Санкт-Петербургский государственный университет

Математика

Алгебра

Яковенко Сергей Сергеевич

Векторные расслоения на некоторых арифметических схемах

Магистерская диссертация

Научный руководитель:

профессор,
доктор физ.-мат. наук
Бондарко М.В.

Рецензент:

ведущий научный сотрудник,
доктор физ.-мат. наук
Смирнов А.Л.

Санкт-Петербург
2017

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mathematics

Algebra

Sergey Yakovenko

Vector bundles on certain arithmetic schemes

Master's Thesis

Scientific supervisor:

professor, doctor of Sciences
Mikhail Bondarko

Reviewer:

leading researcher, doctor of sciences
Alexander Smirnov

Saint Petersburg
2017

Содержание

1. Введение

Работа посвящена изучению векторных расслоений на арифметической поверхности $\mathbf{P}^1_A$, где A – дедекиндова область. В частности, нас особо интересует случай $A = \mathbb{Z}$.

Изучение векторных расслоений на комплексных проективных пространствах является классической и весьма трудной задачей в алгебраической геометрии (см. [4]). С другой стороны, имеются различные результаты о расслоениях на арифметических кривых, связанные геометрией решеток, а также со взглядом с точки зрения геометрии Аракелова, в такой ситуации, например, роль h^0 играет логарифм тета-функция решетки, а функциональное уравнение превращается в теорему Римана–Роха (см. [10]). Однако уже в случае самой простой арифметической поверхности $\mathbf{P}^1_A$ известно довольно мало. Так, Ханна показал (см. [16]), что всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$ в случае евклидова кольца A допускает фильтрацию, все факторы которой линейные. Алгоритм построения такой фильтрации был получен Смирновым и автором в [7].

Как известно, векторные расслоения на проективной прямой над полем представляются в виде суммы линейных, поэтому достаточно естественно рассматривать ограничения расслоений на специальные слои $\mathrm{Spec}(A)$. Это позволяет определить несколько простых инвариантов. А именно для каждого расслоения E мы определяем подсхему $J(E) \subset \mathrm{Spec}(A)$, состоящую из точек, тип разложения над которым не совпадает с типом разложения над общей точкой $\mathrm{Spec}(A)$, а также в случае $\mathrm{rk}(E) = 2$ определяем дивизор вырождения $\mathfrak{f}(E)$, учитывающий “кратность” подскоков в точках $J(E)$ (см. определения ниже в п. 2.5). Эти понятия являются важными для классификационных вопросов, которые решены лишь в нескольких случаях.

В [20] Смирнов классифицировал векторные расслоения с тривиальным общим слоем и простыми подскоками, а также в работе [6] доказал, что всякое расслоение такого вида на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ имеет подрасслоение. Мы интерпретируем эти результаты с точки зрения свойств квадратичных форм, естественно связанных с такими фильтрациями в п. 5.6.

В пункте 5 мы опишем конструкцию расслоений с помощью расширений, а также опишем важные инварианты расслоений, определяемые формами в Ext^1. В частности, оказывается, что точки подскока и дивизор вырождения имеют ясное описание в терминах инвариантов, а также имеют связь с арифметикой расширений, задаваемых нулями бинарных форм. Подробному описанию соответствия в случае бинарных кубических форм посвящен пункт 6, тесно связанный с классификацией расслоений с общим слоем $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ и простыми подскоками, то есть таких расслоений E, что или $E_y \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$, $E_y \cong \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(2)$ для всякой замкнутой точки $y \in \mathrm{Spec}\, A$, полученной автором в [9]. Весьма неожиданно выглядит теорема 8, являющаяся одним из первых шагов на пути к аналогии между классификацией фильтрованных расслоений и расширений поля $\mathbb{Q}$.

Отметим также, что в этом отношении наиболее важным выглядит поиск минимальных фильтраций, то есть таких, что степень линейного подрасслоения является максимально возможной.

Легко видеть, что всякое расслоение указанного выше типа локально имеет подрасслоение $\mathcal{O}(-1)$. Возникает естественный вопрос: верно ли это глобально? Ответ оказывается отрицательным (теорема 7), что дополнительно подтверждает отсутствие локально-глобального принципа в данной ситуации.

Исследованию расслоений на компактификации проективной прямой по Аракелову посвящен пункт 7, где в полистабильном случае мы вводим новые инварианты – длины самых коротких векторов. В частности, для расслоений с тривиальным общим слоем и простыми подскоками удаётся вычислить первые значения этих инвариантов, а также в теореме 9 получить формулу в терминах коэффициентов ассоциированных квадратичных форм, определенной в п. 5.6.

2. Предварительные сведения

Пусть A – дедекиндова область. Как обычно (см., например, [8]), $\mathbf{P}^1_A = \operatorname{Proj} A[t_0, t_1]$, $\deg t_0 = \deg t_1 = 1$, U_i – дополнение к нулям t_i, $U_{01} = U_0 \cap U_1$, $x = t_1/t_0$, $y = t_0/t_1$, в частности, $xy = 1$.

Тогда

$$\mathcal{O}(U_0) = A[x], \quad \mathcal{O}(U_1) = A[y], \quad \mathcal{O}(U_{01}) = A[x, y].$$

Также нам потребуется структурная проекция $\pi : \mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

2.1. **Общие результаты о расслоениях.** Приведем некоторые известные результаты, связанные с векторными расслоениями на $\mathbf{P}^1_A$.

Теорема 1 (А. Гротендик, [4])**.** *Всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_F$, где F – поле, может быть представлено суммой линейных расслоений, причем слагаемые определены однозначно.*

Линейные расслоения на проективных пространствах также хорошо известны. Всякое линейное расслоение на $\mathbf{P}^n_S$ над локально нётеровой связной базой S изоморфно расслоению вида $\pi^* L \otimes \mathcal{O}(d)$, где L – линейное расслоение на S, а π – структурная проекция $\mathbf{P}^n_S \to S$ (см. замечание 4.2.7 в [15]).

В частности, любое линейное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$, где A – факториальное кольцо, изоморфно расслоению $\mathcal{O}(d)$ для некоторого однозначно определенного $d \in \mathbb{Z}$.

В отличие от случая проективной прямой над полем на $\mathbf{P}^1_A$, для дедекиндова кольца A не всякое расслоение представимо суммой линейных (см., например, [20]). Возникает естественный вопрос: верно ли, что всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$ для дедекиндова кольца A допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения? По-видимому, ответ на этот вопрос не известен.

Для произвольного дедекиндова A имеет место следующий результат.

Теорема 2 (Ch. C. Hanna, [16])**.** *Всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$, где A – дедекиндово кольцо, допускает фильтрацию, все факторы которой либо линейные расслоения, либо расслоения ранга два.*

Полностью вопрос решен для евклидовых колец (см. определение в [2]).

Теорема 3 (Ch. C. Hanna, [16])**.** *Всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$, где A – евклидово кольцо, допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения.*

В частности, всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения. Такая фильтрация называется линейной.

2.2. **Оснащения и матрицы склейки.** Пусть E – векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$,

$$r = \operatorname{rk} E.$$

Оснащением E назовем тривиализацию расслоений

$$E|U_0 = \mathcal{O}e_1 + \cdots + \mathcal{O}e_r,$$

$$E|U_1 = \mathcal{O}f_1 + \cdots + \mathcal{O}f_r.$$

По теореме Квиллена и Суслина ([19], [5]) все проективные $A[x]$-модули свободны. Поэтому каждое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$ допускает оснащение.

С оснащением связана матрица

$$\sigma \in \mathrm{GL}_r(A[x, x^{-1}]), \tag{2.1}$$

называемая ниже матрицей склейки, такая, что

$$[e_1, \ldots, e_r]\sigma = [f_1, \ldots, f_r] \tag{2.2}$$

на U_{01}. Иными словами, j-тый столбец σ представляет собой запись f_j в e-базисе.

Наоборот, с произвольной матрицей $\sigma \in \mathrm{GL}_r(A[x, x^{-1}])$ связано оснащенное r-расслоение $E(\sigma)$ на $\mathbf{P}^1_A$. По определению, $E(\sigma)|U_0 = \mathcal{O}e_1 + \cdots + \mathcal{O}e_r$, $E(\sigma)|U_1 = \mathcal{O}f_1 + \cdots + \mathcal{O}f_r$, а на U_{01} расслоения склеиваются с помощью соотношения (2.2).

Таким образом, множество классов изоморфизма оснащенных векторных r-расслоений на $\mathbf{P}^1_A$ представлено как $\mathrm{GL}_r(A[x, x^{-1}])$, а множество классов изоморфизма (неоснащенных) векторных r-расслоений представлено как двойной фактор

$$\mathrm{Vect}_r(\mathbf{P}^1) = \mathrm{GL}_r(A[x]) \diagdown \mathrm{GL}_r(A[x, x^{-1}]) \diagup \mathrm{GL}_r(A[x^{-1}]). \tag{2.3}$$

2.3. **Обозначения.** Для функтора F на категории A-алгебр введем следующие обозначения:

$$F_{xy} = F(A[x, y]), \quad F_x = F(A[x]), \quad F_y = F(A[y]).$$

Основным примером такого функтора у нас является $G = \mathrm{GL}_r$.

2.4. **Двойственность.** В дальнейшем нам пригодится понятие двойственной формы. Для этого аккуратно сформулируем двойственность Серра на $\mathbf{P}^1$. Пусть V – свободный $\mathbb{Z}$-модуль ранга 2. Рассмотрим схему $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{Proj}(\mathbb{Z}[t_0, t_1])$, где t_0, t_1 базис $V^\vee$ (двойственный к некоторому базису v_0, v_1 модуля V). Как обычно, $H^0(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(i)) = \Gamma(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(i)) \simeq Sym^i(V^\vee)$.

Двойственность Серра для проективных пространств влечёт наличие естественного изоморфизма $H^1(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(-2-i)) \simeq (\widetilde{Sym}^i(V^\vee))^\vee$ (разделенные степени). Причем явное сопоставление задаётся следующим образом:

$$t_0^{l_0} t_1^{l_1} \mapsto \sum_{(m_1, \ldots m_i)} v_{m_1} \otimes \ldots \otimes v_{m_i}, \tag{2.4}$$

где $l_j < 0$, $l_0 + l_1 = -2 - i$ и сумма берется по всем последовательностям $(m_1, \ldots, m_i)$, содержащим $-1 - l_j$ членов равных j. В частности, имеется стандартный морфизм из разделенных степеней в симметрическую степень, образ формы от t_0 и t_1 при этом морфизме будет называть двойственной формой.

2.5. **Подскоки и дивизор вырождения.** Пусть E – расслоение ранга r на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$. Ограничения E на прообраз точки $P \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ при морфизме π и естественном вложении определяют расслоения E_P. По теореме 1 расслоение E_P изоморфно сумме линейных. Будем говорить, что E имеет тип разложения $(d_1, \ldots, d_r)$ в точке P, если $E_P \simeq \bigoplus \mathcal{O}(d_i)$, где $i = 1, \ldots, r$. Для определенности будем считать набор d_i упорядоченным по возрастанию.

