );
> M_homo[result, y[0]] := D / a * 2 * Re( f[4](xi, eta) );
> theta_homo[result, x[0]] := 2 * Re( f[2](xi, eta) );
> theta_homo[result, y[0]] := 2 * Re( f[5](xi, eta) );
> V_homo[result, x[0]] := D / a^2 * 2 * Re( f[6](xi, eta) );
> V_homo[result, y[0]] := D / a^2 * 2 * Re( f[7](xi, eta) );

```

Приложение В

Здесь представлен программный код для поиска корней трансцендентного дифференциального уравнения (37).

```
> eq23 := sin(ZZZZZ)/ZZZZZ+1=0:
> KKKK := ZeroMatrix(GLOBAL_COUNT, 1, compact = false);
> Digits := GLOBAL_DIGITS: # количество значащих цифр в мантиссе
> mReal := 10000:
> mImage := 100: # можно взять равным 5 (до 5 мнимая часть не дошла)
> break_count := 0:
> is_break := false:
> for j from 1 to mReal do
> for i from 1 to mImage do
> FFFFF := fsolve(eq23 ,ZZZZZ,{ZZZZZ = (j-1) + (i-1)*I..(j) +i*I},
complex);
> # проверка, что корень комплексный
> if whattpe(FFFFF)=complex(extended_numeric) then
> print(FFFFF);
> break_count := break_count + 1:
> KKKK[break_count] := FFFFF;
> if (break_count = GLOBAL_COUNT) then
> is_break := true;
> break
> end if:
> end if:
> end do:
> if is_break = true then
> break;
> end if;
> end do:
```

Приложение С

Программный код для приближения методом Тейлора.

```
> eq_77_1 := eval(f[1](xi,eta), [eta = lambda/2]) = - p * a^3 / 48 / D /
16 * (1 - 4*xi^2)^2;
> eq_77_2 := eval(f[2](xi,eta), [eta = lambda/2]) = 0;
> left[1] := taylor(lhs(eq_77_1), xi, 2 * GLOBAL_COUNT):
> right[1] := taylor(rhs(eq_77_1), xi, 2 * GLOBAL_COUNT):
> left[2] := taylor(lhs(eq_77_2), xi, 2 * GLOBAL_COUNT):
> right[2] := taylor(rhs(eq_77_2), xi, 2 * GLOBAL_COUNT):
> interface(rtablesize=2 * GLOBAL_COUNT):
> #equations_from_taylor := array(1..GLOBAL_COUNT, 1..2 * GLOBAL_COUNT):
> #print(equations_from_taylor);
> equations_from_taylor := ZeroMatrix(GLOBAL_COUNT, 2 * GLOBAL_COUNT,
compact = false):
> #print(equations_from_taylor);
> for i from GLOBAL_START_COUNT to GLOBAL_COUNT do
> for j from 0 to i - 1 do
> for l from 2 * j by 2 to 2 * j do
> equations_from_taylor[i, l + 1 ] := (Re(coeff(left[1], xi, 2*j ) )) =
coeff(right[1], xi, 2*j );
> equations_from_taylor[i, l + 2 ] := (Re(coeff(left[2], xi, 2*j ) )) =
coeff(right[2], xi, 2*j );
> end do;
> end do;
> end do;
```



```

> for i from GLOBAL_START_COUNT to GLOBAL_COUNT do
>   print(COUNT = i);
>   # Начинаем формирование системы и множества неизвестных с пустого
>   sys||i := {};
>   var||i := {};
>   # Определяет число используемых KKKK
>   N[i] := i;
>   # Из полученных уравнений нужно получить систему из n уравнений и n
неизвестных, где n = 2 * N[i]
>   for j from 0 to i - 1 do
>     for l from 2 * j by 2 to 2 * j do
>       # Вычисляем сумму до нужного N
>       expanded_equation_1 := eval(value(equations_from_taylor[i, l + 1] ), N
= N[i]):
>       expanded_equation_2 := eval(value(equations_from_taylor[i, l + 2] ), N
= N[i]):
>       # Подставляем k и lambda
>       for ii from 1 to N[i] do
>         expanded_equation_1 := eval(expanded_equation_1,
> [lambda = GLOBAL_LAMBDA, k[ii] = KKKK[ii, 1]]);
>         expanded_equation_2 := eval(expanded_equation_2,
> [lambda = GLOBAL_LAMBDA, k[ii] = KKKK[ii, 1]]);
>       # Формируем множество неизвестных
>       var||i := var||i union {XXX[ii], YYY[ii]};
>     end do;
>     #print(expanded_equation_1);
>     #print(expanded_equation_2);
>     # Вычисляем реальную часть
>     expanded_equation_1 :=
> evalc(lhs(expanded_equation_1)) = rhs(expanded_equation_1);
>     expanded_equation_2 :=
> evalc(lhs(expanded_equation_2)) = rhs(expanded_equation_2);
>     #print(expanded_equation_1);
>     #print(expanded_equation_2);
>     # Составляем систему уравнений
>     sys||i := sys||i union {expanded_equation_1, expanded_equation_2}:
>   end do;
> end do;
> # Распечатываем систему
> #print(SYSTEM , i, IS , sys||i);
> #print();
> #print(var||i);
> end do:

```

Приложение D

Программный код для приближения методом коллокаций.

