Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики-процессов управления
Кафедра теории управления

Левина Елизавета Геннадьевна

Магистерская диссертация

Оценка робастности условия Ляпунова для систем с запаздыванием

Направление 01.04.02 — «Прикладная математика и информатика»
Магистерская программа
«Методы прикладной математики и информатики в задачах управления»

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Харитонов В. Л.

Рецензент,
кандидат физ.-мат. наук Сумачева В. А.

Санкт-Петербург
2017 г.

Содержание

1. Введение

Системы дифференциальных уравнений являются достаточно популярной темой для исследований. В ряде случаев даже незначительное изменение коэффициентов системы приводит к изменению каких-либо ключевых свойств системы. Таким образом, рассмотрение возмущенных систем становится актуальной проблемой.

Одним из основных методов в исследовании систем дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами является метод функционалов Ляпунова-Красовского. Целью данной работы является нахождение допустимых ограничений, при которых семейство возмущенных систем с запаздываниями удовлетворяет условию Ляпунова.

Основное содержание работы включает четыре раздела.

В разделе 3 содержится описание системы с запаздыванием и необходимые обозначения. В нем определяется понятие экспоненциальной устойчивости и рассматривается теорема Н. Н. Красовского, адаптированная для линейных систем. Она дает достаточные условия экспоненциальной устойчивости. В данном разделе вводится определение матрицы Ляпунова, приводится способ ее построения. Дается определение условия Ляпунова, а также теорема о необходимых и достаточных условиях его выполнения.

В 4 разделе приводится постановка задачи. Вводится семейство возмущенных систем с запаздывающими аргументами и матрицы, которые определяют возмущение системы.

В разделе 5 приведена оценка допустимых возмущений. Введены вспомогательные леммы. Получена оценка разности матричных экспонент. Найдено неравенство, определяющее выполнение условия Ляпунова. Доказана теорема, дающая ограничения на допустимые возмущения системы.

В 6 разделе рассмотрены примеры. Для уравнения и системы с двумя запаздываниями найдены ограничения на допустимые возмущения.

2. Обзор литературы

Системы дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами со второй половины прошлого века были описаны во многих работах [6, 7, 10, 13]. Актуальность их рассмотрения связана с тем, что они нашли свое приложение во многих задачах: биологических, экономических и технических. Одним из основных методов в исследовании систем с запаздыванием является метод функционалов Ляпунова-Красовского. Он впервые был предложен в работах [7, 11]. Позднее появилось множество статей, посвященных данной теме [1, 4, 5]. В работе [2] сформулировано определение матрицы Ляпунова. Следующий вопрос, который возник после введения в рассмотрения определения, - это вопрос существования. Для его решения в работе [4] было введено условие Ляпунова. В работе [3] был затронут вопрос о нахождении матрицы Ляпунова, как решения специальной граничной задачи без запаздывания. Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях выполнения условия Ляпунова.

3. Описание системы

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{m} A_k x(t - kh), \quad t \geqslant 0, \tag{3.1}$$

где A_k, $k = \overline{0, m}$ — вещественные матрицы размерности $n \times n$, $\ h > 0$.

Пусть $\overline{h} = m \cdot h$. Тогда $\varphi : [-\overline{h}; 0] \to R^n$ — начальная функция. Будем считать, что начальная функция принадлежит пространству кусочно-непрерывных функций, определенных на сегменте $[-\overline{h}; 0]$: $PC([-\overline{h}; 0], R^n)$. $x(t, \varphi)$ — решение системы (3.1) при начальном условии $x(\theta, \varphi) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-\overline{h}; 0]$. $\ x_t(\varphi)$ — функция сужения решения системы (3.1) на сегмент $[t - \overline{h}; t]$:

$$x_t(\varphi) : \theta \to x(t + \theta, \varphi), \quad \theta \in [-\overline{h}; 0].$$

В работе для векторов будем использовать норму Евклида. Если $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, вектор с вещественными компонентами, тогда

$$||x|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2},$$

соответствующая норма матрицы, которая имеет вещественные коэффициенты

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sigma,$$

где $\sigma \geqslant 0$ — максимальное сингулярное число матрицы A. Для элементов пространства $PC([-\overline{h}; 0], R^n)$ будем использовать равномерную норму:

$$||\varphi||_{\overline{h}} = \sup_{\theta \in [-\overline{h}; 0]} ||\varphi(\theta)||.$$

Определение 1. *Система (3.1) экспоненциально устойчива, если существуют $\gamma \geqslant 1$ и $\sigma > 0$ такие, что*

$$||x(t, \varphi)|| \leqslant \gamma e^{-\sigma t} ||\varphi||_{\overline{h}}.$$

Следующая теорема является адаптированной для линейных систем теоремой Н. Н. Красовского. Она дает достаточные условия экспоненциальной устойчивости системы (3.1).

