

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Кафедра информационных систем

Ачкасова Ирина Леонидовна

Магистерская диссертация

Функционально-непрерывные методы Рунге — Кутты
для уравнений второго порядка

Направление 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Магистерская программа математическое моделирование

в задачах естествознания

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Ерёмин А.С.

Санкт-Петербург 2017

Оглавление

Введение	3
1 Основные понятия и обзор литературы	4
1.1 Обычные дифференциальные уравнения	4
1.1.1 ОДУ первого порядка	4
1.1.2 ОДУ второго порядка	7
1.2 Функционально-дифференциальные уравнения запаздывающе- го типа	9
1.2.1 ФДУЗТ первого порядка	9
1.2.2 ФДУЗТ второго порядка	11
2 Постановка задачи	13
3 Формулировка метода	14
4 Вывод условий порядка	16
4.1 Непрерывные методы Рунге — Кутты	16
4.1.1 Метод для уравнений первого порядка	16
4.1.2 Метод для системы уравнений первого порядка	19
4.1.3 Метод для уравнений второго порядка	23
4.2 Функционально-непрерывные методы РК	25
4.2.1 Метод для уравнений первого порядка	26
4.2.2 Метод для системы из двух уравнений	29
4.2.3 Метод для уравнений второго порядка	34
5 Практическая реализация	38
5.1 Примеры построенных методов	38
5.1.1 ФНРК первого порядка	38
5.1.2 ФНРК второго порядка	39
5.1.3 ФНРК третьего порядка	39
5.1.4 ФНРК четвертого порядка	40

5.1.5	ФНРК пятого порядка	40
5.2	Проверка на тестовых задачах	42
	Выводы	45
	Заключение	47
	Литература	48
	Список литературы	49
	Приложения	50

Введение

Часто поведение физической, химической, экономической или какой-либо другой сложной системы невозможно описать решением прямо зависящим от его признаков, так как поведение зависит от скорости изменения признаков, аналитическим представлением которых являются производные. Уравнения, включающие зависимость производных решения, называют дифференциальными.

Более глубокое понимание окружающего мира позволяет отметить, что реальные процессы зависят не только от настоящего момента времени, но и существенно определяются своей предысторией. В математическом смысле эти процессы доступны для анализа при помощи дифференциальных уравнений запаздывающего типа.

В свою очередь, продолжающееся динамическое развитие вычислительных машин обеспечивает ученым широкие возможности развития науки за счет перекладывания громоздких выводов и поиска решений систем большой размерности на машины.

В данной работе приводится построение одношаговых методов Рунге—Кутты для прямого применения к функциональным уравнениям запаздывающего типа второго порядка специального вида.

Глава 1. Основные понятия и обзор литературы

1.1 Обычные дифференциальные уравнения

В данной главе приводятся основные понятия об обычных дифференциальных уравнениях (ОДУ) первого и второго порядка, а также для систем уравнений первого порядка, приведены методы Рунге — Кутты и метод Ньюстрема для указанных уравнений.

1.1.1 ОДУ первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение вида

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (1.1)$$

с заданной функцией $f(t, y)$.

Все дальнейшие выкладки действительны и для случаев, когда y и f — векторы одинаковой размерности. Если размерность больше единицы, будем говорить о системе ОДУ.

Определение 1. *Решением дифференциального уравнения является функция $y(t)$ такая, что при подстановке ее в уравнение получается верное равенство для любого t .*

Решение уравнения первого порядка имеет один свободный параметр. Для определения частного решения задают начальное значение

$$y(t_0) = y_0. \quad (1.2)$$

Решением системы (1.1) является квадратура

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y) dx.$$

Карл Рунге предложил, а Мартин Кутта сформулировал методы, сравнимые с разложением точного решения в ряд Тейлора [11].

Определение 2. Пусть s — целое положительное число (число стадий/этапов), $a_{21}, \dots, a_{s,s-1}, b_1, \dots, b_s, c_2, \dots, c_s$ — вещественные коэффициенты. Метод, представленный ниже, называется s -стадийным явным методом Рунге — Кутты (РК) для задачи (1.1), (1.2)

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + h(b_1 k_1 + \dots + b_s k_s), \\
 k_1 &= f(t_0, y_0), \\
 k_2 &= f(t_0 + c_2 h, y_0 + h a_{21} k_1), \\
 &\dots \\
 k_s &= f(t_0 + c_s h, y_0 + h(a_{s1} k_1 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1})).
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Явность метода заключается в том, что каждый коэффициент k_i зависит от предыдущих $i - 1$ коэффициентов k , что позволяет вычислять k последовательно, без особых вычислительных сложностей.

Далее в работе будут рассматриваться исключительно явные методы.

Принято численные методы РК записывать в виде таблицы коэффициентов Бутчера:

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & & & \\
 c_2 & a_{21} & & \\
 c_3 & a_{31} & a_{32} & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \\
 c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s
 \end{array}$$

Определение 3. Метод Рунге — Кутты (1.3) для ОДУ имеет локальный порядок p , если для всех задач с достаточно гладкой $f(t, y)$ и достаточно малых h выполняется

$$\|y(t_0 + h) - y_1\| \leq Kh^{p+1},$$

где $K = \text{const}$, $\|\cdot\|$ — некоторая норма, т. е. ряды Тейлора для точного

решения $y(t_0 + h)$ и для приближенного $y_1(h)$ совпадают до члена h^p включительно.

Определение 4. Метод Рунге – Кутты (1.3) для ОДУ имеет глобальный порядок (порядок сходимости) p , если для любых достаточно гладких функций $f(t, y)$ и достаточно малого h выполняется

$$\max_{i=1, \dots, N} \|y(t_i) - y_i\| \leq Kh^p,$$

где $K = \text{const}$, $\|\cdot\|$ – некоторая норма, $t_i = t_{i-1} + h_i$, $t_N = T$, $h = \max_{i=1, \dots, N} h_i$.

Замечание 1. Для ОДУ метод локального порядка p имеет глобальный порядок p [1].

Обычно методы РК решения ОДУ удовлетворяют следующему условию (так называемое, базовое упрощающее условие, согласно [6]):

$$\sum_j a_{ij} = c_i, \quad i = 1, \dots, s. \quad (1.4)$$

Смысл этого условия в том, что все точки, в которых вычисляется значений функции $f(\cdot)$, являются приближениями первого порядка к решению.

Для получения приближения более высоких порядков можно вывести уравнения порядка, условия на коэффициенты метода, получаемые при сравнении производных точного и численного решения при одинаковых степенях h .

Алгоритм получения уравнений более высоких порядков для ОДУ описан в книге [1], а также кратко описан в начале главы 4.

Однако, Бутчером [8] были выведены ограничения на минимальное количество этапов для получения явных методов порядка $p \geq 5$. Такие ограничения для порядков 5, 7, 9, где необходимо большее количество этапов, чем порядок, были названы барьерами Бутчера.

Таблица 1.1: Таблица минимального количества этапов s для достижения порядка p

p	1	2	3	4	5	6	7	8
s	1	2	3	4	6	7	9	11

1.1.2 ОДУ второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка — это уравнение вида

$$y'' = f(t, y, y'). \quad (1.5)$$

Решение имеет два свободных параметра, поэтому для определения частного решения задают начальные значения

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0. \quad (1.6)$$

Для отыскания решения уравнения (1.5) его можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y' \\ f(t, y, y') \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y'_0 \end{matrix} \quad (1.7)$$

и применить обычные методы РК. Однако в силу простого вида первой компоненты правой части применение РК можно упростить и записать в виде:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hy'_0 + h^2 \sum_{i=1}^s \bar{b}_i k'_i, \\ y'_1 &= y'_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k'_i, \\ k'_i &= f(t_0 + c_i h, y_0 + c_i h y'_0 + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij} k'_j, y'_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k'_j). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Коэффициенты такого метода можно собрать в таблицу 1.2:

Замечание 2. В том случае, когда рассматривается частный случай уравнения (1.5) вида $y'' = f(t, y)$, метод (1.8) изменится: часть a_{ij} исчезнет и метод примет вид (1.9).

Таблица 1.2: Таблица коэффициентов Бутчера для уравнения второго порядка

0												
c_2	a_{21}						\bar{a}_{21}					
c_3	a_{31}	a_{32}				\bar{a}_{31}	\bar{a}_{32}					
\vdots	\vdots	\vdots				\vdots	\vdots					
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	$a_{s,s-1}$		\bar{a}_{s1}	\bar{a}_{s2}	\dots	$\bar{a}_{s,s-1}$			
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s	\bar{b}_1	\bar{b}_2	\dots	\bar{b}_{s-1}	\bar{b}_s		

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + hy'_0 + h^2 \sum_i \bar{b}k'_i, \\
 y'_1 &= y'_0 + h \sum_i b_i k'_i, \\
 k'_i &= f(t_0 + c_i h, y_0 + c_i h y'_0 + h^2 \sum_j i \bar{a}_{ij} k'_j)
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Такие методы введены Э. Нюстремом [12] и теперь называются методами Рунге — Кутты — Нюстрёма (РКН). Таблица Бутчера для РКН имеет вид:

0												
c_2	\bar{a}_{21}											
c_3	\bar{a}_{31}	\bar{a}_{32}										
\vdots	\vdots	\vdots										
c_s	\bar{a}_{s1}	\bar{a}_{s2}	\dots	$\bar{a}_{s,s-1}$								
	\bar{b}_1	\bar{b}_2	\dots	\bar{b}_{s-1}	\bar{b}_s							
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s							

Тогда можно построить метод с меньшим количеством этапов, чем у методов РК.

Определение 5. Метод Нюстрёма (1.9) имеет порядок p , если выполнено:

$$\begin{aligned}
 y(t_0 + h) - y_1 &= O(h^{p+1}) \\
 y'(t_0 + h) - y'_1 &= O(h^{p+1})
 \end{aligned}$$

1.2 Функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего типа

Функционально-дифференциальным уравнением запаздывающего типа (ФДУЗТ) называется уравнение вида:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y_t), & t \geq t_0, \\ y(t) = \varphi(t), & t \leq t_0, \end{cases} \quad (1.10)$$

где функция запаздывания $y_t: [t - \tau, t] \rightarrow \mathbb{R}$; предыстория $\varphi(t)$ определена на $[\rho, t_0]$, $\rho = \min_{1 \leq i \leq n} \min_{t \geq t_0} (t - \tau_i)$, τ_i — крайняя левая точка интервала аргумента функции y_t в точке t_i .

ФДУЗТ описывают процессы с последствием. Они получили широкое распространение в медицине, биологии, химии, электронике [13], [14].

Запаздывание y_t может быть:

- дискретного вида $y_t = y(t + \tau)$, $\tau \in [-r, 0]$, $r \in [0, \infty]$,
- непрерывного вида (интегро-дифференциальные и произвольные зависимости от предыстории),
- комбинацией обоих.

Функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего типа с дискретным видом запаздывания принято называть просто *дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом (ДУЗА)*.

1.2.1 ФДУЗТ первого порядка

Наиболее популярный подход к численному решению дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом это принять шаг метода меньше или равным величине дискретного постоянного запаздывания, т. е. $h < \tau$. В случае непопадания в заранее известные точки сетки строится непрерывная аппроксимация $y_i(\theta)$, $\theta \in [0, 1]$, внутри промежутков $[t_i, t_{i+1}]$ так, что $y_i(0) = y_i$, а

$y_i(1) = y_{i+1}$. Непрерывное расширение метода называют непрерывным методом.

Аппроксимация точек внутри шага может быть реализована интерполяцией Эрмита по вычисленным значениям y и f в точках сетки или, например, непрерывными методами РК.

Для методов РК построение непрерывного расширения означает замену коэффициентов b_j метода на полиномы $b_j(\theta)$.

Непрерывный метод Рунге—Кутты (НРК) дает приближение $y_n(\theta) = y(t_n + \theta h_n)$ для $\theta \in [0, 1]$ функцией $\eta_n(\theta h_n)$ на каждом шаге:

$$y_n(\theta) \approx \eta_n(\theta h) = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i(\theta) K_{n,i}, \quad y_0 = \varphi(0), \quad y_n = \eta_{n-1}(h), \quad (1.11)$$

где $K_{n,i} = f(t_n + c_i h, Y^{n,i})$, $i = 1, \dots, s$, $Y^{n,i} = y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_{n,j}$.

При решении дифференциальных уравнений с запаздыванием непрерывных методов может быть недостаточно, так как возможен следующий случай: при совершении шага длиной h из точки t_m может потребоваться знание значения функции в точке $t_m + \theta h$, при $\theta \in [0, 1]$. Описанный случай получил название **перекрытие**. В этом случае явные методы становятся полностью неявными и требуют больших вычислительных затрат. Для сохранения явности были предложены так называемые функционально-непрерывные методы Рунге—Кутты (ФНРК) [15], [16].

Для методов РК функционально-непрерывный метод (ФНРК) состоит в непрерывном расширении функции K_i на $K_i(\theta)$ следующего вида заменой a_{ij} на полиномы $a_{ij}(\theta)$:

$$K_{n,i} = f(t_n + c_i h_n, Y^{n,i}), \quad i = 1, \dots, s$$

при $Y^{n,i}(\theta h) = y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(\theta) K_{n,j}$, $\theta \in [0, c_i]$, $Y^{n,i}(t) = \eta(t_n + t)$, $t \in [-\tau, 0]$,

$$(1.12)$$

Для непрерывных методов определение порядка приобретает несколько иную формулировку:

Определение 6. *Метод НРК имеет равномерный порядок p , если глобальная ошибка в течении всего временного интервала ведет себя как $O(h^p)$.*

Определение 7. Метод НРК имеет **дискретный порядок** q , если глобальная ошибка в конце каждого шага ведет себя как $O(h^q)$.

