Правительство Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет»

Кафедра Высшей Алгебры и Теории Чисел

Цыбышев Алексей Евгеньевич

О гипотезе Гротендика-Серра в неравнохарактеристическом случае: II

Магистерская диссертация

Допущена к защите.
Зав. кафедрой:
д. ф.-м. н., профессор Яковлев А. В.

Научный руководитель:
д. ф.-м. н. Панин И. А.

Рецензент:
д. ф.-м. н. Смирнов А. Л.

Санкт-Петербург
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Chair of Algebra and Number Theory

Aleksei Tsybyshev

On the Grothendieck-Serre conjecture in the mixed-characteristic case: II

Graduation Thesis

Admitted for defence.
Head of the chair:
professor Anatolii Yakovlev

Scientific supervisor:
professor Ivan Panin

Reviewer:
professor Aleksandr Smirnov

Saint-Petersburg
2017

Введение

В работе [A] Артин ввел понятие элементарного расслоения над базой S. В той же работе он доказал, что для гладкого неприводимого многообразия размерности d над алгебраически замкнутым полем каждая точка обладает окрестностью, снабженной структурой элементарного расслоения над открытым подмножеством проективного пространства размерности $d-1$. В работе [PSV] этот результат был расширен на гладкие многообразия над бесконечным совершенным полем. Последнее было использовано, чтобы существенно продвинуться в решении гипотезы Гротендика—Серра. В настоящей работе рассматривается гладкая проективная схема над спектром кольца дискретного нормирования A с бесконечным полем вычетов. Доказывается, что любая замкнутая точка обладает окрестностью, снабженной структурой элементарного расслоения над открытым подмножеством проективного $(n-1)$-мерного пространства P_A. Указанный результат применяется в доказательстве теоремы 1.1

1 Теорема 1.1 и план её доказательства

Теорема 1.1. *Пусть A - кольцо дискретного нормирования с бесконечным полем вычетов, $V = Spec(A)$, $v = \{\pi = 0\} \in V$ - замкнутая точка, X - неприводимая гладкая проективная схема над V, $x_1, \ldots, x_n \in X$ - замкнутые точки, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X, x_1, \ldots, x_n$, $U = Spec(\mathcal{O})$, G - полупростая группа над V, E - главное однородное G-расслоение на X. Предположим, что это расслоение тривиально в общей точке, то есть становится тривиальным после сужения на подмножество $\{f \neq 0\}$ для некоторого f, причем $F_v \neq 0$ Тогда существует главное G-расслоение E_t над $\mathbb{A}^1_U$ и многочлен $g(t) \in \mathcal{O}[t]$, такие, что*

1. *G-расслоение E_t тривиально над $\mathcal{O}[t]_f$*
2. *E_t совпадает после ограничения на $t = 0$ с E, ограниченным на U*
3. *$g(1) \in \mathcal{O}$ обратим*

План доказательства теоремы 1. 1. *Это расслоение мы склеим по квадрату Нисневича 3. Для этого надо построить схему, этальную над $\mathbb{A}^1_U$ (Утверждение 1.2). Кроме того, она должна, вместе с дополнением к нулевому сечению, удовлетворять определению квадрата Нисневича, то есть над нулевым сечением должна быть изоморфная ему замкнутая подсхема. Для этого необходима* *работа по его модификации, проделанная в доказательстве теоремы 2.3. Все эти данные собираются воедино в Следствии 3.2*

Выберем по теореме Бертини гладкую гиперповерхность $Z \subset X$, такую, чтобы $codim(Q := Z_v \cap \{f_v = 0\}) \geqslant 2$ Следуя [PSV, A1], для слоя X_v, пропуская переход к нормализации, получаем (наложив на них дополнительное условие, чтобы кривая через каждую точку x_i не пересекала Q) набор сечений $\overline{\varphi_1} \dots \overline{\varphi_n}$ расслоения $\mathcal{O}_v(m)$, причём m мжно взять сколь уогдно большим. Поскольку $v = \{\pi = 0\} \subset V$, есть точная последовательность

$$H^0(X, \mathcal{O}(m)) \to H^0(X, \mathcal{O}(m)) \to H^0(X, \mathcal{O}_v(m)) \to H^1(X, \mathcal{O}(m)).$$

Так как m можно взять достаточно большим, H^1 занулится, и у сечений появятся подъемы $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Эти сечения задают морфизм φ из раздутия X' схемы X в схеме T их общих нулей в $S = \mathbb{P}_V^{n-1}$. При этом: φ_i образуют регулярную последовательность, так как это так во всех замкнутых точках. Значит, раздутие гладкое.

