Санкт-Петербургский государственный университет

**Кафедра Информационных Технологий**

**Ермоленко Василий Юрьевич**

**Магистерская диссертация**

**Идентификация параметров в моделях математической экологии**

Направление 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Магистерская программа Математическое моделирование в задачах естествознания

Научный руководитель,

кандидат физ.-мат. наук, доцент

Потоцкая Ирина Юрьевна

Санкт-Петербург

2017

**Содержание**

Введение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

Постановка задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .5

Методы решения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

1. Градиентные уравнения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9
2. Уравнения в вариациях . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
3. Метод наименьших квадратов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
4. Численное решение градиентных уравнений . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15
5. Полиномиальные системы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16
6. Метод рядов Тейлора . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .17

Решение задачи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .21

Заключение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .24

Список литературы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

**Введение**

Современная экология относится к тому типу наук, которые возникли на стыке многих научных направлений. Она отражает как глобальность современных задач, стоящих перед человечеством, так и различные формы интеграции методов направлений и научного поиска. Превращение экологии из сугубо биологической дисциплины в отрасль знания, включившую также общественные и технические науки, в сферу деятельности, основанную на решении ряда сложнейших политических, идеологических, экономических, этических и других вопросов, обусловило ей значительное место в современной жизни, сделало ее своеобразным узлом, в котором объединяются различные направления науки и человеческой практики. Экология все больше становится одной из наук о человеке и в определенном смысле интересует многие научные направления. И хотя этот процесс еще весьма далек от завершения, его основные тенденции уже достаточно отчетливо просматриваются в наше время. Именно в экологии (хотя и не только в ней) намечается вполне реальные точки соприкосновения между фундаментальными и прикладными научными областями, между теоретическими разработками и практическим их применением.

Сегодня существует вполне развитый математический аппарат для решения целого комплекса практических задач в экологии, касающихся многих ответвлений. Модели эпидемий, расселения, конкуренции, развития популяций, разнообразных взаимодействий между живыми организмами разных видов. Однако, несмотря на кажущуюся простоту их построения, главной проблемой, отнимающей большинство сил и ресурсов, является её уточнение относительно эмпирических данных, т.е. приведение её к виду, дающему наиболее точные результаты. Для этого ставится задача идентификации параметров.

Идентификация параметров – важнейший процесс в создании адекватной модели процесса или явления. Именно благодаря нему некоторая теоретическая выкладка, идея, становится действенным и полезным инструментом к познанию и описанию мира вокруг нас. Недостаточно просто знать законы, по которым работает то или иное событие, они должны быть приспособлены к каждому отдельному случаю или отразить то, что эти отдельные случаи можно объединять в классы задач, которые могут быть описаны одной моделью. За это и отвечают параметры, численные коэффициенты. Их разнообразие значений обусловлено различными условиями, влияющими на процесс. Например, модель размножения кроликов в лесу при одинаковости сути происходящего будет сильно отличаться от размножения белок в том же лесу или же тех же кроликов на луговой местности. Различная пища, потребности, уровень рождаемости и смертности – все это отражается определенными весовыми коэффициентами.  
  
Таким образом, перед нами ставится задача: каким образом неструктурированные разнохарактерные и часто настолько сложные, что их приходится считать случайными, процессы отразить в виде чисел? Для этого необходимы долгие тщательные исследования и наблюдения, ведение статистики и выделение закономерностей. И благодаря выведенным методам, эти данные помогают выделить допустимые значения для параметров системы, которая в дальнейшем может не только подтвердить с некоторой заданной точностью имеющиеся данные, но и позволит делать определенные прогнозы и предположения о дальнейшей динамике явления.  
  
Разумеется, поставить и решить подобные задачи требует значительных усилий. Все сводится к решению достаточно сложных дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Это требует использование как аналитических, так и численных методов, доступных в наше время. Один из таких методов и будет рассмотрен в данной работе на разных моделях и при разных условиях.

**Постановка задачи**

Есть много методов для идентификации параметров. В этой работе будут рассматриваться один из них и проводиться сравнительный анализ его результатов на точность соответствия эмпирическим данным в разных системах. На данном этапе приведем пример модели Лотки-Вальтеры.