```
> AAAA := ZeroMatrix(GLOBAL_COUNT, 1, compact = false):
> BBBB := ZeroMatrix(GLOBAL_COUNT, 1, compact = false):
> A_STEP := (AAR - AAL) / GLOBAL_COUNT:
> for i from 1 to (GLOBAL_COUNT) do
> AAAA[i] := AAL + (i-1) * A_STEP;
> end do:
> print(AAAA);
> for i from GLOBAL_START_COUNT to GLOBAL_COUNT do
> print(COUNT = i);
> # Начинаем формирование системы и множества неизвестных с пустого
> sys||i := {};
> var||i := {};
> # Определяет число используемых KKKK
> N[i] := i;
> # Из полученных уравнений нужно получить систему из n уравнений и n
неизвестных, где n = 2 * N[i]
> for j from 1 to i do
> for l from 4 * j by 4 to 4 * j do
> # Вычисляем сумму до нужного N
> expanded_equation_1 := eval(value( w_homo[result, 0] ), [N = N[i]]):
> expanded_equation_2 := eval(value( theta_homo[result, x[0]] ), [N =
N[i]]):
> # Подставляем k
> for ii from 1 to N[i] do
> expanded_equation_1 := eval(expanded_equation_1, [ k[ii] = KKKK[ii,
1]]):
> expanded_equation_2 := eval(expanded_equation_2, [ k[ii] = KKKK[ii,
1]]):
> # Формируем множество неизвестных
> var||i := var||i union {XXX[ii], YYY[ii]};
> end do:
> # Вычисляем реальную часть и не забываем частное решение
> expanded_equation_1 := evalc((expanded_equation_1))
> + w_part[result, 0] = 0;
> expanded_equation_2 := evalc((expanded_equation_2))
> + theta_part[result, x[0]] = 0;
> # ПОДСТАВЛЯЕМ xi и eta из значений для метода коллокаций
> expanded_equation_1 := eval(expanded_equation_1,
> [xi = AAAA[j, 1], eta = BBL]);
> expanded_equation_2 := eval(expanded_equation_2,
> [xi = AAAA[j, 1], eta = BBL]);
```

```
> # Составляем систему уравнений
> sys||i := sys||i union {expanded_equation_1,
> expanded_equation_2}:
> end do:
> end do:
> end do:
```

Приложение Е

Программный код для приближения совмещенным методом. Управлять количеством точек, в которых алгоритм раскладывает в ряды Тейлора, можно, задав параметр *GLOBAL_POINTS_COUNT*.

```
> POINTS_TO_ := ZeroMatrix(GLOBAL_POINTS_COUNT, 1, compact = false);
> POINT_STEP := (AAR - AAL) / (GLOBAL_POINTS_COUNT);
> for i from 1 to (GLOBAL_POINTS_COUNT) do
> POINTS_TO_[i] := AAL + (i-1) * POINT_STEP;
> end do;
> print(POINTS_TO_);
> eq_77_1 := eval(f[1](xi,eta), [eta = lambda/2]) = - p * a^3 / 48 / D /
16 * (1 - 4*xi^2)^2;
> eq_77_2 := eval(f[2](xi,eta), [eta = lambda/2]) = 0;
> left_eq := ZeroMatrix(GLOBAL_POINTS_COUNT, 2, compact = false);
> right_eq := ZeroMatrix(GLOBAL_POINTS_COUNT, 2, compact = false);
> for i from 1 to GLOBAL_POINTS_COUNT do
> left_eq[i, 1] :=
> (taylor(lhs(eq_77_1), xi = POINTS_TO_[i, 1], 2 * GLOBAL_COUNT));
> left_eq[i, 2] := (taylor(lhs(eq_77_2), xi = POINTS_TO_[i, 1], 2 *
GLOBAL_COUNT));
> right_eq[i, 1] := (taylor(rhs(eq_77_1), xi = POINTS_TO_[i, 1], 2 *
GLOBAL_COUNT));
> right_eq[i, 2] := (taylor(rhs(eq_77_2), xi = POINTS_TO_[i, 1], 2 *
GLOBAL_COUNT));
> end do;
> #print(left_eq);
> #print(right_eq);
> for i from GLOBAL_START_COUNT to GLOBAL_COUNT do
> print(COUNT = i);
> N[i] := i;
> eq_count := 2 * i;
> eq_counter := 0;
> # Начинаем формирование системы и множества неизвестных с пустого
> sys||i := {};
> var||i := {};
> equations_from_taylor := ZeroMatrix( GLOBAL_POINTS_COUNT*i, 2, compact
= false);
> for ii from 1 by GLOBAL_POINTS_COUNT to GLOBAL_POINTS_COUNT*i do
> degree__ := (ii - 1) / GLOBAL_POINTS_COUNT;
> #print(II = ii);
> print(DEGREE__ = degree__);
```