Замечание 3. Если метод имеет обычный порядок p , то он имеет дискретный порядок также p .

1.2.2 ФДУЗТ второго порядка

В работе [6] рассмотрено уравнение

$$y''(t) = f(t, y_t) \quad (1.13)$$

частный случай уравнения второго порядка, где функция $f(\cdot)$ не зависит от переменной y' . Для него выведен метод ФНРКН. Решение этого уравнения аппроксимируется непрерывной функцией $\eta_n(\theta h_n)$ для функции $y(t_n + \theta h_n)$ и $\hat{\eta}_n(\theta h_n)$ для ее производной $y'(t_n + \theta h_n)$, $\theta \in [0, 1]$:

$$\eta_n(\theta h_n) = y_n + \theta h_n y'_n + h_n^2 \sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) K_{n,i}, \quad y_0 = \varphi(0), \quad y_n = \eta_{n-1}(h_{n-1}), \quad (1.14)$$

$$\hat{\eta}_n(\theta h_n) = y'_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i(\theta) K_{n,i}, \quad y'_0 = \varphi'(0), \quad y'_n = \hat{\eta}_{n-1}(h_{n-1}), \quad (1.15)$$

где $K_{n,i} = f(t_n + c_i h_n, Y_{c_i h_n}^{n,i})$, $i = 1, \dots, s$ и $Y_{n,i} : [-\tau, c_i h_n] \rightarrow \mathbb{R}^d$, определяемая как

$$\begin{aligned} Y^{n,i}(\theta h_n) &= y_n + \theta h_n y'_n + h_n^2 \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij}(\theta) K_{n,j}, & \theta \in [0, c_i], \\ Y^{n,i}() &= \eta(t_n + t), & t \in [-\tau, 0], \end{aligned}$$

где $\tau(t)$ — запаздывание, $\eta(t)$ — аппроксимирующая функция на промежутке до момента времени t :

$$\eta(t) = \begin{cases} \eta_m(\theta h_m), & t \in (t_m, t_{m+1}], \quad \theta = \frac{t-t_m}{h_m}, \quad \forall m = 0, 1, \dots \\ \varphi(t), & t \leq t_0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Соответствующая аппроксимации $y'(t)$ функция:

$$\hat{\eta}(t) = \begin{cases} \hat{\eta}_m(\theta h_m), & t \in (t_m, t_{m+1}], \quad \theta = \frac{t-t_m}{h_m}, \forall m = 0, 1, \dots \\ \varphi'(t), & t \leq t_0 \end{cases} \quad (1.17)$$

Описанный выше метод называется функционально-непрерывным методом Рунге — Кутты — Ньюстрёма (ФНРКН). Таблица Бутчера для коэффициентов ФНРКН в общем виде:

0					
c_2	$\bar{a}_{21}(\theta)$				
c_3	$\bar{a}_{31}(\theta)$	$\bar{a}_{32}(\theta)$			
\vdots	\vdots	\vdots			
c_s	$\bar{a}_{s1}(\theta)$	$\bar{a}_{s2}(\theta)$	\dots	$\bar{a}_{s,s-1}(\theta)$	
1	$\bar{b}_1(\theta)$	$\bar{b}_2(\theta)$	\dots	$\bar{b}_{s-1}(\theta)$	$\bar{b}_s(\theta)$
	$b_1(\theta)$	$b_2(\theta)$	\dots	$b_{s-1}(\theta)$	$b_s(\theta)$

Для данной системы показано [6], что можно построить методы с меньшим числом этапов:

Таблица 1.3: Таблица минимального количества этапов для получения методов типа РК до пятого порядка.

	1	2	3	4	5
ФНРК	1	2	4	7	11
ФНРКН	1	2	3	5	7

Глава 2. Постановка задачи

В работе рассматривается уравнение второго порядка вида более общего, чем (1.13):

$$y'' = f(t, y_t, y'(t))$$

или эквивалентная система уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y'(t) = z(t) & \equiv g_1(t, y_t, z_t), \\ z'(t) = f(t, y_t, z(t)) & \equiv g_2(t, y_t, z_t). \end{cases} \quad (2.1)$$

с предысторией $y(t) = \varphi(t), y'(t) = \varphi'(t)$.

Целью работы является:

1. сформулировать метод типа Рунге—Кутты для практического применения к рассматриваемой задаче;
2. вывод уравнений порядка (для получения пятого порядка включительно);
3. решение уравнений порядка и построение методов с меньшим числом этапов, чем методы для общих систем первого порядка.

Глава 3. Формулировка метода

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с дискретным запаздыванием:

$$y'' = f(t, y_t, y'(t)), \quad (3.1)$$

где $f(\cdot)$ — непрерывно-дифференцируемая достаточное количество раз; для непрерывной функции $y: [t_0 - r, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ и $t \in [t_0, T)$, где $t_0 < T$, непрерывная функция $y_t: y_t(\theta) = y(t + \theta), \theta \in [-r, 0], r \in [0, \infty]$

Определение 8. Пусть

- s — целое положительное число,
- a_{ij} — вещественные числа,
- $\bar{a}_{ij}(\theta)$ — полиномы степени s , такие что $\bar{a}_{ij}(0) = 0$;
- $b_j(\theta)$ и $\bar{b}_j(\theta)$ — полиномы, такие что $b_j(0) = \bar{b}_j(0) = 0$;
- c_i — вещественные положительные числа,

тогда методом ФНРК для уравнения второго порядка (3.1) с начальными данными (t_0, φ) (ФНРК2) будем называть метод:

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t_0, \varphi, \theta h) &\approx \eta(\theta h) = y_n + \theta h y'_n + h^2 \sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) K_{n,i}, \quad \theta \in [0, 1], \\ y'_{n+1}(t_0, \varphi', \theta h) &\approx \eta'(\theta h) = y'_n + h \sum_{i=1}^s b_i(\theta) K_{n,i}; \quad \theta \in [0, 1], \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$K_{n,i} = f(t_n + c_i h, Y_{c_i h}^{n,i}, y'_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_{n,j}), \quad i = 1, \dots, s,$$

и $Y_{c_i h}^{n,i}: [-\tau; t_n + c_i h] \rightarrow \mathbb{R}^d$ — стадийная функция, определяемая следующим образом:

$$\begin{aligned} Y^{n,i}(t_n + \theta h) &= y_n + \theta h y'_n + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij}(\theta) K_{n,j}, \quad \theta \in [0, c_i], \\ Y^{n,i}(t) &= \eta(t), \quad t \in [-\tau, t_n]. \end{aligned}$$

$$\eta(t) = \begin{cases} \eta^m(\theta h), & t \in (t_m, t_{m+1}), \\ \varphi(t), & t \leq t_0. \end{cases} \quad m = 0 \dots n - 1,$$

Коэффициенты такого метода можно собрать в таблицу вида:

0										
c_2	$a_{21}(\theta)$					\bar{a}_{21}				
c_3	$a_{31}(\theta)$	$a_{32}(\theta)$				\bar{a}_{31}	\bar{a}_{32}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots			\vdots	\vdots	\ddots		
c_s	$a_{s1}(\theta)$	$a_{s2}(\theta)$	\dots	$a_{s,s-1}(\theta)$		\bar{a}_{s1}	\bar{a}_{s2}	\dots	$\bar{a}_{s,s-1}$	
	$b_1(\theta)$	$b_2(\theta)$	\dots	$b_{s-1}(\theta)$	$b_s(\theta)$	$\bar{b}_1(\theta)$	$\bar{b}_2(\theta)$	\dots	$\bar{b}_{s-1}(\theta)$	$\bar{b}_s(\theta)$.

Глава 4. Вывод условий порядка

Условия порядка выводятся из сравнения разложений в ряд Тейлора точного и приближенного решений при одинаковых степенях h . В этой главе последовательно рассматриваются условия порядка для непрерывных методов РК первого и второго порядка, системы уравнений первого порядка, функционально-непрерывных методов первого порядка с усложнением и выводом условий порядка для функционально-непрерывных методов второго порядка.

4.1 Непрерывные методы Рунге — Кутты

Для вывода условия порядка потребуется разложение в ряд Тейлора автономной функции одной переменной $f(x)$ в окрестности точки x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \quad (4.1)$$

и функции двух переменных $f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0)

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{f'_x(x_0, y_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f'_y(x_0, y_0)}{1!}(y - y_0) + \\ & + \frac{f''_{xx}(x_0, y_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f''_{xy}(x_0, y_0)}{2!}(x - x_0)(y - y_0) + \\ & + \frac{f''_{yx}(x_0, y_0)}{2!}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{f''_{yy}(x_0, y_0)}{2!}(y - y_0)^2 + \dots \quad (4.2) \end{aligned}$$

4.1.1 Метод для уравнений первого порядка

Для уравнений первого порядка

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

метод РК с начальным условием $y(t_0) = y_0$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
y(t_0 + \theta h) &\approx \eta_1(\theta) = y_0 + h \sum_{i=1}^s b_i(\theta) k_i, \\
k_1 &= f(t_0, y_0), \\
k_2 &= f(t_0 + c_2 h, y_0 + h a_{21} c_1), \\
&\dots \\
k_i &= f(t_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \\
&\dots \\
k_s &= f(t_0 + c_s h, y_0 + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} k_j).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Рассмотрим автономное уравнение $y'(t) = f(y(t))$. Непрерывный метод РК имеет вид:

$$\begin{aligned}
y(t_0 + \theta h) &\approx \eta_1(\theta) = y_0 + h \sum_{i=1}^s b_i(\theta) k_i, \\
k_i &= f(y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Разложим это решение в ряд Тейлора, при этом обозначим $f = f(y_0)$:

$$\begin{aligned}
y(t_0 + \theta h) &= y_0 + h(b_1(\theta)k_1 + b_2(\theta)k_2 + b_3(\theta)k_3 + \dots) = \\
&= y_0 + h(b_1(\theta)f + b_2(\theta)f(y_0 + a_{21}k_1) + b_3(\theta)f\left(y_0 + \sum_{j=1}^2 a_{3j}k_j\right) + \dots) = \\
&= y_0 + h\left(b_1(\theta)f + b_2(\theta)\left(f + h \sum a_{2j}f'f + \right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ h^2\left(\sum a_{2j} \sum a_{2j}f'f'f + \sum a_{2j} \sum a_{jr}f''f^2\right) + \dots\right) + \right. \\
&\quad \left.+ b_3(\theta)\left(f + h \sum a_{3j}f'f + \right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ h^2\left(\sum a_{3j} \sum a_{3j}f'f'f + \sum a_{3j} \sum a_{jr}f''f^2\right) + \dots\right) + \dots\right) = \\
&= y_0 + h \sum_i b_i(\theta)f + h^2 \sum_i b_i \sum_j a_{ij}f'f + \\
&\quad + h_3 \left(\sum_i b_i \sum_j a_{ij} \sum_r a_{ir}f'f'f + \sum_i b_i \sum_j a_{ij} \sum_r a_{jr}f''f^2 \right) + \dots = \\
&= y_0 + h \sum_i b_i(\theta)f + h^2 \sum_i b_i c_i f'f + h_3 \left(\sum_i b_i c_i c_i f'f'f + \sum_i b_i \sum_j a_{ij} c_j f''f^2 \right) + \dots
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Разложим точное решение автономного уравнения в ряд Тейлора по степеням θh в точке t_0 . Обозначим $f = f(y_0)$, $f' = \frac{df}{dy}(y_0)$, также $y' = f$.

$$y(t_0 + \theta h) = y_0 + \theta h f + \frac{(\theta h)^2}{2} f' f + \frac{(\theta h)^3}{6} (f' f' f + f'' f^2) + \frac{(\theta h)^4}{24} (f' f' f' f + f' f'' f^2 + 3 f'' f f' f + f''' f^3) + O(h^5). \quad (4.6)$$

Сравнение с разложением приближения в ряд по степеням h дает условия порядка:

1-order	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) = \theta,$	
2-order	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i = \frac{\theta^2}{2},$	
3-order	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^2 = \frac{\theta^3}{3},$	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{\theta^3}{6},$
4-order	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^3 = \frac{\theta^4}{4},$	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{\theta^4}{8},$
	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^2 = \frac{\theta^4}{12},$	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r = \frac{\theta^4}{24},$
5-order	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^4 = \frac{\theta^5}{5},$	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^2 = \frac{\theta^5}{15},$
	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{\theta^5}{10},$	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^3 = \frac{\theta^5}{20},$
	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r = \frac{\theta^5}{30},$	
	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} \sum_{v=1}^{r-1} c_v = \frac{\theta^5}{120},$	
	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r^2 = \frac{\theta^5}{60},$	
	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r = \frac{\theta^5}{40},$	
	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_i \sum_{r=1}^{j-1} a_{ir} c_r = \frac{\theta^5}{20}.$	

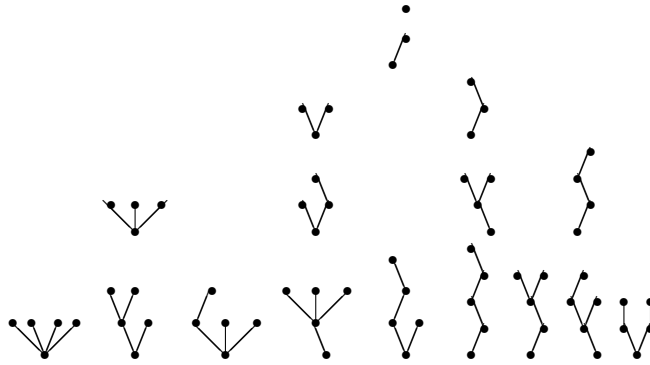
Предполагается, что выполнено базовое упрощающее предположение

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i, \quad i = 1, \dots, s.$$

Формулы производных точного решения можно представить в графическом виде. Производным $f'' f^2$ и $f' f' f$ можно представить в следующем виде:

$$t_{31} = \bigvee_j^l \bigwedge_k^j \quad t_{32} = \bigwedge_l^j \bigvee_k^l; \quad t_{32} = \bigwedge_l^j \bigvee_k^l$$

Графы, имеющие одинаковую топологическую структуру являются эквивалентными. Тогда можно выписать деревья, соответствующие формулам производных:



По виду дерева можно записать выражения от a_{ij} и c_j , стоящие в ряде Тейлора при соответствующих производных. Внутренние вершины соответствуют коэффициентам a_{ij} , а листовые — коэффициентам c_j . Эти выражения, соответствующие дереву i , обозначим $\Phi_i(t)$. Тогда условия порядка могут быть записаны с помощью теоремы [1]:

Теорема 1. *Для того, чтобы метод Рунге — Кутты имел порядок p , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\sum_{i=1}^s b_i \Phi_i(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$$

для всех деревьев порядка меньше или равного p , где $\gamma(t)$ — величина, определяемая как произведение порядков всех возможных поддеревьев, которые получаются путем последовательного удаления корневой вершины.