(Вообще говоря, раздутие гладкой S-схемы X в замкнутой подсхеме P, конечной этальной над S, гладко над S: для доказательства, перейдём к этальному покрытию $S' \to S$, над которым P становится тривиальным. Достаточно доказать S'-гладкость схемы $(Bl_P X) \times_S S'$. Но, поскольку морфизм $S' \to S$ плоский, то же можно сказать про $(Bl_P X) \times_S S' \to (Bl_P X)$, а значит, прообраз дивизора Картье - дивизор Картье, и Pull-back раздутия удовлетворяет универсальному свойству раздутия $X \times_S S'$ в $P \times_S S'$. Далее, известно, что гладкий морфизм можно локально разложить как этальный морфизм в аффинное пространство. Ещё раз пользуясь тем, что раздутие коммутирует с плоским pullback-ом, сводим общий случай к раздутию аффинного пространства в начале координат, который локально изоморфен аффинному пространству, и, тем самым, гладок.)

Аналогично, морфизм $X' \to S$ над окрестностью точек $\varphi(x_i)$ гладкий (плоский из соображений регулярности и размерности, и имеет гладкий слой), после ограничения на Z - конечный этальный, а на $\{f = 0\}$ - конечный сюръекивный. При этом в прообразе окрестности точек $\varphi(x_i)$ Z и $\{f = 0\}$ не пересекаются. Поэтому если перейти к аффинной части $X'^0 \subset X'$, подсхема $f = 0$ останется конечной над S Так же, как в [PSV, A1] доказывается существование в окрестности $\varphi(x_i)$ конечного сюръективного морфизма $X'^0 \to \mathbb{A}^1_S$. Эти рассуждения позволяют обобщить [PSV, пункт 6] на наш случай: возьмём $\mathcal{X} = X'^0 \times_S U, \mathrm{pr}_2 : \mathcal{X} \to U, \psi =$

$pr_1 : \mathcal{X} \to X, Delta = (can, id)$, где can - каноническое вложение спектра локального кольца в точке, и $F = \psi^*(f)$.

Утверждение 1.2. *Это относительная гладкая аффинная кривая с сечением и функцией. Кроме того, имеется конечный сюръективный U-морфизм $\mathcal{X} \to \mathbb{A}^1_U$. Также заметим, что раз функция f зануляется в x_i, то функция F зануляется во всех замкнутых точках $\Delta(U)$.*

Такие данные удобно, следуя [PSV], назвать термином „хорошая тройка“.

2 Хорошие тройки и их свойства

Определение 2.1. *Пусть $X, x_1, \ldots, x_n, U$ такие же, как в прошлом пункте.* Хорошая тройка *над U состоит из следующих данных:*

(i) *гладкого морфизма $q_U : \mathcal{X} \to U$, где $\mathcal{X}$ неприводимая схема,*

(ii) *элемента $F \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_\mathcal{X})$,*

(iii) *сечения Δ морфизма q_U,*

удовлетворяющих следующим условиям:

(a) *каждая неприводимая компонента каждого слоя морфизма q_U одномерна,*

(b) *модуль $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_\mathcal{X})/F \cdot \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_\mathcal{X})$ конечен как $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) = \mathcal{O}$-модуль,*

(c) *существует конечный сюръективный U-морфизм $\Pi : \mathcal{X} \to \mathbf{A}^1 \times U$,*

(d) *$\Delta^*(F) \neq 0 \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$.*

Пусть U такое, как в определении 2.1. Пусть $(\mathcal{X}, f, \Delta)$ хорошая тройка над U. Тогда для кажого конечного сюръективного U-морфизма $\sigma : \mathcal{X} \to \mathbf{A}^1 \times U$ и соответствующего вложения $\mathcal{O}$-алгебр $\mathcal{O}[t] \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_\mathcal{X})$ алгебра $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_\mathcal{X})$ конечно порождена как $\mathcal{O}[t]$-модуль. Поскольку и $\mathcal{O}[t]$, и $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_\mathcal{X})$ регулярны, алгебра $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_\mathcal{X})$ конечно порождена и проективна как $\mathcal{O}[t]$-модуль по теореме [E, Cor. 18.17]. Пусть $T^r - a_{n-1}T^{r-1} + \cdots \pm N(f)$ характеристический полином эндоморфизма $\mathcal{O}[t]$-модуля $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_\mathcal{X}) \xrightarrow{f} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_\mathcal{X})$, и пусть

$$g_{f,\sigma} := f^{r-1} - a_{n-1}f^{r-2} + \cdots \pm a_1 \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_\mathcal{X}). \qquad (1)$$

Лемма 2.2. $f \cdot g_{f,\sigma} = \pm N(f) \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$.