```

> for iii from 0 to (GLOBAL_POINTS_COUNT - 1) do
> equations_from_taylor[ii + iii, 1] := Re(coeff(left_eq[iii + 1, 1], xi
- POINTS_TO_[iii + 1, 1], degree_)) = (coeff(right_eq[iii + 1, 1], xi -
POINTS_TO_[iii + 1, 1], degree_));
> equations_from_taylor[ii + iii, 2] := Re(coeff(left_eq[iii + 1, 2], xi
- POINTS_TO_[iii + 1, 1], degree_)) = (coeff(right_eq[iii + 1, 2], xi -
POINTS_TO_[iii + 1, 1], degree_));
> end do:
> for iii from 0 to (GLOBAL_POINTS_COUNT - 1) do
> equations_from_taylor[ii + iii, 1] :=
> eval(value(equations_from_taylor[ii + iii, 1]), N=N[i] );
> equations_from_taylor[ii + iii, 2] :=
> eval(value(equations_from_taylor[ii + iii, 2]), N=N[i] );
> end do:
> # Подставляем k и lambda
> for jj from 1 to N[i] do
> #print(JJ = jj);
> for iii from 0 to (GLOBAL_POINTS_COUNT - 1) do
> equations_from_taylor[ii + iii, 1] :=
> eval(equations_from_taylor[ii + iii, 1],
> [lambda = GLOBAL_LAMBDA, k[jj] = KKKK[jj, 1]]);
> equations_from_taylor[ii + iii, 2] :=
> eval(equations_from_taylor[ii + iii, 2],
> [lambda = GLOBAL_LAMBDA, k[jj] = KKKK[jj, 1]]);
> end do:
> # Формируем множество неизвестных
> var||i := var||i union {XXX[jj], YYY[jj]};
> end do;
> # Вычисляем реальную часть
> for iii from 0 to (GLOBAL_POINTS_COUNT - 1) do
> equations_from_taylor[ii + iii, 1] :=
> evalc(lhs(equations_from_taylor[ii + iii, 1]))
> = rhs(equations_from_taylor[ii + iii, 1]);
> equations_from_taylor[ii + iii, 2] :=
> evalc(lhs(equations_from_taylor[ii + iii, 2]))
> = rhs(equations_from_taylor[ii + iii, 2]);
> end do:

```

```

> # Составляем систему уравнений
> eq_enough := false;
> for iii from 0 to (GLOBAL_POINTS_COUNT - 1) do
>   if eq_counter < eq_count then
>     if lhs(equations_from_taylor[ii + iii, 1]) = 0
>     and rhs(equations_from_taylor[ii + iii, 1]) = 0
>     then
>       #print("YES");
>     else
>       #print("NO");
>       sys||i := sys||i union {equations_from_taylor[ii + iii, 1]};
>       eq_counter := eq_counter + 1;
>     end if;
>   else
>     eq_enough := true; #global break
>     break;
>   end if:
>   if eq_counter < eq_count then
>     if lhs(equations_from_taylor[ii + iii, 2]) = 0
>     and rhs(equations_from_taylor[ii + iii, 2]) = 0
>     then
>       #print("YES");
>     else
>       #print("NO");
>       sys||i := sys||i union {equations_from_taylor[ii + iii, 2]};
>       eq_counter := eq_counter + 1;
>     end if;
>   else
>     eq_enough := true; #global break
>     break;
>   end if:
> end do:
> if eq_enough
> then
> break;
> end if:
> end do:
> end do:

```

Приложение F

Программный код для решения СЛАУ, полученной методами приближения.

```
> for i from GLOBAL_START_COUNT to GLOBAL_COUNT do
>   print(COUNT = i);
>   # Решаем систему уравнений относительно наших неизвестных
>   #res := solve(sys||i, var||i);
>   new_sys := LinearAlgebra[GenerateMatrix](eval(sys||i, [a=1, D = 1, p =
1]), var||i):
>   res := LinearSolve(new_sys):
>   #print(res);
>   # Число решений
>   count_of_vars := 2 * i;
>   # Далее получаем отдельно матрицу из решений a[i] и отдельно матрицу
из решений b[i]
>   AAAA||i := ZeroMatrix(count_of_vars / 2, 1, compact = false);
>   BBBB||i := ZeroMatrix(count_of_vars / 2, 1, compact = false);
>   for ii from 1 to count_of_vars / 2 do
>     AAAA||i[ii, 1] := res[ii];
>   end do:
>   #print(AAAA||i);
>   for ii from 1 to count_of_vars / 2 do
>     BBBB||i[ii, 1] := res[ii + count_of_vars / 2];
>   end do:
>   #print(BBBB||i);
>   end do:
```