Мы будем говорить, что E имеет подскок в специальной точке P, если тип разложения в P не совпадает с типом разложения в общей точке, а P назовём точкой подскока E. Очевидно, что число таких точек конечно, а расслоения, имеющие разные точки подскока или же не совпадающие типы разложения в таких точках, не могут быть изоморфны. Обратное, вообще говоря, неверно, как мы увидим дальше.

Обозначим $J(E) \subset \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ конечную подсхему, состоящую из точек подскока.

Также довольно полезно обобщить предыдущую конструкцию, а именно рассмотреть $E(\mathbb{Z}_p)$ – пулбэк E на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$, где $\mathbb{Z}_p$ обозначает кольцо целых p-адических чисел. В этой ситуации, как отмечено выше, E не обязательно изоморфно сумме линейных. Здесь мы ограничимся рассмотрением случая $r = 2$.

Пусть P – точка подскока расслоения E, соответствующий простой идеал мы обозначаем той же буквой, в частности, абсолютная норма $N(P) = p$, где p – некоторое простое число. Определим число k_P как максимум таких неотрицательных чисел k, что слой E над $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}_p/p^k\mathbb{Z}_p}$ является суммой линейных. Заметим, что k_P конечно, так как типы разложения в общих точках $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ и $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p$ совпадают; это можно переформулировать так: пулбэк E на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$ задает нетривиальное расширение

$$\mathcal{O}(d_1) \to E(\mathbb{Z}_p) \to \mathcal{O}(d_2),$$

которое расщепляется по модулю $p^k\mathbb{Z}_p$ при $k \leq k_P$.

Определим дивизор вырождения E:

$$\mathfrak{f}(E) = \prod_{P \in J(E)} P^{k_P}. \tag{2.5}$$

Также часто будем отождествлять $\mathfrak{f}(E)$ с его абсолютной нормой и вместо идеала говорить о целом числе. Отметим, что $\mathfrak{f}(E)$ конечно по замечанию о конечности k_P и конечности схемы $J(E)$.

3. Известные классификационные результаты

В данной работе мы будем опираться на полученные А. Л. Смирновым и автором результаты о классификации расслоений ранга 2 на проективной прямой над $\mathbb{Z}$. С помощью спектральной последовательности Бейлинсона (см. [4]) удаётся получить запас расслоений с заданными подскоками. Для формулировки известных классификационных результатов ниже определим три серии пучков $V_0(m, e)$, $V_1(m, e)$ и $V_1'(m, e)$.

$V_0(m,e) = \mathrm{Coker}[\mathcal{O}(-2)^2 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}(-1)^4]$, где стрелка φ имеет следующий вид

$$\varphi = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ et_0 & t_1 \\ mt_0 & 0 \\ 0 & t_0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

$V_1(m,e) = \mathrm{Coker}[\mathcal{O}(-2)^3 \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}(-1)^5]$, и стрелка ψ задана матрицей

$$\psi = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ t_0 & t_1 & 0 \\ 0 & et_0 & t_1 \\ 0 & mt_0 & 0 \\ 0 & 0 & t_0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

$V_1'(m,e) = \mathrm{Coker}[\mathcal{O}(-2)^3 \xrightarrow{\psi'} \mathcal{O}(-1)^5]$, стрелка ψ' задана матрицей

$$\psi' = \begin{pmatrix} t_1 & et_0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 \\ t_0 & 0 & t_1 \\ 0 & mt_0 & 0 \\ 0 & 0 & t_0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Теорема 4 (Смирнов, [20],[6]). *Пусть $m \neq 0$ и $\gcd(m,e) = 1$, тогда $V_0(m,e)$ является расслоением. Если, кроме того, m не является обратимым, то $V_0(m,e)$ имеет тривиальный общий слой и простые подскоки, причём его дивизор вырождения $\mathfrak{f}(V_0(m,e))$ это в точности m. И верно следующее:*

1. *Всякое расслоение на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ с с тривиальным общим слоем и простыми подскоками изоморфно расслоению вида $V_0(m,e)$.*
2. *Расслоения $V_0(m,e)$ и $V_0(m',e')$ изоморфны тогда и только тогда, когда $(m) = (m')$ и существует такое $\lambda \in \mathbb{Z}$, что $e\lambda^2 = \pm e' \pmod m$.*
3. *$\mathcal{O}(-1) \subset V_0(m,e)$ тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел $\pm e$ является квадратичным вычетом по модулю m.*
4. *Для любой пары (m,e) взаимно простых чисел $\mathcal{O}(-2)$ является подрасслоением $V_0(m,e)$.*
5. *Расслоение $V_0(m,e)$ может быть задано матрицей склейки $\begin{pmatrix} ax^{-1} & b \\ c & dx \end{pmatrix}$, где $ad - bc = 1$, $(b) = (m)$ и существует $\lambda \in \mathbb{Z}$, такое что $a\lambda^2 \equiv \pm e$.*

Легко понять из общих соображений, что расслоение из пункта (3) единственно с точностью до изоморфизма для каждого m. Действительно, группа $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(-1))$ изоморфна $H^0(\mathcal{O})^\vee = \mathbb{Z}$ по двойственности Серра. А условия на локальную расщепимость определяют соответствующий элемент из $\mathbb{Z}$ с точностью до знака.

В случае общего слоя $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ известно меньше, а именно имеется следующая

Теорема 5 (Яковенко, [9]). *Пусть $m \neq 0$ и $\gcd(m,e) = 1$, тогда $V_1(m,e)$ и $V_1'(m,e)$ является расслоениями. Если, кроме того, m не является обратимым, то слои данных расслоений над $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Q}}$ изоморфны $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$, все подскоки имеют вид $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(2)$, причём дивизоры вырождения $\mathfrak{f}(V_1(m,e))$ и $\mathfrak{f}(V_1'(m,e))$ в точности равны m. И верно следующее:*

(1) *Всякое расслоение на* $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ *с общим слоем* $\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(1)$ *и простыми подскоками изоморфно или расслоению вида* $V_1(m,e)$*, или* $V_1'(m,e)$*, в частности,* $V_1(m,e)\simeq V_1'(m',e')$ *лишь в случае* $m=\pm m'\in\mathbb{Z}^*$.

(2) *Расслоения* $V_1(m,e)$ *и* $V_1(m',e')$ *изоморфны тогда и только тогда, когда* $(m)=(m')$ *и* $e\equiv\pm e' \pmod m$*. Аналогично для* V_1'.

(3) *Расслоения* $V_1(m,e)$ *и* $V_1'(m,e)$ *могут быть определены матрицами склейки* $\begin{pmatrix} ax^{-1} & bx \\ c & dx^2 \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} ax^{-1} & b \\ cx & dx^2 \end{pmatrix}$ *соответственно, где* $ad-bc=1$, $(b)=(m)$ *и* $a\equiv\pm e \pmod m$.

Однако никаких результатов, подобных пунктам (2)–(4) теоремы 4, о фильтрациях таких расслоений до сих пор получено не было. Этим вопросам посвящена значительная часть статьи. Также мы предложим объяснение появления двух серий V_1 и V_1' с помощью описания инволюции W на $\mathrm{Vect}_2(\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}})$, переставляющей эти серии, и позволяющей свести вопросы о фильтрациях к рассмотрению одной серии.

3.1. **Инволюция W на $\mathrm{Vect}_r(\mathbf{P}^1)$.** Как мы видели в пункте 2.2, множество классов изоморфизма (неоснащенных) векторных r-расслоений представлено как двойной фактор

$$\mathrm{Vect}_r(\mathbf{P}^1)=G_x\backslash G_{xy}/G_y \text{ (см. обозначения в 2.3).}$$

Полезно заметить, что на этом множестве имеется действие нетривиальной инволюции, которая задается как композиция следующих отображений

$$i: G_x\backslash G_{xy}/G_y\to G_y\backslash G_{xy}/G_x, \text{ при котором } \sigma\mapsto\sigma^{-1}, \tag{3.4}$$

где $\sigma\in G_{xy}$. И отображения $t: x\mapsto y=x^{-1}$. Ясно, что композиция $t\circ i: G_x\backslash G_{xy}/G_y\to G_x\backslash G_{xy}/G_y$ корректно определена, обозначим $W=t\circ i$.

4. Инварианты расслоений

Пусть E – расслоение на X_0, где $X_0=\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$. По умолчанию, $\mathrm{rk}\,E=2$. Мы хотим классифицировать такие расслоения с учетом “слоя” над архимедовой точкой. Для этого будем рассматривать их как эрмитовы расслоения на компактификации X, которая склеивается из конечной части, то есть X_0, и добавленного слоя на бесконечности X_∞. Первый инвариант, который мы определим – $\delta(E)$, это инвариант E на конечной части. Он, по сути, измеряет максимальную степень подрасслоений E. Однако требуется определенная аккуратность в определении, чтобы это число не зависело от подкрутки E на линейное расслоение.

Второй инвариант (или семейство инвариантов, так как на пространствах сечений расслоения можно выбирать разные метрики) должен отличать орбиты подрасслоений E под действием автоморфизмов E.

4.1. **Амплитуды расслоений.** Пусть E расслоение ранга 2. Тогда, по теореме Ханны, существуют такие линейные расслоения L и M, что $L\subset E$ и $E/L\simeq M$. Очевидная короткая точная последовательность задаёт класс E в $\mathrm{Ext}^1(M,L)=H^1(\mathbf{P}^1,L\otimes M^*)$. Размерность этой группы когомологий $\deg(M\otimes L^*)-2$ назовём амплитудой фильтрации

$$0\to L\to E\to M\to 0. \tag{4.1}$$

Минимум амплитуд по всем фильтрациям со средним членом, изоморфным E, обозначим $a(E)$ и назовём глобальной амплитудой E. Очевидно, что этот инвариант зависит только от класса изоморфизма E и не зависит от подкрутки, а также является отрицательным тогда и только тогда, когда расслоение изоморфно сумме линейных.

Напомним, что для всякого расслоения E на $\mathbf{P}^1$ определён наклон $\mu(E) = \deg(E)/\operatorname{rk}(E)$. Легко видеть, что определенная величина $a(E)$ совпадает с

$$2(\mu(E) - \max_{L\subset E}\mu(L)) - 2.$$

На величину $a(E)$ имеются локальные ограничения в связи с наличием подскоков. В частности, можем определить локальный вариант амплитуды как максимум по амплитудам сужений E на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$ для всех $P \in J(E)$, $N(P) = p$. Этот инвариант обозначим $a_{\mathrm{loc}}(E)$. Теорема о замене базы влечет неравенство $a(E) \geq a_{\mathrm{loc}}(E)$. Таким образом, $a(E)$ может быть сколь угодно большим, так как легко построить расслоение на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$ с наперед заданным специальным слоем. Следовательно, наиболее интересным инвариантом выглядит разность глобальной и локальной амплитуд, про её поведение известно крайне мало.