Доказательство. Действительно, характеристический полином оператора $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \xrightarrow{f} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ зануляется на f. □

Сформулируем ключевой результат, использующийся в доказательстве теоремы 1.1

Теорема 2.3. *Пусть U такое, как в определении 2.1. Пусть $(\mathcal{X}, f, \Delta)$ - хорошая тройка над U, такая, что f зануляется в каждой замкнутой точке $\Delta(U)$. Существует выделенный конечный сюръективный морфизм*

$$\sigma : \mathcal{X} \to \mathbf{A}^1 \times U$$

U-схем со следующими свойствами.

(1) *σ этален в точках замкнутого подмножества $\{f = 0\} \cup \Delta(U)$.*

(2) *Для $g_{f,\sigma}$ и $N(f)$, определённых выделенным σ, имеем*

$$\sigma^{-1}\Big(\sigma\big(\{f = 0\}\big)\Big) = \{N(f) = 0\} = \{f = 0\} \sqcup \{g_{f,\sigma} = 0\}.$$

(3) *Обозначим $\mathcal{X}^0 \hookrightarrow \mathcal{X}$ наибольшую открытую подсхему, где морфизм σ этален. Обозначим $g_{f,\sigma}$ g в этом пункте. Тогда квадрат*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}^0_{N(f)} = \mathcal{X}^0_{fg} \arrow[r, "\mathrm{inc}"] \arrow[d, "\sigma^0_{fg}"'] & \mathcal{X}^0_g \arrow[d, "\sigma^0_g"] \\ (\mathbf{A}^1 \times U)_{N(f)} \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & \mathbf{A}^1 \times U \end{tikzcd} \tag{2}$$

это элементарный квадрат Нисневича. Точнее, этот квадрат декартов и морфизм приведенных замкнутых подсхем

$$\sigma^0_g|_{\{f=0\}_{\mathrm{red}}} : \{f = 0\}_{\mathrm{red}} \to \{N(f) = 0\}_{\mathrm{red}}$$

схем $\mathcal{X}^0_g$ и $\mathbf{A}^1 \times U$ это изоморфизм.

(4) *$\Delta(U) \subset \mathcal{X}^0_g$.*

Замечание 2.4. *Легко увидеть, что если в теореме 2.3* $\mathcal{X}^0$ *будет любой открытой подсхемой* $\mathcal{X}$*, такой, что* σ *этально на* $\mathcal{X}^0$ *и* $\mathcal{X}^0$ *содержит замкнутое подмножество* $\{f = 0\} \cup \Delta(U)$*, все утверждение теоремы останутся верными В частности, можно считать, что* $\mathcal{X}^0$ *- аффинная схема.*

Подготовим леммы для доказательства теоремы 2.3

Лемма 2.5. *Пусть* k *- бесконечное поле, и пусть* S *- гладкая одномерная* k*-алгебра.*

Пусть $\mathfrak{m}_0$ *- максимальный идеал, такой, что* $S/\mathfrak{m}_0 = k$*. Пусть* $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_n$ *- попарно различные максимальные идеалы* S *(возможно,* $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_i$ *для некоторого* i*). Тогда существует не делитель нуля* $\bar{s} \in S$*, такой, что* S *конечен над* $k[\bar{s}]$ *и*

(1) *идеалы* $\mathfrak{n}_i := \mathfrak{m}_i \cap k[\bar{s}]$*,* $1 \leq i \leq n$*, попарно различны. Если* $\mathfrak{m}_0$ *отличен от всех* $\mathfrak{m}_i$*, то* $\mathfrak{n}_0 := \mathfrak{m}_0 \cap k[\bar{s}]$ *отличен от всех* $\mathfrak{n}_i$*;*

(2) *расширение* $S/k[\bar{s}]$ *этально в каждом* $\mathfrak{m}_i$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*, и в* $\mathfrak{m}_0$*;*

(3) $k[\bar{s}]/\mathfrak{n}_i = S/\mathfrak{m}_i$ *для каждого* $i = 1, 2, \ldots, n$*;*

(4) $\mathfrak{n}_0 = \bar{s}k[\bar{s}]$.

Доказательство. Пусть x_i, $0 \leq i \leq n$, точки на $Spec(S)$, соответствующие идеалам $\mathfrak{m}_i$. Рассмотрим замкнутое вложение $Spec(S) \hookrightarrow \mathbb{A}^n_k$ и найдем линейную проекцию общего положения $p : \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^1_k$, определенную над k и такую, что верно следующее:

(1) для всех $i, j \geqslant 0$ имеем $p(x_i) \neq p(x_j)$, если $x_i \neq x_j$;

(2) для каждого индекса $i \geqslant 0$ отображение $p|_{Spec(S)} : Spec(S) \to \mathbb{A}^1_k$ этально в точке x_i;

(3) для каждого i, сепарабельная степень расширения $k(x_i)/k(p(x_i))$ один.