Теорема 1. *[3] Система (3.1) экспоненциально устойчива, если существует функционал v: $PC([-\overline{h};0], R^n) \to R^n$ такой, что*

1. *найдутся $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ такие, что*

$$\alpha_1 ||\varphi(0)||^2 \leqslant v(\varphi) \leqslant \alpha_2 ||\varphi||^2_{\overline{h}}, \quad \varphi \in PC([-\overline{h};0], R^n),$$

2. *для некоторого $\beta > 0$ на решениях системы (3.1) выполняется условие*

$$\frac{dv(x_t)}{dt} \leqslant -\beta ||x(t)||^2, \quad t \geqslant 0.$$

В работе [3] показано, что функционал

$$v(\varphi) = \varphi^T(0)U(0)\varphi(0) + 2\varphi^T(0)\sum_{i=1}^{m}\int_{h_i}^{0} U(-h_i-\theta)A_i\varphi(\theta)d\theta$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int_{h_i}^{0}\varphi^T(\theta_1)A_i^T\left[\int_{h_j}^{0}U(\theta_1+h_i-\theta_2-h_j)A_j\varphi(\theta_2)d\theta_2\right]d\theta_1$$

удовлетворяет условиям Теоремы 1. Матрица $U(\tau)$, определяющая этот функционал, является матрицей Ляпунова.

Определение 2. *Матрица $U(\tau)$ называется матрицей Ляпунова, ассоциированной с симметрическая матрицей W, если она удовлетворяет свойствам:*

1. *Динамическому:*

$$\frac{d}{d\tau}U(\tau) = \sum_{k=0}^{m} U(\tau - kh)A_k, \quad \tau \geqslant 0,$$

2. *Алгебраическому:*

$$\sum_{k=0}^{m}[U(-kh)A_k + A_k^T U(kh)] = -W,$$

где W — положительно определенная матрица, *3. Симметрическому:*

$$U^T(\tau) = U(-\tau), \quad \tau \geqslant 0.$$

В работе [3] показано, что для построения матрицы Ляпунова может быть использована вспомогательная система матричных дифференциальных уравнений. Для записи этой системы введем в рассмотрение вспомогательные матрицы

$$\begin{cases} Z_j(\tau) = U(\tau + (m-j)h), \quad j = \overline{1, 2m}, \\ \tau \in [0; h]. \end{cases}$$

Лемма 1. *[3] Пусть $U(\tau)$ — матрица Ляпунова, ассоциированная с симметрической матрицей W, тогда матрицы $Z_j(\tau)$, $j = \overline{1, 2m}$ удовлетворяют системе уравнений без запаздывания:*

$$\begin{cases} \frac{dZ_j(\tau)}{d\tau} = \sum_{i=0}^{m} Z_{j+i}(\tau)A_i, \qquad j = \overline{1, m}, \\ \frac{dZ_{m+j}(\tau)}{d\tau} = -\sum_{i=0}^{m} A_i^T Z_{m+j-i}(\tau), \qquad j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

и краевым условиям

$$\begin{cases} Z_j(0) - Z_{j+1}(h) = 0, \qquad j = \overline{1, 2m-1}, \\ \sum_{i=1}^{m} A_{m-i}^T Z_i(0) + \sum_{i=0}^{m} Z_{m+i}(0)A_i + A_m^T Z_1(h) = -W. \end{cases}$$

Представим эту систему в нормальной форме. Для это воспользуемся операцией векторизации [8].

$$vec(Q) = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = q,$$

где Q — матрица размерности $n \times n$, q_j, $j = \overline{1, n}$ — столбцы матрицы Q, а q — вектор размерности n^2.Для операции векторизации справедливо следующее свойство

$$vec(PXQ) = (P \times Q)vec(X),$$

где $P,\ \ X,\ \ Q$ — матрицы размерности $n\times n$, а $P\times Q$ — прямое произведение матриц, которое вычисляется следующим образом [8]:

$$P\times Q=\begin{pmatrix} q_{11}P & \dots & q_{n1}P\\ \vdots & & \vdots\\ q_{1n}P & \dots & q_{nn}P\end{pmatrix}.$$

Обозначим через O нулевую матрицу размерности $n\times n$. Тогда в нормальной форме система примет вид:

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau}=Lz(\tau),$$

с краевыми условиями

$$Mz(0)+Nz(h)=-w,$$

где

$$z(\tau)=\begin{pmatrix} vec(Z_1(\tau))\\ \vdots\\ vec(Z_{2m}(\tau))\end{pmatrix},\quad w=\begin{pmatrix} vec(O)\\ vec(W)\end{pmatrix},$$

$$L=\begin{pmatrix} E\times A_0 & \dots & E\times A_{m-1} & E\times A_m & \dots & O\times O\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O\times O & \dots & E\times A_0 & E\times A_1 & \dots & E\times A_m\\ -A_m^T\times E & \dots & -A_1^T\times E & -A_0^T\times E & \dots & O\times O\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O\times O & \dots & -A_m^T\times E & -A_{m-1}^T\times E & \dots & -A_0^T\times E\end{pmatrix},\qquad (3.2)$$

$$M=\begin{pmatrix} E\times E & \dots & O\times O & \dots & O\times O\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O\times O & \dots & E\times E & \dots & O\times O\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{m-1}^T\times E & \dots & A_0^T\times E+E\times A_0 & \dots & E\times A_m\end{pmatrix},\qquad (3.3)$$

$$N=\begin{pmatrix} O\times O & -E\times E & \dots & O\times O\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O\times O & O\times O & \dots & -E\times E\\ A_m^T\times E & O\times O & \dots & O\times O\end{pmatrix}.\qquad (3.4)$$

Перейдем теперь к вопросу существования матрицы Ляпунова, для этого введем следующее определение.

Опредление 3. *Система (3.1) удовлетворяет условию Ляпунова, если её спектр:*

$$\Lambda = \{s| \det \left(sE - \sum_{k=0}^{m} e^{-khs} A_k \right) = 0\}$$

не содержит точку s_0 *такую, что точка* $-s_0$ *также содержится в множестве* Λ.

В работе [3] доказана теорема, которая дает необходимые и достаточные условия выполнения условия Ляпунова для системы (3.1).

Теорема 2. *[3] Система (3.1) удовлетворяет условию Ляпунова тогда и только тогда, когда определитель матрицы* $M + Ne^{Lh}$ *отличен от нуля*

$$\det(M + Ne^{Lh}) \neq 0. \tag{3.5}$$

В дальнейшем будем предполагать, что для системы (3.1) условие Ляпунова выполнено.

4. Постановка задачи

Введем семейство возмущенных систем с запаздыванием

$$\frac{dy(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{m} [A_k + \Delta_k] y(t - kh), \quad t \geqslant 0, \tag{4.1}$$

где Δ_k — постоянные матрицы, удовлетворяющие ограничениям

$$||\Delta_k|| \leqslant p_k, \quad p_k \geqslant 0, \quad k = \overline{0, m}. \tag{4.2}$$

Вспомогательные матрицы L, M, N, которые имеют структуру (3.2)–(3.4) для семейства (4.1), (4.2) имеют вид

$$L_1 = L + \Delta_L, \quad M_1 = M + \Delta_M, \quad N_1 = N + \Delta_N,$$

где

$$\Delta_L = \begin{pmatrix} E \times \Delta_0 & \dots & E \times \Delta_{m-1} & E \times \Delta_m & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O \times O & \dots & E \times \Delta_0 & E \times \Delta_1 & \dots & E \times \Delta_m \\ -\Delta_m^T \times E & \dots & -\Delta_1^T \times E & -\Delta_0^T \times E & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O \times O & \dots & -\Delta_m^T \times E & -\Delta_{m-1}^T \times E & \dots & -\Delta_0^T \times E \end{pmatrix},$$

$$\Delta_M = \begin{pmatrix} O \times O & \dots & O \times O & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O \times O & \dots & O \times O & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{m-1}^T \times E & \dots & \Delta_0^T \times E + E \times \Delta_0 & \dots & E \times \Delta_m \end{pmatrix},$$

$$\Delta_N = \begin{pmatrix} O \times O & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_m^T \times E & \dots & O \times O \end{pmatrix}.$$

Целью данной работы является нахождение p_k, $k = \overline{0, m}$, при которых условие Ляпунова выполняется для всех систем семейства (4.1), (4.2).

5. Оценка допустимых возмущений

Для оценки допустимых возмущений докажем вспомогательные леммы.

Лемма 2. *Норма матрицы удовлетворяет условию*

$$||(L+\Delta_L)^n - L^n|| \leqslant (||L|| + ||\Delta_L||)^n - ||L||^n.$$

Доказательство: Проведем доказательство методом индукции. База индукции при $n = 1$

$$||(L+\Delta_L) - L|| = ||\Delta_L|| = (||\Delta_L|| + ||L||) - ||L||.$$

При $n = 2$

$$||(L+\Delta_L)^2 - L^2|| = ||L\Delta_L + \Delta_L L + \Delta_L^2|| \leqslant 2||\Delta_L|| \cdot ||L|| + ||\Delta_L||^2$$

$$= ||L||^2 + 2||\Delta_L|| \cdot ||L|| + ||\Delta_L||^2 - ||L||^2 = (||L|| + ||\Delta_L||)^2 - ||L||^2.$$

