

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Крылова Виктория Александровна

Магистерская диссертация

**Математические модели
транспортных потоков**

Направление 01.04.02

«Прикладная математика и информатика»

Магистерская программа «Надежность и безопасность сложных систем»

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Колпак Е. П.

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Введение.....	3
Обзор литературы.....	8
Глава 1. Анализ статистических данных.....	11
§1.1. Динамика происшествий на автомобильных дорогах.....	11
§1.2. Динамика раненых на автомобильных дорогах.....	13
§1.3. Динамика погибших на автомобильных дорогах.....	14
Глава 2. Математические модели движения транспортных потоков на неоднородных участках дорог.....	17
§2.1. Модель движения на нерегулируемом перекрестке.....	17
§2.2. Исследование модели на устойчивость.....	20
§2.3. Численные эксперименты.....	21
Глава 3. Гидродинамические модели транспортных потоков.....	27
§3.1. Модель сохранения транспортного потока.....	27
§3.2. Модель Бюргера для плотности потока.....	33
§3.3. Модель плотности потока с учетом изменения скорости.....	36
§3.4. Учет человеческого фактора при изменении скорости потоков.....	38
Заключение.....	44
Список литературы.....	47

Введение

В России после 1970 года, в связи со строительством и вводом в эксплуатацию автомобильного завода в г. Тольятти произошло резкое возрастание количества автомобилей, т.е. повышение уровня автомобилизации. Под уровнем автомобилизацией понимается среднее количество индивидуальных легковых автомобилей, приходящихся на 1000 жителей. Также стали заметны качественные изменения в структуре автомобильного парка страны, увеличилась максимально возможная скорость. В данных условиях технические возможности автомобилей не отвечали существовавшей в то время улично-дорожной сети. Стало заметно несоответствие организации дорожного движения автомобильной ситуации того времени.

В следствие выше сказанного, произошел быстрый рост аварийности. Решением некоторых проблемы являлось изменение улично-дорожной сети. Также в 1972 году было принято решение начать подготовку в учебных заведениях страны инженеров по организации дорожного движения. Таким образом, одним из необходимых мероприятий по предотвращению аварийности была реализация предложенных решений по обеспечению надежности дорожного движения.

Одним из важных направлений в данной области является исследование влияния множества различных показателей, среди которых интенсивность транспортного потока (количество автомобилей, проходящих через поперечное сечение дороги в момент времени t), плотность потока (количество автомобилей на единицу длины однородного по транспортно-эксплуатационным качествам участка дороги в момент времени t), скорость движения, задержки в движении, на аварийность.

В последнее время заметен сильный рост автомобилизации. Тем не менее, скорость роста дорожно-транспортной сети заметно отстает от роста

числа автомобилей. В качестве основного показателя развития дорожно-транспортной сети, помимо технических характеристик, рассматривается плотность дорожной сети. Под плотностью дорожной сети понимается отношение длины дорог в километрах к площади территории, на которой они расположены, в квадратных километрах $\left(\frac{\text{км}}{\text{км}^2}\right)$. В связи с большей скоростью роста автомобилизации относительно скорости роста плотности дорожно-транспортной сети, резко возрастает показатель аварийности – число погибших людей на 10 тыс. транспортных средств. Данная зависимость представлена на Рис. 1.

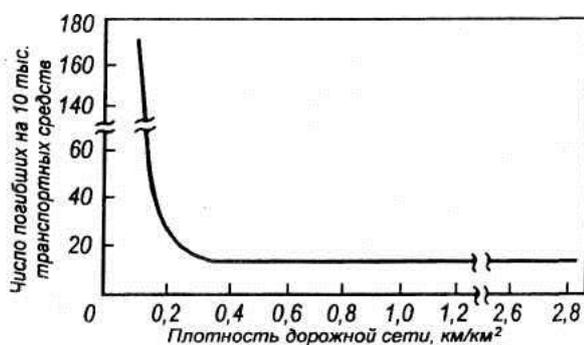


Рис. 1. Зависимость уровня аварийности от плотности дорожной сети

Таким образом, важнейшим фактором, влияющим на безопасность дорожно-транспортной сети, является развитие дорожной сети. Также в некоторых работах исследуется вопрос о возможном перепроектировании типов дорог в соответствии с современными требованиями [14].

Существует множество причин, кроме плотности дорожно-транспортной сети, определяющих уровень безопасности, к ним относятся следующие:

- неудовлетворительный уровень соответствия автомобильного транспорта и параметрами дорог;

Строительство улично-дорожной сети заметно отстает от роста количества транспортных средств, что характерно для множества стран во всем мире. Разница становится более заметной в городах, где строительство дорог сдерживается финансовыми возможностями,

также, что более значимо, ограничивается существующими планировкой и инфраструктурой.

- недостаточный уровень разграничения транспортных потоков от потоков противоположных направлений и других участников движения;

Дорожно-транспортные сети, в особенности расположенных в районе малонаселенных пунктов, движение автомобилей происходит вместе с другими участниками дорожного движения, таких как многогабаритные транспортные средства, грузовые автомобили, тракторы, гужевые повозки, мототранспорт, вело-транспорт, пешеходы и зачастую домашние животные. Описанное неоднородное движение может привести к образованию множества дорожно-транспортных происшествий. Под дорожно-транспортным происшествием понимается событие, возникшее в процессе движения по дороге транспортного средства и с его участием, при котором погибли или пострадали люди или повреждены транспортные средства, сооружения, грузы, либо причинён иной материальный ущерб [8].

В крупных населенных пунктах в связи с недостаточно развитой улично-дорожной сети, в основном, не существует возможности разделения потоков различных видов транспортных средств.

- низкий средний уровень профессионализма водителей.

В последнее время растет число потенциальных водителей, но во многих странах отсутствует достаточно развитая материально-техническая база. Также существует нехватка квалифицированных преподавателей. По этим причинам процесс подготовки потенциальных водителей не обеспечивает получения требуемых навыков и знаний.

При этом квалификация водителя является решающим звеном в обеспечении безопасности дорожного движения. Задание траектории автомобиля, соблюдение необходимых дистанций и интервалов между

движущимися автомобилями, быстрое принятие решений для разрешения возможных, непредвиденных спорных ситуаций на дороге, зависят в основном от надежности водителя.

Уровень надежности дорожной сети зависит не только от технических характеристик дорожной сети, транспортных средств и уровня квалификации водителей. Безопасность дорожного движения обеспечивается при условии безопасности поведения или состояния нескольких компонентов, среди которых водитель, транспортное средство, дорога и среда движения.

Под надежным поведением водителя понимается состояние его здоровья, степени усталости, уровне квалификации, умении быстро реагировать на изменившиеся условия дорожного движения при ограниченном времени.

Относительно уровня надежности автомобиля рассматривается несколько технических показателей. К таким показателям относятся габаритные размеры, тяговые и тормозные качества, система световых приборов, маневренность, элементы пассивной безопасности и др. Под пассивной безопасностью понимается совокупность конструктивных и эксплуатационных свойств автомобиля, направленных на уменьшении степени тяжести дорожно-транспортного происшествия. Совокупность данных свойств включает подушки безопасности, ремни безопасности, лобовые стекла типа “triplex” (рассыпаются при разрушении) и др.

Безопасность дорог включает в себя ширину проезжей части, качество дорожного покрытия, коэффициент сцепления автомобиля с покрытием дороги, геометрические параметры сети, состояние обочин, наличие и качество ограничительных элементов.

Под безопасной средой движения понимается влияние погодноклиматических условий, наличие других участников движения и др.

Безопасность дорожного движения обеспечивается надежностью перечисленных компонентов, тем не менее, создание абсолютно безопасной

системы невозможно, в связи с присутствием в данной системе человека. Уменьшить влияние человеческого фактора возможно путем принужденного сосредоточения внимания, например на магистралях, сокращая длительные прямые участки дорог. Также эффективными способами являются обеспечение транспортного средства техническими средствами, такими как отдельный тормозной привод, антиблокировочные тормозные системы, устройства, предупреждающие об опасном расстоянии между транспортными средствами, а также другие устройства, приводящие к уменьшению времени принятия решений. Помимо технической составляющей автомобилей, используются установка дублирующих знаков и светофоров.

Таким образом, необходимо развивать качество подготовки водителей для сведения к минимуму возможных ошибок, поддерживать и улучшать технические характеристики транспортных средств, обеспечивать требуемое качество дорожного покрытия, проводить регулярные мероприятия по поддержке нормального состояния дорожной сети и оптимально организовывать дорожное движение. Также важное значение имеет работа медицинских служб, средств массовой информации по агитации и популяризации обеспечения безопасности движения, введение обучения в учебных заведениях правил дорожного движения.

Обзор литературы

В наше время исследование влияния различных характеристик, определяющих транспортные потоки, является актуальной проблемой. Идея развития теории транспортных потоков поддерживалась исследователями различных сфер, таких как физики, математики, специалисты по исследованию операций, методов принятия решений, экономистов и специалистов транспортной сферы. Основы математического моделирования, описывающего законы дорожного движения были заложены в 1912 г. русским ученым, профессором, специалистом по городскому планированию, автором основополагающих трудов в данной области исследований Г. Д. Дубелиром [4, 5]. Первая попытка систематизировать проведенные математические исследования транспортных потоков и представить их в виде отдельного раздела прикладной математики была сделана Ф. Хейтом [13]. Дальнейшие исследования и разработки в этой сфере представлены в работах многих отечественных и зарубежных ученых.

Активное развитие математического моделирование транспортных потоков появилось в 50-е годы двадцатого века, появились первые гидродинамические модели, описывающих движения транспортных потоков с позиций механики сплошной среды. В данных моделях, транспортный поток рассматривается как поток одномерной сжимаемой жидкости. Работы в данной сфере были представлены М. Лайтхиллом и Дж. Уиземом, П. Ричардсоном. В модели Лайтхилла–Уизема (Ричардса) [12] при описании транспортного потока используется закон сохранения количества транспортных средств, при этом принимается наличие функциональной зависимости между величиной потока и плотностью. Под величиной потока понимается число машин проезжающих через сечение за единицу времени. Также А. Решелем (1950) и Л. Пайпсом (1953) были предложены модели следования за лидером [2]. В моделях данного типа рассматриваются уравнения движения каждого автомобиля. В современной постановке

моделей следования за лидером учитывается принятие решения водителем, зависящее от действий других транспортных средств, движущимися в транспортном потоке. Т.е. с учетом действий водителя при изменении скорости движения впередиидущего транспортного средства и дистанции между автомобилями (М. Трайбер, 1999) [15].