Эти пункты влекут равенства $k(p(x_i)) = k(x_i)$, для всех i. Действительно, расширение $k(x_i)/k(p(x_i))$ сепарабельно по (2). По(3) мы делаем вывод, что $k(p(x_i)) = k(x_i)$. Получаем лемму.

□

Лемма 2.6. *В предположениях леммы 2.5, пусть $f \in S$ - не делитель нуля, не принадлежащий максимальному идеалу, отличному от $\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$. Пусть $\bar{s} \in S$ - элемент, удовлетворяющий* (1) - (4) *леммы 2.5. Пусть $N(f) = N_{S/k[\bar{s}]}(f)$ - норма f. Тогда*

(a) *$N(f) = fg$ для элемента $g \in S$;*

(b) *$fS + gS = S$;*

(c) *отображение $R[\bar{s}]/(N(f)) \to S/(f)$ - изоморфизм.*

Доказательство. Напрямую. $\square$

Лемма 2.7. *Пусть A - кольцо дискретного нормирования с бесконечным полем вычетов k, и R - область целостности, являющаяся полулокальной формально гладкой A-алгеброй с максимальными идеалами $\mathfrak{p}_i$, $1 \leq i \leq m$, лежащими над замкнутой точкой. Пусть $B \supseteq R[t]$ ещё одна область, гладкая относительно одномерная R-алгебра, конечная над $R[t]$. Пусть $\epsilon : B \to R$ — R-аугментация, и $I = \mathrm{Ker}(\epsilon)$. Если дано $f \in B$, такое, что*

$$0 \neq \epsilon(f) \in \bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i \subset R$$

и такое, что R-модуль B/fB конечен, можно найти элемент $u \in B$, удовлетворяющий следующим условиям:

(1) *B — конечный проективный модуль над $R[u]$;*

(2) *$B/uB = B/I \times B/J$ для некоторого идеала J;*

(3) *$J + fB = B$;*

(4) *$(u-1)B + fB = B$;*

(5) *Положим $N(f) = N_{A/R[u]}(f)$, тогда $N(f) = fg \in B$ для некоторого $g \in B$;*

(6) *$fB + gB = B$;*

(7) *Композиция $\varphi : R[u]/(N_{B/R[u]}(f)) \to B/(N_{B/R[u]}(f)) \to B/(f)$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Заменяя t на $t-\epsilon(t)$, можно предположить, что $\epsilon(t)=0$. Поскольку B конечно над $R[t]$, из теоремы Гротендика [E, Cor. 17.18] следует, что оно конечно и проективно как $R[t]$-модуль.

Поскольку B конечно над $R[t]$ и B/fB конечно над R, можно сделать вывод, что $R[t]/(N_{B/R[t]}(f))$ конечно над R (так как собственно и квазиконечно), а значит, $R/(tN_{B/R[t]}(f))$ конечно над R.

Полагая $v=tN_{B/R[t]}(f)$, получаем целое расширение $R[t]$ над $R[v]$. Таким образом, B конечно над $R[v]$. По теореме Гротендика [E, Cor. 17.18] B конечный проективный $R[v]$-модуль.

Применяя лемму 2.2 к B над $R[t]$ (не над $R[v]$), получаем равенство $N_{B/R[t]}(f)=f\cdot g_{f,t}\in B$ для элемента $g_{f,t}\in B$. Таким образом,

$$v=t\cdot N_{B/R[t]}(f)=t\cdot f\cdot g_{f,t}\in fB, \quad \text{and} \quad \epsilon(v)=\epsilon(t)\cdot\epsilon(N_{B/R[t]}(f))=0$$

Ниже будем использовать черту $\bar{}$ для обозначения редукции по модулю идеала, а индекс i для обозначения того, что редукция происходит по модулю $\mathfrak{p}_iA$, $1\le i\le m$. Пусть $l_i=\bar{R}_i=R/\mathfrak{p}_i$. По предположению леммы, l_i-алгебра $\bar{B}_i$ l_i-гладкая равноразмерная размерности 1. Элемент $\bar{f}_i\in\bar{B}_i$ - не делитель нуля, поскольку $\bar{B}_i/\bar{f}_i\bar{B}_i=\overline{(B/fB)}_i$ — конечный l_i-модуль. Пусть $\mathfrak{m}_1^{(i)},\mathfrak{m}_2^{(i)},\dots,\mathfrak{m}_{n_i}^{(i)}$ — различные максимальные идеалы $\bar{B}_i$, делящие $\bar{f}_i$, и пусть $\mathfrak{m}_0^{(i)}=\mathrm{Ker}(\bar{\epsilon}_i)$. Пусть $\bar{s}_i\in\bar{B}_i$ такое, что расширение $\bar{B}_i/l_i[\bar{s}_i]$ удовлетворяет условиям (1) - (4) леммы 2.5.