База индукции выполняется. Перейдем к индукционному предположению. Пусть для $n-1$ выполняется

$$||(L+\Delta_L)^{n-1} - L^{n-1}|| \leqslant (||L|| + ||\Delta_L||)^{n-1} - ||L||^{n-1}.$$

Докажем для n:

$$||(L+\Delta_L)^n - L^n|| = ||(L+\Delta_L)(L+\Delta_L)^{n-1} - L \cdot L^{n-1}||$$

$$= ||(L+\Delta_L)(L+\Delta_L)^{n-1} - (L+\Delta_L) \cdot L^{n-1} + \Delta_L L^{n-1}||$$

$$\leqslant ||(L+\Delta_L)\left[(L+\Delta_L)^{n-1} - L^{n-1}\right]|| + ||\Delta_L|| \cdot ||L||^{n-1}$$

$$\leqslant (||L|| + ||\Delta_L||)\left[(||L|| + ||\Delta_L||)^{n-1} - ||L||^{n-1}\right] + ||\Delta_L|| \cdot ||L||^{n-1}$$

$$= (||L|| + ||\Delta_L||)^n - (||L| + ||\Delta_L||) \cdot ||L||^{n-1} + ||\Delta_L|| \cdot ||L||^{n-1}$$

$$= (||L|| + ||\Delta_L||)^n - ||L| \cdot ||L||^{n-1} - ||\Delta_L|| \cdot ||L||^{n-1} + ||\Delta_L|| \cdot ||L||^{n-1}$$

$$= (||L|| + ||\Delta_L||)^n - ||L||^n.$$

Таким образом

$$||(L+\Delta_L)^n - L^n|| \leqslant (||L|| + ||\Delta_L||)^n - ||L||^n.$$

$\square$

Перейдем теперь к оценке разности матричных экспонент.

Лемма 3. *Норма матрицы* $\overline{\Delta} = e^{(L+\Delta_L)h} - e^{Lh}$ *допускает оценку*

$$||\overline{\Delta}|| \leqslant e^{||L||h}(e^{||\Delta_L||h} - 1). \tag{5.1}$$

Доказательство:

$$||\overline{\Delta}|| = \left|\left|e^{(L+\Delta_L)h} - e^{Lh}\right|\right| = \left|\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L+\Delta_L)^n h^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n h^n}{n!}\right|\right|$$

$$= \left|\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}\left[(L+\Delta_L)^n - L^n\right]\right|\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} ||(L+\Delta_L)^n - L^n||.$$

Используя Лемму 2, получаем

$$||\overline{\Delta}|| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}\left[(||L|| + ||\Delta_L||)^n - ||L||^n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}(||L|| + ||\Delta_L||)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}||L||^n = e^{(||L||+||\Delta_L||)h} - e^{||L||h}.$$

В итоге получаем

$$||\overline{\Delta}|| \leqslant e^{||L||h}(e^{||\Delta_L||h} - 1)$$

$\square$

Следующая лемма дает условия, при которых для системы (4.1) выполняется условие (3.5).

Лемма 4. *Определитель матрицы* $M_1 + N_1 e^{L_1 h}$ *отличен от нуля, если*

$$||\widetilde{\Delta}|| < \frac{1}{||(M + Ne^{Lh})^{-1}||},$$

где $\widetilde{\Delta} = \left[M_1 + N_1 e^{L_1 h}\right] - \left[M + Ne^{Lh}\right].$

Доказательство:

$$\det(M_1 + N_1 e^{L_1 h}) = \det(M + Ne^{Lh} + \widetilde{\Delta})$$

$$= \det((M + Ne^{Lh})(E + (M + Ne^{Lh})^{-1}\widetilde{\Delta}))$$

$$= \det(M + Ne^{Lh})\det(E + (M + Ne^{Lh})^{-1}\widetilde{\Delta}).$$

Так как для системы (3.1) условие Ляпунова выполнено, следовательно $\det(M + Ne^{Lh}) \neq 0$. Поэтому для того, чтобы система (4.1) удовлетворяла условию (3.5), необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\det(E + (M + Ne^{Lh})^{-1}\widetilde{\Delta})$$

был отличен от нуля. Он является ненулевым, если

$$||(M + Ne^{Lh})^{-1}\widetilde{\Delta}|| < 1.$$

Для этого достаточно, чтобы $||(M + Ne^{Lh})^{-1}|| \cdot ||\tilde{\Delta}|| < 1$, или

$$||\tilde{\Delta}|| < 1/||(M + Ne^{Lh})^{-1}||.$$

$\square$

Лемма 5. *Нормы матриц* $\Delta_M, \quad \Delta_L, \quad \Delta_N$ *удовлетворяют оценкам*

$$||\Delta_M|| \leqslant 2\sum_{i=0}^{m-1} p_i + p_m, \quad ||\Delta_N|| \leqslant p_m, \quad ||\Delta_L|| \leqslant \sum_{i=0}^{m} p_i$$

Доказательство: Для нормы произведения Кронекера верно следующее равенство:

$$||A \times B|| = ||A|| \cdot ||B||,$$

где A и B — матрицы размерности $n \times n$.