Например, пункты (3) и (4) теоремы 4 говорят, что для всякого расслоения с тривиальным общим слоем и простыми подскоками $a(E) \leq 2$ и разность глобальной и локальной амплитуд не превосходит 1.

5. Задание расслоений с помощью Ext

Хотя первые классификационные результаты были получены с помощью последовательности Бейлинсона, которая, в некотором смысле, является универсальным инструментом для изучения таких вопросов, применять эту технику становится сложно из-за возрастающей размерности. Поэтому мы рассмотрим способ построения расслоений с заданной структурой слоёв при помощи расширений вида (4.1). С одной стороны, ясно, что средний член последовательности такого вида является расслоением (это следствие из теоремы о замене базы), с другой стороны, теорема Ханны гарантирует, что так мы получим все расслоения. Сложным вопросом однако является описание изоморфных расслоений с одинаковыми слоями над каждой прямой $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$.

5.1. **От бинарных форм к расслоениям на проективной прямой.** Обозначим $f = [a_0, \ldots, a_n] = a_0t_0^n + a_1t_0^{n-1}t_1 + \ldots + a_nt_1^n$, то есть $f \in H^0(\mathcal{O}(n))$ – бинарная форма от переменных t_0 и t_1. Пусть также $f_i = f\big|_{U_i}$ – соответствующие сужения, то есть многочлены от x и x^{-1} при $i = 1, 2$. Когда это не приведёт к путанице, будем также пользоваться обозначением $[a_0, \ldots, a_n]$ для f_i. Если наибольший общий делитель всех a_i равен 1, форму f будем называть примитивной.

Рассмотрим отображение из множества бинарных форм степени n в $\operatorname{Vect}_2(\mathbf{P}^1)$

$$f \mapsto \sigma_f \begin{pmatrix} x^{-1} & f_0 \\ 0 & x^{n+1} \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Таким образом, мы отображаем форму в класс изоморфизма расслоения. Конечно, ввиду неканоничности такого сопоставления, нам приходится, например, бороться с некоторым произволом при выборе подкрутки. Однако важные инварианты, такие как амплитуда и дивизор вырождения, не зависят от подкрутки. Вычисление дивизора вырождения, по существу, сводится к вычислению когомологий расслоения, поэтому можно зафиксировать для технических нужд некоторое оснащение e_1, e_2 на U_0 и g_1, g_2 на U_1 и считать, что имеется оснащенное расслоение E_f, заданное матрицей склейки σ_f на U_{01}:

$$(e_1,\, e_2)\sigma = (g_1,\, g_2), \tag{5.2}$$

причем точна последовательность

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to E_f \to \mathcal{O}(n+1) \to 0. \tag{5.3}$$

5.2. **Дивизор вырождения расширения.** Наша цель – установить структуру слоёв E_f. Сперва заметим, что $\mathrm{Det}(E_f) \simeq \mathcal{O}(n)$ из (5.3). Тогда слои E_f над замкнутыми точками имеют вид $\mathcal{O}(d_1) \oplus \mathcal{O}(d_2)$, где $d_1, d_2 \geq 0$ и $d_1 + d_2 = n$. Если общий слой E_f изоморфен $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(n+1)$, то расслоение глобально изоморфно сумме линейных, это следствие теоремы о полунепрерывности. Тогда f_0 тождественно равна нулю.

Далее считаем, что f_0 – ненулевая форма. Открутим последовательность (5.3) на $\mathcal{O}(\lceil \frac{n+1}{2} \rceil)$. При этом σ_f умножится на $x^{-\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$.

Обозначим $l = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ и $E = E_f(-l)$. Так как $\mathrm{Det}(E) \simeq \mathcal{O}(n-2l)$, слои E над замкнутыми точками изоморфны $\mathcal{O}(-d-1) \oplus \mathcal{O}(d-\delta)$, где δ равно 0, если n – нечётное, и равно 1 иначе, $d \geq 0$.

В терминах оснащения (5.5) достаточно легко вычислить $H^0(E)$ явно. Этот шаг является важным, так как после этого, воспользовавшись теоремой о замене базы, мы можем вычислить $J(E)$ и $\mathfrak{f}(E)$, зная лишь размерности нулевых когомологий слоёв над замкнутыми точками и окрестностями.

Пусть

$$A_\delta = \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_{l-\delta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l-1} & \dots & a_{2l-\delta-1} \end{pmatrix} \in M_{l, l-\delta+1}(\mathbb{Z}), \tag{5.4}$$

где a_i – коэффициенты формы f_0 (см. начало п. 5.1).

Предложение 1. *Пусть E как и выше, рассмотрим его сужение E_m на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}/(m)$, где m – ненулевое целое число, не равное ± 1. Тогда $h^0(E_m) = (l-\delta+1) - \mathrm{rk}\, A_\delta$, где ранг A_δ вычисляется над $\mathbb{Z}/(m)$.*

Доказательство. Пусть s является глобальным сечением E. Выберем такие оснащения e'_i и g'_i, что

$$(e'_1,\, e'_2)\begin{pmatrix} x^{-1-l} & f_0 x^{-l} \\ 0 & x^{l-\delta} \end{pmatrix} = (g'_1,\, g'_2), \text{ где } l = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil. \tag{5.5}$$

Тогда s можно представить в виде $s = (s_1 e_1 + s_2 e_2) t_0^n = (s' g_1 + s' g_2) t_1^n$, где $s_i \in \mathbb{Z}[x]$, $s'_i \in \mathbb{Z}[x^{-1}]$ при $i = 1, 2$. Выражая e_i через g_i над U_{01}, получим

$$s'_1 = s_1 x^{l+1} - s_2 f_0 x^{-l+\delta+1}, \quad s'_2 = s_2 x^{\delta-l}. \tag{5.6}$$

Очевидно, что s_2 имеет степень не выше $l-\delta$. Пусть $s_2 = w_0 + \ldots + w_{l-\delta} x^{l-\delta}$. Случай $l = 0$ тривиален, поэтому считаем, что $l \geq 1$, то есть выражение s_2 – многочлен от x. Степень выражения $s_2 f_0 x^{-l+\delta+1}$ не превосходит $\deg(f_0) + 1 = n+1$. Следовательно, из условия $s'_1 \in \mathbb{Z}[x^{-1}]$ получаем $\deg(s_1 x^{l+1}) \leq n+1$, то есть s_1 – многочлен от x степени не выше $n-l$, а его коэффициенты однозначно определяются f_0 и s_2. Таким образом, глобальность s'_1 сводится к тому, что все коэффициенты в выражении из (5.6) при степенях от 1 до l равны нулю. А это – условие на форму f_0.

Переходя к E_m из условия теоремы и используя стандартную алгебро-геометрическую технику работы со слоями, редуцируем вышеуказанное условие на коэффициенты $s_2 f_0 x^{-l+\delta+1}$ по модулю и получим утверждение о рангах соответствующих нулевых когомологий. $\square$

Простым следствием теоремы полунепрерывности и предыдущего предложения является

Предложение 2. *Пусть* $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}} A_\delta = k$, *тогда общий слой* E *изоморфен расслоению* $\mathcal{O}(-l+k-1) \oplus \mathcal{O}(l-\delta-k)$. *И для всякой степени простого числа* p *выполнено*

$$h^0(E_{p^k}) \geq l - \delta - k + 1, \tag{5.7}$$

причем строгое неравенство выполнено лишь для конечного числа p *и* $k > 0$, *которые в точности определяют подсхему подскоков* $J(E)$ *и дивизор вырождения* $\mathfrak{f}(E)$.

Доказательство. Первая часть утверждения очевидна. Для восстановления дивизора вырождения достаточно для каждого такого p, что неравенство (5.7) бывает строгим, определить максимум по всем k, который соответствует числу k_P в определении п. 2.5. $\square$

Таким образом, мы научились вычислять слои расслоения E_f, при этом получили достаточно ясные условия на ранги нулевых когомологий специальных слоёв и их окрестностей. Заметим, что условия на ранги матриц A_δ тесно связаны со значениями различных инвариантов двойственных бинарных форм (см. 2.4), таких как гессиан, дискриминанты и т.д., что станет объектом исследований в последующих пунктах.

5.3. **От расслоений к расширениям** $\mathbb{Q}$**.** Пусть $f = [a_0, \dots, a_n]$ – бинарная форма от t_0, t_1. Обозначим

$$\widetilde{f} = [a_0, \binom{n}{1} a_1, \dots, \binom{n}{i} a_i, \dots, a_n] \tag{5.8}$$

двойственную форму от v_0, v_1 (см. 2.4).

По любой бинарной форме с целыми коэффициентами можно построить расширение $\mathbb{Q}$, заданное её корнями, рассматриваемыми как элементы $\mathbf{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}$, где $\overline{\mathbb{Q}}$, как обычно, обозначает алгебраическое замыкание поля $\mathbb{Q}$. Многие свойства формы отражаются на арифметике расширения, например, разложение идеалов на простые в кольце целых расширения определяется разложением формы на множители по модулю простых идеалов базового поля. Общая мысль заключается в том, что классификация расслоений на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ вместе с фильтрациями во многом похожа на классификацию расширений поля рациональных чисел, в том числе неабелевых. К сожалению, на данном этапе это, скорее, мета-соответствие, и одно из направлений, в котором хотелось бы развивать теорию векторных расслоений на арифметической поверхности.

5.4. **Поиск формы в** Ext^1 **по сечению.** Пусть E – расслоение на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$, вообще говоря, произвольное. Введем обозначение для множества сечений E, не имеющих нулей на $\mathbf{P}^1$,

$$H^0(E)^\times := H^0(\mathbf{P}^1, E)^\times \subset H^0(\mathbf{P}^1, E). \tag{5.9}$$

Такое обозначение, по-видимому, не встречается в литературе, оно происходит из аналогии с одномерным случаем, где важную роль играет группа единиц.

Хорошо известно, что задание $s \in H^0(E(n))^\times$ равносильно заданию подрасслоения $\mathcal{O}(-n) \subset E$. Здесь n – произвольное целое. Заметим, что по очевидным причинам $H^0(E(n))^\times = \emptyset$ при $n \leq n_0$, где n_0 – некоторое целое число. Также можно показать, что из $H^0(E(n))^\times \neq \emptyset$ следует непустота $H^0(E(n+1))^\times$. Поэтому для каждого E хотелось бы находить минимальное n, при котором это множество непусто. Заметим, что эта задача равносильна поиску минимальной амплитуды $a(E)$ (см. п. 4.1).