Пусть $s\in B$ - общий подъём $\bar{s}_i$-ых, другими словами, $\bar{s}=\bar{s}_i$ в $\bar{B}_i$ для всех $i=1,\dots,m$. Заменяя s на $s-\epsilon(s)$, можно предполагать, что $\epsilon(s)=0$ и, как и выше, $\bar{s}=\bar{s}_i$ для всех $i=1,\dots,m$.

Пусть $s^n+p_1(v)s^{n-1}+\dots+p_n(v)=0$ — соотношение целой зависимости для s. Пусть N — целое, большее $\max\{2,\deg(p_j(t))\}$, где $j=1,2,\dots,n$. Тогда для любого $r\in A^\times$ элемент $u=s-rv^N$ обладает следующим свойством: v цело над $R[u]$. Таким образом, для любого $r\in A^\times$, кольцо B цело над $R[u]$.

С другой стороны, имеем $\bar{v}_i\in\mathfrak{m}_j^{(i)}$ для всех $1\le i\le m$ и всех $0\le j\le n_i$, поскольку $v\in fB$ и $\epsilon(v)=0$. Значит, каждый элемент $\bar{u}_i=\bar{s}_i-r\bar{v}_i^N$ всё ещё удовлетворяет условиям (1) - (4) леммы 2.5.

Мы утверждаем, что элемент $u\in R$ обладает всеми свойствами, перечисленными в формулировке данной леммы для почти всех $r\in A^\times$. (Здесь и далее фраза „почти любой элемент $A^\times$ заменяет фразу „элемент с почти любым вычетом в бесконечном поле k)

Действительно, для почти всех $r \in A^{\times}$ элемент u удовлетворяет условиям (1) — (4) леммы 2.7. Остаётся показать, что условия (5) — (7) верны для всех $r \in A^{\times}$.

Поскольку B конечно над $R[u]$, та же теорема Гротендика [E, Cor. 17.18] означает, что оно конечный проективный $R[u]$-модуль. Чтобы доказать (5), рассмотрим характеристический полином оператора $B \xrightarrow{f} B$ как оператора на $R[u]$-модуле. Этот полином зануляется на f и его свободный член равен $\pm N_{B/R[u]}(f)$, норме f. Таким образом, $f^n - a_1 f^{n-1} + \cdots \pm N_{B/R[u]}(f) = 0$ и $N_{B/R[u]}(f) = f \cdot g_{f,u}$ для некоторого $g_{f,u} \in B$.

Чтобы доказать (6), нужно проверить, что g выше является единицей по модулю идеала fB. Достаточно проверить, что для каждого индекса i элемент $\bar{g}_i \in \bar{B}_i$ - единица по модулю идеала $\bar{f}_i\bar{B}_i$. Для этого заметим, что поле $l_i = R/\mathfrak{p}_i$, l_i-алгебра $S_i = \bar{B}_i$, её максимальные идеалы $\mathfrak{m}_0^{(i)}, \mathfrak{m}_1^{(i)}, \ldots, \mathfrak{m}_{n_i}^{(i)}$ и элемент $\bar{u}_i$ удовлетворяют предположениям леммы 2.6, с u заменённым на $\bar{u}_i$. Тогда по пункту (b) леммы 2.6 редукция $\bar{g}_i$ единица по модулю идеала $\bar{f}_i\bar{R}_i$.

Чтобы доказать (7), заметим, что $R[u]/(N_{B/R[u]}(f))$ и B/fB конечные проективные R-модули (соответствующие отображения сюръективны, потому что у многочлена $N_{B/R[u]}(f)$ есть ненулевой коэффициент положительной степени в каждой замкнутой точке, а значит в каждой) . Таким образом, достаточно проверить, что отображение $\varphi : R[u]/(N_{B/R[u]}(f)) \to B/fB$ — изоморфизм по модулю каждого максимального идеала $\mathfrak{p}_i$. Для этого достаточно проверить, что отображение $\bar{\varphi}_i : l_i[\bar{u}_i]/(N(\bar{f}_i)) \to \bar{B}_i/\bar{f}_i\bar{B}_i$ - изоморфизм для каждого индекса i, где $N(\bar{f}_i) := N_{\bar{B}_i/l_i[\bar{u}]}(\bar{f}_i)$. Теперь, по пункту (c) леммы 2.6 отображение $\bar{\varphi}_i$ изоморфизм. На этом доказательство окончено.