Для начала оценим норму следующей матрицы

$$\overline{R} = \left\| \begin{pmatrix} O \times O & \dots & O \times O & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O \times O & \dots & O \times O & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O \times O & \dots & R_k \times E & \dots & O \times O \end{pmatrix} \right\| = \sigma_k,$$

где матрица $R_k \times E$ стоит на k- том месте, σ_1 — сингулярное число матрицы $\overline{R}$, следовательно σ_1^2 — наибольшее собственное число матрицы $\overline{R}^T \cdot \overline{R}$.

$$\begin{pmatrix} O\times O & \dots & O\times O & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & O\times O & \dots & E\times R_k^T \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & O\times O & \dots & O\times O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} O\times O & \dots & O\times O & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & O\times O & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & R_k\times E & \dots & O\times O \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} O\times O & \dots & O\times O & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & R_k\times R_k^T & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & O\times O & \dots & O\times O \end{pmatrix}$$

Собственные числа матрицы $\overline{R}^T \cdot \overline{R}$ совпадет с собственными числами ее ненулевого диагонального элемента $R_k \times R_k^T$. Наибольшее собственное число матрицы не превосходит ее нормы, следовательно

$$\sigma_k^2 = ||R_k \times R_k^T|| = ||R_k||^2.$$

Откуда получаем $\sigma_k = ||R_k||$, следовательно

$$\overline{R} = \left\| \begin{pmatrix} O\times O & \dots & O\times O & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & O\times O & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & R_k\times E & \dots & O\times O \end{pmatrix} \right\| = ||R_k||.$$

Принимая во внимание полученную оценку, оценим норму матрицы Δ_N.

$$||\Delta_N|| = \left\| \begin{pmatrix} O\times O & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_m^T\times E & \dots & O\times O \end{pmatrix} \right\| = ||\Delta_m|| \leqslant p_m.$$

Перейдем теперь к оценке нормы матрицы Δ_M.

$$\Delta_M = \begin{pmatrix} O\times O & \dots & O\times O & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & O\times O & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{m-1}^T\times E & \dots & \Delta_0^T\times E + E\times\Delta_0 & \dots & E\times\Delta_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} O\times O & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{m-1}^T\times E & \dots & O\times O \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} O\times O & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & E\times\Delta_m \end{pmatrix}$$

Норма каждой из матриц не превосходит нормы матрицы Δ_i, где $i = \overline{0, m}$. Откуда получаем, что

$$||\Delta_M|| \leqslant 2\sum_{i=0}^{m-1} ||\Delta_i|| + ||\Delta_m||$$

С учетом ограничений (4.2)

$$||\Delta_M|| \leqslant 2\sum_{i=0}^{m-1} p_i + p_m.$$

Рассмотрим теперь матрицу Δ_L.

$$\Delta_L = \begin{pmatrix} E\times\Delta_0 & \dots & E\times\Delta_{m-1} & E\times\Delta_m & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & E\times\Delta_0 & E\times\Delta_1 & \dots & E\times\Delta_m \\ -\Delta_m^T\times E & \dots & -\Delta_1^T\times E & -\Delta_0^T\times E & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & -\Delta_m^T\times E & -\Delta_{m-1}^T\times E & \dots & -\Delta_0^T\times E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E\times\Delta_0 & \dots & O\times O & O\times O & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & E\times\Delta_0 & O\times O & \dots & O\times O \\ O\times O & \dots & O\times O & -\Delta_0^T\times E & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & O\times O & O\times O & \dots & -\Delta_0^T\times E \end{pmatrix} + \dots$$

$$\cdots + \begin{pmatrix} O\times O & \dots & O\times O & E\times\Delta_m & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & O\times O & O\times O & \dots & E\times\Delta_m \\ -\Delta_m^T\times E & \dots & O\times O & O\times O & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & -\Delta_m^T\times E & O\times O & \dots & O\times O \end{pmatrix}$$

Оценим норму первой матрицы, для это найдем оценку собственных чисел следующей матрицы

$$\begin{pmatrix} \Delta_0^T\times E & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & -E\times\Delta_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E\times\Delta_0 & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & -\Delta_0^T\times E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta_0^T\times\Delta_0 & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & \Delta_0^T\times\Delta_0 \end{pmatrix}$$