4.1.2 Метод для системы уравнений первого порядка

Для автономной системы

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), z(t)), \\ z'(t) = g(y(t), z(t)). \end{cases} \quad (4.7)$$

Непрерывный метод РК с разными схемами для y и z имеет вид:

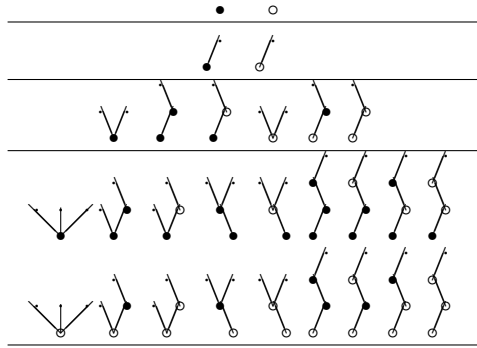
$$\begin{aligned}
 y(t_0 + \theta h) &\approx \eta(\theta) = y_0 + h \sum_{i=1}^{s_y} b_i^y(\theta) k_i, \\
 z(t_0 + \theta h) &\approx \zeta(\theta) = z_0 + h \sum_{i=1}^{s_z} b_i^z(\theta) l_i, \\
 k_i &= f \left(y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{yy} k_j, \quad z_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{yz} l_j \right), \\
 l_i &= g \left(y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{zy} k_j, \quad z_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{zz} l_j \right).
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

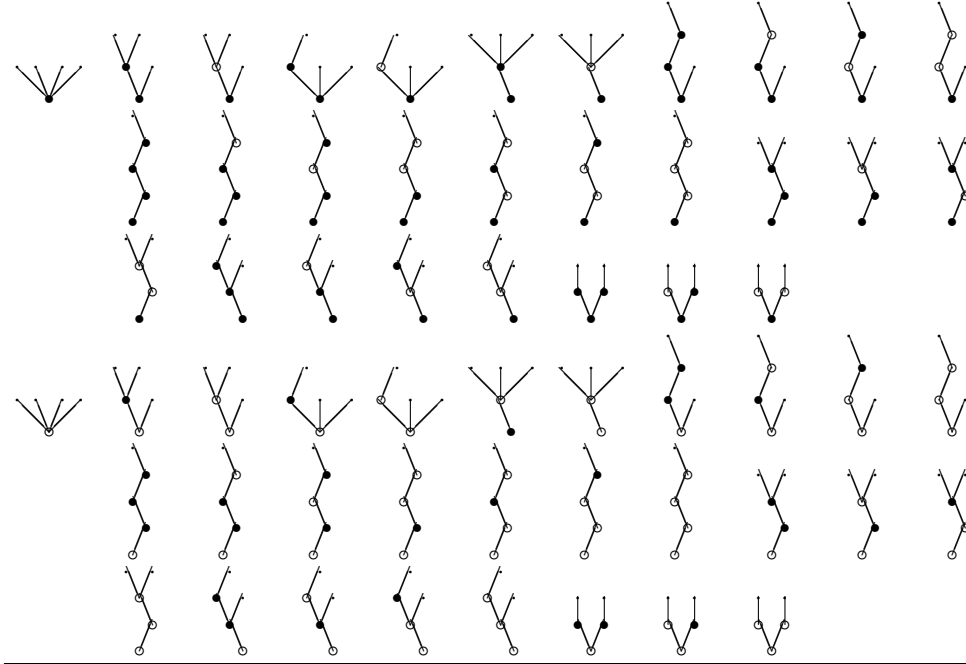
Методы типа РК для системы уравнений (4.7) подробно рассмотрены И.В. Олемским [4].

При тех же обозначениях, что и в параграфе 4.1.1, и тому же принципу сравнения рядов Тейлора для точного и приближенного значения, могут быть выведены условия порядка. Для простоты вывода можно также пользоваться графическим представлением производных. Для системы уравнений вводится два типа вершин дерева для производных по различным переменным: черные, соответствующие производным по y , и белые, соответствующие производным по z . Предположим, что выполнены упрощающие условия

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{yy} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{yz} = c_i^y = c_i = c_i^z = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{zy} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{zz},$$

с учетом этого, деревья с черными и белыми листовыми вершинами становятся эквивалентными. Тогда деревья имеют вид:





Тогда с легкостью могут быть выписаны условия порядка для данного метода:

1	$\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) = \theta,$	$\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) = \theta,$
2	$\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) c_i = \frac{\theta^2}{2},$	$\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i = \frac{\theta^2}{2},$
3	$\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) c_i^2 = \frac{\theta^3}{3},$ $\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y c_j = \frac{\theta^3}{6},$ $\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j = \frac{\theta^3}{6},$	$\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i^2 = \frac{\theta^3}{3},$ $\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y c_j = \frac{\theta^3}{6},$ $\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j = \frac{\theta^3}{6},$
4	$\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) c_i^3 = \frac{\theta^4}{4},$ $\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y c_j = \frac{\theta^4}{8},$ $\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j = \frac{\theta^4}{8},$ $\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y c_j^2 = \frac{\theta^4}{12},$ $\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j^2 = \frac{\theta^4}{12},$ $\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y c_r = \frac{\theta^4}{24},$ $\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r = \frac{\theta^4}{24},$ $\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y c_r = \frac{\theta^4}{24},$ $\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r = \frac{\theta^4}{24},$	$\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i^3 = \frac{\theta^4}{4},$ $\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y c_j = \frac{\theta^4}{8},$ $\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j = \frac{\theta^4}{8},$ $\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y c_j^2 = \frac{\theta^4}{12},$ $\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j^2 = \frac{\theta^4}{12},$ $\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y c_r = \frac{\theta^4}{24},$ $\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r = \frac{\theta^4}{24},$ $\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y c_r = \frac{\theta^4}{24},$ $\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r = \frac{\theta^4}{24},$
5	$\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) c_i^4 = \frac{\theta^5}{5},$ $\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y c_j^2 = \frac{\theta^5}{15},$ $\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j^2 = \frac{\theta^5}{15},$ $\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) c_i^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y c_j = \frac{\theta^5}{10},$	$\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i^4 = \frac{\theta^5}{5},$ $\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y c_j^2 = \frac{\theta^5}{15},$ $\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j^2 = \frac{\theta^5}{15},$ $\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y c_j = \frac{\theta^5}{10},$

$$\left| \begin{array}{l}
\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y c_r^2 = \frac{\theta^5}{60}, \\
\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r^2 = \frac{\theta^5}{60}, \\
\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r^2 = \frac{\theta^5}{60}, \\
\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y c_j \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y c_r = \frac{\theta^5}{40}, \\
\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y c_j \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y c_r = \frac{\theta^5}{40}, \\
\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y c_j \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r = \frac{\theta^5}{40}, \\
\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^y c_j \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r = \frac{\theta^5}{40}, \\
\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y c_r = \frac{\theta^5}{40}, \\
\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y c_r = \frac{\theta^5}{40}, \\
\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r = \frac{\theta^5}{40}, \\
\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r = \frac{\theta^5}{40},
\end{array} \right.$$

4.1.3 Метод для уравнений второго порядка

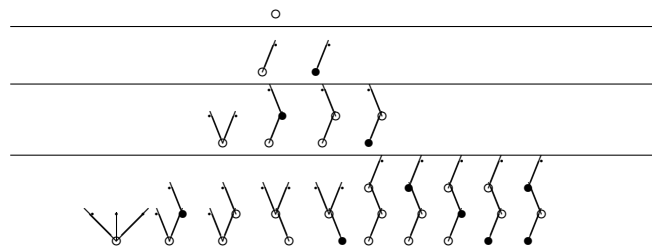
Уравнение второго порядка $y''(t) = f(y(t), y'(t))$ может быть представлено в виде эквивалентной системы уравнений первого порядка:

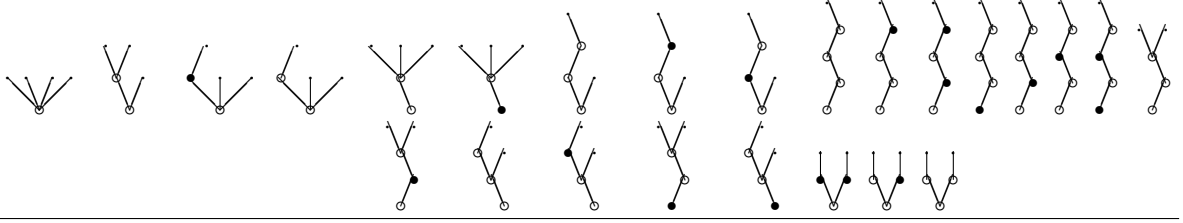
$$\begin{aligned}
y'(t) &= z(t), \\
z'(t) &= g(y(t), z(t)).
\end{aligned}$$

Решение данной системы является сужением системы (4.7), где функция $f(y(t), z(t)) = z(t)$, соответственно производная $\frac{df}{dy} = 0$ и $\frac{df}{dz} = 1$. В графическом представлении отвечает следующим условиям:

1. любая черная вершина может иметь только одну последующую,
2. после черной вершины следующая должна быть белой.

Деревья, удовлетворяющие условиям:





Причем из записи метода НРК для задачи данного параграфа можно некоторыми обозначениями избавиться от громоздкости формул. Будем обозначать

$$\sum b_i^y(\theta) \sum a_{ij}^z = \sum \bar{b}_i(\theta), \quad \sum b_i^y(\theta) c_i = \sum \bar{b}_i(\theta),$$

$$\sum a_{ij}^y \sum a_{jv}^z = \sum \bar{a}_{ij}, \quad \sum a_{ij}^y c_j = \sum \bar{a}_{ij}.$$

Также предполагаем, что выполняется упрощающее предположение

$$\sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij} = \frac{c_i^2}{2}. \quad (4.9)$$

Оставшиеся $b_i^z(\theta)$ и a_{ij}^z заменяем на $b_i(\theta)$ и a_{ij} соответственно. Тогда поддереву \downarrow , стоящему вначале дерева, будет соответствовать коэффициент \bar{b}_i , а такому же поддереву в середине дерева будет соответствовать коэффициент \bar{a}_{ij} . Можно обратить внимание, что все деревья, имеющие в листе такое поддерево, сводятся к предыдущим и упраздняются.

Тогда условия порядка выглядят следующим образом:

1	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) = \theta,$	
2	$\sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) = \frac{\theta^2}{2},$	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i = \frac{\theta^2}{2},$
3	$\sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) c_i = \frac{\theta^3}{3},$	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^2 = \frac{\theta^3}{3},$
	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{\theta^3}{6},$	
4	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^3 = \frac{\theta^4}{4},$	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{\theta^4}{8},$
	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^2 = \frac{\theta^4}{12},$	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) (\sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij} c_j - \frac{\theta^3}{24}) = 0,$
	$\sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) c_i^2 = \frac{\theta^4}{12},$	$\sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{\theta^4}{24},$
	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r = \frac{\theta^4}{24},$	
5	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^4 = \frac{\theta^5}{5},$	
	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^2 = \frac{\theta^5}{15},$	
	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{\theta^5}{10},$	

$$\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r = \frac{\theta^5}{30}, \\
\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^3 = \frac{\theta^5}{20}, \\
\sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) c_i^3 = \frac{\theta^5}{20}, \\
\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij} c_j = \frac{\theta^5}{30}, \\
\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} \sum_{v=1}^{r-1} a_{rv} c_v = \frac{\theta^5}{120}, \\
\sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r = \frac{\theta^5}{120}, \\
\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r = \frac{\theta^5}{120}, \\
\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} \bar{a}_{jr} c_r = \frac{\theta^5}{120}, \\
\sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij} c_j = \frac{\theta^5}{120}, \\
\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r^2 = \frac{\theta^5}{60}, \\
\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij} c_j^2 = \frac{\theta^5}{60}, \\
\sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^2 = \frac{\theta^5}{60}, \\
\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r = \frac{\theta^5}{40}, \\
\sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{\theta^5}{40}, \\
\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j \sum_{r=1}^{i-1} a_{ir} c_r = \frac{\theta^5}{20}.
\end{array}$$

4.2 Функционально-непрерывные методы РК

Аналогично предыдущему разделу в этом рассматриваются методы ФНРК первого порядка и системы уравнений первого порядка с сужением на систему уравнений первого порядка, эквивалентной уравнениям второго порядка.