□

доказательство теоремы 2.3. Пусть $U = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}})$ как в Определении 2.1. Будем обозначать за R $\mathcal{O}_{X,\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}}$. Это область целостности, являющаяся полулокальной формально гладкой A-алгеброй с максимальными идеалами$\mathfrak{p}_i$, $1 \leq i \leq r$, лежащими над замкнутой точкой. Пусть $(\mathcal{X}, f, \Delta)$ - хорошая тройка над U. Мы покажем, что она даёт определённые данные, удовлетворяющие условиям Леммы 2.7.

Пусть $B = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$. Это область целостности, поскольку $\mathcal{X}$ неприводимо. Оно является R-алгеброй $q_U^* : R \to \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$. Более того, она гладкая как R-алгебра. Тройка $(\mathcal{X}, f, \Delta)$ — хорошая тройка. Таким образом, существует конечный сюръективный U-морфизм $\Pi : \mathcal{X} \to \mathbf{A}^1_U$. Он индуцирует вложение R-алгебр $R[t] \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = B$ такое что B конечно порождено как $R[t]$-модуль. Таким образом, для всех $i = 1, \ldots, r$, $R/\mathfrak{p}_i$-алгебра $B/\mathfrak{p}_iB$ равноразмерно размерности

один. Пусть
$$\epsilon = \Delta^* : B \to R$$
— гомоморфизм R-алгебр, индуцированный сечением Δ морфизма q_U. Ясно, что этот ϵ - аугментация; пусть $I = \mathrm{Ker}(\epsilon)$. Далее, поскольку $(\mathcal{X}, f, \Delta)$ хорошая тройка, $\epsilon(f) \neq 0 \in R$ и B/fB конечно как R-модуль. Наконец, f зануляется в каждой замкнутой точке $\Delta(U)$ по предположению Теоремы. Подытоживая вышесказанное, можно заключить, что мы находимся в рамках Леммы 2.7, и можем использовать заключение этой Леммы.

Таким образом, существует элемент $u \in B$, удовлетворяющий условиям (1) — (7) Леммы 2.7. Этот u индуцирует вложение R-алгебр $R[u] \hookrightarrow B$, такое, что B конечно как $R[u]$-модуль. Пусть
$$\sigma : \mathcal{X} \to \mathbf{A}^1 \times U$$
— морфизм U-схем, индуцированный вложением выше $R[u] \hookrightarrow B$. Ясно, σ конечен и сюръективен. В оставшейся части этого доказательства будем писать t вместо u, и рассмотрим B как $R[t]$-модуль при помощи σ. Пусть $N(f) := N_{B/R[t]}(f) \in R[t] \subseteq B$ и $g_{f,\sigma} \in B$ - элементы, определенные перед формулировкой Леммы 2.2.

Мы утверждаем, что этот морфизм σ и выбранные элементы $N(f)$ и $g_{f,\sigma}$ удовлетворяют условиям (1) — (4) Теоремы 2.3. Проверим это утверждение. Поскольку B конечно как $R[t]$-модуль и оба кольца $R[t]$ и B регулярны, $R[t]$-модуль B конечно порождён и проективен, см. [E, Corollary 18.17]. Таким образом, σ этален в точке $x \in \mathcal{X}$ если и только если $k(\sigma(x))$-алгебра $k(\sigma(x)) \otimes_{R[t]} B$ этальна. Если точка x принадлежит замкнутой подсхеме $\mathrm{Spec}(B/\mathfrak{p}_i B)$ для некоторого максимального идеала $\mathfrak{p}_i$ кольца R, то
$$k(\sigma(x)) \otimes_{R[t]} B = k(\sigma(x)) \otimes_{(R/\mathfrak{p}_i)[t]} B/\mathfrak{p}_i B.$$
Можно заключить, что σ этален в данной точке x тогда и только тогда, когда $(R/\mathfrak{p}_i)[t]$-алгебра $B/\mathfrak{p}_i B$ этальна в точке x.Из доказательства Леммы 2.7 следует, что морфизм σ индуцирует морфизм $\mathrm{Spec}(B/\mathfrak{p}_i B) \xrightarrow{\sigma_i} \mathbf{A}^1_{l_i}$ на замкнутом слое $\mathrm{Spec}(B/\mathfrak{p}_i B$ для каждого i. Этот индуцированный морфизм этален в нулях функции $\bar{f}_i$ и в каждой точке $\overline{\Delta}_i(\mathrm{Spec}\, l_i)$. Действительно, для нулей функции $\bar{f}_i$ это следует из пунктов (6) и (7) Леммы 2.7. Из предположений Леммы 2.7 следует, что функция f зануляется в каждом максимальном идеале, содержащем I. Таким образом, σ этален в точках замкнутой подсхемы $\mathcal{X}$, определенной идеалом I, то есть, в точках $\Delta(U)$. Таким образом, пункт (1) Теоремы 2.3 доказан.