Собственные числа полученной матрицы совпадают с собственными числами диагонального блока $\Delta_0^T\times\Delta_0$, и они не превосходят нормы этой матрицы. Пусть σ_0^2 — наибольшее собственное число матрицы $\Delta_0^T\times\Delta_0$, тогда

$$\sigma_0^2 = ||\Delta_0^T\times\Delta_0|| = ||\Delta_0||^2.$$

Следовательно

$$\left\|\begin{pmatrix} E\times\Delta_0 & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & -\Delta_0^T\times E \end{pmatrix}\right\| = ||\Delta_0|| \leqslant p_0$$

Оценим норму следующей матрицы

$$\begin{pmatrix} O\times O & \dots & O\times O & E\times\Delta_m & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & O\times O & O\times O & \dots & E\times\Delta_m \\ -\Delta_m^T\times E & \dots & O\times O & O\times O & \dots & O\times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O\times O & \dots & -\Delta_m^T\times E & O\times O & \dots & O\times O \end{pmatrix}$$

При умножении транспонированной матрицы на её саму получаем

$$\begin{pmatrix} \Delta_m^T \times \Delta_m & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O \times O & \dots & \Delta_m^T \times \Delta_m \end{pmatrix}$$

Наибольшее собственное число σ_m^2 такой матрицы совпадает с наибольшим собственным числом матрицы $\Delta_m^T \times \Delta_m$ и допускает оценку сверху

$$\sigma_m^2 = ||\Delta_m^T \times \Delta_m|| = ||\Delta_m||^2.$$

Откуда получаем

$$\left\| \begin{pmatrix} O \times O & \dots & O \times O & E \times \Delta_m & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O \times O & \dots & O \times O & O \times O & \dots & E \times \Delta_m \\ -\Delta_m^T \times E & \dots & O \times O & O \times O & \dots & O \times O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O \times O & \dots & -\Delta_m^T \times E & O \times O & \dots & O \times O \end{pmatrix} \right\| = ||\Delta_m|| \leqslant p_m.$$

Другие матрицы, входящие в матрицу Δ_L, имеют похожую структуру, поэтому умножение транспонированной матрицы на неё саму дает в результате блочно-диагональную матрицу, на диагонали которой стоят блоки вида $\Delta_i^T \times \Delta_i, \quad i = \overline{1, m-1}$. Наибольшее собственное число σ_i^2 такой матрицы совпадает с наибольшим собственным числом матрицы, стоящей на диагонали $\Delta_i^T \times \Delta_i$ и допускает оценку сверху

$$\sigma_i^2 = ||\Delta_i^T \times \Delta_i|| = ||\Delta_i||^2.$$

где $i = \overline{1, m-1}$. Откуда получаем

$$||\Delta_L|| \leqslant \sum_{i=0}^{m} \Delta_i \leqslant \sum_{i=0}^{m} p_i$$

$\square$

С учетом оценок норм матриц $\Delta_M, \quad \Delta_N, \quad \Delta_L$, полученных в Лемме 5, можно сделать следующий вывод.

Теорема 3. *Семейство (4.1), (4.2) удовлетворяет условию Ляпунова, если p_k, $k=\overline{0,m}$, удовлетворяют неравенству*

$$2\sum_{i=0}^{m-1} p_i + p_m + e^{||L||h}||N||(e^{\sum_{i=0}^{m} p_i h} - 1) + p_m e^{(||L||+\sum_{i=0}^{m} p_i)h} \leqslant \frac{1}{||(M+Ne^{Lh})^{-1}||}. \tag{5.2}$$

Доказательство:

$$||\widetilde{\Delta}|| = ||\left[M_1 + N_1 e^{L_1 h}\right] - \left[M + Ne^{Lh}\right]||$$

$$= ||\Delta_M + (N+\Delta_N)(e^{Lh} + \overline{\Delta}) - Ne^{Lh})||$$

$$= ||\Delta_M + N\overline{\Delta} + \Delta_N(e^{Lh} + \overline{\Delta})||$$

$$\leqslant ||\Delta_M|| + ||N|| \cdot ||\overline{\Delta}|| + ||\Delta_N|| \left(||e^{Lh}|| + ||\overline{\Delta}||\right)$$

$$\leqslant ||\Delta_M|| + ||\overline{\Delta}|| \left(||N|| + ||\Delta_N||\right) + ||\Delta_N||e^{||L||h}.$$

Используя Лемму 3, Леммы 4 и Лемму 5 получаем

$$||\widetilde{\Delta}|| \leqslant 2\sum_{i=0}^{m-1} p_i + p_m + e^{||L||h}(e^{||\Delta_L||h} - 1)\left(||N|| + p_m\right) + p_m e^{||L||h}$$

$$\leqslant 2\sum_{i=0}^{m-1} p_i + p_m + e^{||L||h}||N||(e^{||\Delta_L||h} - 1) + p_m e^{(||L||+||\Delta_L||)h}.$$

$$\leqslant 2\sum_{i=0}^{m-1} p_i + p_m + e^{||L||h}||N||(e^{\sum_{i=0}^{m} p_i h} - 1) + p_m e^{(||L||+\sum_{i=0}^{m} p_i)h}.$$