Так как когомологии расслоения на $\mathbf{P}^1$, как правило, не слишком сложно вычислить явно, можно выделить в этих пространствах подмножества $H^0(E)^\times$ уравнениями, то есть задать некоторое результантное подмногообразие в соответствующем аффинном пространстве. В случае ранга 2 это сводится к вычислению результанта $Res(s_1, s_2)$ пары многочленов s_1 и s_2. Наша локальная цель – научиться находить коэффициенты формы в Ext^1. Более точно, пусть $s \in H^0(E \otimes L^*)$, где L – линейное подрасслоение E, $L^* = Hom_{\mathcal{O}}(L, \mathcal{O})$ – двойственное к L расслоение. Обозначим $M = E/L$ – линейный фактор.

Тогда s определяет элемент f_s в

$$\mathrm{Ext}^1(M, L) = H^1(L \otimes M^*) \simeq H^0(L^* \otimes M \otimes \omega_{\mathbf{P}^1})^\vee, \tag{5.10}$$

где $\omega_{\mathbf{P}^1} \simeq \mathcal{O}(-2)$ – дуализирующий пучок на $\mathbf{P}^1$, а последний изоморфизм – двойственность Серра, образ f_s при которой мы будем обозначать $\widetilde{f_s}$.

5.5. **Алгоритм вычисления формы.** Следующий алгоритм позволяет найти коэффициенты f_s и $\tilde{f}_s$ по $s \in H^0(E, L^*)^\times$, если расслоение E задано при помощи матрицы склейки σ (см. п. 2.2),

$$(e_1,\, e_2)\sigma = (g_1,\, g_2). \tag{5.11}$$

(1) Вычислить $H^0(E \otimes L^*)$.
(2) Для многочленов-коэффициентов $s_1(x)$ и $s_2(x)$ общего глобального сечения $s = (s_1e_1 + s_2e_2)t_0^{d_1} \in H^0(E \otimes L^*)$, где $d_1 = -\deg L$, найти пару таких многочленов $r_1(x)$, $r_2(x)$ минимальной степени, что $s_1r_1 + s_2r_2 = Res(s_1, s_2)$.
(3) Определить $\lambda = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ -s_2 & s_1 \end{pmatrix}$.
(4) Положить $(s_2', s_1') = x^{-d_1-d_2}(-s_2, s_1)\sigma$, где d_2 степень $\mathrm{Det}\, E$.
(5) Найти такие $r_1'(x^{-1})$ и $r_2'(x^{-1})$ минимальной степени по x^{-1}, что $s_1'r_1' + s_2'r_2' = Res(s_1', s_2')$.
(6) Определить $\rho = \begin{pmatrix} s_1' & r_2' \\ -s_2' & r_1' \end{pmatrix}$.
(7) Вычислить коэффициенты верхнетреугольной матрицы $\lambda\sigma\rho$.

Корректность обеспечивается тем, что для невырожденного сечения s результанты его коэффициентов обратимы, то есть $\lambda \in G_x$ и $\rho \in G_y$.

5.6. **Расслоения с тривиальным общим слоем и простыми подскоками и квадратичные формы.** Напомним, что по теореме 4 всякое расслоение с тривиальным общим слоем и простыми подскоками получается как $V_0(m,e)$, где $\gcd(m,e)=1$ и, кроме того, $m\neq 0,\pm 1$ (это предположение сохраняется на протяжении всего пункта).

В текущем пункте мы сформулируем классификацию на языке бинарных форм, используя п. 5.1. Более того, так как всякое $V_0(m,e)$ содержит $\mathcal{O}(-2)$ как подрасслоение, речь идёт о квадратичных формах.

Пусть $f=[a_0,a_1,a_2]=a_0t_0^2+a_1t_0t_1+a_2t_1^2$ – бинарная квадратичная форма. Двойственная форма $\widetilde{f}=[a_0,2a_1,a_2]$.

Рассмотрим расслоение E_f, заданное матрицей склейки σ_f (см. п. 5.1). В этом случае $l=\lceil\frac{n+1}{2}\rceil=\lceil\frac{2+1}{2}\rceil=2$ и $\delta=1$, так как $n=2$ – чётное. Таким образом, слои E_f определяются при помощи 2×2 матрицы A_δ, которая имеет вид

$$A_1=\begin{pmatrix} a_0 & a_1\\ a_1 & a_2\end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Предложение 3. *Расслоение E_f имеет тривиальный общий слой тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk}_{\mathbb{Q}} A_1=2$. Если $\gcd(a_1,a_2,a_3)=1$, то во всех точках подскока E_f изоморфно $\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(1)$ и $\mathfrak{f}(E_f)=a_0a_2-a_1^2=\det A_1$.*

Доказательство. Следует из Предложений 1 и 2. □

Заметим, что $\mathfrak{f}(E_f)=\operatorname{disc}(\widetilde{f})/4$, т.к. матрица A_1 соответствует форме $\widetilde{f}$. Тогда предыдущее предложение утверждает, что слои полностью определяются разложением $\widetilde{f}$ на множители по модулю целых чисел. В частности, $\operatorname{disc}\widetilde{f}$ – максимальное среди таких целых d, что

$$\widetilde{f}\equiv\varepsilon(\xi_0v_0-\xi_1v_1)^2 \pmod d, \tag{5.13}$$

где ε некоторый обратимый по модулю d элемент, а ξ_0, ξ_1 – некоторые взаимно простые по модулю d числа. Таким образом, мы понимаем, что $E_f\simeq V_0(m,e)$ для некоторого e и $m=\operatorname{disc}\widetilde{f}$.

Хорошим кандидатом на роль e является число $\varepsilon\in(\mathbb{Z}/(m))^\times$ из (5.13), определенное с точностью до квадратов по модулю m и умножения на ±1. Мощность этого фактор-множества обозначим $N_{2,m}$. Заметим, что по пункту (2) теоремы 4, число классов изоморфизма расслоений с общим слоем и простыми подскоками также равно $N_{2,m}$. Для полного описания соответствия остаётся показать, что если две формы $\widetilde{f}_1$ и $\widetilde{f}_2$ дискриминанта m представляют разные в указанном выше смысле числа по модулю m, то расслоения, заданные f_1 и f_2, неизоморфны.

Теорема 6. *Пусть $\widetilde{f}_1=[a_0,2a_1,a_2]$ и $\widetilde{f}_2=[b_0,2b_1,b_2]$ две формы от v_0, v_1 дискриминанта m, такие что $\widetilde{f}_1$ представляет ε_1 по модулю m, а $\widetilde{f}_2$ представляет ε_2, причем не существует такого $\lambda\in\mathbb{Z}$, что $\varepsilon_1\equiv\pm\lambda^2\varepsilon_2 \pmod m$. Тогда $E_{f_1}\not\simeq E_{f_2}$.*

Доказательство. Воспользуемся снова теоремой 4, тогда $E_{f_1}\simeq V_0(m,e_1)$, $E_{f_2}\simeq V_0(m,e_2)$. Для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что для всякого вложения $s:\mathcal{O}(-2)\subset E=V_0(m,e)$, или, что то же самое, для всякого сечения $s\in H^0(E(2))$ определенная по этому вложению двойственная форма $\widetilde{f}_s \in (H^0(\mathcal{O}(2)))^\vee$ удовлетворяет условию $\widetilde{f}_s \equiv eh^2 \pmod m$, где h – линейная форма от v_0, v_1.

Воспользовавшись пунктом (5) теоремы 4, получим, что общее глобальное сечение, суженное на U_0, имеет вид $s = (s_1e_1+s_2e_2)t_0^2$, где $s_1 = u_0+u_1x+wmx^2$, $s_2 = w_0+w_1x+w_2x^2+we'x^3$, где $(u_0,u_1,w,w_0,w_1,w_2) \in \mathbb{Z}^6 \simeq H^0(E(2))$. А число e' является обратным к e по модулю m.

Предполагая, что s нигде не обращается в ноль, выполним алгоритм пункта 5.5 в общем виде, получим выражения для коэффициентов квадратичной формы $\widetilde{f}_s = [c_0, 2c_1, c_2]$:

$$\begin{aligned} &c_0 = u_0\left(e'u_0 - mw_1\right) + mu_1w_0, \quad c_1 = m^2w_0w + u_0(e'u_1 - mw_2), \\ &c_2 = u_1\left(e'u_1 - mw_2\right) - mw\left(e'u_0 - mw_1\right). \end{aligned} \tag{5.14}$$

И, в частности, $Res(s_1,s_2) = (c_1^2 - c_0c_2)/m$, воспользуемся незануляемостью s, то есть обратимостью результанта в левой части равенство, получим $\operatorname{disc}(\widetilde{f}_s) = m$. Остаётся только редуцировать форму $\widetilde{f}_s$ по модулю m и использовать, что $-e'e = 1$:

$$\widetilde{f}_s \equiv -e'(u_0v_0 - u_1v_1)^2 \equiv -e(e'u_0v_0 - e'u_1v_1)^2 \pmod m,$$

что завершает доказательство. □

Определение 1. Определим $\Phi_2(m,e)$ как множество всех квадратичных форм $\widetilde{f} = [a_0, 2a_1, a_2]$, таких что $\gcd(a_0,a_1,a_2) = 1$, $a_1^2 - a_0a_2 = \pm m$ и $\widetilde{f}$ представляет e по модулю m в смысле (5.13). Очевидно, $\Phi_2(m,e)$ инвариантно относительно несобственной эквивалентности квадратичных форм (см. [13]).

Таким образом, по всякой примитивной квадратичной форме $\widetilde{f} \in \Phi_2(m,e)$, мы можем построить расслоение $V_0(m,e)$. Утверждение о сюръективности такого отображения в множество классов изоморфизма расслоений с тривиальным общим слоем и простыми подскоками – следствие квадратичного закона взаимности Гаусса.

6. Расслоения $V_1'(m,e)$ и кубические расширения квадратичных полей

6.1. **Действие инволюции W на классах изоморфизма.** Пусть W – инволюция на $\mathrm{Vect}_2(\mathbf{P}^1)$, определенная в п. 3.1. Применяя её к расслоениям V_1 и V_1' и пользуясь пунктом (3) теоремы 5, получим $W(V_1(m,e)) \simeq V_1'(m,e')$, где $ee' \equiv 1 \pmod m$. К тому же W, очевидно, сохраняет линейный фильтрации расслоений ранга 2. Это позволяет свести изучение различных вопросов о расслоениях с общим слоем $\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(1)$ и простыми подскоками к одной из серий, например, к $V_1'(m,e)$.

Цель этой части работы – изучить фильтруемость таких расслоений. В каждой замкнутой точке и её формальной окрестности сужение любого $V_1'(m,e)$ содержит подрасслоение $\mathcal{O}(-1)$. Поэтому первый вопрос, на который мы постараемся ответить, звучит так: верно ли, что это свойство выполняется и глобально? Мы приведем необходимое и достаточное условие фильтруемости и покажем, что в случае, когда e не является кубическим вычетом по модулю m, это неверно. Поэтому следующим шагом является изучение подрасслоений $\mathcal{O}(-2) \subset V_1'(m,e)$. Мы опишем свойства кубических форм, возникающих как элементы в $(H^0(\mathcal{O}(3)))^\vee \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(3), \mathcal{O}(-2))$ и разберем на примерах связь с расширениями $\mathbb{Q}$, задавемых нулями примитивных кубических форм.