Перейдем к пункту (2). Обозначим за g $g_{f,\sigma}$. Первое в следующей цепочке равенств

$$\sigma^{-1}(\sigma(\{f=0\}))=\{N(f)=0\}=\{f=0\}\sqcup\{g=0\}$$

очевидно. Второе следует из равенства $N(f)=\pm f\cdot g$, доказанного в Лемме 2.2 и пункта (6) Леммы 2.7.

Ясно, что квадрат (2) декартов и морфизм σ_g^0 этален. Схема $\mathcal{X}_g^0$ содержит замкнутую подсхему $\Delta(U)$, а значит непуста. Пункт (7) Леммы 2.7 показывает, что морфизм приведенных замкнутых подсхем

$$\sigma_g^0|_{\{f=0\}_{\mathrm{red}}}:\{f=0\}_{\mathrm{red}}\to\{N(f)=0\}_{\mathrm{red}}$$

является изоморфизмом. Таким образом, мы проверили пункт (3) Теоремы 2.3.

Остаётся проверить лишь пункт (4). Мы уже знаем, что $\{f=0\}\subset\mathcal{X}_g^0$. Обе схемы $\Delta(U)$ и $\{f=0\}$ полулокальны, и множество замкнутых точе $\Delta(U)$ содержится в множестве замкнутых точек замкнутого множества $\{f=0\}$ по предположениям теоремы. Таким образом, $\Delta(U)\subset\mathcal{X}_g^0$. Это завершает доказательство пункта (4) Теоремы 2.3, и, таким образом, самой теоремы.

□

3 Завершение доказательства Теоремы 1.1

Зафиксируем V-гладкую неприводимую проективную V-схему X, конечное семейство точек $x_1,x_2,\dots,x_n$ на X, и обозначим $\mathcal{O}:=\mathcal{O}_{X,\{x_1,x_2,\dots,x_n\}}$ и $U:=\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$. Рассмотрим простую односвязную V-групповую схему G и главное G-расслоение P над X, тривиальное над K - полем частных $\mathcal{O}$. Мы можем и будем предполагать, что для некоторого $\mathrm{f}\in\Gamma(X,\mathcal{O}(m))$ главное G-расслоение P тривиально над X_{f}.

Вспомним, что начиная с этих данных мы построили в 1.2 хорошую тройку вида $(q_U:\mathcal{X}\to U,f,\Delta)$ где $\mathcal{X}=U\times_S X'^0$.

Вспомним что $q_X:\mathcal{X}=U\times_S X'^0\to X'^0$ это проекция на X'^0.

Заметим, что по Утверждению 1.2 f зануляется во всех замкнутых точках $\Delta(U)$. Значит, хорошая тройка $(q_U:\mathcal{X}\to U,f,\Delta:U\to\mathcal{X})$ удовлетворяет условиям Теоремы 2.3.

По теореме 2.3 существует конечный сюръективный морфизм $\sigma:\mathcal{X}\to\mathbb{A}^1\times U$ U-схем, удовлетворяющий (1) — (3) той Теоремы. В частности,

$$\sigma^{-1}\Big(\sigma\big(\{f=0\}\big)\Big)=N(f)=\{f=0\}\sqcup\{g_{f,\sigma}=0\}$$

где $N(f)$ и $g_{f,\sigma}$ определены в пункте (2) Теоремы 2.3. Таким образом, заменяя для краткости $g_{f,\sigma}$ на g, получаем следующий элементарный квадрат Нисневича в категории U-гладких схем (см. [Опр. 2.1, Vo]):

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{X})^0_{N(f)} = (\mathcal{X})^0_{fg} \arrow[r, "\mathrm{inc}"] \arrow[d, "\sigma^0_{fg}"'] & (\mathcal{X})^0_{g'} \arrow[d, "\sigma^0_g"] \\ (\mathbf{A}^1 \times U)_{N(f)} \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & \mathbf{A}^1 \times U \end{tikzcd} \tag{3}$$

Этот квадрат можно использовать, чтобы построить главные G_U-расслоения над $(\mathbb{A}^1{\times}U)$, начиная с определённых данных над остальными тремя углами. Это мы сделаем ниже.

Рассмотрим $(q_X)^*(P_X)$ как главное $(q_U)^*(G_U) = (G_{const})$-расслоение при помощи изоморфизма Φ, естественно возникающего из-за того, что группа G приходит с базового кольца A. Вспомним, что P_X тривиально как главное G_X-расслоение над X_{f}. Значит, $(q_X)^*(P_X)$ тривиально как главное $(G_{\mathcal{X}})$-расслоение над $\mathcal{X}_f$. Значит, $(q_X)^*(P_X)$ тривиально над $\mathcal{X}_f$, будучи рассмотрено как главное G_{const}-расслоение при помощи изоморфизма Ψ.