Принимая во внимание ограничения из Леммы 4, получаем искомое неравенство. $\square$

6. Примеры

6.1. Пример 1

В качестве примера рассмотрим уравнение с двумя запаздываниями

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t-1) - x(t-2), \quad t \geqslant 0.$$

Для данного уравнения матрицы (3.2) – (3.4) будут иметь вид

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим матрицу $M + Ne^{Lh}$.

$$M + Ne^{Lh} = \begin{pmatrix} 0{,}50 & -0{,}81 & -0{,}54 & 0{,}27 \\ 0{,}81 & 0{,}50 & -0{,}27 & 0{,}54 \\ 0{,}81 & 0{,}81 & 0{,}77 & 0{,}27 \\ -0{,}50 & 0{,}81 & 0{,}04 & -0{,}77 \end{pmatrix}$$

Определитель

$$det[M + Ne^{Lh}] = -1{,}804$$

отличен от нуля, следовательно данная система удовлетворяет условию Ляпунова. Перейдем теперь к рассмотрению возмущенного уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} = \Delta_0 y(t) + (\Delta_1 - 1)y(t-1) + (\Delta_2 - 1)y(t-2).$$

где $|\Delta_k| \leqslant p_k, \quad k = \overline{0,2}$.

Используя неравенство (5.2) оценим допустимые возмущения. Вычислим значение нормы матрицы, стоящей в правой стороне данного неравенства.

$$||(M + Ne^{L})^{-1}|| = 1{,}677$$

Оценим $\widetilde{\Delta}$ согласно неравенству (5.2). Для этого воспользуемся Леммой 5 для оценки норм матриц $\Delta_L, \quad \Delta_M$, и Δ_N.

$$||\Delta_M|| \leqslant 2p_0 + 2p_1 + p_2, \quad ||\Delta_N|| \leqslant p_2, \quad ||\Delta_L|| \leqslant p_0 + p_1 + p_2,$$

Вычислим нормы матриц N и L.

$$||N|| = 1, \quad ||L|| = 2{,}288.$$

Из Леммы 4 имеем

$$||\widetilde{\Delta}|| < 0{,}596.$$

Согласно Теореме 3 получаем ограничение на $p_k, \quad k = 0, 1, 2.$

$$2p_0 + 2p_1 + p_2 + e^{2{,}288}(e^{p_0+p_1+p_2} - 1) + e^{2{,}288+p_0+p_1+p_2}p_2 < 0{,}596.$$

Пусть $p_0 = p_1 = p_2 = p$, тогда

$$5p + 9{,}855(e^{3p} - 1) + 9{,}855pe^{3p} < 0{,}596.$$

Получаем, что

$$p < 0{,}0131.$$

Пусть $p_0 = p_1 = p, \quad p_2 = 0$ тогда

$$4p + 9{,}855(e^{2p} - 1) < 0{,}596.$$

Получаем

$$p < 0{,}0246.$$

Случаи $p_0 = p_2 = p, \quad p_1 = 0$ и $p_1 = p_2 = p, \quad p_0 = 0$ совпадают

$$3p + 9{,}855(e^{2p} - 1) + 9{,}855pe^{2p} < 0{,}596.$$

Получаем

$$p < 0{,}0179.$$

6.2. Пример 2

в качестве другого примера рассмотрим систему:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 0 \end{pmatrix} x(t-1) +$$

$$+ \begin{pmatrix} -0{,}49 & 0 \\ 0 & -0{,}49 \end{pmatrix} x(t-2),$$

описанную в работе [12]. В данной работе показано, что система является экспоненциально устойчивой. Матрицы (3.2) – (3.4) имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ L_4 & L_1 & L_2 & L_3 \\ -L_3 & L_5 & L_6 & L_4 \\ L_4 & -L_3 & L_5 & L_6 \end{pmatrix},$$

где

$$L_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} -0{,}49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}49 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}49 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}49 \end{pmatrix}, \quad L_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_5 = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}7 & 0 & 0 \\ -0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}7 \\ 0 & 0 & -0{,}7 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & L_4 & L_4 & L_4 \\ L_4 & M_1 & L_4 & L_4 \\ L_4 & L_4 & M_1 & L_4 \\ -L_5 & M_2 & L_2 & L_3 \end{pmatrix},$$

где

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$N = \begin{pmatrix} L_4 & -M_1 & L_4 & L_4 \\ L_4 & L_4 & -M_1 & L_4 \\ L_4 & L_4 & L_4 & -M_1 \\ L_3 & L_4 & L_4 & L_4 \end{pmatrix}.$$