Модель Лотки-Вальтеры - это известная модель взаимодействия нескольких видов, где одна часть является «жертвами», другая — «хищниками», поэтому также известна как модель «хищник-жертва». Она названа в честь её авторов Альфреда Джеймса Лотки иВито Вольтерры, которые предложили свои уравнения модели независимо друг от друга в 1925 г. и в 1926 г. соответственно. Эту же модель можно использовать для изучения конкуренции между видами.

Задачу Коши для уравнений Лотки задаем в виде:

В одной из рассматриваемых задач речь будет идти о популяциях пятнистого и благородного оленей в качестве жертв и популяциях волков и рысей в качестве хищников. В другой – о бактериях Paramaecium caudatum и Paramaecium aurelia.

В качестве эмпирических данных будет взята информация, полученная с сайта pandia.ru , об изменении численности популяций волков и рысей (рис 1), пятнистых и благородных оленей (рис 2) и сайта plam.ru, о распространении бактерий вида Paramaecium caudatum и Paramaecium aurelia (рис 2). По этим данным и будет производиться идентификация параметров модели Лотки-Вальтерры.

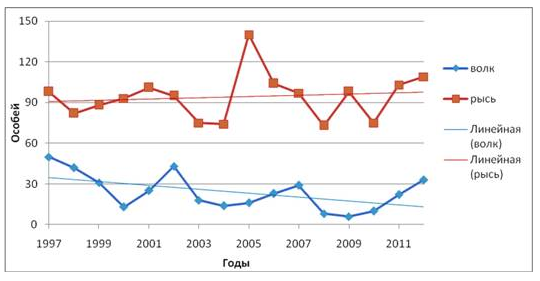
****

Рис 1. Динамика численности волка и рыси за период с 1997 года по 2012 год

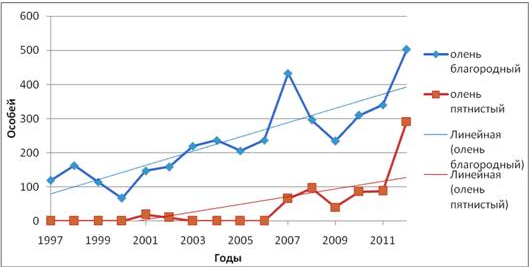


Рис 2. Динамика численности благородного и пятнистого оленей

за период с 1997 года по 2012 год

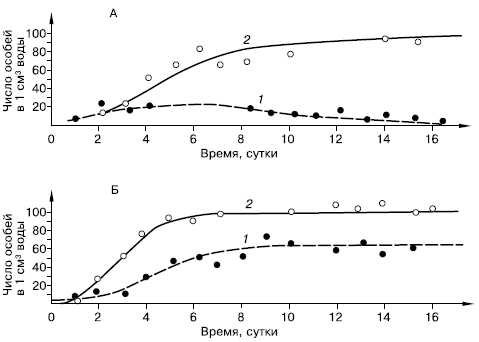


Рис.2. Рост численности инфузорий Paramaecium caudatum *(1)* и P. aurelia *(2)*.

А – в смешанной культуре; Б – в раздельных культурах

Таким образом, у нас будут две биологические системы и соответствующие им модели конкуренции, одна отражающая процессы в макромире, другая – в микромире. Предполагается, что модель будет выдавать адекватную информацию в обоих случаях, после нахождения значений всех параметров.

Все решение будет разбито на несколько подзадач, соответствующих отдельным этапам метода рядов Тейлора, применяемого в этой работе.

**Методы решения**

Дальнейшая информация о сути метода была взята из статьи [1].

**1. Градиентные уравнения**

Градиентные уравнения используются для нахождения экстремумов у функций от многих аргументов, причем эти самые аргументы могут сами быть связанными с решениями неких других уравнений, которые могут быть дифференциальными, численными и другой природы. Нам они нужны для минимизации функций зависящих от дифференциальных уравнений аргументов.

Возьмем для рассмотрения вещественнозначную функцию аргумента , и . Полученная величина

является производной функции в направлении , которая отображает скорость возрастания или убывания функции в зависимости от по направлению вектора .