Согласно [3] функционально-непрерывные методы имеют особенность — функциональную зависимость от предыстории, что доставляет некоторые сложности при вычислении производных по переменной y_t , так как функция получается кусочно-определенной (на различных отрезках функция имеет различный вид), то производную найти крайне непростая задача. В этом разделе не предоставляются разложения в ряд Тейлора точного и приближенного решений из-за громоздкости вывода, а используются результаты сравнения рядов, процесс получения которых подробно описан в работе [3].

4.2.1 Метод для уравнений первого порядка

Рассматривается уравнение (1.10) и метод нахождения приближенного решения ФНРК (1.14). Пусть выполнено упрощающее условие (4.9).

Разность точного и приближенного решения внутри текущего шага имеет вид:

$$\begin{aligned}
 E(\theta h) &= h \sum_{i=1}^s b_i(\theta) D_i + \sum_{k=1}^p h^k \Gamma_k(\theta) y^{(k)}(0) + O(h^{p+1}), \quad \theta \in [0, 1] \\
 \text{где } D_i &= f(x_0 + c_i h, y_{c_i h} + E_{c_i h}^i) - f(x_0 + c_i h, y_{c_i h}), \quad i = 1, \dots, s, \\
 E_{c_i h}^i &= h \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij}(\theta_1) D_j + \sum_{k=1}^p h^k \bar{\Gamma}_{ik}(\theta_1) y^{(k)}(0) + O(h^{p+1}), \quad i = 1, \dots, s. \\
 \Gamma_k(\theta) &= \frac{1}{(k-1)!} \left(\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^{k-1} - \frac{\theta^k}{k} \right), \quad \theta \in [0, 1], \\
 \Gamma_{ik}(\theta) &= \frac{1}{(k-1)!} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(\theta) c_j^{k-1} - \frac{\theta^k}{k} \right), \quad \theta \in [0, c_i].
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Здесь под $\bar{\Gamma}_{ik}(\omega)$ понимается смещенное значение функции $\Gamma_{ik}(\cdot)$ на ω , $\bar{\Gamma}_{ik}(\omega) = \Gamma_{ik}(c_i + \omega)$, $\omega \leq 0$.

Тогда при равенстве нулю коэффициентов при h в выражении $E(\theta h)$ до степени p включительно порядок p полученным методом будет достигаться. Таким образом, для достижения порядка $p = 1$ необходимо, чтобы выполнилось условие

$$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) D_i + \Gamma_1(\theta) y^{(1)}(0) = 0.$$

При разложении компонент разности D_i в ряд Тейлора, получим $D_i = O(h^2)$, $i = 1, \dots, s$. Значит, $\Gamma_1(\theta) y^{(1)}(0) = 0$. Положим $y^{(1)}(0) \neq 0$, так как при равенстве нулю получим тривиальный вид функции $f(\cdot)$. Тогда получим достаточное условие первого порядка при введенном допущении:

$$\Gamma_1(\theta) = \frac{1}{(0)!} \left(\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^0 - \frac{\theta^1}{1} \right) = \sum_{i=1}^s b_i(\theta) - \theta = 0.$$

Также легко выводятся условия второго порядка при аналогичном предполо-

жении $y^{(2)}(0) \neq 0$ нелинейного вида функции $f(\cdot)$:

$$\Gamma_2(\theta) = \frac{1}{(2-1)!} \left(\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^{2-1} - \frac{\theta^2}{2} \right) = \sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i - \frac{\theta^2}{2} = 0$$

Рассмотрим коэффициенты при степенях h^3 и приравняем их сумму к нулю для получения условий третьего порядка:

$$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) d_{i2} + \Gamma_3(\theta) y^{(3)}(0) = 0, \quad (4.11)$$

где $d_{i2} = f'_\theta(y_0 + c_i h, y_{c_i h}) \left(\bar{\Gamma}_{i2} \left(\frac{\theta}{h} \right) y^{(2)}(0) \right)$ — коэффициент при второй степени h в разложении D_i в ряд Тейлора.

В общем виде неизвестно допускает ли функция $f'_\theta(t_0 + c_i h, y_{c_i h})$ разложение в ряд Тейлора в окрестности точки (t_0, y_0) , поэтому предположим, что она не допускает подобного разложения. Данный факт является препятствием для получения необходимого условия для достижения третьего порядка (и более высоких) общем виде, но можно найти частное решение условия 4.11, которое будет достаточным для получения требуемого порядка.

Вынесем частную производную за сумму по i . Очевидно, что эта функция будет различна для каждого уникального значения c_i . Пусть среди всех $c_i, i = 1, \dots, s$ присутствуют $s^* \leq s$ различных, набор уникальных c_i обозначим $\{c_m, m = 1, \dots, s^*\}$. Тогда для каждого m существует ненулевой набор индексов $\{i_m\} \subset \{i\}$, где $\{\cdot\}$ обозначает набор значений. Формально для $\forall v \in i_m \exists c_v = c_m^*, \forall m = 1, \dots, s^*$. Тогда можно вынести обсуждаемую функцию, одинаковую для всех $v \in i_m$ с внешним суммированием по m :

$$\sum_{m=1}^{s^*} f'_\theta(y_0 + c_m h, y_{c_m h}) \sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \bar{\Gamma}_{v2} \left(\frac{\theta}{h} \right) y^{(2)}(0) + \Gamma_3(\theta) y^{(3)}(0) = 0. \quad (4.12)$$

Обозначим из 4.12

$$V_{2m} = \sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \bar{\Gamma}_{v2} \left(\frac{\theta}{h} \right). \quad (4.13)$$

Пусть выполнено $V_{2m} = 0 \quad \forall m$ и $\Gamma_3 = 0$, тогда 4.12 очевидно выполняется.

$$\Gamma_3(\theta) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^2 - \frac{\theta^3}{3} \right), \quad \theta \in [0, 1].$$

С другой стороны рассмотрим V_m :

$$V_{2m} = \sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \bar{\Gamma}_{v2} \left(\frac{\theta}{h} \right) = \sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj} \left(\theta - \frac{\theta}{h} \right) c_j - \frac{\left(\theta - \frac{\theta}{h} \right)^2}{2} \right) = 0 \quad (4.14)$$

Тогда условия третьего порядка:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^2 &= \frac{\theta^3}{3}, & \theta &\in [0, 1], \\ \sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}(\theta) c_j - \frac{\theta^2}{2} \right) &= 0, & \theta &\in [0, c_m^*], \quad m = 1, \dots, s^*. \end{aligned}$$

Аналогично для условий четвертого и более высоких порядков.

В условиях порядка существенным отличием от условий порядка для методов НРК является наличие нескольких переменных внутренней точки θ . Для определения внутренней точки между значениями в сетке истории будем пользоваться $\theta \in [0, 1]$, для определения внутренних точек на текущем шаге, образующих перекрытие, будем пользоваться $\theta_m \in [0, c_m^*]$, $m = 1, \dots, s^*$. В остальном условия порядка по структуре и идее формулирования соответствуют тем из пункта 4.1.1, графические представления будут одинаковыми, но правая часть из привычных уравнений порядка, вычисляемая по теореме 1 записывается от θ_m для конечного поддерева внутри суммирования, а также будем иметь ввиду при выписывании условий, что суммирование выполняется только индексам i_m в тех уравнениях, где присутствует a_{ij} , а в деревьях — промежуточные вершины.

Замечание 4. Сведение к НРК возможно при подстановке конечных точек отрезка θ_m , т.е. соответствующих c_m^* .

Условия порядка ФНРК для соответствующих порядков:

1	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) = \theta, \quad \theta \in [0, 1]$
2	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta)c_i = \frac{\theta^2}{2}, \quad \theta \in [0, 1]$
3	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta)c_i^2 = \frac{\theta^3}{3}, \quad \sum_{v \in i_m} b_m(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}(\theta_1)c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$ $m = 1, \dots, s^*, \quad \theta \in [0, 1], \quad \theta_1 \in [0, c_m]$
4	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta)c_i^3 = \frac{\theta^4}{4}, \quad \sum_{v \in i_m} b_v(\theta)c_v \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}(\theta_1)c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}(\theta_1)c_j^2 - \frac{\theta_1^3}{3} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \sum_{\substack{j \in i_l \\ j \leq v-1}} a_{vj}(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}(\theta_2)c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $m = 1, \dots, s^*, \quad l = 1, \dots, s^*, \quad \theta \in [0, 1], \quad \theta_1 \in [0, c_m], \quad \theta_2 \in [0, c_l]$
5	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta)c_i^4 = \frac{\theta^5}{5}, \quad \sum_{v \in i_m} b_i(\theta)c_i^2 \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}(\theta_1)c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}(\theta_1)c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) \left(\sum_{r=1}^{i-1} a_{ir}(\theta_{11})c_j - \frac{\theta_{11}^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}(\theta_1)c_j^3 - \frac{\theta_1^4}{4} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v(\theta)c_v \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}(\theta_1)c_j^2 - \frac{\theta_1^3}{3} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v(\theta)c_v \sum_{\substack{j \in i_l \\ j \leq v-1}} a_{vj}(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}(\theta_2)c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \sum_{\substack{j \in i_l \\ j \leq v-1}} a_{vj}(\theta_1)c_j \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}(\theta_2)c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \sum_{\substack{j \in i_l \\ j \leq v-1}} a_{vj}(\theta_1) \sum_{\substack{r \in i_k \\ r \leq j-1}} a_{jr}(\theta_2) \left(\sum_{w=1}^{r-1} a_{rw}(\theta_3)c_w - \frac{\theta_3^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \sum_{\substack{j \in i_l \\ j \leq v-1}} a_{vj}(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}(\theta_2)c_r^2 - \frac{\theta_2^3}{3} \right) = 0,$ $m = 1, \dots, s^*, \quad l = 1, \dots, s^*, \quad k = 1, \dots, s^*,$ $\theta \in [0, 1], \quad \theta_1 \in [0, c_m], \quad \theta_{11} \in [0, c_m], \quad \theta_2 \in [0, c_l], \quad \theta_3 \in [0, c_k]$

4.2.2 Метод для системы из двух уравнений

Для автономной системы

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y_t, z_t), \\ z'(t) &= g(y_t, z_t) \end{aligned}$$

с начальными условиями $y(t) = \varphi(t), z(t) = \psi(t), t < t_0$ ФНРК для системы имеет следующие условия порядка, которые могут быть выведены с помощью деревьев, которые совпадают с теми, которые указаны в пункте 4.1.2, и удовлетворяют допущениям предыдущего параграфа.

1-order	$\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) = \theta, \quad \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) = \theta, \quad \theta \in [0, 1],$
2-order	$\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta)c_i = \frac{\theta^2}{2}, \quad \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta)c_i = \frac{\theta^2}{2}, \quad \theta \in [0, 1],$
3-order	$\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta)c_i^2 = \frac{\theta^3}{3}, \quad \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta)c_i^2 = \frac{\theta^3}{3},$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1)c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1)c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1)c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1)c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$ $m = 1, \dots, s^*, \quad \theta \in [0, 1], \quad \theta_1 \in [0, c_m]$
4-order	$\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta)c_i^3 = \frac{\theta^4}{4}, \quad \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta)c_i^3 = \frac{\theta^4}{4},$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta)c_v \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1)c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta)c_v \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1)c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta)c_v \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1)c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta)c_v \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1)c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1)c_j^2 - \frac{\theta_1^3}{3} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1)c_j^2 - \frac{\theta_1^3}{3} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1)c_j^2 - \frac{\theta_1^3}{3} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1)c_j^2 - \frac{\theta_1^3}{3} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^y(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_2)c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^y(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_2)c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^y(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z(\theta_2)c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^y(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z(\theta_2)c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^z(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_2)c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^z(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_2)c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^z(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z(\theta_2)c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^z(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z(\theta_2)c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$