6.2. $\mathcal{O}(-1)$-фильтруемость.

Теорема 7. *Пусть $m \neq 0$ – целое число, не равное ± 1, и $\gcd(m,e) = 1$. Если e не является точным кубом по модулю m, то $\mathcal{O}(-1) \not\subseteq V_1(m,e)$, $V_1'(m,e)$.*

Доказательство. Пусть E – некоторое расслоение с общим слоем $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$ и простыми подскоками, и дивизором вырождения равным m. Так как $E(1)$ не имеет подскоков вне простых делителей m, мы можем выбрать изоморфизм $\varphi_{gen} : E(1) \simeq \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(2)$ над открытым множеством, соответствующим $\mathbb{Z}[\nu^{-1}]$. Более того, мы можем считать, что для глобального сечения s расслоения $E(1)$ выполнено $H^0(\varphi_{gen})(s) = g_1 + g_2$, где $g_1 \in H^0(\mathcal{O}(1))$ и $g_2 \in H^0(\mathcal{O}(2))$. С другой стороны, существует изоморфизм над специальными слоями, а именно φ_{sp} : $E(1) \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(3)$ над $\mathbb{Z}/(\nu)$, такой что $H^0(\varphi_{sp})(s) = h_1 + h_2$, где $h_1 \in H^0(\mathcal{O})$ и $h_2 \in H^0(\mathcal{O}(3))$.

Пусть $\mathcal{O} \subseteq E(1)$, то есть существует сечение $s \in H^0(E(1))$, не имеющее нулей на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$. Это эквивалентно тому, что $H^0(\varphi_{gen})(s)$ не имеет нулей на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}[\nu^{-1}]$ и $H^0(\varphi_{sp})(s)$ не обращается в ноль над $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/(\nu)$; кроме того, существование общих нулей соответствующих многочленов ловится обращением в ноль результантов $Res(g_1, g_2) \in \mathbb{Z}[\nu^{-1}]^*$ и $Res(h_1, h_2) \in (\mathbb{Z}/(\nu))^*$. Так как $h_1 \in H^0(\mathcal{O}) \simeq \mathbb{Z}/(\nu)$, последнее условие выполняется только в случае $h_1 \in (\mathbb{Z}/(\nu))^*$.

Зафиксируем изоморфизмы φ_{gen} and φ_{sp}, например, с помощью следующих тождеств (см. пункт 2.2 и теорему 5)

$$\begin{pmatrix} -dx^{1+j} & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax^{-1} & bx^{1-j} \\ cx^j & dx^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ ab^{-1}x^{-2+j} & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^j & 0 \\ 0 & x^{1-j} \end{pmatrix},$$

и

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax^{-1} & bx^{1-j} \\ cx^j & dx^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ -c(ad)^{-1}x^{-2+j} & d^{-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \pmod b,$$

где $j = 0$, 1; напомним, что a и d обратимы в $\mathbb{Z}/(b)$, так как $ad - bc = 1$.

Воспользуемся вычислением когомологий $E(1)$ из Леммы 6.1 ниже, из этого сразу же получаем, что $h_1 = u_0 \pmod b$, поэтому

$$u_0 \in (\mathbb{Z}/b)^*. \tag{6.1}$$

Как было отмечено в предыдущем пункте, достаточно рассматривать лишь одну серию расслоений, пусть, например, $E = V_1(m,e)$, тогда из Леммы 6.1 и изоморфизма φ_{gen}, имеем $g_1 = bw_0t_0 + (bw_1 - du_1)t_1$ и $g_2 = u_0t_0^2 + bu_1t_0t_1 + bu_2t_1^2$. Ограничивая эти сечения на U_0, получаем следующее диофантово уравнение

$$Res(g_1\big|_{U_0}, g_2\big|_{U_0}) = u_0(bw_1 - du_0)^2 - b^2w_0(u_1(bw_1 - du_0) - bw_0u_2) = \pm b^l, \tag{6.2}$$

где априори $l \in \mathbb{Z}$, однако условие (6.1) влечёт $l = 0$. Завершим рассмотрение этого случая, редуцировав уравнение (6.2) по модулю b. Действительно, остаётся условие

$$-d^2u_0^3 \equiv \pm 1 \pmod b,$$

причем $d \equiv a^{-1} \pmod b$, а по пункту (3) теоремы 5 имеем $a \equiv \pm e \pmod b$. $\square$

Лемма 6.1. *Пусть $E(1) = V_1(m,e) \otimes \mathcal{O}(1)$, где m, e как в теореме 5, тогда*

$$H^0(V) = \{(u_0t_0^2 + bu_1t_0t_1 + bu_2t_1^2,\ w_0t_0^3 + w_1t_0^2t_1^3 + du_1t_0t_1^2 + du_2t_1^3)\}$$

где $u_k, v_k \in \mathbb{Z}$, $k = 0,1,2$, также $(m) = (b)$ и $d \equiv \pm e \pmod m$.

Доказательство. Стандартное вычисление при помощи матриц склейки пункта (3) теоремы 5. ☐

Замечание 1. В обозначениях п. 4.1 теорема 7 утверждает, что $a(V_1(m,e)) - a_{\mathrm{loc}}(V_1(m,e)) \geq 2$, когда e не является точным кубом по модулю m.

Вопрос 1. Из доказательства теоремы 7 следует, что существование целых решений уравнения (6.2) при $l = 0$, удовлетворяющих условию (6.1) равносильно тому, что $\mathcal{O}(-1) \subset V_1(m,e)$. Используя компьютерную программу, мы проверили наличие таких решений при $m \leq 30$ и для всех точных кубов по модулю m. Во всех этих случаях целочисленное решение было найдено, поэтому естественно поставить вопрос о достаточности того, что e является точным кубом в $(\mathbb{Z}/m)^*$, для существования подрасслоения вида $\mathcal{O}(-1)$.

В пункте 5 мы изложили подход к классификации расслоений при помощи расширений. Так как не всякое расслоение с общим слоем и простыми подскоками $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ имеет $\mathcal{O}(-1)$ в качестве подрасслоения, достаточно естественно изучить расслоения, содержащие $\mathcal{O}(-2)$.

6.3. **Расслоения, ассоциированные с кубическими формами.** Пусть $f = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ – кубическая бинарная форма от переменных t_0, t_1. Как обычно, $\widetilde{f}$ обозначает двойственную форму $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ от переменных v_0, v_1, а E_f – расслоение, ассоциированное с f.

Сначала исследуем зависимость слоёв от коэффициентов a_i и вычислим дивизор вырождения E_f. В обозначениях пункта 5.2 имеем $n = 3$, $l = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil = 2$, и, так как n – нечётное, $\delta = 0$. Поэтому всё определяется свойствами 2×3-матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Предложение 4. *Пусть $E = E_f$ – расслоение, ассоциированное с кубической формой f. Тогда E имеет общий слой $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ в том и только том случае, когда $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}} A_0 = 2$, а наличие только простых подскоков равносильно примитивности формы f. Кроме того, дивизор вырождения E равен наибольшему общему делителю всех 2-миноров матрицы A_0 из (6.3).*

Доказательство. Это утверждение легко следует из Предложений 1 и 2. ☐

Оказывается, в этом случае соответствие гораздо интереснее и тоньше. Однако сперва следует напомнить основные свойства кубических форм и связанных с ними расширений.

6.4. **Общие сведения из теории кубических форм и полей.** Здесь мы определим основные инварианты и коварианты кубических форм, а также свойства ветвления идеалов в расширениях. За более подробным изложением отсылаем читателя, например, к восьмой главе книги Коэна [11]. Пусть $f = [a_0, \ldots, a_3]$ – кубическая бинарная форма.

Пусть K – поле. Например, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$. Нам будет нужен только случай $K = \mathbb{Q}$, однако результаты этого пункта можно сформулировать в большей общности. Пусть также Φ_n – пространство бинарных форм степени n.

Хорошо известно, что биградуированная алгебра ковариантов бинарных форм степени 3 под действием GL_2 порождается I, являющимся тождественным отображением на Φ_3, инвариантом степени 4 и веса 6 :

$$\mathrm{disc}(f) = a_1^2a_2^2 - 27a_0^2a_3^2 + 18a_0a_1a_2a_3 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3; \tag{6.4}$$

гессианом формы H_f (веса 2 и степени 2), играющим важную роль в наших конструкциях,

$$H_f = Pt_0^2 + Qt_0t_1 + Rt_1^2, \tag{6.5}$$

где $P = a_1^2 - 3a_0a_2$, $Q = a_1a_2 - 9a_0a_3$ и $R = a_2^2 - 3a_1a_3$, а также якобианом формы $J(f)$, имеющим вес и степень 3, выражения для коэффициентов $J(f)$ приводить не будем, так как этот ковариант не появится в работе. Упомянем также, что между описанными ковариантами имеется сизигия, так что биградуированная алгебра ковариантов имеет вид

$$K[I, J, H, \mathrm{disc}]/(J^2 + H^3 - 2^4 3^3 I^2\,\mathrm{disc}).$$

Также нам понадобится следующее предложение

Предложение 5 ([11])**.** *Пусть $f = [a_0, \ldots, a_3]$ – примитивная бинарная кубическая форма, $H_f = [P, Q, R]$ – гессиан f. Для простого p мы пишем $(f, p) = (1^3)$, если f имеет тройной корень в $\mathbb{F}_p$. Пусть также $\mathrm{disc}(f) = d_k\mathfrak{f}^2$, где d_k – фундаментальный дискриминант. Тогда*

(1) *$p \mid \mathrm{disc}(f)$ тогда и только тогда, когда f имеет корень кратности хотя бы 2 в $\mathbb{F}_p$.*
(2) *$(f, p) = (1^3)$ тогда и только тогда, когда $p \mid \gcd(P, Q, R)$.*
(3) *$p \mid \mathfrak{f}$ либо в случае $(f, p) = (1^3)$, либо когда*

$$f \equiv (\delta t_0 - \gamma t_1)^2(\beta t_0 - \alpha t_1) \pmod p; \quad f(\gamma, \delta) \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

6.5. Собирая вместе Предложения 4 и 5, получим:

Предложение 6. *Пусть $E = E_f$ – расслоение, ассоциированное с примитивной кубической формой f, $\widetilde{f}$ – двойственная форма. Тогда над общим слоем E изоморфно $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$, все подскоки являются простыми. Пусть P, Q, R – целые числа, являющиеся коэффициентами гессиана формы $\widetilde{f}/3$. Тогда $\gcd(P, Q, R) = \mathfrak{f}(E)$. Кроме того, при $p \neq 3$, $(\widetilde{f}, p) = (1^3)$ тогда и только тогда, когда $p \mid \mathfrak{f}(E)$.*

Таким образом, по каждой форме $\widetilde{f}$ можно определить расслоение, дивизор вырождения которого контролируется наибольшим общим делителем гессиана $\widetilde{f}/3$. Однако с учетом того, что исходная форма f должна быть примитивной, эта задача не такая простая. Тем не менее, классификационная теорема 5 утверждает, что E_f изоморфно $V_1(\mathfrak{f}(E_f), e)$ или $V_1'(\mathfrak{f}(E_f), e)$ для некоторого e.