В данный момент существует множество научных журналов, посвященных динамике транспортных потоков. Некоторыми из них являются *Mathematical Models and Computer Simulations*, международный журнал *Transportation Research*, *Transportation Science*, *Physical Review E*.

Основными задачами в анализе математических моделей являются исследование их устойчивости [1, 7], разработка алгоритмов построения численных решений обыкновенных дифференциальных уравнений [6] и нелинейных уравнений в частных производных.

Целью работы являлась разработка и анализ математических моделей, описывающих различные показатели транспортных потоков, влияющих на аварийность на дорожно-транспортной сети.

Проводился анализ имеющихся математических моделей, описывающих движение транспортных потоков, основанных на математических моделях, используемых в гидродинамике.

Проводилась обработка статистических данных относительно основных показателей, определяющих уровень безопасности дорожно-транспортной сети в РФ и по регионам.

Разрабатывались математические модели движения транспортных средств на крестообразном нерегулируемом перекрестке дорог с однополосным движением в каждом направлении, модели, описывающие изменения основных показателей движения транспортных потоков, таких как скорость и плотность транспортных потоков. При рассмотрении модели движения автомобилей, проходящих через пересечение дорог, был проведен анализ связи между объемом входных потоков и возникновением заторов на дорожной сети.

Глава 1. Анализ статистических данных

Важным этапом при моделировании каких-либо объектов является подготовка информации для последующей проверки адекватности математической модели.

Смертность в результате дорожно-транспортных происшествий входит десятку основных причин смертности населения и является основной причиной смертности у людей в возрасте от 15 лет до 29 лет. В связи с имеющимися данными необходимо принимать меры по увеличению надежности данного вида средства передвижения и дорожно-транспортной сети в целом.

Была проанализирована статистическая информация относительно основных показателей, определяющих уровень безопасности дорожно-транспортной сети в России и по регионам.

В качестве основных показателей рассматриваются следующие:

- количество происшествий на автомобильных дорогах;
- количество раненых на автомобильных дорогах;
- количество погибших на автомобильных дорогах.

§1.1. Динамика происшествий на автомобильных дорогах

Аварийность на автомобильном транспорте представляет собой одну из наиболее важных социально-экономических проблем множества стран.

Первое дорожно-транспортное происшествие с участием автомобиля было зафиксировано 30 мая 1896 года в Нью-Йорке (электромобиль столкнулся с велосипедистом, в результате данного ДТП пострадавший обошелся переломом). Через несколько месяцев, 17 августа 1896 года в Лондоне произошло первое дорожно-транспортное происшествие с летальным исходом. В произошедшем вина лежала на обоих участниках

движения (водитель и пешеход): водитель превысил скорость в два раза, пешеход вышел на проезжую часть в запрещающем знаками месте.

Исходя из статистической информации за последние несколько лет, представленной на сайте федеральной службы государственной статистики, каждые сутки на автомобильных дорогах и улицах совершается около 550 дорожно-транспортных происшествий, что влечет за собой большое количество жертв.

Данный показатель является основным показателем уровня безопасности.

На Рис. 2 показана зависимость числа происшествий (в тыс.) в интервале времени с 1990 по 2015 года.



Рис. 2. Количество происшествий на автомобильных дорогах

Можно заметить, что с 2000 года скорость роста числа происшествий заметно выросла. Можно предположить, что рост связан с возрастанием автомобилизации в стране. С 2007 года происходит снижение числа происшествий, что объясняется введением в нормативно-правовую базу множества редакций в Правила Дорожного Движения. Например, в 2006

году, согласно федеральному закону от 18.12.2006 N 232-ФЗ началась реконструкция и перепроектирование дорог на территории Российской Федерации, вследствие чего планировалось обеспечить безопасность дорожного движения. Законом от 28.07.2012 N 131-ФЗ введен перечень мероприятий по обеспечению работников транспортной сферы, а транспортных средств безопасной эксплуатации. Также было внесено множество правок в Правила дорожного движения. Например, от 14.12.2005 N 767 было запрещено движение при неисправности рабочей тормозной системы, рулевого управления, сцепного устройства (в составе автопоезда), не горящих (отсутствующих) фарах и задних габаритных огнях в темное время суток или в условиях недостаточной видимости, недействующем со стороны водителя стеклоочистителе во время дождя или снегопада. В последующие годы велась активная работа по внесению корректировок и введению множества редакций в ПДД.

§1.2. Динамика раненых на автомобильных дорогах

Данный показатель зависит от количества происшествий на дорожно-транспортной сети.

На Рис. 3 изображена зависимость количества раненых в дорожно-транспортных происшествиях от времени. Рассматривается интервал времени с 1980 по 2015 года.



Рис. 3. Количество раненых в происшествиях на автомобильных дорогах

За последние четыре десятилетия в динамике изменения числа раненых в происшествиях происходили значительные изменения скорости роста данного показателя. В первые семь лет двадцать первого века можно заметить значительный рост скорости изменения числа раненых в ДТП. Увеличение также можно объяснить ростом в данный период времени числа дорожно-транспортных происшествий в связи с ростом автомобилизации в стране.

§1.3. Динамика погибших на автомобильных дорогах

На Рис. 4 представлена зависимость количества раненых в происшествиях от времени в интервале времени с 1980 по 2015 года.

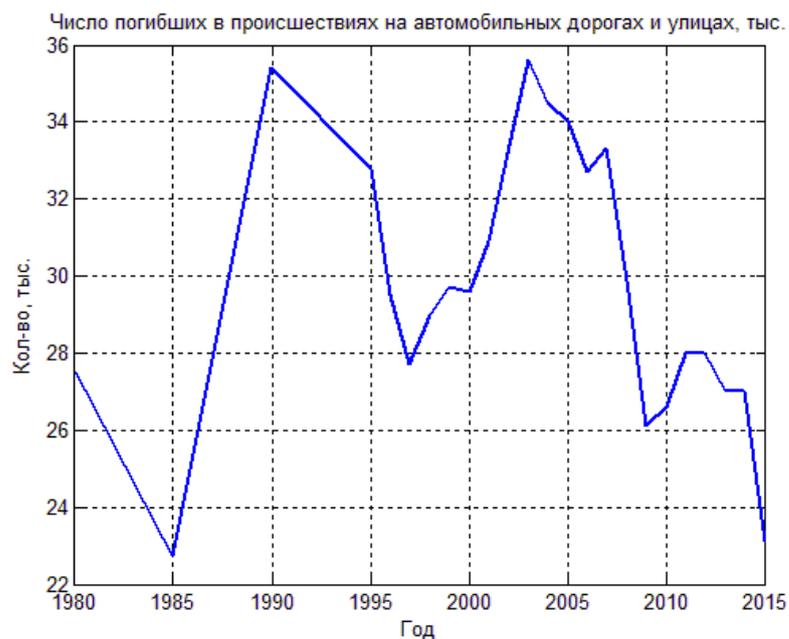


Рис. 4. Количество погибших в происшествиях на автомобильных дорогах

Можно заметить множество пиков, что говорит о нестабильности данного показателя. Тем не менее, можно заметить тенденцию к снижению числа погибших в происшествиях на дорогах и улицах в последние пятнадцать лет.

Во многих работах опубликованных исследуется вопрос о возможном перепроектировании типов дорог в соответствие с современными требованиями [14]. Одним из примеров является тип дорожной сети, разработанный в Швеции. В связи с увеличением автомобилизации и увеличением надежности автомобилей было предложено проводить реорганизацию дороги по схеме «2+1» в рамках программы Vision Zero, когда дорога, состоящая из трех полос, разделяется на две полосы движения в одном направлении и одной полосы на встречном направлении. Количество полос в каждом направлении чередуется с периодом в несколько километров. Дороги данного типа могут быть перепроектированы из традиционных дорог, если их ширина не менее 13 метров.

На Рис. 5. представлена схема дороги, построенной в рамках программы Vision Zero «2+1».

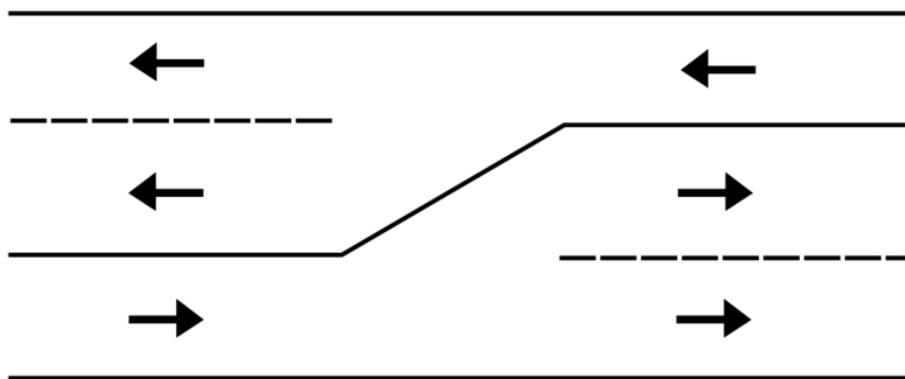


Рис. 5. Схема дороги типа «2+1»

На графике (рис. 6) представлена статистика смертности на дорогах Швеции в период с 1996 года до 2015 года.

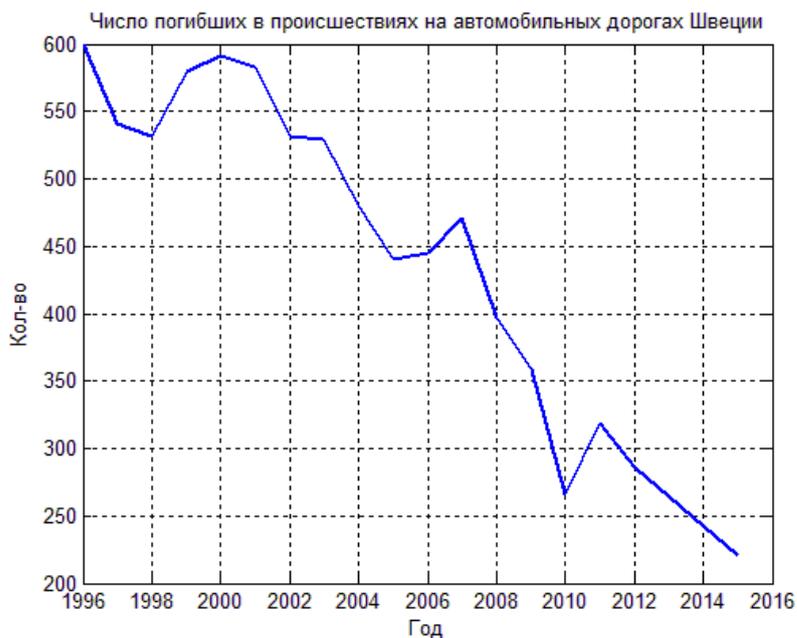


Рис. 6. Количество погибших в происшествиях на автомобильных дорогах Швеции

Заметна тенденция к постепенному снижению числа погибших в дорожно-транспортных происшествиях, что стало возможным после уменьшения количества происшествий на автомобильных дорогах Швеции путем перепроектирования дорог.