	$m = 1, \dots, s^*, \quad l = 1, \dots, s^*, \quad \theta \in [0, 1], \quad \theta_1 \in [0, c_m], \quad \theta_2 \in [0, c_l]$
5-order	$\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) c_i^4 = \frac{\theta^5}{5}, \quad \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i^4 = \frac{\theta^5}{5},$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) c_v \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) c_j^2 - \frac{\theta_1^3}{3} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) c_v \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1) c_j^2 - \frac{\theta_1^3}{3} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) c_v \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) c_j^2 - \frac{\theta_1^3}{3} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) c_v \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1) c_j^2 - \frac{\theta_1^3}{3} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) c_v^2 \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) c_v^2 \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) c_v^2 \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) c_v^2 \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) c_j^3 - \frac{\theta_1^4}{4} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) c_j^3 - \frac{\theta_1^4}{4} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1) c_j^3 - \frac{\theta_1^4}{4} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1) c_j^3 - \frac{\theta_1^4}{4} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) c_v \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^y(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) c_v \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^y(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) c_v \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^y(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) c_v \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^y(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) c_v \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^z(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) c_v \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^z(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) c_v \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^z(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) c_v \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^z(\theta_1) \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^y(\theta_1) \sum_{\substack{r \in i_k \\ r \leq j-1}} a_{jr}^y(\theta_2) \left(\sum_{w=1}^{r-1} a_{rw}^y(\theta_3) c_w - \frac{\theta_3^2}{2} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^y(\theta_1) \sum_{\substack{r \in i_k \\ r \leq j-1}} a_{jr}^y(\theta_2) \left(\sum_{w=1}^{r-1} a_{rw}^y(\theta_3) c_w - \frac{\theta_3^2}{2} \right) = 0,$

$$\begin{aligned}
& \sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \sum_{\substack{j \in i_l \\ j \leq v-1}} a_{vj}^y(\theta_1) c_j \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \sum_{\substack{j \in i_l \\ j \leq v-1}} a_{vj}^y(\theta_1) c_j \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \sum_{\substack{j \in i_l \\ j \leq v-1}} a_{vj}^y(\theta_1) c_j \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \sum_{\substack{j \in i_l \\ j \leq v-1}} a_{vj}^y(\theta_1) c_j \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \sum_{\substack{j \in i_l \\ j \leq v-1}} a_{vj}^z(\theta_1) c_j \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \sum_{\substack{j \in i_l \\ j \leq v-1}} a_{vj}^z(\theta_1) c_j \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \sum_{\substack{j \in i_l \\ j \leq v-1}} a_{vj}^z(\theta_1) c_j \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \sum_{\substack{j \in i_l \\ j \leq v-1}} a_{vj}^z(\theta_1) c_j \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) \left(\sum_{r=1}^{v-1} a_{jr}^y(\theta_{11}) c_r - \frac{\theta_{11}^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) \left(\sum_{r=1}^{v-1} a_{jr}^y(\theta_{11}) c_r - \frac{\theta_{11}^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) \left(\sum_{r=1}^{v-1} a_{jr}^z(\theta_{11}) c_r - \frac{\theta_{11}^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) \left(\sum_{r=1}^{v-1} a_{jr}^z(\theta_{11}) c_r - \frac{\theta_{11}^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) \left(\sum_{r=1}^{v-1} a_{jr}^y(\theta_{11}) c_r - \frac{\theta_{11}^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) \left(\sum_{r=1}^{v-1} a_{jr}^y(\theta_{11}) c_r - \frac{\theta_{11}^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) \left(\sum_{r=1}^{v-1} a_{jr}^z(\theta_{11}) c_r - \frac{\theta_{11}^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) \left(\sum_{r=1}^{v-1} a_{jr}^z(\theta_{11}) c_r - \frac{\theta_{11}^2}{2} \right) = 0, \\
& m = 1, \dots, s^*, \quad l = 1, \dots, s^*, \quad k = 1, \dots, s^* \\
& \theta \in [0, 1], \quad \theta_1 \in [0, c_m], \quad \theta_{11} \in [0, c_m], \quad \theta_2 \in [0, c_l], \quad \theta_3 \in [0, c_k]
\end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай системы, когда функции f и g не зависят от z_t .

$$\begin{cases} y'(t) = f(y_t, z(t)), \\ z'(t) = g(y_t, z(t)). \end{cases}$$

В таком случае для переменной z не будет существовать понятия перекрытия, т.е. вместо $a_{ij}^z(\theta_m)$ будут обычные коэффициенты a_{ij}^z .

4.2.3 Метод для уравнений второго порядка

Рассматриваемую систему второго порядка $y''(t) = f(y_t, y'(t))$ можно представить в виде эквивалентной системы уравнений первого порядка. Она будет частным случаем системы общего вида из параграфа 4.2.2 с определенного вида функциями $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$.

$$\begin{cases} y'(t) = z(t), \\ z'(t) = g(y_t, z(t)). \end{cases}$$

Положим начальные условия $y(t) = \varphi(t), z(t) = \varphi'(t) = \psi(t)$, при $t < t_0$.

Данная система является еще большим сужением частного случая системы из предыдущего параграфа, а точнее функция $f(\cdot)$ имеет вид $f(y_t, z(t)) = z(t)$.

Можно переписать условия из параграфа 4.2.2, при этом учитывая $\frac{df}{dy} = 0$, $\frac{df}{dz} = 1$. Воспользуемся для вывода условий порядка графическом представлении дифференциалов функций - деревьями.

Особый вид функции $f(\cdot)$ вводит ряд условий на построение деревьев.

1. любая черная вершина может иметь только одну последующую,
2. после черной вершины следующая должна быть белой.

Можно убедиться, что деревья для рассматриваемой системы имеют такой же вид, что и для системы из пункта 4.1.3, но с несколько иным представлением о переменных a_{ij}^y , а именно белой вершине, не являющейся корнем или листом, будет соответствовать коэффициент a_{ij}^z , а черной вершине, не являющейся корнем или листом, соответствует коэффициент $a_{ij}^y(\theta)$ метода. Учтем этот факт и выпишем условия порядка до пятого включительно.

1	$\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) = \theta, \quad \theta \in [0, 1],$
2	$\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta)c_i = \frac{\theta^2}{2}, \quad \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta)c_i = \frac{\theta^2}{2}, \quad \theta \in [0, 1],$
3	$\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta)c_i^2 = \frac{\theta^3}{3}, \quad \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1)c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0,$
	$\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j = \frac{\theta^3}{6}, \quad m = 1, \dots, s^*, \quad \theta \in [0, 1] \quad \theta_1 \in [0, c_m]$
	$\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j = \frac{\theta^3}{6},$

4

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i^3 = \frac{\theta^4}{4}, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) c_v \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j = \frac{\theta^4}{8}, \\
& \sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j^2 = \frac{\theta^4}{12}, \\
& \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j^2 = \frac{\theta^4}{12}, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r - \frac{\theta_1^3}{6} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_1) c_r - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_1) c_r - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r = \frac{\theta^4}{24}, \\
& \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r = \frac{\theta^4}{24}, \\
& m = 1, \dots, s^*, \quad \theta \in [0, 1], \quad \theta_1 \in [0, c_m]
\end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i^4 = \frac{\theta^5}{5}, \\
& \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j^2 = \frac{\theta^5}{15}, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) c_v^2 \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j = \frac{\theta^5}{10}, \\
& \sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j^3 = \frac{\theta^5}{20}, \\
& \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j^3 = \frac{\theta^5}{20}, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) c_v \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r - \frac{\theta_1^3}{6} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) c_v \sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_1) c_r - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r = \frac{\theta^5}{30}, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \sum_{\substack{j \in i_i \\ j \leq v-1}} a_{vj}^y(\theta_1) \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z \left(\sum_{w=1}^{r-1} a_{rw}^y(\theta_2) c_w - \frac{\theta_2^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z \sum_{w=1}^{r-1} a_{rw}^z c_w - \frac{\theta_1^4}{24} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_1) \sum_{w=1}^{r-1} a_{rw}^z c_w - \frac{\theta_1^3}{6} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_1) \sum_{w=1}^{r-1} a_{rw}^z c_w - \frac{\theta_1^3}{6} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z \left(\sum_{w=1}^{r-1} a_{rw}^y(\theta_1) c_w - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z \left(\sum_{w=1}^{r-1} a_{rw}^y(\theta_1) c_w - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0, \\
& \sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z \sum_{v=1}^{r-1} a_{rv}^z c_v = \frac{\theta^5}{120}, \\
& \sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z \sum_{v=1}^{r-1} a_{rv}^z c_v = \frac{\theta^5}{120},
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r^2 - \frac{\theta_1^4}{12} \right) = 0, \\
\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r^2 = \frac{\theta^5}{60}, \\
\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r^2 = \frac{\theta^5}{60}, \\
\sum_{v \in i_m} b_v^y(\theta) \sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z c_j \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_1) c_r - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0, \\
\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^z c_j \left(\sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^y(\theta_1) c_r - \frac{\theta_1^2}{2} \right) = 0, \\
\sum_{i=1}^s b_i^y(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r = \frac{\theta^5}{40}, \\
\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr}^z c_r = \frac{\theta^5}{40}, \\
\sum_{i=1}^s b_i^z(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z c_j \sum_{r=1}^{i-1} a_{ir}^z c_r = \frac{\theta^2}{2}, \\
\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^5}{2} \right) \left(\sum_{r=1}^{i-1} a_{ir}^z c_r - \frac{\theta^2}{2} \right) = 0, \\
\sum_{v \in i_m} b_v^z(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} a_{vj}^y(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^5}{2} \right) \left(\sum_{r=1}^{v-1} a_{vr}^y(\theta_2) c_r - \frac{\theta_2^5}{2} \right) = 0. \\
m = 1, \dots, s^*, \quad l = 1, \dots, s^*, \quad \theta \in [0, 1], \\
\theta_{11} \in [0, c_m], \quad \theta_1 \in [0, c_m], \quad \theta_2 \in [0, c_l]
\end{array}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\sum a_{ij}^y(\theta_m) \sum a_{jv}^z &= \sum \bar{a}_{ij}(\theta_m), & \sum a_{ij}^y(\theta_m) c_j &= \sum \bar{a}_{ij}(\theta_m), \\
\sum b_i^y(\theta) \sum a_{ij}^z &= \sum \bar{b}_i(\theta), & \sum b_i^y(\theta) c_i &= \sum \bar{b}_i(\theta), \\
\sum b_i^z(\theta) &= b_i(\theta)
\end{aligned}$$

Будем предполагать, что выполнены упрощающие предположения:

$$\sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij}(\theta_m) = \frac{\theta_m^2}{2}, \quad \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^z = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i$$

Тогда поддереву $\not\downarrow$, стоящему вначале дерева, будет соответствовать коэффициент \bar{b}_i , а такому же поддереву в середине дерева будет соответствовать коэффициент $\bar{a}_{ij}(\theta_1)$. Можно отметить, что все деревья, имеющие в листе такое поддерево, сводятся к предыдущим и упраздняются.

Тогда условия порядка выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{l|l}
1 & \sum_{i=1}^s b_i(\theta) = \theta, \quad \theta \in [0, 1], \\
2 & \sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) = \frac{\theta^2}{2}, & \sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i = \frac{\theta^2}{2}, \quad \theta \in [0, 1], \\
3 & \sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^2 = \frac{\theta^3}{3}, & \sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{\theta^3}{6},
\end{array}$$

	$\sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) c_i = \frac{\theta^3}{6}, \quad \theta \in [0, 1],$
4	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^3 = \frac{\theta^4}{4},$ $\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{\theta^4}{8},$ $\sum_{s=1}^s \bar{b}_s(\theta) c_s^2 = \frac{\theta^4}{12},$ $\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^2 = \frac{\theta^4}{12},$ $\sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} \bar{a}_{vj}(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^3}{6} \right) = 0,$ $\sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{\theta^4}{24},$ $\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r = \frac{\theta^4}{24},$ $m = 1, \dots, s^*, \quad \theta \in [0, 1], \quad \theta_1 \in [0, c_m]$
5	$\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^4 = \frac{\theta^5}{5},$ $\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^2 = \frac{\theta^5}{15},$ $\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{\theta^5}{10},$ $\sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) c_i^3 = \frac{\theta^5}{20},$ $\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^3 = \frac{\theta^5}{20},$ $\sum_{v \in i_m} b_v(\theta) c_v \left(\sum_{j=1}^{v-1} \bar{a}_{vj}(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^3}{6} \right) = 0,$ $\sum_{i=1}^s b_i(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r = \frac{\theta^5}{30},$ $\sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} \bar{a}_{vj}(\theta_1) \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r - \frac{\theta_1^4}{24} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} \bar{b}_v(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} \bar{a}_{vj}(\theta_1) c_j - \frac{\theta_1^3}{6} \right) = 0,$ $\sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \sum_{j=1}^{v-1} a_{vj} \left(\sum_{r=1}^{j-1} \bar{a}_{jr}(\theta_1) c_r - \frac{\theta_1^3}{6} \right) = 0,$ $\sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r = \frac{\theta^5}{120},$ $\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} \sum_{v=1}^{r-1} a_{rv} c_v = \frac{\theta^5}{120},$ $\sum_{v \in i_m} b_v(\theta) \left(\sum_{j=1}^{v-1} \bar{a}_{vj}(\theta_1) c_j^2 - \frac{\theta_1^4}{12} \right) = 0,$ $\sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j^2 = \frac{\theta^5}{60},$ $\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r^2 = \frac{\theta^5}{60},$ $\sum_{i=1}^s \bar{b}_i(\theta) c_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j = \frac{\theta^5}{40},$ $\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j \sum_{r=1}^{j-1} a_{jr} c_r = \frac{\theta^5}{40},$ $\sum_{i=1}^s b_i(\theta) \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} c_j \sum_{r=1}^{i-1} a_{ir} c_r = \frac{\theta^2}{2},$ $m = 1, \dots, s^*, \quad \theta \in [0, 1], \quad \theta_1 \in [0, c_m]$

Глава 5. Практическая реализация

Практическая часть работы заключается в решении выведенных условий порядка, дальнейшее получение одного метода из семейства допустимых методов, путем фиксирования свободных параметров, и дальнейшая проверка, что полученный метод действительно имеет указанный порядок.

5.1 Примеры построенных методов

В данном разделе приводятся примеры ФНРК для дифференциальных уравнений второго порядка (1.5). Под методом здесь имеем ввиду (3.2), для которого находим частный случай заполнения таблицы коэффициентов Бутчера Таблицы 3.

Коэффициенты метода определяются из уравнений порядка (4.5) с некоторой степенью свободы. Ввиду вычислительной сложности решения уравнений высоких порядков и недостаточности вычислительных ресурсов, общие схемы методов не представлены в работе, но с использованием машин высокой производительности данное действие представляется незатруднительным.

Коэффициент c_2 намеренно был выбран равным 1, так как этот факт говорит о том, что при построении интерполяции учитывается первый и второй этап. Допущение дает преимущество, не увеличивая ошибку интерполяции.

Решение уравнений порядка и получение коэффициентов метода производилось в среде Maple 2016 с использованием стандартных методов решения нелинейных алгебраических уравнений.