Затем из этой формулы получим:

где — градиент функции Φ(k), из чего следует:

Таким образом, наискорейшее возрастание функции в точке выражается вектором , а наискорейшего убывания – вектором .

Кривая является градиентной кривой функции , у которой касательная в любой точке τ противоположно-направлена вектору градиента , что является направлением наискорейшего убывания .

Отсюда следует, что функция будет удовлетворять дифференциальному уравнению:

что в координатной форме будет выглядеть так:

К любому из этих уравнений вносим начальные условия:

или в координатной форме:

Решая в любой из форм соответствующую задачу Коши, мы сможем определить ту градиентную кривую, что проходит через точку . Это решение стоит рассматривать как вектор-функцию аргументов и .

Теперь же нам надо найти локальный минимум функции , если он существует и приближен к . Для этого достаточно взять точку , посчитать её начальным приближением к и двигаться по проходящей через неё градиентной кривой. Таким образом, идеальным путем к будет движение вдоль траектории решения .

Если решение задачи Коши будет существовать при , то для каждого такого видим, что:

И справедливо ждать, что

Собственно говоря, весь метод градиентных уравнений для поиска локального минимума функции сводится к численному интегрированию задачи Коши по аргументу τ, пока не станет достаточно близкой к .

**2. Уравнения в вариациях**

Возьмем для рассмотрения общую задачу Коши:

в которой - это параметры системы.

Далее нас интересуют функционалы от параметров как решения этой задачи. В таком случае градиентные уравнения также зависят от этих решений. Соответственно, нужно знать, как их вычислять.

После дифференцирования задачи Коши по аргументу мы видим, что функции

Будут удовлетворять новой задаче Коши:

Эти новые уравнения относительно производных будем называть уравнениями в вариациях для изначальной задачи Коши.

**3. Метода наименьших квадратов**

На самом деле, существует множество функционалов для метода наименьших квадратов, но нам достаточно будет воспользоваться лишь самым общим. Он заключается у нас в следующем: имея модель интересующего процесса или явления, описанная некой задачей Коши, а также изменения

что следует понимать как приближений для числовых значений переменных в моменты времени , необходимо получить значения параметров основываясь на первом начальном приближении ).

Что бы найти, то есть идентифицировать, параметры , в методе наименьших квадратов используют функционал

где - фиксированные весовые коэффициенты, а , – первые q компоненты решения задачи Коши, найденные при фиксированных значениях в точке .

Считается, что доставляющее минимум функции значение вполне адекватно приближается к настоящему значению , разумеется, в выбранной модели.

В нашем случае, для применения метода градиентных уравнений надо записать дифференциальные уравнения относительно для нашего функционала

Соответственно, им стоит добавить начальные условия:

**4. Численное решение градиентных уравнений**

Перейдем к непосредственно аппаратному поиску решения. Для этого возьмем определенный нами ранее функционал аргумента . Что бы напрямую найти приблизительное значение предполагаемого локального минимума , нам необходимо численно проинтегрировать наши градиентные уравнения, выведенные в предыдущем пункте, при заданных начальных условиях.

Их правые части зависят от , являющимися для нас неизвестными, через функции , и их значения в точке , где . Если зафиксировать значения для , можно получить величины , путем численного интегрирования уравнений задачи Коши от этих переменных с заданными для них начальными условиями.

Следовательно, стоит выбрать методы для такого интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Самый распространенный способ – использовать пошаговые методы, позволяющие задаче Коши

начиная от точки , последовательно находить приближенные решения в соответственных точках

В численных методах последовательность чисел называют шагами, а числа - узлами сетки интегрирования. Эти узлы образуют сетку, а числа являются решениями в узлах этой сетки. Сетку называют равномерной, если её шаги равны, т.е. Если

Градиентные уравнения при их численном интегрировании зачастую требуют постоянной смены шага, значит стоит использовать для работы хорошо приспособленные к такому явные методы Рунге-Кутта и метод рядов Тейлора.

**5. Полиномиальные системы**

Полиномиальная система – это автономная система ОДУ вида

В которой - это алгебраические полиномы по переменным .

Большинство уравнений кинетики и биокинетики можно свести к виду полиномиальных систем при помощи введения новых переменных. Это делает их важным инструментом для работы, что требует понимания, когда и как ими можно воспользоваться.