Глава 2. Математические модели движения транспортных потоков для неоднородных участках дорог

§2.1. Модель движения транспортных потоков на нерегулируемом перекрестке

Перекрестки на автомобильных дорогах, т.е. места пересечения, примыкания или разветвления дорог на одном уровне, ограниченные воображаемыми линиями, соединяющими соответственно противоположные, наиболее удаленные от центра перекрестка начала закруглений проезжих частей [8], представляют собой дополнительную уязвимость дорожно-транспортной сети, т.к. на перекрестках происходит наибольшее количество дорожно-транспортных происшествий.

Моделирование движения транспортных потоков на перекрестках позволяет определить распределение интенсивности транспортных потоков, движущихся по различным направлениям.

В качестве модели перекрестка рассматривается крестообразное, нерегулируемое соединение дорог, представленное на рисунке 1.1.

В связи с преобладанием легковых автомобилей в составе автомобильных парков, в модели будут рассматриваться транспортные средства одного типа. При моделировании принималось, что перекресток данного типа встречается, в основном, вне крупных населенных пунктов либо в местах с менее загруженным движением районов городов. В связи с этим предположением, не рассматривается временная неравномерность транспортных потоков.

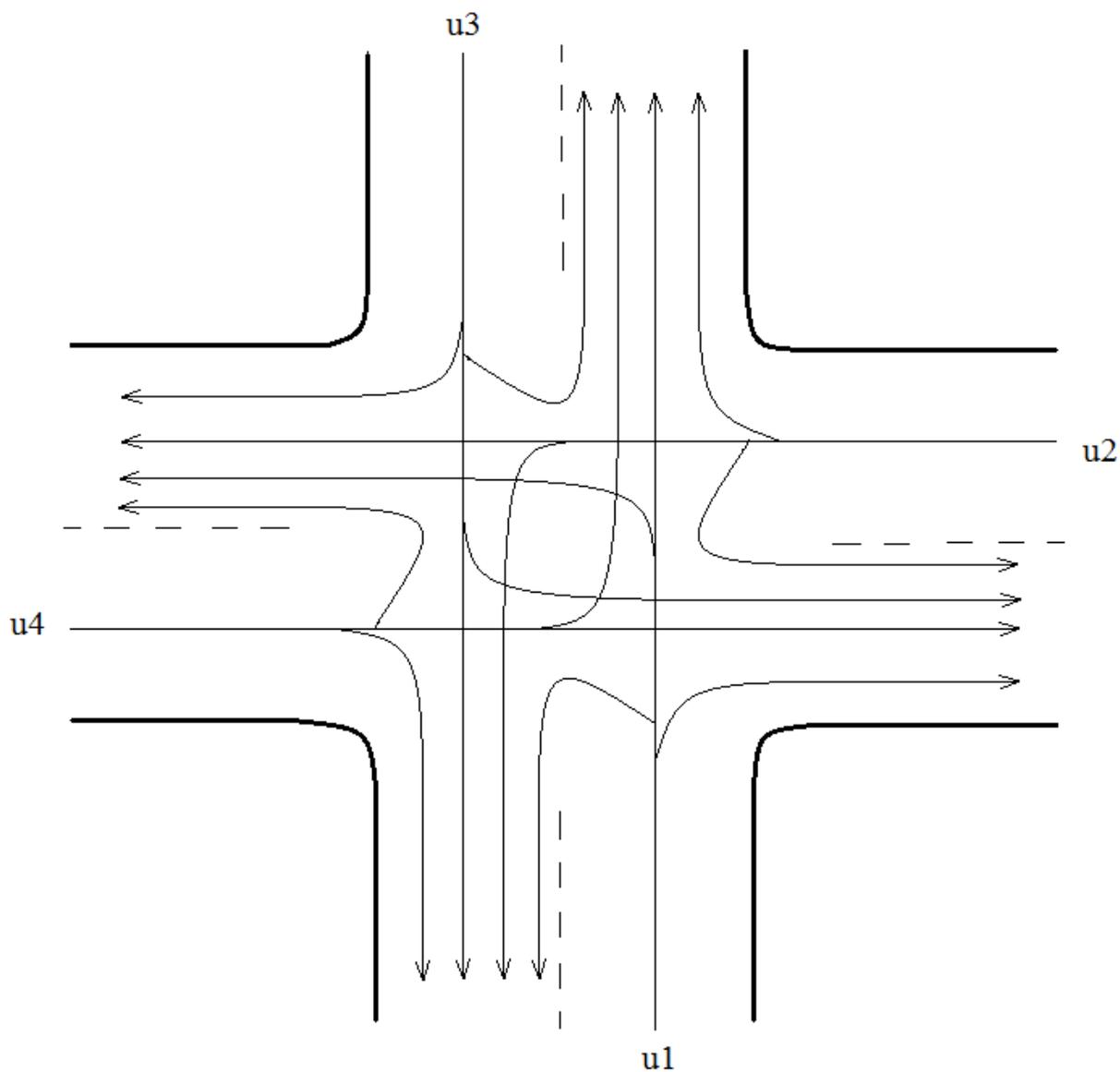


Рис. 1.1. Схема крестообразного нерегулируемого перекрестка

Перекресток, изображенный на рисунке 1.1, имеет крестообразный тип перекрестка с однополосным движением в двух направлениях.

На перекресток прибывают транспортные потоки с интенсивностью $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$ с соответствующих четырех направлений. Каждый из входящих потоков может разделиться на четыре потока путем проведения одного из способов маневрирования: разворот, поворот налево, поворот направо. Также возможен проезд в прямом направлении. При этом формируются четыре убывающих с перекрестка потока, характеризующиеся количеством убывающих транспортных средств в единицу времени,

соответственно u_1, u_2, u_3, u_4 . Поток u_i формируется при выполнении следующих маневров транспортными средствами:

1. При выполнении разворота транспортными средствами, движущимися изначально в потоке u_{i+2} ;
2. При выполнении левого поворота транспортными средствами, движущимися изначально в потоке u_{i+3} ;
3. При выполнении правого поворота транспортными средствами, движущимися изначально в потоке u_{i+1} ;
4. При продолжении движения по изначальной траектории транспортными средствами, находящимися в потоке u_i .

Индексы получены путем круговой перестановки $i = 1, 2, 3, 4$.

При переходе транспортных средств из изначального потока в различные направления, деление происходит в соответствующих долях.

Учитывая закон сохранения числа транспортных средств, модель движения потоков, входящих на крестообразный нерегулируемый перекресток, представлена следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{du_1}{dt} &= f_1(t) + (-v_{13} \cdot a_{11} - v_{14} \cdot a_{12} - v_{11} \cdot a_{13} - v_{12} \cdot a_{14}) \cdot u_1 + v_{31} \cdot a_{31} \cdot u_3 + v_{21} \cdot a_{22} \cdot u_2 + v_{41} \cdot a_{44} \cdot u_4 \\
 \frac{du_2}{dt} &= f_2(t) + (-v_{24} \cdot a_{21} - v_{21} \cdot a_{22} - v_{22} \cdot a_{23} - v_{23} \cdot a_{24}) \cdot u_2 + v_{42} \cdot a_{41} \cdot u_4 + v_{32} \cdot a_{32} \cdot u_3 + v_{12} \cdot a_{14} \cdot u_1 \\
 \frac{du_3}{dt} &= f_3(t) + (-v_{31} \cdot a_{31} - v_{32} \cdot a_{32} - v_{33} \cdot a_{33} - v_{34} \cdot a_{34}) \cdot u_3 + v_{13} \cdot a_{11} \cdot u_1 + v_{43} \cdot a_{42} \cdot u_4 + v_{23} \cdot a_{24} \cdot u_2 \\
 \frac{du_4}{dt} &= f_4(t) + (-v_{42} \cdot a_{41} - v_{43} \cdot a_{42} - v_{44} \cdot a_{43} - v_{41} \cdot a_{44}) \cdot u_4 + v_{34} \cdot a_{34} \cdot u_3 + v_{14} \cdot a_{12} \cdot u_1 + v_{24} \cdot a_{21} \cdot u_2
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

где:

$u_i, i = \overline{1, 4}$ – количество транспортных средств, убывающих из перекрестка в единицу времени в соответствующем индексу направлении;

$f_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$ – количество входящих на перекресток транспортных средств в единицу времени в соответствующем индексу направлении (интенсивность i -го транспортного потока);

v_{ij} , $i = \overline{1, 4}$, $j = \overline{1, 4}$ – скорость перехода транспортных средств из i -го транспортного потока в j -ый;

a_{ij} , $i = \overline{1, 4}$, $j = \overline{1, 4}$ – доля транспортных средств, переходящих из i -го транспортного потока по j -му направлению, где

$j = 1$ – разворот транспортного средства;

$j = 2$ – поворот транспортного средства налево;

$j = 3$ – поворот транспортного средства направо;

$j = 4$ – продолжение движения транспортного средства по предыдущей траектории;

Доли транспортных средств при переходе из изначального направления движения удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} &= 1 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} &= 1 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} &= 1 \\ a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44} &= 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

При выборе функций $f_i(t)$ и постоянных a_{ij} и v_{ij} , предполагаем, что дорога, по которой движутся транспортные потоки u_1 и u_3 является дорогой с наибольшей интенсивностью движения.

§2.2. Исследование модели на устойчивость

При исследовании системы (1.1) на устойчивость применялась теорема Гершгорина [7] о локализации собственных чисел матриц. Согласно данной

теореме, собственные числа квадратной матрицы порядка n лежат в замкнутой области, образованной кругами:

$$|z - b_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |b_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.3)$$

где b_{ij} - коэффициенты матрицы, стоящей в правой части уравнений (1.1).