5.1.1 ФНРК первого порядка

Для получения метода первого порядка достаточно одного этапа, так как это соответствует линейной аппроксимации. В приближении первого порядка не

появляется функциональная непрерывность, так как недостаточно количества этапов, однако даже при таком методе порядок один будет обеспечен.

$$\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline & \theta & \theta \end{array}$$

5.1.2 ФНРК второго порядка

Метод второго порядка может быть построен с минимальным количеством этапов — 2.

$$\begin{array}{c|c|c|c} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \frac{\theta^2}{2} \\ \hline & -\frac{1}{2}\theta^2 + \theta + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2} & \frac{\theta^2}{2} \quad 0 \end{array}$$

5.1.3 ФНРК третьего порядка

Метод третьего порядка с тремя этапами построить не удастся. А при $s = 4$ и введении некоторых ограничений на свободные параметры получен следующий метод:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \frac{1}{2}\theta^2 & \\ 0.5 & 0.5961 & -0.0961 & & & & \frac{1}{2}\theta^2 - \theta & \theta \\ 1 & -0.0256 & -0.6410 & 0.2 & & & -\frac{1}{2}\theta^2 - \theta & \theta^2 & \theta \\ \hline & b_1(\theta) & b_2(\theta) & b_3(\theta) & b_4(\theta) & & \bar{b}_1(\theta) & \bar{b}_2(\theta) & \bar{b}_3(\theta) & \bar{b}_4(\theta) \end{array}$$

$$\begin{aligned} b_1(\theta) &= \frac{2}{3}\theta^3 - \frac{3}{2}\theta^2 + \theta \\ b_2(\theta) &= -\frac{1}{3}\theta^3 - \frac{1}{2}\theta^2 \\ b_3(\theta) &= 2\theta^2 - \frac{4}{3}\theta \\ b_4(\theta) &= \frac{1}{5}\theta^3 + \theta^2 \\ \bar{b}_1(\theta) &= -\frac{1}{3}\theta^3 + \frac{1}{2}\theta^2 + 2\theta \\ \bar{b}_2(\theta) &= \theta \\ \bar{b}_3(\theta) &= \frac{1}{3}\theta^3 - 4\theta \\ \bar{b}_4(\theta) &= \theta \end{aligned}$$

5.1.4 ФНРК четвертого порядка

Метод порядка четыре может быть построен с минимальным количеством этапов $s = 6$.

Таблица 5.1: Таблица коэффициентов метода ФНРК2 порядка 4

0											
1	1					$\bar{a}_{21}(\theta)$					
0.5	0.375	0.125				$\bar{a}_{31}(\theta)$	$\bar{a}_{32}(\theta)$				
0.2	0.204	0.044	-0.048			$\bar{a}_{41}(\theta)$	$\bar{a}_{42}(\theta)$	$\bar{a}_{43}(\theta)$			
1	-0.5	-0.5	2	0							
1	0.1667	0	-0.6667	0	0.1667	$\bar{a}_{51}(\theta)$	$\bar{a}_{52}(\theta)$	$\bar{a}_{53}(\theta)$	$\bar{a}_{54}(\theta)$		
	$b_1(\theta)$	$b_2(\theta)$	$b_3(\theta)$	$b_4(\theta)$	$b_5(\theta)$	$b_6(\theta)$	$\bar{a}_{61}(\theta)$	$\bar{a}_{62}(\theta)$	$\bar{a}_{63}(\theta)$	$\bar{a}_{64}(\theta)$	$\bar{a}_{65}(\theta)$
	$\bar{b}_1(\theta)$	$\bar{b}_2(\theta)$	$\bar{b}_3(\theta)$	$\bar{b}_4(\theta)$	$\bar{b}_5(\theta)$	$\bar{b}_6(\theta)$					

$$b_1(\theta) = -2.5\theta^4 + 5.6667\theta^3 - 4\theta^2$$

$$b_2(\theta) = 0$$

$$b_3(\theta) = -3.3333\theta^4 + 5.3333\theta^3 - 1.3333\theta^2$$

$$b_4(\theta) = 5.2083\theta^4 - 10.4167\theta^3 + 5.2083\theta^2$$

$$b_5(\theta) = -0.375\theta^4 + 0.4167\theta^3 + 0.125\theta^2$$

$$b_6(\theta) = \theta^4 - \theta^3$$

$$\bar{b}_1(\theta) = 0.5 * \theta^2 - 0.5 * \theta^3 - 0.48 * \theta + 0.1667 * \theta^4$$

$$\bar{b}_2(\theta) = 0$$

$$\bar{b}_3(\theta) = 0.6667 * \theta^3 - 0.64 * \theta - 0.3333 * \theta^4$$

$$\bar{b}_4(\theta) = \theta$$

$$\bar{b}_5(\theta) = 0.1667 * \theta^4 - 0.1667 * \theta^3 + 0.12 * \theta$$

$$\bar{b}_6(\theta) = 0$$

$$\bar{a}_{21}(\theta) = 0.5\theta^2$$

$$\bar{a}_{31}(\theta) = 0.5\theta^2 - \theta$$

$$\bar{a}_{32}(\theta) = \theta$$

$$\bar{a}_{41}(\theta) = 0.5\theta^2 - 2\theta$$

$$\bar{a}_{42}(\theta) = \theta$$

$$\bar{a}_{43}(\theta) = \theta$$

$$\bar{a}_{51}(\theta) = -0.5\theta^2 - \theta^3 - \theta$$

$$\bar{a}_{52}(\theta) = \theta^2$$

$$\bar{a}_{53}(\theta) = \theta^3 - \theta$$

$$\bar{a}_{54}(\theta) = 2\theta$$

$$\bar{a}_{61}(\theta) = 0.5\theta^2 - 0.5\theta^3 - 0.48\theta + 0.1667\theta^4$$

$$\bar{a}_{62}(\theta) = 0$$

$$\bar{a}_{63}(\theta) = 0.6667 * \theta^3 - 0.64 * \theta - 0.3333 * \theta^4$$

$$\bar{a}_{64}(\theta) = \theta$$

$$\bar{a}_{65}(\theta) = 0.1667\theta^4 - 0.1667\theta^3 + 0.12\theta$$

5.1.5 ФНРК пятого порядка

Группа условий пятого порядка разрешается с 8 этапами при обнулении коэффициентов $b_2, b_3, b_4, a_{82}, a_{72}, a_{62}$.

5.2 Проверка на тестовых задачах

Проверка порядка метода реализована на языке программирования Python. Код программы помещен в приложение.

Для проверки порядка было проведено два теста на различных функциях второго порядка:

$$y''(t) = \left(y'(t) * y\left(\frac{t}{(1+2t)^2}\right) \right)^{\frac{(1+2t)^2}{1+(1+2t)^2}}, \quad t \geq 0, \quad (5.1)$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Точное решение для функции (5.1) на интервале $0 \leq t \leq 1$: $y(t) = y'(t) = e^t$, $t \geq 0$.

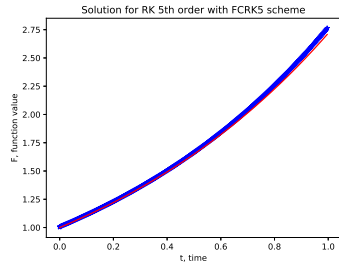
$$y''(t) = y(t - y^{10}(t)) e^{y^5(t) * (y'(t))^5}, \quad t \geq 0, \quad (5.2)$$
$$y(t) = e^{-t}, \quad t \leq 0,$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Точное решение для функции (5.2) на интервале $0 \leq t \leq 1$: $y(t) = e^{-t}$, $y'(t) = -e^{-t}$, $t \geq 0$.

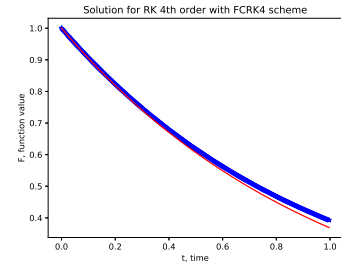
Под проверкой порядка метода имеется ввиду реализация метода при разных значениях шага h и проверка, что при уменьшении шага h в 2 раза величина ошибки e уменьшится в 2^p раз.

Результаты сходимости для первого теста: точное и приближенное значения для разной величины шага и ошибки.

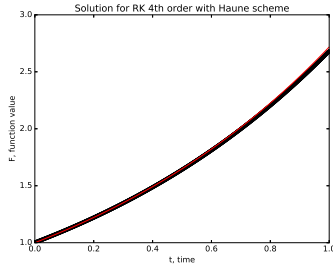
Результаты сходимости для второго теста: точное и приближенное значения для разной величины шага и ошибки.



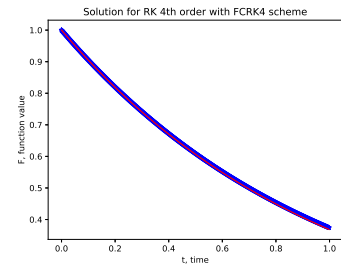
a-1)



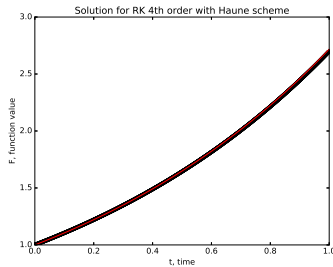
a-2)



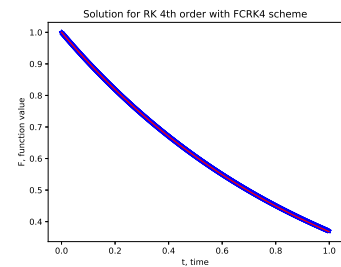
б-1)



б-2)

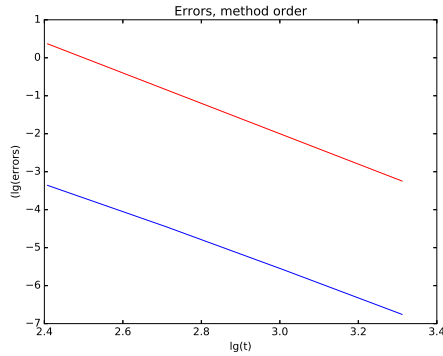


в-1)

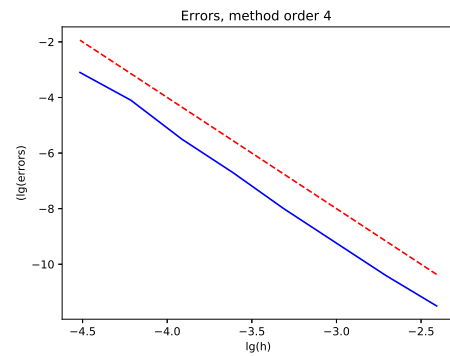


в-2)

Рис. 5.1: График пунктирной линией — аналитическое решение, сплошной — приближенное, построенное по методу (3.2) с коэффициентами из таблицы 5.1 4-го порядка. Приближенное решение вычислено для шагов: а) $h = \frac{1}{28}$, б) $h = \frac{1}{210}$, в) $h = \frac{1}{210}$, г) $h = \frac{1}{212}$ для задач 5.1 и 5.2 соответственно.

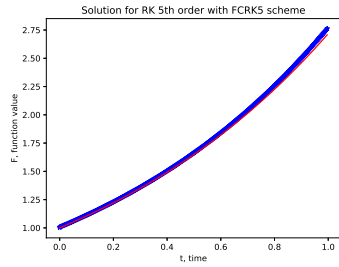


1)

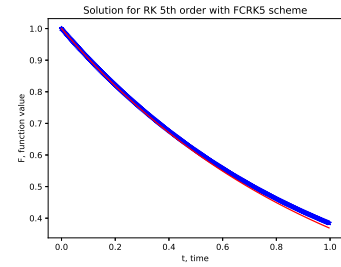


2)

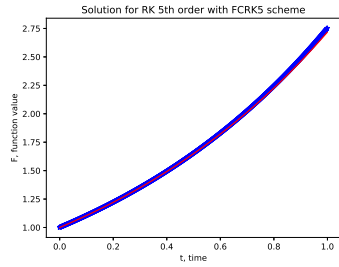
Рис. 5.2: График ошибок при уменьшении шага для задач 5.1 и 5.2 соответственно.



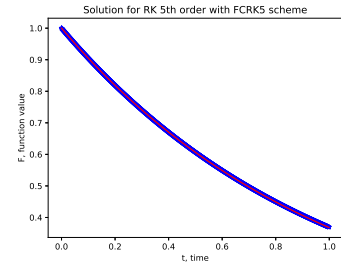
a-1)



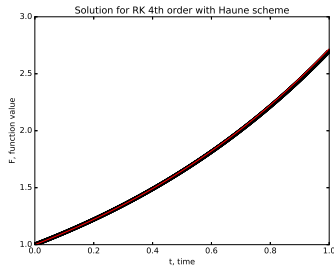
a-2)



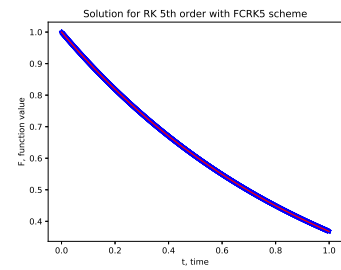
б-1)



б-2)

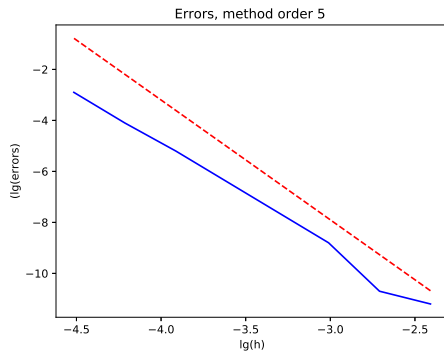


в-1)

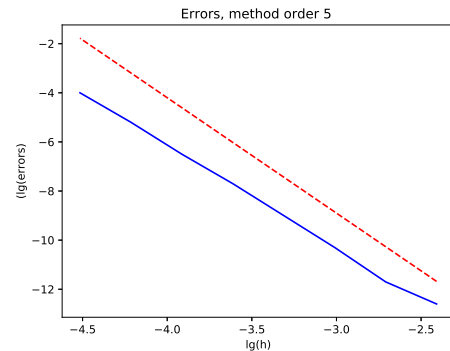


в-2)

Рис. 5.3: График пунктирной линией — аналитическое решение, сплошной — приближенное, построенное по методу (3.2) с коэффициентами из таблицы 5.2 5-го порядка. Приближенное решение вычислено для шагов: а) $h = \frac{1}{2^8}$, б) $h = \frac{1}{2^{10}}$, в) $h = \frac{1}{2^{10}}$, г) $h = \frac{1}{2^{12}}$ для задач 5.1 и 5.2 соответственно.