6.6. **Кубические формы, ассоциированные с подрасслоениями $\mathcal{O}(-2) \subset V_1'$.** В пункте 5.6 мы подробно изучали подрасслоения $\mathcal{O}(-2) \subset V_0(m, e)$, а также по сечению научились находить коэффициенты формы в соответствующей группе Ext^1. Здесь мы воспользуемся такой же технологией для изучения подрасслоений $E = V_1'(m, e)(2)$, задаваемых сечениями $s \in H^0(E(2))^\times$ (случай $V_1(m, e)$ во многом аналогичен и сводится к рассматриваемому).

Вычислим когомологии $H^0(E(2)) \simeq \mathbb{Z}^7$, общее сечение имеет вид $s = (s_1e_1 + s_2e_2)t_0^2$, где

$$s_1 = u_1x + u_0 + bwx^2, \quad s_2 = w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3 + dwx^4. \tag{6.6}$$

Выполнение алгоритма из пункта 5.5 приводит к выражениям для коэффициентов f_s и $\widetilde{f}_s = [c_0, 3c_1, 3c_2, c_3]$:

$$\begin{aligned}
c_0 &= b^2u_0w_0w - bu_0^2w_2 + bu_1u_0w_1 - bu_1^2w_0 + du_0^3,\\
c_1 &= b^2u_1w_0w - b^2u_0w_1w + bu_0^2w_3 - du_0^2u_1,\\
c_2 &= -b^3w_0w^2 + b^2u_0w_2w - bdu_0^2w - bu_0u_1w_3 + du_0u_1^2,\\
c_3 &= b^3w_1w^2 - b^2u_1w_2w - b^2u_0w_3w + 2bdu_0u_1w + bu_1^2w_3 - du_1^3.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Первое наблюдение заключается в том, что $\widetilde{f}_s$ имеет специфическую редукцию по модулю b, а именно $\widetilde{f}_s \equiv d(u_0v_0 - u_1v_1)^3 \pmod b$. То есть снова мы получаем условие на локальную представимость e (которое обратно к d по модулю b по теореме 5) кубической формой с фиксированным содержанием гессиана, но в этом случае e в классификации расслоений уже определено не с точностью до кубов, а условие на представимость выглядит корректно только в таком случае.

Более удивительным является следующий результат.

Теорема 8. *Пусть $\widetilde{f}_s$ – двойственная кубическая форма к f_s, определенной некоторым сечением $s \in H^0(V_1'(m,e) \otimes \mathcal{O}(2))^\times$. Тогда*

(1) $\operatorname{disc}(\widetilde{f}/3) = -m^2(u_1^2 - 4mu_0w)$.
(2) $H_{\widetilde{f}/3} = m(u_0v_0^2 + u_1v_0v_1 + mwv_1^2)$.
(3) $\operatorname{disc}(\widetilde{f}/3)$ *может обращаться в ноль лишь при* $m = \pm 1$.

Доказательство. Первые два утверждения проверяются непосредственным вычислением с использованием формул (6.7) и определений пункта 6.4.

Докажем третье утверждение. Пусть $u_1^2 - 4mu_0w = 0$ и $|m| > 1$, тогда u_1 делится на $2m$, но в этом случае произведение u_0w также делится на m. Не уменьшая общности, можно считать, что m простое, тогда есть два случая: u_0 делится на m, это немедленно приводит к противоречию с незануляемостью s над слоем, соответствующим m, остается только возможность $m \mid w$, однако тогда размерность когомологий сужения $E(2)$ на слой над m падает, что противоречит теореме о полунепрерывности. □

Замечание 2. Теорема 8, по существу, утверждает, что классификация флагов $\mathcal{O}(-2) \subset V_1'(m,e)$ аналогична классификации кубических числовых полей $K/\mathbb{Q}$ с заданным кондуктором (за это отвечает m), для нециклических полей этот вопрос сводится к описанию всевозможных квадратичных подполей, которые содержатся $\widetilde{K}$, замыкании Галуа поля K (квадратичное подполе $\widetilde{K}$ определяется сечением s, не имеющим нулей на $\mathbf{P}^1$ (примитивная часть гессиана $\widetilde{f}/3$ имеет такие же коэффициенты, как и s_1 в (6.6)).

Замечание 3. В работе [12] изучается "двойственный" вопрос, а именно изучаются ряды Дирихле, ассоциированные с нециклическими кубическими полями с фиксированной квадратичной резольвентой.

7. Инвариант на бесконечной части

Пусть $X = \widehat{\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}}$ – компактификация по Аракелову проективной прямой (см. [1]). Это значит, что на касательном расслоении слоя $X_\infty = \mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ над проколотой окрестностью $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ задана эрмитова метрика. Стандартный выбор в случае проективной прямой – метрика Фубини–Штуди, кэлерова форма которой имеет вид

$$\omega_0 = \frac{-1}{2\pi i} \frac{dx d\overline{x}}{(1+|x|^2)^2}, \tag{7.1}$$

где x – как и раньше, координата на аффинной окрестности U_0.

Мы собираемся изучать расслоения на X. Так как конструкция компактификации не является канонической, возникает вопрос, что называть расслоением на X.

Определение 2. Пусть $\overline{\mathcal{O}}(-1)$ – тавтологическое расслоение на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ с метрикой Фубини–Штуди (см., например, [17]). Для всякого целого n обозначим $\overline{\mathcal{O}}(n) = \overline{\mathcal{O}}(-1)^{-\otimes n}$ с естественной метрикой тензорного произведения.

Определение 3. Расслоением E на $X = \widehat{\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}}$ будем называть тройку (E_0, E_∞, α), где

- E_0 – расслоение ранга r на $X_0 = \mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ – конечной части X.
- $E_\infty = \bigoplus \overline{\mathcal{O}}(d_i)$, где $1 \le i \le r$, – метризованное расслоение на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{C}}$.
- $\alpha : E_0 \otimes \mathbb{C} \to E_\infty$ – изоморфизм склейки на $X_0 \cup X_\infty$.

Мы также будем считать, что все d_i равны. Это связано с условием Кэлера–Эйнштейна на метрику на расслоении (см. [17] или [3]). На комплексной проективной прямой оно равносильно тому, что расслоение является суммой расслоений одинаковой степени, то есть тривиальным ранга r с точностью до подкрутки.

Пусть E – расслоение на X, где X – компактификация $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$, обозначим соответствующую метрику h_E. В нашем случае она снимается с метрики на E_∞ (используем изоморфизм α).

Для всякого $q \ge 0$ пусть $A^{0q}(X, E) = A^{0q}(X) \otimes_{C^\infty(X)} C^\infty(X, E)$ обозначает пространство $(0, q)$-форм на X со значениями в E.

Метрика на касательном расслоении X задает поточечное скалярное произведение $A^{0q}(X)$, а его тензорное произведение с h_E задаёт поточечное скалярное произведение на $A^{0q}(X, E)$. Определим L^2-метрику на пространстве сечений $A^{0q}(X, E)$:

$$\langle s,\, t \rangle_2 = \int_{X(\mathbb{C})} \langle s(x), t(x) \rangle \omega_0, \tag{7.2}$$

где ω_0 – форма объема на X_∞, $\langle s(x), t(x) \rangle$ – поточечное скалярное произведение.

Конечно, s и t можно считать элементами $A^0(X, E)$, однако нас будут интересовать только сечения, приходящие из $H^0(X_0, E_0)$. Более того, как и при определении амплитуды $a(E)$, мы хотим изучать сечения, которые не обращаются в ноль на конечной части, иначе говоря, определяют вложение расслоений $L \subset E_0$. Как было отмечено раньше, вложение $L \subset E_0$ определяется сечением $s_L \in H^0(E_0 \otimes L^*)^\times$, образом единицы при вложении $\mathcal{O} \to E_0 \otimes L^*$.

Положим $\widetilde{E_0} = E_0 \otimes (\operatorname{Det} E_0)^{\frac{-1}{r}}$, где $r = \operatorname{rk} E$, а из линейного расслоения $\operatorname{Det}(E_0)$ извлекается корень, так как мы ограничиваемся рассмотрением расслоений, допускающих метрику Кэлера–Эйнштейна.

Определим число

$$\varepsilon_1(E, n) = \min_{s \in H^0(\widetilde{E}_0(n))^\times} \langle s,\, s\rangle_2. \tag{7.3}$$

Таким образом определенное число $\varepsilon_1(E, n)$ не зависит от подкрутки E на линейное, то есть зависит только от амплитуды определяемой фильтрации, а также оценивается снизу минимумом по $H^0(\widetilde{E}_0(n))$. Отметим, что существует такое целое n_0, что при $n \le n_0$ минимум берётся по пустому множеству, и $\varepsilon_1(E, n) = +\infty$.

По аналогии определим инварианты $\varepsilon_i(E, n)$ при $i > 1$, рассматривая минимум по множеству $H^0(\widetilde{E}_0(n))^\times$ без тех сечений, на которых достигается $\varepsilon_{i-1}(E, n)$. Также подчеркнём, что $\varepsilon_i(E, n)$ зависит от α из определения E.

Другой способ определить метрический инвариант расслоения, не зависящий от подкрутки, заключается в следующем. Вычисляя, как растягивается метрика при умножении E_0 на линейное $\mathcal{O}(n)$, придём к равенству

$$h_{E(n)}(s_{L(n)},\, s_{L(n)}) = h_E(s_L, s_L)\, \|1\|_{\mathcal{O}(2n)}\,, \tag{7.4}$$

где $\|1\|_{\mathcal{O}(2n)} = h_{\mathcal{O}(n)}(1, 1)$, 1 обозначает рациональное сечение $\mathcal{O}(n)$. Логарифмируя последнее равенство и беря интегралы по X_∞, получим по определению степени $\deg_\infty$ (см. определения в [18]) над бесконечной частью, а затем перейдем к минимуму:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\infty(E, -\deg(L)) = &\min_{H^0(E_0 \otimes L^*)^\times}(-2\deg_\infty L + (\deg_\infty E)) = \\ &- \operatorname{rk}(E) \max_{H^0(E_0 \otimes L^*)^\times} \deg_\infty L + \deg_\infty E.\end{aligned} \tag{7.5}$$

Возможно, это более естественный инвариант, чем $\varepsilon_i(E, n)$, но в данной работе мы его рассматривать не будем.