В связи с тем, что коэффициенты b_{ii} отрицательны, получаем, что все собственные числа имеют отрицательные вещественные части, из чего следует устойчивость системы.

Это обстоятельство позволяет считать, что данный перекресток в техническом отношении не несет опасность для водителей.

§2.3. Численные эксперименты

Рассмотрим случай с постоянной интенсивностью входных потоков транспортных средств.

На рисунке 1.2 представлена зависимость числа транспортных средств, выходящих с нерегулируемого крестообразного перекрестка по каждому из направлений от времени для случая, когда

$$f_1 = 0,7; \quad f_2 = 0,3; \quad f_3 = 0,8; \quad f_4 = 0,4;$$

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	3	2	0,5	1,1
2	0,3	0,4	1,2	1
3	2,7	2,3	3	2,5
4	0,8	0,9	1,3	1

Табл. 1.1. Постоянные v_{ij}

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	0,25	0,2	0,4	0,15
2	0,2	0,3	0,15	0,35
3	0,3	0,1	0,45	0,15
4	0,1	0,2	0,25	0,45

Табл. 1.2. Постоянные a_{ij}

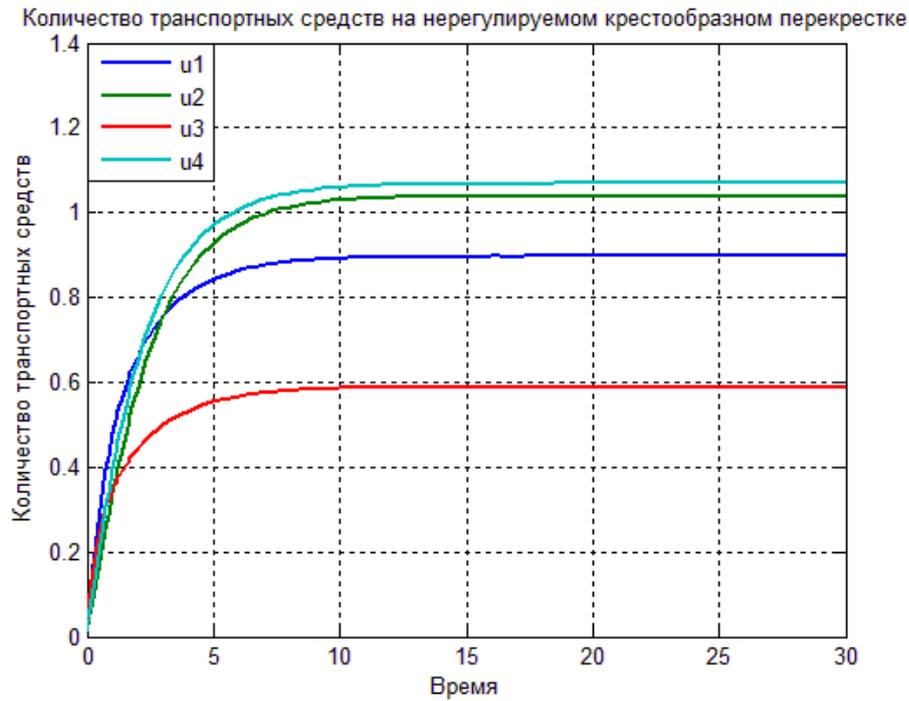


Рис. 1.2. Количество автомобилей, выходящих с нерегулируемого крестообразного перекрестка для случая постоянной интенсивности

Рассмотрим количество транспортных средств, выезжающих с перекрестка в фиксированный момент времени (при $t=5$) при различных постоянных.

В случае варьирования интенсивности входящего потока с третьего направления, получаем следующие значения:

$$1. \text{ при } f_i = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \\ 0,1 \\ 0,4 \end{pmatrix} u_i = \begin{pmatrix} 0,6710 \\ 0,7654 \\ 0,2525 \\ 0,7905 \end{pmatrix};$$

$$2. \text{ при } f_i = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \\ 0,8 \\ 0,4 \end{pmatrix} u_i = \begin{pmatrix} 0,8435 \\ 0,9289 \\ 0,5540 \\ 0,9711 \end{pmatrix};$$

$$3. \text{ при } f_i = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \\ 1,2 \\ 0,4 \end{pmatrix} u_i = \begin{pmatrix} 0,9421 \\ 1,0224 \\ 0,7262 \\ 1,0743 \end{pmatrix};$$

Можно заметить, что при высокой интенсивности входящего потока u_3 , на перекрестке появляются заторы в нескольких направлениях. При этом, если рассмотреть неравномерное распределение долей перехода из изначального направления (предположим, что наибольшее число транспортных средств переходит из третьего потока во второй поток), может возникнуть ситуация, когда заторы образуются во всех направлениях. Например, при $a_{31} = 0,3; a_{32} = 0,5; a_{33} = 0,1; a_{34} = 0,1$ количество выходящих

транспортных средств будет принимать следующие значения: $u_i = \begin{pmatrix} 1,1545 \\ 2,2458 \\ 1,0232 \\ 1,3000 \end{pmatrix}$. В

данном случае значительное изменение скорости перехода автомобилей из первоначального потока не принесет большого влияния в ситуацию на пересечении дорог. Например, при $v_{31} = 2,7; v_{32} = 2,3; v_{33} = 6; v_{34} = 2,5$ вектор u_i

примет значения $u_i = \begin{pmatrix} 1,0707 \\ 2,0341 \\ 0,8764 \\ 1,2168 \end{pmatrix}$.

Для движения транспортных потоков без возникновения заторов необходимо ввести ограничения на количество входящих и выходящих транспортных средств с каждого направления. В условиях отсутствия возможности одновременного въезда автомобильных потоков с нескольких направлений, необходимыми условиями являются ограниченность входных и выходных потоков транспортных средств с каждого направления в определенный момент времени одним транспортным средством.

Для анализа появления заторов на рассматриваемом перекрестке необходимо проводить исследования зависимости изменения интенсивности входящих потоков по всем направлениям на выходящие потоки транспортных средств. Для получения результатов, при имеющихся значениях скорости перехода $(v_{ij}, i = \overline{1,4}, j = \overline{1,4})$ и долях перехода

транспортных средств (a_{ij} , $i=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,4}$) из i -го транспортного потока в j -ый, рассматриваются различные значения интенсивности четырех потоков, т.е. f_i , $i=\overline{1,4}$, изменяющиеся на отрезке $[0,1]$ с шагом 0,05. Ограничение рассматриваемого отрезка, на котором будут изменяться интенсивности потоков (при имеющихся значениях v_{ij} и a_{ij}), единицей, обусловлено тем, что при превышении данного значения интенсивности возникнут заторы.

При заданных постоянных, определяющей является вторая компонента вектора интенсивности f . При $f_2 = 0,45$, в случае ненулевой интенсивности остальных потоков, образуется затор. Оценивая сумму интенсивностей всех входящих на перекресток потоков, можно заметить, что сумма компонентов вектора f ограничивается значением 0,65 ($\sum_{i=1}^4 f_i \geq 0,65$). В случае отсутствия входных потоков со всех направлений, кроме потока u_2 , переходным значением является $f_2 = 0,6$.

Таким образом, в данной постановке, можно оценивать значения вектора интенсивности входящих на перекресток транспортных потоков для дальнейшего проведения регулирования поступающих транспортных средств с помощью систем регулирования дорожного движения.

Рассмотрим случай с динамичной интенсивностью входных потоков транспортных средств, зависящих от времени.

На рисунке 1.3 представлена зависимость количества транспортных средств, выходящих с нерегулируемого крестообразного перекрестка по каждому из направлений от времени для случая, когда

$$f_1 = 0,5 + 0,5 \cdot \sin(0,6 \cdot t);$$

$$f_2 = 0,5 + 0,2 \cdot \sin(0,8 \cdot t);$$

$$f_3 = 0,5 + 0,4 \cdot \sin(0,9 \cdot t);$$

$$f_4 = 0,5 + 0,4 \cdot \sin(0,7 \cdot t);$$

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	3	2	0,5	1,1
2	0,3	0,4	1,2	1
3	2,7	2,3	3	2,5
4	0,8	0,9	1,3	1

Табл. 1.3. Постоянные v_{ij}

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	0,25	0,2	0,4	0,15
2	0,2	0,3	0,15	0,35
3	0,3	0,1	0,45	0,15
4	0,1	0,2	0,25	0,45

Табл. 1.4. Постоянные a_{ij}

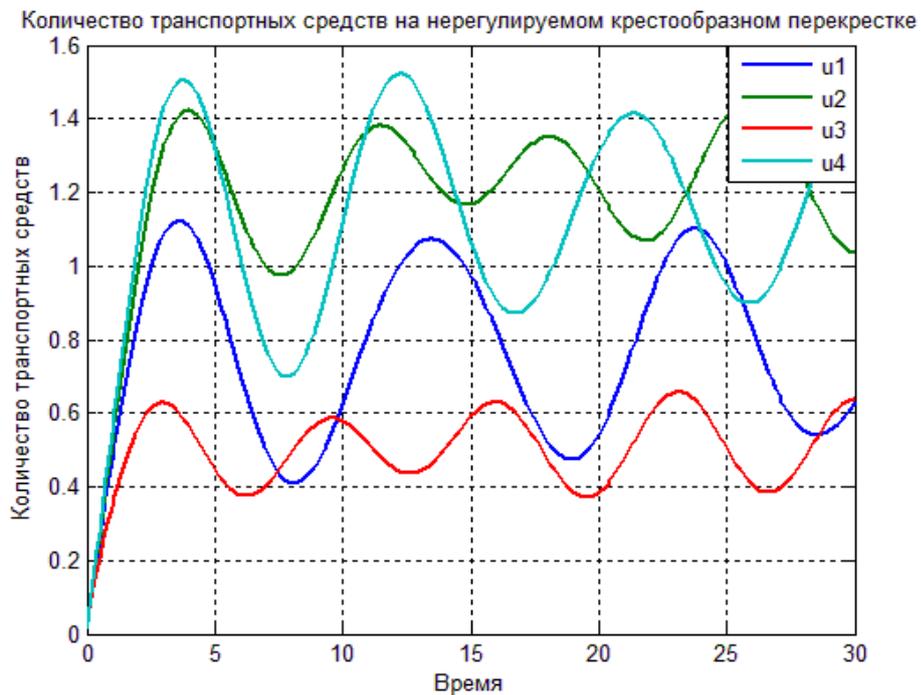


Рис. 1.3. Количество автомобилей, выходящих с нерегулируемого крестообразного перекрестка для случая интенсивности, зависящей от времени

В связи с представленной на рисунке 1.1 схемой, рассматривается перекресток с пересечением двух дорог с однополосным движением в обоих направлениях.