1)



2)

Рис. 5.4: График ошибок при уменьшении шага для задач 5.1 и 5.2 соответственно.

Выводы

В параграфе 5.1 из условий для ФНРК2 было получено по одному методу для каждого порядка. Графики из параграфа 5.2 свидетельствуют о том, что требуемый порядок метода достигается. Этот факт является основным результатом работы.

Сравнивая параметры метода ФНРК2 (количество этапов, количество условий порядка, наличие свободных коэффициентов, скорость нахождения решения условий порядка) с системой первого порядка, увидим, что данный метод обладает преимуществом по большинству параметров.

Таблица 5.3: Количество уравнений — условий на коэффициенты метода для получения решения требуемого порядка.

порядок	1	2	3	4	5
ФНРК для системы 1-го порядка	2	2	6	18	35
ФНРК для уравнения 2-го порядка	1	1	3	7	18

Меньшее количество уравнений достигнуто простым видом функции $g_1(\cdot)$ из (2.1) и исключением условий, заведомо выполняемых при требовании меньших порядков метода.

Меньшее количество условий порядка дает большую степень свободы для метода. Фиксирование некоторых свободных параметров, например, коэффициентов $c_i, i = 1, \dots, s$, или предопределение вида полиномов некоторых коэффициентов $b_i, i = 1, \dots, s$, позволяет вычислить оставшиеся коэффициенты быстрее, чем для системы уравнений первого порядка, а также, очевидно, ресурсо-эффективнее.

Количество этапов определяет множество коэффициентов метода. Для уравнения второго порядка в силу появления большей степени свободы метода можно уменьшить число неизвестных путем понижения количества этапов.

Результаты числа этапов, выведенных эмперически, представлены в следующей таблице.

Видно, что удалось решить уравнение второго порядка с меньшим количеством этапов, чем для системы уравнений первого порядка. Меньшее ко-

Таблица 5.4: Минимальное количество этапов для разрешения условий порядка.

порядок	1	2	3	4	5
ФНРК для системы 1-го порядка	2	4	6	8	12
ФНРК для уравнения 2-го порядка	1	2	3	5	8

личество этапов является преимуществом, потому что при вычислении коэффициентов K_i метода типа РК значение функции $f(\cdot)$ вычисляется меньше количество раз, поэтому реализация метода на практике будет считать итерацию для получения новой точки y_n за меньшее время.

Полученные методы ФНРК2 порядков 2 – 5 не только удовлетворяют требованиям поставленной задачи, но и являются более эффективными по сравнению с общим случаем по количеству уравнений, количеству степеней свободы метода, быстродействию, количеству этапов.

Заключение

Поставленные цели данной работы достигнуты:

1. метод Рунге—Кутты для уравнений второго порядка запаздывающего типа построен в главе 3;
2. достаточные уравнения порядка (для пятого порядка включительно) выведены и обоснованы в главе 4;
3. уравнения порядка разрешены и получены коэффициенты метода — параграф 5.1;
4. проведена проверка метода на достижение требуемого порядка — параграф 5.2;
5. сформулированы выводы и преимущества перед системой уравнений первого порядка.

Литература

- [1] Хайпер Э., Нёрсет С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
- [2] Bellen A., Zennaro M. Numerical Method for Delay Differential Equations. Oxford: Clarendon press, 2003. 395 p.
- [3] Maset S., Torelli L., Vermiglio R. Runge-Kutta methods for retarded functional differential equations // Mathematical model and methods in applied sciences. Montreal: World scientific publishing company, 2005. P. 1203–1251.
- [4] Eremin A.S., Olemskoy I.V. Functional continuous Runge–Kutta methods for special systems. ICNAAM proc., 2015.
- [5] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
- [6] Eremin A.S. Functional continuous Runge-Kutta-Nystrom methods // Proc. 10th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ. Szeged, Hungary, 2015. P. 1-17.
- [7] Bellen A., Maset S., Zennaro M. Recenr trends in the numerical solution of retarded functional differential equations // Acta numerica. UK, 2009. P 1–110.
- [8] Butcher J.C., Chan T.M.H. The tree forest spaces with applications to initial-value problem methods // BIT Numer Math, 2010. P. 713–728.
- [9] Современные численные методы обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж.Холл и Жд.Уатт. М.: Мир, 1979. 312 с.
- [10] Bornemann F. Runge-Kutta methods, trees, and maple. On a simple proof of butcher’s theorem and the automatic generation of order conditions // Selzuk journal of applied mathematics, 2001. P. 3–15.

- [11] Kutta M. W. Beitrag zur Naherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen. *Mathematical Physics*, Vol. 46, 1901. P. 435–453.
- [12] Nyström E. J. Über die numerische Integration von Differentialgleichungen. *Acta Soc. Sci. Fennicae*, v. 50, 1925. P. 1–55.
- [13] Erneux T. *Applied delay differential equations*. Springer, 2009.
- [14] Smith H. *An introduction to delay differential equations with applications*. Springer, 2011.
- [15] Tavernini L. One-step methods for the numerical solution of Volterra functional differential equations. *SINUM*, 1971.
- [16] Maset S., Torelli L., Vermiglio R. *RK methods for RFDE*. MMMAS, 2005.

Приложения

Приложение 1. Программа для решения уравнений порядка и получения коэффициентов метода.

Код программы, разрешающей условия пятого порядка. Отсюда очевидно можно получить коэффициенты методов меньших порядков.

```
> restart: interface(rtablesize=10):
> s := 8; p := 5;
OCN := [1,1,2,4,9,20,48];

> # Задаём матрицы
Ab := Matrix(s,s,(i,j)->ab[i,j]): # A с чертой
Bb := Vector(s,i->bb[i]): # B с чертой
A := Matrix(s,s,(i,j)->a[i,j]):
B := Vector(s,i->b[i]):
C := Vector(s,i->c[i]):

> # Условия явности методов
C[1] := 0;
C[2] := 1;
C[3] := 1/2;
C[4] := 0.20;
C[5] := 0.24;
C[8] := 1;
for i from 1 to s do
for j from i to s do
    A[i,j] := 0;
    Ab[i,j] := 0;
od;
od;

> # Задаём B как функции от тета
for i from 1 to s do
    B[i] := add(b[i,j]*theta^j,j=1..p);
od;
B[2] := 0;
B[3] := 0;
A[s,2] := 0;
A[s-1,2] :=0;
A[s-2,2] :=0;
A[s-3,2] :=0;

> # Условия порядка для части метода без черт
UniOrdCond|0 := seq(C[r]=add(A[r,w]*C[w],w=1..s),r=2..s); # Условия 1-го
этапного порядка
UOC1[1] := add(B[r],r=1..s) - theta;
UOC2[1] := add(B[r]*C[r],r=1..s) - theta^2/2;
UOC3[1] := add(B[r]*C[r]^2,r=1..s) - theta^3/3;
UOC3[2] := add(B[r]*add(A[r,w]*C[w],w=1..s),r=1..s) - theta^3/6;
UOC4[1] := add(B[r]*C[r]^3,r=1..s) - theta^4/4;
UOC4[2] := add(B[r]*C[r]*add(A[r,w]*C[w],w=1..s),r=1..s) - theta^4/8;
UOC4[3] := add(B[r]*add(A[r,w]*C[w]^2,w=1..s),r=1..s) - theta^4/12;
```

```

UOC4[4] := add(B[r]*add(A[r,w]*add(A[w,r1]*C[r1],r1=1..s),w=1..s),
  r=1..s) - theta^4/24;
UOC5[1] := add(B[r]*C[r]^4,r=1..s) - theta^5/5;
UOC5[2] := add(B[r]*C[r]*add(A[r,w]*C[w]^2,w=1..s),r=1..s) -
  theta^5/15;
UOC5[3] := add(B[r]*C[r]^2*add(A[r,w]*C[w],w=1..s),r=1..s) -
  theta^5/10;
UOC5[4] := add(B[r]*C[r]*add(A[r,w]*add(A[w,v]*C[v],v=1..s),w=1..s),
  r=1..s) - theta^5/30;
UOC5[5] := add(B[r]*add(A[r,w]*C[w]^3, w=1..s),r=1..s) - theta^5/20;
UOC5[6] := add(B[r]*add(A[r,w]*add(A[w,r1]*add(A[r1,r2]*C[r2],
  r2=1..s),r1=1..s),w=1..s),r=1..s) - theta^5/120;
UOC5[7] := add(B[r]*add(A[r,w]*add(A[w,r1]*C[r1]^2, r1=1..s),
  w=1..s),r=1..s) - theta^5/60;
UOC5[8] := add(B[r]*add(A[r,w]*C[w]*add(A[w,r1]*C[r1], r1=1..s),
  w=1..s),r=1..s) - theta^5/40;
UOC5[9] := add(B[r]*add(A[r,w]*C[w],w=1..s)*add(A[r,r1]*C[r1],
  r1=1..s),r=1..s) - theta^5/20;

> for i from 1 to p do
  UniOrdCond||i := seq(seq(coeff(UOC||i[w],theta^r),r=1..p),
  w=1..OCN[i]);
od;

> # Надо решить теперь все UniOrdCond||i
eqs:=[UniOrdCond||0, UniOrdCond||1, UniOrdCond||2, UniOrdCond||3,
  UniOrdCond||4, UniOrdCond||5];

> # Обязательно все b(1) должны быть > 0.
> res_asm := (solve(eqs) assuming seq(add(b[i, j] , j=1..s)> 0,
  i=1..s)) [1]

> res_asm_2 := subs[eval]([c[7]=1/32, b[6,2]=1, b[6,3]=1, b[6,4]=1,
  a[3,2]=0.1, a[7,6]=0.5, a[8,6]=0.5, a[8,7]=0.5], res_asm);

> # Выделяем множества номеров, для которых коэффициенты с равные.
isets:={{1, 6}, {2, 8}, {3}, {4}, {5}, {7}};
for i from 1 to numelems(isets) do
  ii[i] := convert(op(i, isets), list);
od;

> # Через CD и AD далее обозначены найденные выше C и A
(они относятся к дискретной части метода, потому D)
# Условия для части метода с чертами
UniOrdCondB||0:= Bb[2] = 0,Bb[3]=0, seq(CD[i]=C[i], i=1..s);
UniOrdCondB||1 := seq(add(Ab[r,w],w=1..r-1)=theta^2/2,r=2..s); #
  Второй этапный порядок
UniOrdCondB||2 := add(Bb[r],r=1..s) = theta^2/2;
UniOrdCondB||3 := add(Bb[r]*CD[r],r=2..s) = theta^3/6;
UniOrdCondB||4 := add(Bb[r]*CD[r]^2,r=2..s) = theta^4/12,
  add(Bb[r]*add(AD[r,w]*CD[w],w=2..r-1),r=2..s) =
  theta^4/24,
  seq(add(Ab[r, w]*CD[w], w=2..r-1)=theta^3/6,
  r=3..s);
UniOrdCondB||5 := add(Bb[r]*CD[r]^3,r=2..s) = theta^5/20,
  add(Bb[r]*add(AD[r,w]*add(AD[w,ww]*CD[ww],
  ww=2..w-1),w=3..r-1),r=4..s) = theta^5/120,

```

```

        add(Bb[r]*add(AD[r,w]*CD[w]^2,w=2..r-1),r=3..s) =
theta^5/60,
        add(Bb[r]*CD[r]*add(AD[r,w]*CD[w],w=2..r-1),
r=3..s) = theta^5/40,
        seq(add(BD[r]*add(Ab[r,w]*CD[w]^2,w=2..s-1) -
theta^4/12,r=ii[t])=0, t=1..numelems(ii)),
        seq(add(BD[r]*CD[r]*add(Ab[r,w]*CD[w],w=2..s-1) -
theta^3/6,r=ii[t])=0, t=1..numelems(ii)),
        seq(add(BD[r]*(add(Ab[r,w]*add(AD[w,ww]*CD[ww],
ww=1..s-2), w=2..s-1)-theta^4/24), r=ii[t])=0, t=1..numelems(ii)),
        seq(add(Bb[r]*(add(Ab[r,w]*CD[w],w=2..s-1) -
theta^3/6), r=ii[t])=0, t=1..numelems(ii)),
        seq(add(BD[r]*add(AD[r,w]*(add(Ab[w,ww]*CD[ww],
ww=2..s-1)-theta^3/6), w=2..s-1), r=ii[t])=0, t=1..numelems(ii));

> # FSAL для этого случая
FCB := seq(Ab[s,r] = Bb[r],r=1..s-1);
eqs2:=[UniOrdCondB||0, UniOrdCondB||1, UniOrdCondB||2,
UniOrdCondB||3, UniOrdCondB||4, UniOrdCondB||5];

> # Теперь ищем решение для второй части
res2 := solve(eqs2) [1]

> res2_new := subs[eval]([c[6]=0, c[7]=0.03125, AD[3,2]=0.1,
AD[4,2]=-0.0147, AD[4,3]=0.0693, AD[5, 2]=0, AD[5,3]=-0.0079,
AD[5,4]=0.1632, AD[6,2]=0, AD[6,3]=1.0465, AD[6,4]=17.0047,
AD[6,5]=-16.3507, AD[7,2]=0, AD[7, 3]=-0.0684, AD[7,4]=-1.0979,
AD[7,5]=1.0594, AD[7,6]=0.5, AD[8,2]=0, AD[8,3]=211.6059,
AD[8,4]=3411.5217, AD[8,5]=-3281.7621, AD[8,6]=0.5, AD[8,7]=0.5,
bb[6]=theta, bb[7]=theta, ab[5,2]=theta^2 - theta,
ab[6,2]=theta^3 + theta,ab[6,3]=theta,
ab[7,2]=theta^5+theta^3+0.5*theta,
ab[7,3]=theta^5-4.5*theta, ab[7,6]=theta^2+theta, ab[8,2]=0,
ab[8,3]=theta^2+theta, ab[8,6]=theta,
ab[8,7]=theta^4+theta^2-0.48*theta], res2);