7.1. **Явный вид $\varepsilon_i(E, n)$ для расслоений ранга два.** Так как мы работаем с полистабильными расслоениями на X, а определенные инварианты не зависят от подкруток, можем считать, что общий слой E является тривиальным расслоением ранга 2, а E включено в последовательность метризованных расслоений

$$0 \to \mathcal{O}(-n) \xrightarrow{s} E \to \mathcal{O}(n) \to 0, \tag{7.6}$$

причем метрика на $\mathcal{O}(-n)$ является сужением метрики на E, а метрика на факторе определяется с помощью ортогонального разложения E как аналитического расслоения $\mathcal{O}(-n) \boxplus \mathcal{O}(-n)^\perp$. При таком определении не возникает первого вторичного класса Черна–Ботта. Отметим, что амплитуда фильтрации (7.6) равна $2n - 2$.

Напомним, что s содержится в $H^0(X, E_0(n))^\times$. Пусть $E_0(n)$ тривиализовано на U_0 и U_1, как в (5.11). Запишем s локально на U_0, оно примет вид

$$s = s_1 e_1 + s_2 e_2. \tag{7.7}$$

Пусть $H = (H_{ij})$ – матрица Грама, соответствующая сужению метрики $h_{E(n)}$ на U_0. После несложных вычислений получим, что

$$h_{E(n)}(s, s) = |s_1|^2 H_{11} + 2\Re(s_1 \overline{s_2} H_{21}) + |s_2|^2 H_{22}.$$

В конкретных примерах это выражение может быть сильно упрощено. Вернемся к случаю расслоений с тривиальным общим слоем и простыми подскоками.

7.2. **Пример с неэкстремальной метрикой.** Пусть E_0 задается своей матрицей склейки σ (см. п. (5) теоремы 4), зафиксируем изоморфизм с $\mathcal{O}^2$ на $X_0 \cap X_\infty$, причем на $\mathcal{O}^2$ имеется стандартная постоянная метрика, которая вкупе с фиксированным изоморфизмом задаёт метрику на E. Пусть $s \in H^0(E_0(2))$, условие глобальности равносильно тому, что $s_1 = u_0 + u_1 x + wbx^2$, $u_2 = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + wdx^3$, где все коэффициенты целые. Рутинные преобразования приводят к выражению

$$h_{E(2)}(s,s) = (|ds_1 x - bs_2|^2 + |s_1|^2)(1+|x|^2)^{-2}, \tag{7.8}$$

где $bs_2 - ds_1 x = v_0 + (v_1 b - u_0 d)x + (bv_2 - du_1)x^2$.

Интегрируя это выражение по проективной прямой, то есть вычисляя $\langle s,\, s\rangle_2$, получим сумму квадратов с некоторыми весами, которые вычисляются при помощи интегралов $|x|^l/(1+|x|^2)^n$ по форме объема ω_0, обозначим такой интеграл $I(l,n)$. Тогда несложное вычисление приводит к выражению

$$I(l,n) = (n+1)^{-1} \binom{n}{m}^{-1}, \quad \text{где } 2m = l. \tag{7.9}$$

И в таком случае $\varepsilon_1(E,2)$ имеет вид

$$\varepsilon_1(E,2) = \min_{s \in H^0(E_0(2))^\times} \frac{1}{3}(u_0^2 + w_0^2 + \frac{1}{2}((w_1 b - u_0 d)^2 + u_1^2) + (w_2 b - u_1 d)^2 + b^2 w^2). \tag{7.10}$$

Пусть $E_0 = V_0(5,2)$. Находя какое-нибудь сечение из $H^0(E_0(2))^\times$ (мы взяли решение из [7]), получим оценку сверху:

$$\varepsilon_1(E,2) \le \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2}(2^2 + 2^2) + (5-4)^2) = 2.$$

Перебрав конечное число значений коэффициентов, можно показать, что это и есть минимум.

7.3. **Вещественные параметры.** Пусть на $X_0 \cap X_\infty$ заданы изоморфизмы

$$\alpha, \alpha' :\ E_0 \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^2\,. \tag{7.11}$$

Тогда имеется диаграмма

$$\begin{tikzcd} & E_0\big|_{U_j} \otimes \mathbb{R} \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\ \mathcal{O}_{U_j} \times \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "\alpha'\alpha^{-1}"] & & \mathcal{O}_{U_j} \times \mathbb{R}^2 \end{tikzcd},$$

поэтому $\alpha'\alpha^{-1}$ определяет автоморфизм $\mathbb{R}^2$, другими словами произвольный изоморфизм $E_0 \otimes \mathbb{R} \to E_\infty$ может быть получен из некоторого фиксированного умножением на автоморфизм $\mathbb{R}^2$.

Обозначим $\alpha'\alpha^{-1} = \gamma$, тогда $(\alpha')^{-1} = \alpha^{-1}\gamma^{-1}$.

Таким образом, с помощью метрических данных можно определить инвариант расслоения над конечной частью, а именно рассматривая все расслоения на X вида (E_0, α, E_∞), где E_0 и E_∞ фиксированные, и минимизируя $\varepsilon_i(E,n)$ ещё и по α.

Определение 4. С каждым расслоением E_0, таким, что $E_0 \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathcal{O}^r(k)$ для некоторого целого k свяжем набор инвариантов $\widehat{\varepsilon}_i(E_0, n)$, определенный следующим образом
$$\widehat{\varepsilon}_1(E_0, n) = \min_{\alpha} \min_{s \in H^0(\widetilde{E}_0(n))} \langle s,\, s\rangle, \tag{7.12}$$
где $\widetilde{E}_0 = E_0 \otimes (\mathrm{Det}(E_0))^{-1/r}$. По аналогии определим также $\widehat{\varepsilon}_i(E_0, n)$ при $i > 1$.

7.4. **Замечания о вычислениях.** Для вычислений на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ мы будем пользоваться спецификой схемы, а также считать, что изоморфизмы α заданы матрицами (то есть фиксировать тривиализации). Тогда γ из предыдущего пункта можно считать матрицей из $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ с определителем 1, чтобы ничего не зависело от растяжения метрики на постоянный множитель.

7.5. **Вычисление метрики с параметрами.** Этот пункт посвящен чисто техническому вычислению матрицы Грама для метрик на (E_0, α, E_∞). Пусть α – фиксированный изоморфизм с бесконечной частью рассматриваемого расслоения. На аффинном куске U_0 он задается некоторой матрицей из $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}[x])$. Здесь мы заметим, что существует даже изоморфизм α с рациональными коэффициентами (так как E_0 изоморфно сумме линейных над общим слоем $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Q}}$), а произвольный получается умножением на постоянную вещественную матрицу. Введем обозначения для компонент соответствующих матриц. Вычисление показывает, что на данном аффинном куске метрика задается следующей матрицей Грама
$$\begin{pmatrix} |A|^2 g_{11} + 2\Re(\overline{A}C) g_{12} + |C|^2 g_{22} & A\overline{B} g_{11} + (C\overline{B} + A\overline{D}) g_{12} + C\overline{D} g_{22} \\ \overline{A}B g_{11} + (\overline{C}B + \overline{A}D) g_{12} + \overline{C}D g_{22} & |B|^2 g_{11} + 2\Re(\overline{B}D) g_{12} + |D|^2 g_{22} \end{pmatrix}, \tag{7.13}$$
где
$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \text{ и } \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = (\overline{\gamma}\gamma^t)^{-1}. \tag{7.14}$$

7.6. **Изоморфизм с тривиальным расслоением над $\mathbb{Q}$.** Воспользуемся предыдущим пунктом в случае расслоений с тривиальным общим слоём и простыми подскоками. Пусть $E = V_0(m, e)$ задано матрицей склейки σ из теоремы 4. Тогда
$$\begin{pmatrix} dx & -b \\ -1/b & 0 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a(bx)^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

Пусть $E\big|_{U_0}$ имеет базис e_1, e_2, а l_1, l_2 – базис сужения $\mathcal{O}^2$ на U_0. Тогда
$$(e_1,\, e_2)\alpha = (l_1,\, l_2), \tag{7.16}$$
где $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} dx & -b \\ -1/b & 0 \end{pmatrix}$. Матрица Грама (7.13) принимает в этом случае вид
$$\begin{pmatrix} d^2|x|^2 g_{11} + 2d/b\Re(\overline{x}) g_{12} + |1/b|^2 g_{22} & -bdx g_{11} - g_{12} \\ -bd\overline{x} g_{11} - g_{12} & b^2 g_{11} \end{pmatrix}. \tag{7.17}$$

Следующий вопрос – как выглядит длина глобального сечения $E(2)$. Пусть $s = (s_1 e_1 + s_2 e_2) t_0^2$, где s_1, s_2 – полиномы от x, удовлетворяющие условиям глобальности. Длина s вычисляется по формуле
$$h(s,s) = (|s_1 x d - b s_2|^2 g_{11} + 2\Re(\overline{u}/b\,(s_1 x d - s_2 b)) g_{12} + |s_1|^2/b^2 g_{22})(1+|x|^2)^{-2}, \tag{7.18}$$
где g_{ij} как в (7.14) и $\det(g_{ij}) = 1$ (по замечанию п. 7.4).

7.7. **Вычисление экстремальной метрики с помощью множителя Лагранжа.** Вычислим квадрат L^2-длины сечения $s \in H^0(E(2))$, пользуясь формулой (7.18) и значениями интегралов (7.9), а также вычислением когомологий из п. 7.2.

Тогда

$$3\langle s,\, s\rangle_2 = Q_0 g_{11} + 2Q_1 g_{12} + Q_2 g_{22}, \tag{7.19}$$

где

$$\begin{aligned} Q_0 &= b^2 w_0^2 + (u_0 d - bw_1)^2/2 + (u_1 d - bw_2)^2 \\ Q_1 &= (-bw_0 u_0 + u_1(du_0 - bw_1)/2 + bw(du_1 - bw_2))/b \\ Q_2 &= (u_0^2 + u_1^2/2 + b^2 w^2)/b^2. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Чтобы найти минимум $Q_0 g_{11} + 2Q_1 g_{12} + Q_2 g_{22}$ на поверхности $g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = 1$, воспользуемся множителями Лагранжа, получим необходимые условия

$$Q_0 = \lambda g_{22}, \quad Q_1 = -\lambda g_{12}, \quad Q_2 = \lambda g_{11}. \tag{7.21}$$

Откуда $\lambda = (Q_0 Q_1 - Q_2^2)^{1/2}$. Если $\lambda > 0$, то выполняется достаточное условие локального минимума. Вообще говоря, многократным применением неравенства Коши можно доказать, что минимум глобальный. Подставив найденные экстремальные метрические коэффициенты в формулу (7.19), придем к

$$Q_0 g_{11} + 2Q_1 g_{12} + Q_2 g_{22} = 2\lambda. \tag{7.22}$$

Мы, таким образом, для каждого невырожденного сечения можем находить экстремальные значения метрических коэффициентов. Возникает вопрос, как найти самый короткое сечение среди всех подрасслоений заданного, а также, как найти максимум длины самого короткого сечения по всем расслоениям.