Как упоминалось ранее, для движения транспортных потоков без заторов необходимо исследовать количество входящих на перекресток и выходящих с перекрестка транспортных средств с каждого направления. Таким образом, для параметра интенсивности входящих потоков автомобилей, необходимо исследование условия ограниченности значения

интенсивности входа на перекресток транспортных средств с каждого направления в определенный момент времени. В условиях данной задачи необходимое условие не совпадает с условием ограниченности входящего потока одним транспортным средством.

Глава 3. Гидродинамические модели транспортных потоков

§3.1. Модель сохранения транспортного потока

Существует множество моделей, описывающих движения транспортных потоков с позиций механики сплошной среды. Такие как модель Гриншилдса, Гринберга, Лайтхилла-Уизема [11, 12], в которых транспортный поток рассматривается как поток одномерной сжимаемой жидкости. Предполагается выполнение закона сохранения транспортного потока, а также взаимно-однозначной зависимости скорости и плотности транспортных потоков, которая описывает уменьшение скорости при увеличении плотности автомобильных потоков.

Рассмотрим транспортный поток, движущийся по однополосной дороге в одном направлении. В качестве плотности потока возьмем функцию $\rho(x, t)$, зависящую от времени t и координате x , предполагая, что ось координат направлена вдоль направления движения рассматриваемого потока. Средняя плотность потока зависит от многих параметров, таких как ширина полосы движения, длина рассматриваемого участка дороги и количество транспортных средств на нем, средняя длина транспортного средства, при рассмотрении автомобилей различных типов. Вследствие данных предположений, определим среднюю плотность отношением площади, которую занимают транспортные средства к полной площади рассматриваемого участка дороги:

$$\rho_{cp} = \frac{S_{зан}}{S_{полн}} = \frac{hkl_{авт}}{hl_{уч}} = \frac{kl_{авт}}{l_{уч}}, \quad (2.1)$$

где h – ширина дороги, k – количество транспортных средств на рассматриваемом участке, $l_{авт}$ – средняя длина автомобиля, $l_{уч}$ – длина рассматриваемого участка. Плотность транспортного потока может

изменяться в интервале $[0, \rho_{\max}]$, где ρ_{\max} – плотность автомобильного потока, при расположении транспортных средств “бампер в бампер”. Исходя из выражения (2.1), $\rho_{\max} = 1$.

Рассмотрим скорость транспортного потока $v(x, t)$. Функция $v(x, t)$ может принимать значения из интервала $[0, v_{\max}]$, где v_{\max} – максимально допустимая скорость движения транспортных средств на данном участке дороги, при условии, что не рассматриваются иные знаки и системы, регулирующие скорость.

Представим уравнение, описывающее зависимость скорости транспортного потока от плотности:

$$v(\rho) = v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right). \quad (2.2)$$

На рисунке 2.1 изображена линейная аппроксимация Гриншилдса.

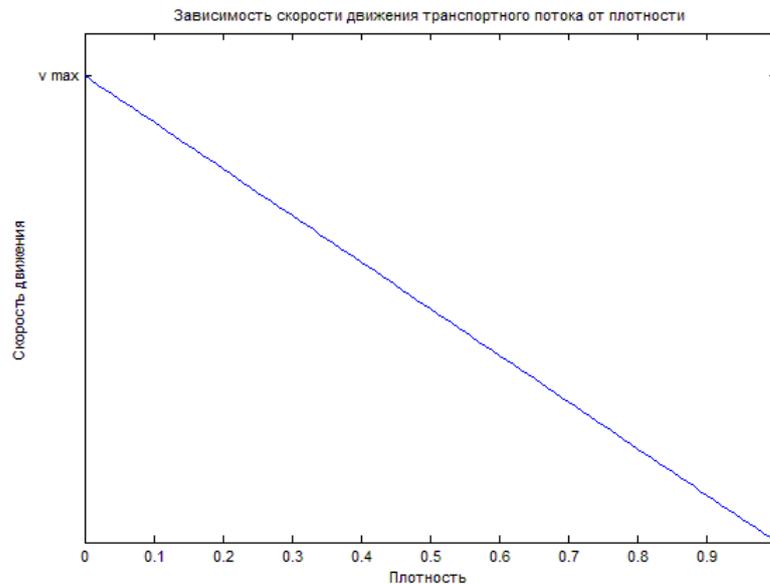


Рис. 2.1. Линейная аппроксимация Гриншилдса

Таким образом, при $\rho = 0$, т.е. при отсутствии транспортных средств на рассматриваемом участке полосы движения, имеем $v = v_{\max}$, т.е. автомобили имеют возможность двигаться с максимально допустимой скоростью. При полном наполнении участка дороги, когда $\rho = \rho_{\max}$, скорость снижается

вплоть до полной остановки транспортного потока, т.е. $v=0$ (“неподвижная пробка”).

Уравнение Гриншилдса [11] является частным случаем уравнения Гринберга (2.3) [12] при $n=1$:

$$v(\rho) = v_{\max} \cdot \left(1 - \left[\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right]^2 \right). \quad (2.3)$$

Характер зависимости интенсивности транспортного потока от плотности представлен на рисунке 2.2.

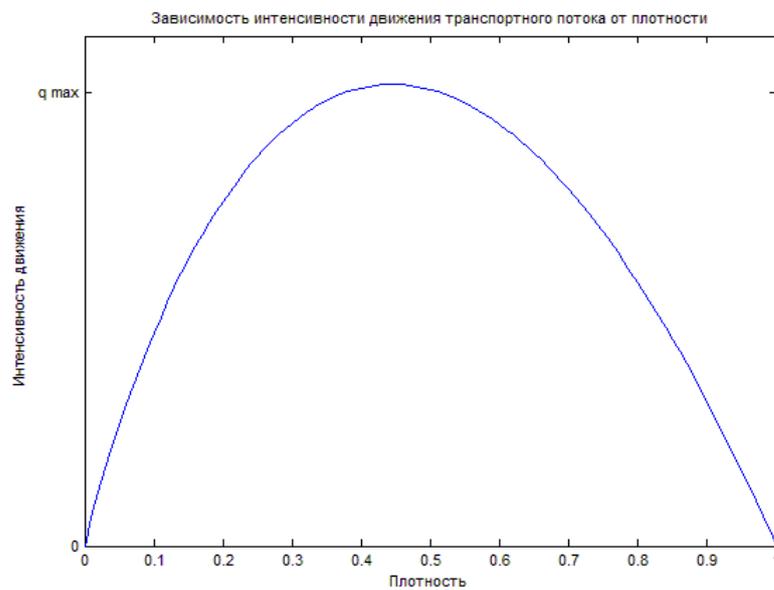


Рис. 2.2. Фундаментальная диаграмма транспортного потока

Закон сохранения непрерывного транспортного потока выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho(x, t)v(x, t))}{\partial x} = 0, \quad x \in R, t > 0. \quad (2.4)$$

При имеющейся зависимости скорости транспортного потока от плотности можно переписать уравнение (2.4) в следующем виде, рассматривая зависимость скорости автомобильного потока от плотности, предложенную Гриншилдсом:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho(x, t) v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \right)}{\partial x} = 0, \quad x \in R, t > 0. \quad (2.5)$$

В качестве максимальной плотности примем значение $\rho_{\max} = 1$. Тогда выражение (2.5) примет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_{\max} \frac{\partial \rho(1-\rho)}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

Начальные и краевые условия выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(x=0, t) &= \rho_0, \\ \rho(x, t=0) &= \rho^0(x) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Пусть плотность непрерывного транспортного потока $\rho = 1$. Это значение плотности является решением уравнения (2.6).

Положим, что при $\rho = \rho_*$, произошло незначительное изменение плотности потока на малую по сравнению с единицей величину $\delta\rho$ такое, что $\rho = \rho_* + \delta\rho$. Тогда из уравнения (2.6) с точностью до величин второго порядка малости следует уравнение для $\delta\rho$:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + (2\rho_* - 1) \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} = 0. \quad (2.8)$$

При $\frac{1}{2} < \rho_* \leq 1$ уравнение (2.8) описывает распространение вещества справа налево. То есть плотность потока начнет уменьшаться. Таким образом, движение потока с плотностью $\rho > \frac{1}{2}$ является неустойчивым.

Рассмотрим численный метод решения уравнения (2.6).

Отрезок интегрирования длиной l разбивается на N отрезков с концами, равноотстоящими друг от друга на расстоянии $h = \frac{l}{N}$. По временной переменной интегрирование осуществляется с шагом τ . Производные по пространственной и временной переменной заменяются конечными разностями:

$$\rho_i(t) - \rho_i(t - \tau) = -\frac{\tau v_{\max}}{h} [(\rho(1-\rho))_i - (\rho(1-\rho))_{i-1}], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.9)$$

Значение ρ_0 считается известным, $\rho_i(t=0) = \rho_i^0$. Рассматривается отрезок единичной длины ($l=1$), разбитый на 800 отрезков, $\rho(x, t=0) = \rho^0(x) = 0$,

$$\rho(x=0, t) = \rho_0.$$

На рисунке 2.3 показана зависимость плотности потока в различные моменты времени (при $t=1, t=2, t=3$) от координаты. При $\rho(x=0, t)=0,45$ скорость движения фронта составляет $v=0,25$.