Говорят, что скалярная функция от скалярного аргумента будет удовлетворять полиномиальной системе в том случае, когда она будет являться компонентой решения этой системы. Все такие функции мы станем называть классом Σ. Практически все известные функции, кроме специфических, встречающихся в основном в теории (такие как дзета-функция Римана или гамма-функция Эйлера), относятся этому классу.

Класс Σ замкнут относительно операций +, −, ×, ÷, ∂, ∫ , ◦ (сложение, вычитание, умножение, деление, дифференцирование, интегрирование, суперпозиция). На практике это значит, что любая композиция с помощью этих операций функций класса Σ также будут ему принадлежать.

**6. Метод рядов Тейлора**

Рассмотрим оператор, который сопоставляет каждому решению нашей задачи Коши соответствующий ему полином Тейлора порядка M.

За станем обозначать радиус сходимости ряда . Метод рядов Тейлора решения задачи Коши сводится к построению таблицы приближенных значений , определенных формулами:

В которых - натуральные числа, а , а удовлетворяют неравенствам .

При программной реализации метода понадобятся алгоритма поиска коэффициентов Тейлора, а также автоматический выбор шага.

Чтобы найти значения коэффициентов Тейлора, стоит рассмотреть квадратичную задачу Коши

в которой величины - вещественные или комплексные константы, а - вещественная или комплексная переменная.

Подставив её уравнения в разложение Тейлора

приходим к

Приведя подобные члены и обнулив все коэффициенты полученного степенного ряда, находим нужные нам формулы:

Чтобы оценить погрешность и выбрать требуемый шаг, введем следующую полиномиальную задачу Коши:

в которой , , , а максимальная степень полиномов равна .

Обозначим:

И предположим, что

**Теорема**. Решение задачи (52), (53) голоморфно в круге и удовлетворяет там неравенствам:

где

Эта теорема позволит без особых сложностей построить алгоритм выбора шага для нашего метода, используя внесенные границы для погрешности, абсолютной либо относительной.

**Решение задачи**

Задаем модель Лотки-Вальтерры в общем виде:

Запишем теперь в полиномиальном виде, со своим набором параметров:

Подробнее это будет рассмотрено в дальнейшем. Для полученного набора коэффициентов зададим вещественнозначную функцию

Вводим градиентные уравнения:

Далее нам понадобятся начальные условия для :

Их мы берем по нашим графикам для каждой популяции. Далее в программном пакете Matlab было реализовано численное решение каждой из отдельных моделей и найдены их параметры. Результатами же этого построения будем считать воспроизведённые моделью числа, нанесенные на график рядом с значениями исходных данных. Было проведено визуальное сравнение результатов (рис.3 - рис.4).

Рис.3. ОБ-Р, ОП-Р - реальные данные о популяции оленей (благородных и пятнистых соответственно); ОБ-Ч, ОП-Ч - результаты численного решения модели Лотки – Вальтерры.

Рис.3. Р-Р, В-Р - реальные данные о популяции Рысей и волков; Р-Ч, В-Ч - результаты численного решения модели Лотки – Вальтерры.

**Заключение**

В данной работе были рассмотрены две системы Лотки-Вальтерры, сведенные к полиномиальным системам, отражающие конкуренцию популяций волков и рысей в одной системе и двух видов бактерий в другой. Далее для них были составлены градиентные уравнения и их функционал, дающий минимум, который и является искомым вектором параметров системы. Их решение было реализовано с помощью численных методов в среде Matlab, выведены графики и проведено сравнение результатов.  
  
Так как результаты сверки оказались достаточно точны, можем утверждать, что метод верен для такого типа задач и может быть применен в дальнейших исследованиях экологических систем. А поскольку полученные системы оказались почти одинаковыми, то можно предположить, что он верен и для других моделей конкуренций.

**Список литературы**

1. Математические модели естествознания. Раздел первый. Лекторы: профессор Бабаджанянц Л.К., доцент Пупышева Ю.Ю.
2. http://pandia.ru/text/78/302/18843-53.php
3. http://www.plam.ru/ekolog/obshaja\_yekologija/p8.php