Определитель

$$det[M + Ne^{Lh}] = 7{,}5 \cdot 10^6$$

отличен от нуля, следовательно, система удовлетворяет условию Ляпунова. Перейдем теперь к рассмотрению возмущенной системы.

$$\frac{dy(t)}{dt} = (A_0 + \Delta_0)y(t) + (A_1 + \Delta_1)y(t-1) + (A_2 + \Delta_2)y(t-2).$$

где $||\Delta_k|| \leqslant p_k, \quad k = 0, 1, 2$. Для того, чтобы данная система удовлетворяла условию Ляпунова должно выполняться неравенство (5.2). Вычислим значение нормы матрицы, стоящей в правой стороне данного неравенства.

$$||(M + Ne^L)^{-1}|| = 1{,}2663.$$

Оценим $\widetilde{\Delta}$ согласно (5.2). Для этого воспользуемся Леммой 5.

$$||\Delta_M|| \leqslant 2p_0 + 2p_1 + p_2, \quad ||\Delta_N|| \leqslant p_2, \quad ||\Delta_L|| \leqslant p_0 + p_1 + p_2.$$

Вычислим значение нормы матриц N и L.

$$||N|| = 1, \quad ||L|| = 2{,}968.$$

Из Леммы 4 получаем

$$||\widetilde{\Delta}|| < 0{,}79.$$

Согласно Теореме 3 получаем ограничение на $p_k, \quad k = 0, 1, 2$.

$$2p_0 + 2p_1 + p_2 + e^{2{,}968}(e^{p_0+p_1+p_2} - 1) + e^{2{,}968+p_0+p_1+p_2}p_2 < 0{,}79.$$

Пусть $p_0 = p_1 = p_2 = p$, тогда

$$5p + 19{,}453(e^{3p} - 1) + 19{,}453pe^{3p} < 0{,}79.$$

Получаем, что

$$p < 0{,}00938.$$

Пусть $p_0 = p_1 = p, \quad p_2 = 0$ тогда

$$4p + 19{,}453(e^{2p} - 1) < 0{,}79.$$

Получаем

$$p < 0{,}0181.$$

Случаи $p_0 = p_2 = p, \quad p_1 = 0$ и $p_1 = p_2 = p, \quad p_0 = 0$ совпадают

$$3p + 19{,}453(e^{2p} - 1) + 19{,}453pe^{2p} < 0{,}79.$$

Получаем

$$p < 0{,}0126.$$

Для данного примера полученные ограничения на p показывают, при каких отклонениях система будет оставаться экспоненциально устойчивой.

Все вычисление для примеров были выполнены с помощью математических пакетов Matlab и Maple.

7. Выводы

В работе были получены оценки допустимых возмущений для систем с запаздыванием. Предложенный в работе метод позволяет получить оценки допустимых возмущений, которые обеспечивают сохранение выполнения условия Ляпунова для возмущенных систем. Он позволяет говорить о робастности системы. То есть, если изначально система была экспоненциально устойчива, то с помощью неравенства, полученного в Теореме 3, можно оценить при каких значениях возмущения система будет сохранять это свойство.

8. Заключение

Целью данной работы было получение условий, при которых возмущенная система удовлетворяет условию Ляпунова. В ходе исследования ограничения были получены. Также были рассмотрены примеры, для которых, используя полученные условия, были найдены допустимые значения изменения возмущений. Результаты данной работы были представлены на международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость»[9].

Список литературы

[1] Huang W. Generalization of Liapunov's Theorem in a Linear Delay System. // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1989, P. 83–94.

[2] Infante E. F., Castelan W. B. A Liapunov functional for a matrix difference-differential equation. // Journal of Differential Equations, 1978, P. 439–451

[3] Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. New York: Birkhauser, 2013, XVI, 311 p.

[4] Kharitonov, V. L, Plischke, E. Lyapunov matrices for time-delay systems, Systems & Control Letters, 55: 2006, P. 697–706.

[5] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov-Krasovskii approach for robust stability of time delay systems // Automatica. 2003, Vol. 39. P. 15–20.

[6] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967, 548 с.

[7] Красовский Н. Н. О применении второго метода Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика. 1956, Т. 20, № 3. С. 315–327.

[8] Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1973, 280 с.

[9] Левина Е. Г. Оценка робастности условия Ляпунова для систем с запаздываниями // Процессы управления и устойчивость. 2017

[10] Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., 1951, 256 с.

[11] Репин Ю. М. Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1965, Т. 29, № 3. С. 564–566.

[12] Харитонов В. Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. 2. Матрицы Ляпунова, Вестник Санкт-Петербургского Университета, серия 10, вып. 2, 2005, С. 199–207.

[13] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. В. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971, 296 с.