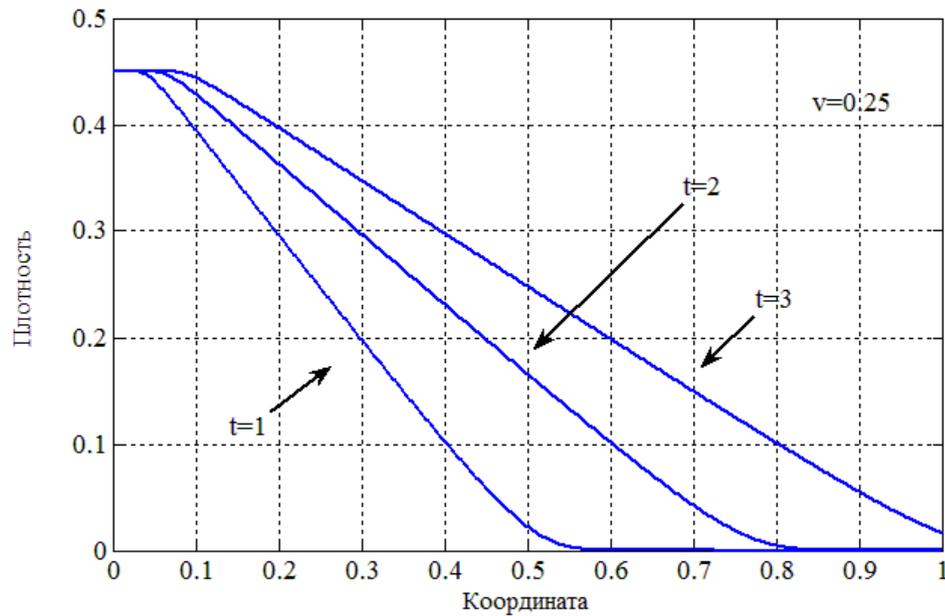


Рис. 2.3. Плотность транспортного потока в различные моменты времени при плотности на левой границе, составляющей 0,45

На рисунке 2.4 показана зависимость плотности потока в различные моменты времени (при $t=1, t=2, t=3$) от координаты. При $\rho(x=0, t)=0,2$ скорость движения переднего фронта потока составляет $v=0,25$.

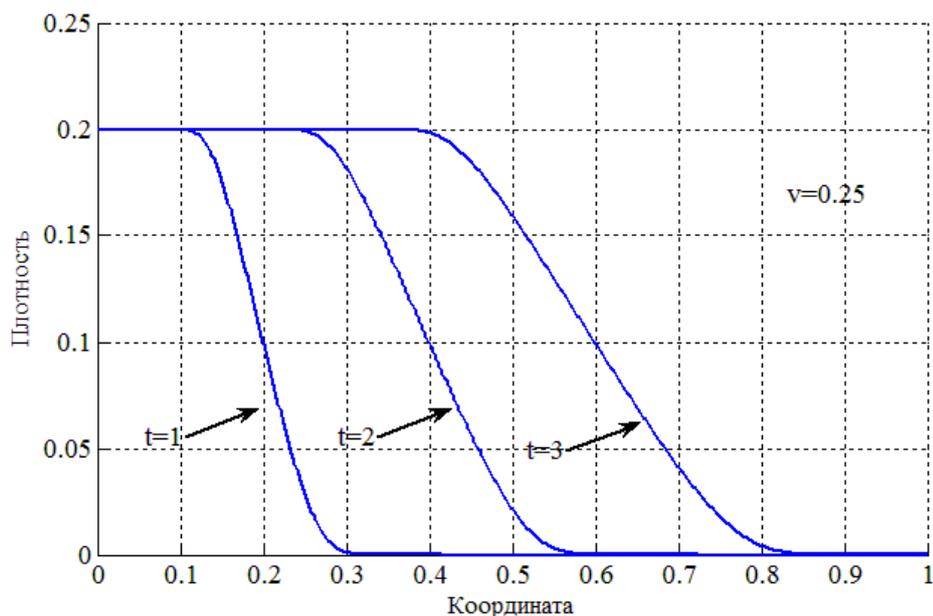


Рис. 2.4. Плотность транспортного потока в различные моменты времени при плотности на левой границе, составляющей 0,2

Закон сохранения транспортного потока (2.4) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = 0, \quad x \in R, t > 0, \quad (2.10)$$

где $q(x, t)$ – интенсивность транспортного потока, т.е. количество транспортных средств, проходящих единицу длины полосы движения за единицу времени t .

Решение ищется в виде простой волны, используется свойство локальной связи величин, описывающих процесс, т.е. считается, что $q = q(\rho)$.

Тогда уравнение (2.10) принимает вид уравнения простой волны:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = 0, \quad x \in R, t > 0, \quad (2.11)$$

где $c(\rho) = \frac{\partial q(x, t)}{\partial \rho}$ – скорость распространения возмущений.

При возникновении возмущения в плотности транспортного потока, возмущение будет распространяться со скоростью $c(\rho)$.

В представленной модели полагается усредненное движение потока транспортных средств, без учета индивидуальных характеристик автомобилей. Также предполагается соблюдение водителями правил дорожного движения. Кроме этого, считается, что автомобили движутся только в положительном направлении, вдоль оси x , т.е. исключается движение задним ходом.

Решение уравнения (2.11) может быть представлено в следующем виде:

$$\rho(x, t) = F(x - c(\rho)t). \quad (2.12)$$

Авторы работы [9] не приводят методов решения поставленной задачи.

§3.2. Модель Бюргера для плотности потока

Авторы работы [9] предлагают рассматривать решение в форме (2.8).

Обозначим через u – плотность транспортного потока. Рассмотрим уравнение Бюргера, описывающее изменение плотности потока при движении вдоль участка дороги.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

Предположим, что решение ищется в виде:

$$u = u(x - vt) \quad (3.2)$$

Введем обозначение: $z = x - vt$.

Автоволна движется слева направо, так, что при $z = -\infty$ плотность потока $u = u_0$. При $z \rightarrow \infty$ плотность потока должна стремиться к нулю.

После подстановки выражения (3.2) в уравнение (3.1) получим следующее уравнение:

$$-v \frac{du}{dz} + \frac{1}{2} \frac{du^2}{dz} = D \frac{d^2 u}{dz^2} \quad (3.3)$$

После интегрирования, получим:

$$u_0 - 2vu + u^2 = 2D \frac{du}{dz}, \quad (3.4)$$

где $u_0 = u(\infty)$.

Разделив переменные, получаем следующее уравнение:

$$2D \frac{du}{u_0 - 2vu + u^2} = dz \quad (3.5)$$

Рассмотрим решение уравнения (3.5) при выполнении неравенства $u_0 > v^2$.

$$2D \frac{1}{\sqrt{u_0 - v^2}} \operatorname{arctg} \frac{u - v}{\sqrt{u_0 - v^2}} = z + C,$$

$$\frac{u - v}{\sqrt{u_0 - v^2}} = \operatorname{tg} \left(\sqrt{u_0 - v^2} \frac{z + C}{2D} \right). \quad (3.6)$$

При $\sqrt{u_0 - v^2} \frac{z + C}{2D} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ плотность транспортного потока стремится к ∞ . То есть, в выражении (3.6) можно найти значение z , при котором плотность будет стремиться к ∞ . Таким образом, в данной интерпретации поток подъезжает к препятствию, при этом накапливается множество автомобилей, происходит уплотнение и, вследствие данного фактора происходит затор и возможность аварии.

Это решение реализуется при условии, что $v^2 < u_0$. То есть, при заданной плотности автомобильного потока на бесконечности $u = u_0$ автоволновое решение со скоростью $v < \sqrt{u_0}$ (с малой скоростью) реализовываться не может. Согласно (3.6) из-за уплотнения на переднем фронте возникнет затор.

Рассмотрим решение уравнения (3.5) при выполнении неравенства $u_0 < v^2$.

После преобразований получим выражение (3.7):

$$\frac{D}{\sqrt{v^2 - u_0}} \ln \left| \frac{u + v - \sqrt{v^2 - u_0}}{u + v + \sqrt{v^2 - u_0}} \right| = z,$$

$$\ln \left| \frac{u+v-\sqrt{v^2-u_0}}{u+v+\sqrt{v^2-u_0}} \right| = \frac{\sqrt{v^2-u_0}}{D} z = \gamma z,$$

$$(u+v)(1-e^{\gamma z}) = \sqrt{v^2-u_0}(1+e^{\gamma z}),$$

$$u+v = \sqrt{v^2-u_0} \frac{1+e^{\gamma z}}{1-e^{\gamma z}}. \quad (3.7)$$

Так как $\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1+e^{\gamma z}}{1-e^{\gamma z}} = -1$, то правая часть выражения (3.7) отрицательна. Возникает противоречие. Таким образом, в данном случае автоволновое решение при скорости $v > \sqrt{u_0}$ также не может реализовываться.

Таким образом, было показано, что уравнение Бюргера (3.1) не имеет решения в классе непрерывных функций в форме автоволны.

Одним из основных показателей автомобильного потока является его плотность. Для нахождения плотности из уравнения (2.7) найдем изменение скорости потока, которое возникает путем введения возмущений и их распространение, при допущении независимости данного показателя от плотности ρ .

Рассмотрим уравнение Бюргера для нахождения скорости распространения возмущений.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -C \frac{\partial C}{\partial x} + a \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3.8)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (3.8) характеризует перенос транспорта со скоростью C и образование заторов. Второй член отражает “вязкость” или “диффузию”.

Возмущения в плотности потока образуются вследствие изменения скорости.

В модели предполагается, что изначально, при $t=0$, потока не существует. Автомобили стоят на границе рассматриваемого участка дороги и начинают движение вдоль отрезка дороги. На границе $C=1$. Плотность потока считается постоянной.

При повышении скорости, автомобили, едущие в начале колонны, продолжают движение с неизменной, постоянной скоростью, а транспортные средства, расположенные в конце, вследствие изменения скорости, начинают “набегать” на идущие впереди автомобили. При данном эффекте транспортный поток будет уплотняться.

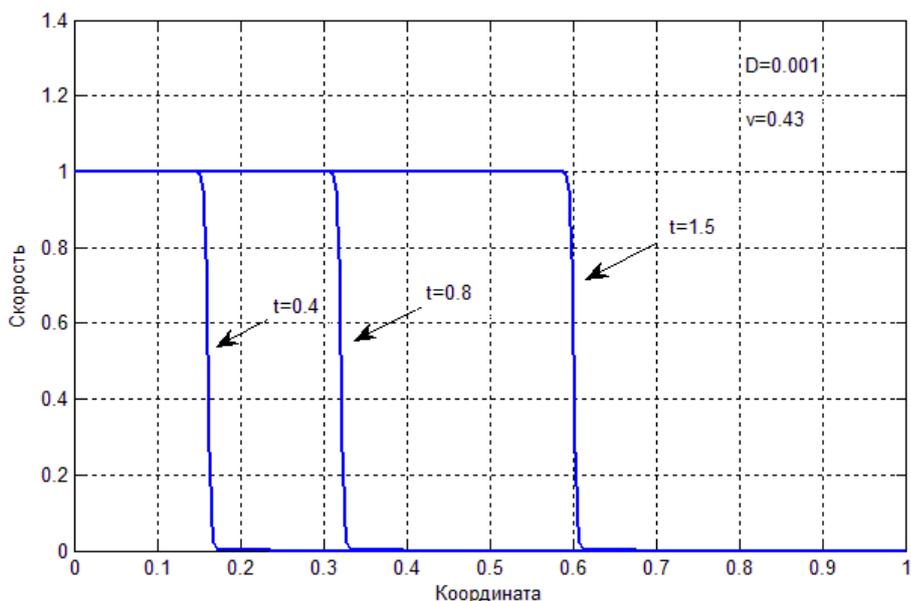


Рис. 3.1. Распространение возмущения в транспортном потоке

При рассмотрении возмущения, найдя расстояния между фронтами волн в разные моменты времени, можно определить скорость распространения возмущений. При заданных начальных и граничных условиях, скорость движения фронта волны составляет 0,43.