Вернемся к выражению для минимума длины квадрата длины сечения s в с экстремальной метрикой:

$$\begin{aligned} &\frac{9b^2}{4}\langle s,\, s\rangle_2^2 = \Big(b^2 v_0^2 + (u_0 d - bv_1)^2/2 + (u_1 d - bv_2)^2\Big)\Big(u_0^2 + u_1^2/2 + b^2 w^2\Big) \\ &- \Big(- bv_0 u_0 + u_1(du_0 - bv_1)/2 + bw(du_1 - bv_2)\Big)^2 = (c_0^2 + 2c_1^2 + c_2^2)^2/2, \end{aligned} \tag{7.23}$$

где c_0, c_1 и c_2 – коэффициенты квадратичной формы f_s, построенной по сечению s. Мы встречали эти коэффициенты в пункте 5.6 (см. формулу (5.14)). Из (7.23), в частности, следует, что $\lambda > 0$.

Напомним, что след $\mathrm{tr}(\widetilde{f})$ квадратичной формы $\widetilde{f} = [c_0, 2c_1, c_2]$ равен $c_0 + c_1$.

Теорема 9. *Пусть $V_0(m,e)$ – некоторое расслоение с тривиальным общим слоем и простыми подскоками, $\widehat{\varepsilon}_i(E_0, 2)$ – множество инвариантов E_0 (см. Определение 4), $i \geq 1$. Тогда*

$$\widehat{\varepsilon}_1(V_0(m,e), 2) = \frac{1}{3m} \min_{\widetilde{f} \in \Phi_2(m,e)} \sqrt{2(\mathrm{tr}(\widetilde{f})^2 - 2m)}, \tag{7.24}$$

аналогичные формулы верны для $\widehat{\varepsilon}_i$ при $i \geq 2$.

Доказательство. Воспользуемся последним равенством из формулы (7.23), а также определением множества $\Phi_2(m,e)$ из п. 5.6. $\square$

8. Таблицы

При помощи компьютера были вычислены первые значения $\widehat{\varepsilon}_i$ для некоторых расслоений с тривиальным общим слоем и простыми подскоками. Из теоремы 9 видно, что для каждого такого расслоения E имеется бесконечная последовательность $\widehat{\varepsilon}_i(E,2)$. В таблицах приведены значения инвариантов с точностью до множителя $\frac{1}{3}$.

Таблица 1: Значения $\varepsilon_i(E,n)$, для $\mathcal{O}(-1)$–фильтруемых E.

Расслоение $V(b,a)$	$\varepsilon_1(E,-2)$	$\varepsilon_i(E,n), i>1$
$V(7,2)$	$\sqrt{30}/7$	$\sqrt{36}/7$, $\sqrt{44}/7$, $\sqrt{46}/7$
$V(9,2)$	$\sqrt{38}/9$	$\sqrt{44}/9$, $\sqrt{62}/9$, $\sqrt{68}/9$
$V(11,2)$	$\sqrt{46}/11$	$\sqrt{54}/11$, $\sqrt{62}/11$, $\sqrt{84}/11$,$\sqrt{116}/11$
$V(13,3)$	$\sqrt{52}/13$	$\sqrt{54}/13$, $\sqrt{70}/13$, $\sqrt{84}/13$, $\sqrt{150}/13$
$V(14,3)$	$\sqrt{72}/14$	$\sqrt{74}/14$, $\sqrt{88}/14$,$\sqrt{106}/14$, $\sqrt{186}/14$
$V(15,4)$	$\sqrt{68}/15$	$\sqrt{110}/15$,$\sqrt{140}/15$
$V(17,4)$	$\sqrt{68}/17$	$\sqrt{76}/17$, $\sqrt{140}/17$, $\sqrt{166}/17$, $\sqrt{174}/17$, $\sqrt{230}/17$
$V(55,21)$	$\sqrt{222}/55$	$\sqrt{270}/55$, $\sqrt{420}/55$, $\sqrt{612}/55$, $\sqrt{868}/55$

В таблице 2 мы также указываем коэффициенты примитивных форм из $\Phi_2(m,e)$, на которых достигаются первые минимальные значения, а также, указываем, существуют ли подрасслоения, определяющие квадратичные формы положительного и отрицательного дискриминанта (ответ на этот вопрос при помощи теоремы 6 сводится к вычислению символов Лежандра), знак $+$ в первом столбце символизирует наличие ассоциированных квадратичных форм положительного дискриминанта, знак $-$ отвечает за формы отрицательного дискриминанта. Синим цветом в некоторых строках выделены первые появления форм отрицательного дискриминанта.

Таблица 2: Значения $\varepsilon_i(E,-2)$, для первых E, не имеющих подрасслоений $\mathcal{O}(-1)$.

E_0	$\widehat{\varepsilon}_1(E,2)$	$\widehat{\varepsilon}_i(E,2), i>0$	Примитивные тройки
$V_0(5,2)+-$	$\sqrt{20}/5$	$\sqrt{30}/5>1$	$(-2,1,2)$, $(2,1,3)$
$V_0(8,3)-$	$\sqrt{40}/8$	$\sqrt{66}/8>1$	$(3,1,3)$
$V_0(10,3)+-$	$\sqrt{40}/10$	$\sqrt{42}/10$, $\sqrt{58}/10$, $\sqrt{90}/10$	$(3,1-3)$, $(2,0,5)$
$V_0(12,5)-$	$\sqrt{50}/12$	$\sqrt{152}/12>1$	$(3,0,4)$
$V_0(13,5)+-$	$\sqrt{52}/13$	$\sqrt{84}/13$, $\sqrt{110}/13$	$(-2,3,2)$, $(2,1,7)$
$V_0(15,2)+-$	$\sqrt{62}/15$	$\sqrt{68}/15$, $\sqrt{74}/15$, $\sqrt{110}/15$, $\sqrt{140}/15$, $\sqrt{158}/15$, $\sqrt{182}/15$	$(2,3,-3)$, $(2,1,8)$
$V_0(16,3)+-$	$\sqrt{66}/16$	$\sqrt{72}/16$, $\sqrt{82}/16$, $\sqrt{98}/16$, $\sqrt{114}/16$, $\sqrt{136}/16$, $\sqrt{226}/16$	$(3,2,-4)$, $(4,2,5)$
$V_0(17,3)-$	$\sqrt{94}/17$	$\sqrt{132}/17$, $\sqrt{270}/17$	$(3,1,6)$
$V_0(20,3)-$	$\sqrt{120}/20$	$\sqrt{162}/20$, $\sqrt{370}/20$	$(3,1,7)$
$V_0(21,8)+-$	$\sqrt{116}/21$	$\sqrt{212}/21$, $\sqrt{254}/21$	$(2,-3,-6)$, $(3,0,7)$
$V_0(24,5)+-$	$\sqrt{98}/24$	$\sqrt{104}/24$, $\sqrt{146}/24$, $\sqrt{194}/24$, $\sqrt{242}/24$, $\sqrt{296}/24$, $\sqrt{434}/24$	$(-4,2,5)$, $(5,4,8)$

$V_0(24,7)-$	$\sqrt{146}/24$	$\sqrt{296}/24$	$(4,2,7)$
$V_0(24,11)-$	$\sqrt{146}/24$	$\sqrt{296}/24$	$(3,0,8)$
$V_0(25,3)+-$	$\sqrt{108}/25$	$\sqrt{118}/25$, $\sqrt{132}/25$, $\sqrt{172}/25$, $\sqrt{228}/25$, $\sqrt{300}/25$, $\sqrt{350}/25$	$(2,5,0)$, $(2,1,13)$

9. Заключение

В заключение отметим несколько важных вопросов. Первый из них – насколько может быть велика разница глобальной и локальной амплитуд? (См. определения в п. 4.1.) Также хотелось бы объяснить теоремы 7 и8 геометрически, в частности, понять, например, откуда возникают препятствия в виде кубических невычетов в первой из них.

Литература

[1] *С. Ю. Аракелов.* Теория пересечений дивизоров на арифметической поверхности, Изв. АН СССР. Сер. матем., 38:6 (1974), 1179–1192.

[2] *Б. Л. Ван дер Варден.* Алгебра. Москва, Мир, 1976.

[3] *Ю. И. Манин*, Новые размерности в геометрии, УМН, 39:6(240) (1984), 47–73.

[4] *К. Оконек, М. Шнайдер, Х. Шпиндлер.* Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах. Москва, Мир, 1984.

[5] *А. А. Суслин.* Проективные модули над кольцами многочленов свободны. Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 5, с. 1063-1066.

[6] *А. Л. Смирнов.* Векторные расслоения на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ с простыми подскоками, Вопросы теории представлений алгебр и групп. 30, Зап. научн. сем. ПОМИ, 452, ПОМИ, СПб., 2016, 202–217.

[7] *А. Л. Смирнов, С. С. Яковенко* Построение линейной фильтрации для расслоений ранга 2 на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$, Математический сборник, 208:4 (2017), 111–128.

[8] *Р. Хартсхорн.* Алгебраическая геометрия. Москва, Мир, 1981.

[9] *С. С. Яковенко.* Векторные расслоения на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ с общим слоем $\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(1)$ и простыми подскоками, Вопросы теории представлений алгебр и групп. 30, Зап. научн. сем. ПОМИ, 452, ПОМИ, СПб., 2016, 218–237.

[10] *J.-B. Bost.* Theta invariants of euclidean lattices and infinite-dimensional hermitian vector bundles over arithmetic curves, preprint, https://arxiv.org/abs/1512.08946

[11] *H. Cohen.* Advanced Topics in Computational Number Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2000.

[12] *H. Cohen, F. Thorne.* Dirichlet series associated to cubic fields with given quadratic resolvent, preprint, https://arxiv.org/abs/1301.3563.

[13] *D. A. Cox.* Primes of the form $x^2 + ny^2$: Fermat, class field theory, and complex multiplication, Wiley, 1997.

[14] *H. Gillet, C. Soule*, An arithmetic Riemann–Roch theorem (1992), Inventiones Math. 110, 474-543.

[15] *A. Grothendieck, J. Dieudonné.* Éléments de géométrie algébrique: II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 1961, 8, 5–222.

[16] *Ch. C. Hanna.* Subbundles of vector bundles on the projective line. J. Algebra, 52, no. 2, 322-327, 1978.

[17] *D. Huybrechts* Complex algebraic geometry. An introduction. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[18] *A. Moriwaki*, Inequality of Bogomolov–Gieseker's type on arithmetic surfaces, Duke Math. J. 74 (1994), 713–761.

[19] *D. Quillen.* Projective modules over polynomial rings, Invent. Math., 1976, vol. 36, p. 167–171.

[20] *A. Smirnov.* On filtrations of vector bundles over $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$, Arithmetic and Geometry, Cambridge Univ. Press, London Math. Soc. Lect. Note Series: 420, 436-457, 2015.