```

Приложение 2. Программа для реализации полученного метода с проверкой порядка сходимости.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import exp

__author__ = "Irina Achkasova"

def fcrk4_scheme():
    AD = [[0] * 6, [1] + ([0] * 5), [0.375, 0.125] + ([0] * 4), [0.204, 0.044, -0.048] + ([0] * 3),
          [-0.5, -0.5, 2, 0] + ([0] * 2), [0.1667, 0, 0.6667, 0, 0.1667, 0]]

    Ab = lambda l_a: (
        [[0] * 6,
         [0.5 * l_a ** 2] + ([0] * 5),
         [0.5 * l_a ** 2 - l_a, l_a] + ([0] * 4),
         [0.5 * l_a ** 2 - 2 * l_a, l_a, l_a] + ([0] * 3),

```

```

[-l_a ** 3 - 0.5 * l_a ** 2 - l_a, l_a ** 2, l_a ** 3 - l_a, 2 * l_a] + ([0] * 2),
[-0.5 * l_a ** 3 + 0.5 * l_a ** 2 - 0.48 * l_a + 0.1667 * l_a ** 4, 0,
0.6667 * l_a ** 3 - 0.64 * l_a - 0.3333 * l_a ** 4, l_a, 0.12 * l_a - 0.1667 * l_a ** 3 + 0.1667 * l_a ** 4,
0]])
c = [0, 1, 0.5, 0.2, 1, 1]
BD = lambda l_bd: [-2.5 * l_bd ** 4 + 5.6667 * l_bd ** 3 - 4 * l_bd ** 2, 0,
-3.3333 * l_bd ** 4 + 5.3333 * l_bd ** 3 - 1.3333 * l_bd ** 2,
5.2083 * l_bd ** 4 - 10.4167 * l_bd ** 3 - 5.2083 * l_bd ** 2,
-0.375 * l_bd ** 4 + 0.4167 * l_bd ** 3 + 0.125 * l_bd ** 2,
l_bd ** 4 - l_bd ** 3]
Bb = lambda l_bb: [-0.5 * l_bb ** 3 + 0.5 * l_bb ** 2 - 0.48 * l_bb + 0.1667 * l_bb ** 4, 0,
0.6667 * l_bb ** 3 - 0.64 * l_bb - 0.3333 * l_bb ** 4, l_bb,
0.12 * l_bb - 0.1667 * l_bb ** 3 + 0.1667 * l_bb ** 4, 0]
return Ab, Bb, c, AD, BD

```

```
def fcrk5_scheme():
```

```

AD = [[0] * 8, [1] + ([0] * 7), [0.4, 0.1] + ([0] * 6), [0.1453, -0.0147, 0.0693] + ([0] * 5),
[0.0845, 0, -0.0079, 0.1632] + ([0] * 4), [-1.7005, 0, 1.0465, 17.0047, -16.3507] + ([0] * 3),
[-0.3619, 0, -0.0684, -1.0979, 1.0594, 0.5] + ([0] * 2),
[-341.3654, 0, 211.6059, 3411.5217, -3281.7621, 0.5, 0.5, 0]]

```

```
Ab = lambda l_a: (
```

```

[[0] * 8,
[0.5 * l_a ** 2] + ([0] * 7),
[-0.1667 * l_a ** 3 + 0.5 * l_a ** 2, 0.1667 * l_a ** 3] + ([0] * 6),
[0.1667 * l_a ** 4 - 0.5 * l_a ** 3 + 0.5 * l_a ** 2, 0.1667 * l_a ** 4 - 0.1667 * l_a ** 3,
-0.3333 * l_a ** 4 + 0.6667 * l_a ** 3] + ([0] * 5),
[0.8333 * l_a ** 3 - 1.1667 * l_a ** 3 - 3.5 * l_a ** 2 + 4 * l_a,
l_a ** 2 - l_a, 0.5555 * l_a ** 4 - 0.2222 * l_a ** 3 - 5.3333 * l_a ** 2 + 5.3333 * l_a,
-1.3889 * l_a ** 4 + 1.3889 * l_a ** 3 + 8.3333 * l_a ** 2 - 8.3333 * l_a] + ([0] * 4),
[1.7361 * l_a ** 4 - 14.1944 * l_a ** 3 + 0.5 * l_a ** 2 - 14.2916 * l_a,
l_a ** 3 + l_a, l_a,
-10.4167 * l_a ** 4 + 100 * l_a ** 3 + 111.25 * l_a,
8.6806 * l_a ** 4 - 86.8055 * l_a ** 3 - 98.9583 * l_a] + ([0] * 3),
[-0.5 * l_a ** 2 - 14.2917 * l_a ** 5 - 14.1944 * l_a ** 3 - 0.0208 * l_a + 1.7361 * l_a ** 4,
l_a ** 5 + l_a ** 3 + 0.5 * l_a,
l_a ** 5 - 4.5 * l_a,
100 * l_a ** 3 + 111.25 * l_a ** 5 - 25.625 * l_a - 10.4167 * l_a ** 4,
8.6805 * l_a ** 4 - 86.8056 * l_a ** 3 - 98.9583 * l_a ** 5 + 28.6458 * l_a,
l_a ** 2 + l_a, 0, 0],
[-1.8589 * l_a ** 2 - 2.2727 * l_a - 1.5278 * l_a ** 3 + 1.0022 * l_a ** 4,
0, l_a ** 2 + l_a,
5 * l_a ** 3 - 11.2321 * l_a ** 4 + 15.4346 * l_a ** 2 + 16.6414 * l_a,
9.2299 * l_a ** 4 - 3.4722 * l_a ** 3 - 15.0757 * l_a ** 2 - 15.8887 * l_a,
l_a, l_a ** 4 + l_a ** 2 - 0.48 * l_a, 0]])

```

```
c = [0, 1, 0.5, 0.2, 0.24, 0, 0.03125, 1]
```

```

BD = lambda l_bd: [175.5761 * l_bd ** 5 - 246.2083 * l_bd ** 4 + 117.4444 * l_bd ** 3 - 22.0833 * l_bd ** 2 + l_bd,
0, 0,
185.1851 * l_bd ** 5 - 294.2708 * l_bd ** 4 + 86.0339 * l_bd ** 3 - 3.4722 * l_bd ** 2,
-131.3163 * l_bd ** 5 + 202.104 * l_bd ** 4 - 51.9794 * l_bd ** 3 + 2.0518 * l_bd ** 2,
-42.2428 * l_bd ** 5 + l_bd ** 4 + l_bd ** 3 + l_bd ** 2,
-187.5417 * l_bd ** 5 + 337.5751 * l_bd ** 4 - 152.5339 * l_bd ** 3 + 22.505 * l_bd ** 2,
0.3396 * l_bd ** 5 - 0.2 * l_bd ** 4 + 0.0349 * l_bd ** 3 - 0.0013 * l_bd ** 2]

```

```

Bb = lambda l_bb: [-1.6944 * l_bb ** 3 + 0.5 * l_bb ** 2 - 1.7109 * l_bb + 2.5 * l_bb ** 4 - 1.0417 * l_bb ** 5,
                  0, 0,
                  6.25 * l_bb ** 3 - 0.9874 * l_bb - 16.1458 * l_bb ** 4 + 7.8125 * l_bb ** 5,
                  13.7061 * l_bb ** 4 - 4.5687 * l_bb ** 3 + 0.7002 * l_bb - 6.8531 * l_bb ** 5,
                  l_bb, l_bb,
                  0.0822 * l_bb ** 5 - 0.0603 * l_bb ** 4 - 0.0018 * l_bb + 0.0131 * l_bb ** 3]

return Ab, Bb, c, AD, BD

def find_y(t, history, y):
    """
    Function searching function values for t=t in history
    :param t: float values, time
    :param history: list of tuples (float, float, function)
    :param y: y value (not used in the function)
    :return: float value of function y
    """
    for (t_left, t_right, history_function) in history:
        if t_left <= t <= t_right:
            theta = (t - t_left) / (t_right - t_left)
            return history_function(theta)
    return y

def get_overhistory_y(a, theta, nc, k, y_current, y1):
    """
    :param a:
    :param c:
    :param k:
    :return:
    """
    y_sum = (sum([ai * ki for ai, ki in zip(a[nc], k)]))
    y = y_current + theta * h * y1 + h ** 2 * y_sum
    return y

def RungeKutta(t0, y_value, y1, function_y, delayed_y, h, history):
    """
    Calculates interpolaynt in the interval [t0, t + h]
    :param t0: float value, time
    :param y_value: list of y values
    :param function_y: function for y-value calculation
    :param delayed_vy:
    :param h: float values, step
    :param history: list of tuples (float, float, function)
    :return: function for new tuple in history
    """
    Ab, Bb, c, AD, BD = fcrk5_scheme() # eremin()
    k = []
    for ci, nci in zip(c, range(0, len(c))):
        y_sum = (sum([ai * ki for ai, ki in zip(AD[nci], k)]))
        new_y = y1 + h * y_sum
        t_tilda = t0 + ci * h
        del_t = ci * h

```

```

new_delay_y = find_y(t_tilda, history, new_y)
if new_delay_y == y_value:
    theta = (del_t - t0) / h
    new_delay_y = get_overhistory_y(a=Ab(del_t), theta=del_t, nc=nci, k=k, y_current=y_value, y1=y1)
k_next = function_y(t=t_tilda, y1=y1, delay_y=new_delay_y)
k.append(k_next)
new_y = lambda theta: y_value + theta * h * y1 + h ** 2 * sum([bi * ki for bi, ki in zip(Bb(theta), k)])
new_y1 = lambda theta: y_value + h * sum([bi * ki for bi, ki in zip(BD(theta), k)])
return new_y, new_y1

def global_error(solution, interpolation, method='maximum', points=100):
    """
    :param solution: tuple (float, float, function) with values of start, stop and function of true solution
    :param interpolation: list of tuples (float, float, function) with values of start, stop and function of interpolate sol
    :param method: string, method of global error definition. Supports 'maximum'
    :return: list of float values, global errors in each step
    """
    a, b, true_function = solution
    errors = []
    for (t_left, t_right, function) in interpolation:
        if not a <= t_left < t_right <= b:
            continue
        t = np.arange(t_left, t_right, (t_right - t_left) / points)
        theta = np.arange(0, 1, 1.0 / points)
        y = [item for item in map(function, theta)]
        y_true = [item for item in map(true_function, t)]
        if method is 'maximum':
            error = max(abs(np.array(y) - np.array(y_true)))
        else:
            raise TypeError('No method {method} found'.format(method=method))
        errors.append(error)
    return errors

alpha = 1
function_y = lambda t, y1, delay_y: (y1 * delay_y) ** (
    (1 + 2 * t) ** 2 / (2 + 4 * t + 4 * t ** 2)) # delay_y + (3 + alpha) * t ** (2 + alpha) - t ** ((3 + alpha) ** 2)
true_function = lambda t: exp(t)
a, b = 0, 1
y0, y1, k, N = 1, 1, 8, 6

error = []
for nn in range(N):
    steps = 2 ** (k + nn)
    h = 1.0 / steps
    history_function = [(-10, 0, lambda t: y0)]

    t = a
    current_y = y0
    current_y1 = y1
    y, step_history = [], []
    while t <= b:
        # delay_t = current_y
        delay_t = t / (1 + 2 * t) ** 2
        delayed_y = find_y(t=delay_t, history=history_function, y=current_y)

```



```

(next_fun_y, next_fun_y1) = RungeKutta(t0=t, y_value=current_y, y1=current_y1, function_y=function_y,
                                     delayed_y=delayed_y, h=h, history=history_function)
history_function.append((t, t + h, next_fun_y))
current_y = next_fun_y(theta=1)
current_y1 = next_fun_y1(theta=1)
y.append(current_y)
step_history.append(t)
t += h

plt.figure('Solution for step=2{n}'.format(n=k + nn))
t = [0] + np.arange(0, 1, h).tolist()
plt.plot(t, y, 'b*')
plt.plot(t, [true_function(ti) for ti in t], 'r')
plt.title('Solution for RK 5th order with FC RK5 scheme')
plt.xlabel('t, time')
plt.ylabel('F, function value')

errors = global_error(solution=(a, b, true_function), interpolation=history_function, method='maximum')
error_nn = max(errors)
error.append(error_nn)
del step_history[0]

plt.figure('Errors in log-e')
plt.plot(np.log10(1/(2 ** (k + np.arange(N)))), np.log10(error))
plt.plot(np.log10(2 ** (k + np.arange(N))),
         np.log10(2 ** (k + np.arange(N))) * (-4) + 1, 'r')
plt.title('Errors, method order')
plt.xlabel('lg(h)')
plt.ylabel('(lg(errors))')

plt.show(True)

```