§3.3. Модель плотности потока с учетом изменения скорости

Определив распространение возмущений в скорости транспортного потока, перейдем к исследованию плотности потока в уравнении (2.11), принимая во внимание влияние небольших возмущений, происходящих в скорости потока, на изменение плотности транспортного потока. Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= -C \frac{\partial C}{\partial x} + a \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial \rho C}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Предполагается, что изначально, при $x=0$ поддерживается стационарный режим движения, который характеризуется вектором $[c; \rho] = [0,5; 1]$. Т.е. движение происходит с постоянной скоростью и плотностью.

В начальный момент времени, на отрезке $[0; 0,02]$, происходит возрастание возмущения в скорости потока в два раза (рис. 3.2).

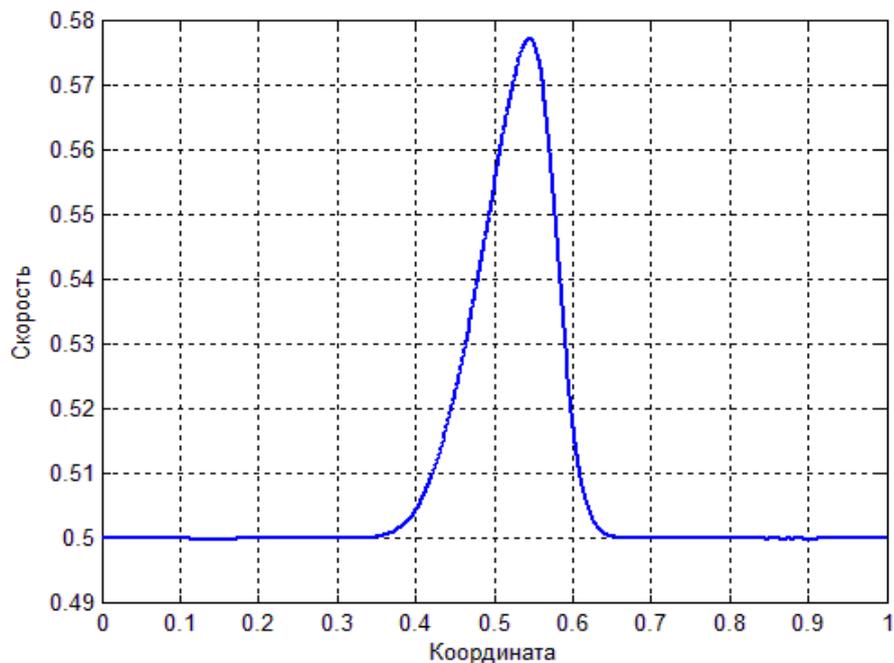


Рис. 3.2. Изменение скорости транспортного потока

Вследствие данного увеличения возмущения скорости, происходит резкое повышение плотности транспортного потока (рис. 3.3).

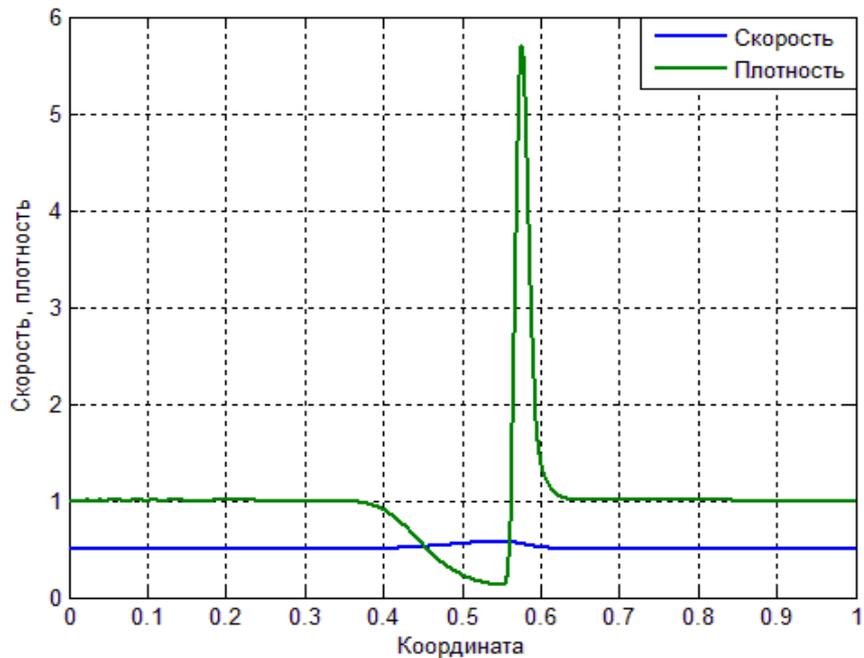


Рис. 3.3. Плотность транспортного потока при изменении скорости потока

При увеличении скорости, расстояние между транспортными средствами, следующими первыми в потоке, продолжающими движение с ранее принятой, устоявшейся скоростью, и автомобилями, движущимися сзади, начинает сокращаться. То есть, дистанция между автомобилями уменьшается. При описанном эффекте возрастания возмущения в скорости потока транспортный поток будет уплотняться, то есть происходит повышение плотности потока.

§3.4. Учет человеческого фактора при изменении скорости потоков

В предыдущих моделях имела место стационарность соотношения скорости и плотности потока. Скорость рассматривалась, как функция, зависящая от плотности транспортного потока, т.е. используется уравнения Гриншилдса и Гринберга [11, 12]:

$$v(\rho) = v_{\max} \cdot \left(1 - \left[\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right]^{\frac{(n+1)}{2}} \right).$$

Данное допущение является верным при рассмотрении однородных дорог. В иных ситуациях, в случае неоднородных участков дорог, на пример, при наличии съездов с дорог, въездов и сужений, уравнение (2.3) не позволяет корректно описать скорость потока.

Рассматривая въезды или съезды на дорогах при сохранении транспортного потока водители, при условии соблюдения правил дорожного движения, снижают скорость транспортного средства. Также необходимо учитывать изменение скорости при различных дорожных условиях, и другим ограничениям в скорости потока, которые не зависят полностью от плотности транспортного потока ρ .

Таким образом, для адекватного описания зависимости скорости и плотности транспортного потока вблизи неоднородных участков дорожной сети необходимо рассматривать влияние человеческого фактора.

Впервые применение дифференциальных уравнений для описания изменения скорости потока около дорожных неоднородностей было предложено Пейном в 1971 году [16]. Уравнение для изменения скорости имело следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (V - v) - \frac{c_0^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (4.1)$$

где V – средняя скорость транспортного потока.

Было показано, что при больших значениях плотности, малые возмущения в движении транспортных потоков приводит к неустойчивости.

Рассмотрим следующую модель, описывающую изменение скорости транспортных средств, при рассмотрении приспособленности водителей к движению со скоростью, согласующейся со скоростью транспортного потока:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\tau}(V - v) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4.2)$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2}v^2 + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{\tau}(V - v), \quad (4.3)$$

где V – средняя скорость в равновесном состоянии, выражающаяся по формуле (2.3); v – скорость транспортных средств, которую водитель выбирает для достижения желаемой скорости; μ – диффузионная постоянная; τ – релаксационная постоянная времени.

Уравнение (4.3) описывает изменение скорости при учете того фактора, что скорость потока зависит не только от плотности, но и от динамики средней скорости, учитывающей адаптацию водителей к дорожной ситуации и неравномерности участков дорог.

В уравнении (4.3) член $v \frac{\partial v}{\partial x}$ означает изменение скорости при переносе транспортных средств слева направо, т.е. с предшествующего участка дороги на текущий. Данный член является конвекционным и описывает адаптацию скорости при переходе между различными участками дорог.

Слагаемое $\frac{1}{\tau}(V - v)$ называется релаксационным и описывает тот факт, что все водители склонны приближаться к достижению желаемой, комфортной скорости. Например, если водитель некоторое время ехал со средней скоростью потока, которая ниже комфортной, то после рассеивания плотности потока, т.е. освобождения участка дороги, водитель будет наращивать скорость. И, наоборот, в случае, когда водитель вынужден ехать в потоке со средней скоростью потока выше желаемой, в дальнейшем водитель будет стремиться уменьшить скорость. Таким образом, множитель $(V - v)$ означает отклонение средней скорости потока, т.е. скорости окружающих автомобилей, от желаемой скорости водителя транспортного средства. Постоянная времени τ зависит от скорости реакции водителей. Чем

больше τ , тем медленнее скорость реакции водителей на отклоняющуюся скорость.

Последнее слагаемое $\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ – диффузионная составляющая, означающая тенденцию к согласованию личной скорости движения транспортного средства со средней скоростью потока.

Рассмотрим систему уравнений, аналогичную системе (3.9), для описания плотности потока транспортных средств с учетом изменения скорости, выражающейся согласно уравнению (4.3), т.е. учитывая скорость реакции водителей и адаптацию скорости к средней скорости потока:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v \rho}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} v^2 + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{\tau} (V - v). \\ V &= V_0 \left(1 + \frac{0.1}{0.1 + \rho} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Рассмотрим начальные и граничные условия:

На левой границе, при $x = 0$, задаются значения плотности и скорости:

$$\rho = \rho_0, \quad v = v_0.$$

В конце рассматриваемого участка, при $x = l$: $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$.

При $t = 0$:

$$\rho(x, t = 0) = \begin{cases} \rho_0, v = v_0, & \text{если } x < 0.01 \\ 0, v = 0, & \text{если } x \geq 0.01 \end{cases}$$

В качестве диффузионной постоянной рассматривается $\mu = 0.001$.

Рассмотрим изменение плотности транспортного потока при изменении времени реакции водителей. При этом зафиксируем значение начальной скорости потока.

Данная зависимость представлена на рисунке 4.1. Рассматривается значение плотности транспортного потока в определенный момент времени при различных значениях времени реакции водителей на изменение ситуации на улично-дорожной сети ($\tau = 0.3, 0.6, 0.9$):

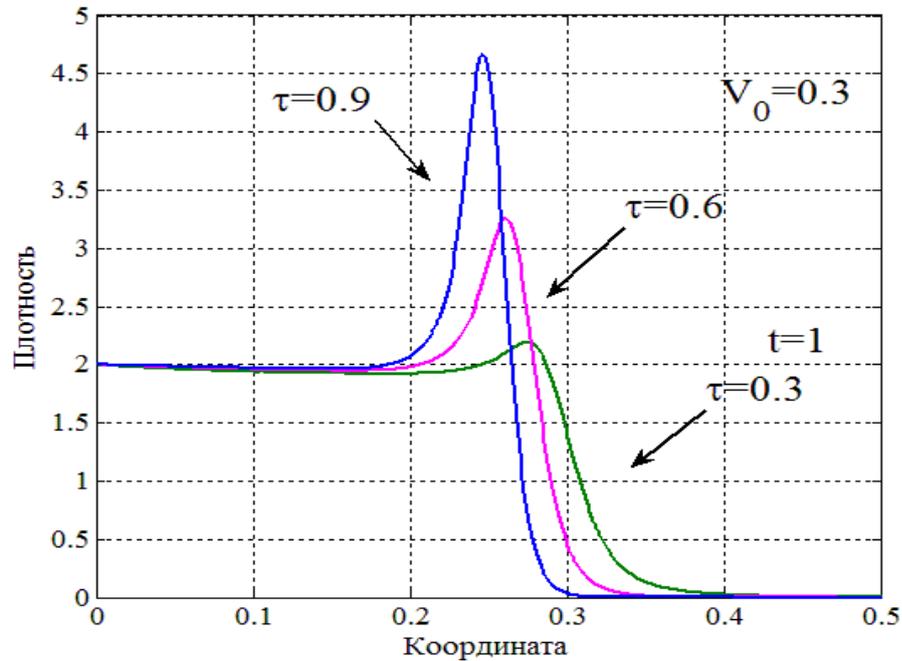


Рис. 4.1. Зависимость плотности от реакции водителей при $v_0 = 0.3$ в момент времени $t = 1$

Таким образом, можно заметить, что замедленная реакция водителей на изменение дорожной ситуации, а в частности на изменение скорости общего потока, т.е. повышенная постоянная времени релаксации τ , приводит к увеличению плотности.

Зафиксировав время реакции водителей, можно исследовать зависимость плотности потока от скорости, определив значение первоначальной скорости.

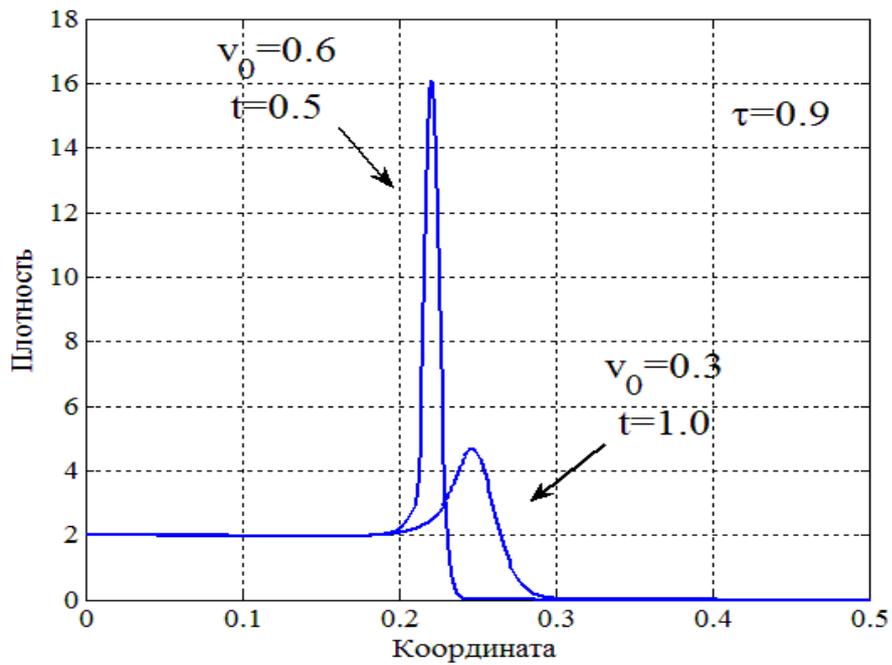


Рис. 4.2. Зависимость плотности от времени при фиксированной времени реакции

В данном случае, можно заметить не только увеличение плотности, но и уменьшение зоны увеличения плотности. Таким образом, при большей изначальной скорости происходит скачок плотности, который уменьшается через меньший интервал длины участка дороги, чем при меньшей первоначальной скорости.

Заключение

Целью работы являлась разработка, обзор и анализ математических моделей, описывающих различные показатели транспортных потоков, влияющих на безопасность дорожно-транспортной сети. К данным показателям относятся скорость, плотность и интенсивность транспортного потока.

Проведен анализ статистических данных относительно основных показателей, определяющих уровень безопасности дорожно-транспортной сети в РФ и по регионам, таких как количество дорожно-транспортных происшествий на автомобильных дорогах, количество раненых и погибших на автомобильных дорогах.

Для разработки эффективных стратегий по организации улично-дорожной сети необходимо принимать во внимание обширный спектр характеристик транспортного потока. В связи с неоднородностями участков дорог и потоках автомобилей, сложностью учета переменных дорожных условий, влияния человеческого фактора, возникают трудности в формализации процесса движения.

Рассматривая статистические данные, описывающие основные показатели уровня безопасности дорожного движения в России можно заметить отсутствие стабильности к снижению аварийности. Таким образом, существует необходимость более подробного исследования характеристик транспортного потока и нахождение оптимального решения в проектировании участков дорог в условиях современной ситуации на дорожной сети.

Одной из основных проблем, с которыми сталкиваются автомобилисты, это наличие заторов на дорогах. При построении математических моделей можно описывать возможность появления заторов, путем рассмотрения плотности потоков.

Проводился обзор и анализ имеющихся математических моделей, описывающих движение транспортных потоков с позиций механики сплошной среды. Данные модели основаны на математических моделях, использующихся в гидродинамике.

Проанализирована модель, описывающая распределение плотности по координате с учетом зависимости скорости от плотности, в различные моменты времени. Рассмотрена модель изменения плотности в зависимости от скорости, которая описывается согласно уравнению Бюргера. В данной модели в начальный момент времени подавалось возмущение в скорости потока, вследствие чего, наблюдалось снижение плотности, а затем ее резкое возрастание в связи с тем, что машины “набегают” на впереди идущие.

Был проведен анализ корректности выбора решения уравнения Бюргера в форме автоволны.

Также была исследована модель, описывающая изменение скорости транспортных средств, при рассмотрении приспособленности водителей к движению со скоростью, согласующейся со скоростью транспортного потока. После анализа данной модели, можно сделать вывод, что замедленная реакция водителей на изменение дорожной ситуации приводит к увеличению плотности.

Разработана математическая модель движения транспортных средств на крестообразном нерегулируемом перекрестке дорог с однопосным движением в каждом направлении, модели, описывающие изменения основных показателей движения транспортных потоков, таких как скорость и плотность транспортных потоков. При рассмотрении модели движения автомобилей, проходящих через пересечение дорог, был проведен анализ связи между объемом входных потоков и возникновением заторов на дорожной сети.

Анализ статистических данных и результаты математического моделирования указывают на необходимость развивать материально-техническую базу, обеспечивать более строгий контроль качества

формирования навыков и знаний у будущих водителей. Необходимо проводить мероприятия, направленные на повышение надежности системы “водитель – автомобиль – дорога – среда”.

Вследствие повышения качества образования, следует ожидать повышение надежности водителей транспортных средств, что является одним из важнейших факторов, отвечающих за безопасность дорожной сети.

Список используемой литературы:

1. Александров А. Ю. К вопросу об устойчивости по нелинейному приближению // Сибирский математический журнал. – 1997. – Т. 38. – № 6. – С. 1203.
2. Буслаев А.П., Новиков А.В., Приходько В.М., Таташев А.Г., Яшина М.В. Вероятностные и имитационные подходы к оптимизации автодорожного движения. – М.: Мир, 2003. – 368 с.
3. Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / под ред. Гасникова А.В. – М.: МФТИ, 2010. – 362 с.
4. Дубелир Г. Д. Городские улицы и мостовые, Киев, 1912. – 407 с.
5. Дубелир Г. Д. Планировка городов, Санкт-Петербург, 1910. – 82 с.
6. Жабко А. П., Зараник У. П. О приближении решений экспоненциально устойчивых систем дифференциально-разностных уравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2011. – № 3. – С. 29-38.
7. Маркус М., Минк. Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств // М., 1972. – 232 с.
8. Правила дорожного движения Российской Федерации. Утв. постановлением Совета Министров — Правительства Российской Федерации от 23 октября 1993 года № 1090 с изменениями и дополнениями, внесёнными постановлениями правительства Российской Федерации.
9. Семенов В.В. Математические модели моделирования транспортных потоков. Новое в синергетике. М.: 2007. – 383 с.
10. Смирнов Н.Н., Киселев А.Б., Никитин В.Ф., Кокорева А.В. Математическое моделирование автотранспортных потоков методами механики сплошной среды. Двухполосный транспортный поток: модель

Т-образного перекрестка, исследование влияния перестроений транспортных средств на пропускную способность участка магистрали/ М.: МФТИ. – 2010. – № 4. – С. 141-151.

11. Смирнов Н.Н., Киселев А.Б., Никитин В.Ф., Юмашев М.В. Математическое моделирование автотранспортных потоков/ М.: Мехмат МГУ, 1999
12. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны // М.: Мир, 1977.
13. Хейт Ф. Математическая теория транспортных потоков, М.: Мир, 1966. – 286 с.
14. National Highway Traffic Safety Administration (NHTSA) (2007), Statistical Analysis of the Effectiveness of Electronic Stability Control (ESC) Systems – Final Report. NHTSA, Technical report, July 2007.
15. Treiber M., Helbing D. Explanation of observed features of self-organization in traffic flow. e-print cond-mat/9901239, 1999.
16. T. Bellemans, B. De Schutter, and B. De Moor, Models for traffic control, Journal A, vol. 43, no. 3–4, pp. 13–22, 2002.