Таким образом, будучи рассмотренным как главное G_U-расслоение, расслоение $(q_X)^*(P_X)$ над $\mathcal{X}$ становится тривиальным над $\mathcal{X}_f$, и, тем более, над $(\mathcal{X})^0_{fg}$. Теперь, взяв тривиальное G_U-расслоение надr $(\mathbb{A}^1 \times U)_{N(f')}$ и изоморфизм

$$\psi : G_U \times_U [(\mathcal{X})^0_{N(f)}] \to (q_X)^*(P_X)|_{[(\mathcal{X})^0_{N(f)}]} \tag{4}$$

главных G_U-расслоений, получаем *главное G_U-расслоение $\mathcal{G}_t$ над* $(\mathbb{A}^1{\times}U)$, такое, что

(1) $\mathcal{G}_t|_{[(\mathbb{A}^1\times U)_{N(f)}]} = G_U \times_U [(\mathbb{A}^1 \times U)_{N(f)}]$

(2) есть изоморфизм $\varphi : [(\sigma^0_g)]^*(\mathcal{G}_t) \to (q_X)^*(P_X)|_{[(\mathcal{X})^0_g]}$ главных G_U-расслоений, где$(q_X)^*(P_X)$ рассматривается как главное G_U-расслоение при помощи изоморфизма $\mathcal{X}$-групповых схем Φ

Наконец, построим следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{A}^1 \times U) \arrow[dr, "\mathrm{pr}_U"'] & (\mathcal{X})^0_g \arrow[l, "\sigma^0_g"'] \arrow[r, "q_X"] \arrow[d, "q_U"'] & X \\ & U \arrow[u, bend right, "\Delta"'] \arrow[ur, "\mathrm{can}"'] & \end{tikzcd} \tag{5}$$

Эта диаграмма корректно определена, поскольку по пункту (4) Теоремы 2.3 образ морфизма Δ попадает в $(\mathcal{X})^0_g$.

Теорема 3.1. *Главное G_U-расслоение $\mathcal{G}_t$ над $(\mathbb{A}^1 \times U)$, полином $N(f') \in \mathcal{O}[t]$ со старшим коэффициентом 1, диаграмма* (5), *и изоморфизм Φ, построенные выше, удовлетворяют следующим условиям* (1*)–(6*).

(1)* $q_U = \mathrm{pr}_U \circ \sigma_g^0$,

(2)* σ_g^0 *этален,*

(3)* $q_U \circ \Delta = \mathrm{id}_U$,

(4)* $q_X \circ \Delta = \mathrm{can}$,

(5) Ограничение $\mathcal{G}_t$ на $(\mathbb{A}^1 \times U)_{N(f)}$ — тривиальное G_U-расслоение,*

(6) $(\sigma_g^0)^*(\mathcal{G}_t)$ и $(q_X)^*(P_X)$ изоморфны как G_U-расслоения над $(\mathcal{X})_g^0$. Здесь $(q_X)^*(P_X)$ рассматривается как главное G_U-расслоение при помощи изоморфизма групповых схем Φ.*

Доказательство. Из самого выбора σ он морфизм U-схем, что доказывает (1*). По выбору $(\mathcal{X})^0 \hookrightarrow \mathcal{X}$ в Теореме 2.3, морфизм σ эттален на этой подсхеме, что даёт (2*). Свойство (3*) верно для Δ, поскольку $(q_X : \mathcal{X} \to U, f, \Delta)$ — хорошая тройка, и, в частности, Δ - сечение q_U. Свойство (4*) можно установить следующим образом:

$$q_X \circ \Delta = \mathrm{can}.$$

Равенство следует из построения хорошей тройки. Свойство (5*) это просто свойство (1) в конструкции $\mathcal{G}_t$ выше. Свойство (6*) это свойство (2) в конструкции $\mathcal{G}_t$. □

Композиция

$$s := \sigma_g^0 \circ \Delta : U \to \mathbb{A}^1 \times U$$

— сечение проекции pr_U по свойствам (1*) и (3*). Поскольку U полулокально, можно предполагать, что *s это нулевое сечение проекции $\mathbb{A}^1_U \to U$*. Далее, проводя аффинное преобразование $\mathbb{A}^1_U \to U$, можно предполагать, что *$N(f)(1) \in \mathcal{O}$ обратимо.*

Следствие 3.2 (=**Теорема 1.1**). *Главное G_U-расслоение $\mathcal{G}_t$ над $\mathbb{A}^1_{[U]}$ и полином со старшим коэффициентом 1 $N(f) \in \mathcal{O}[t]$ удовлетворяют следующим условиям*

(i) ограничение $\mathcal{G}_t$ на $[(\mathbb{A}^1 \times U)_{N(f)}]$ - тривиальное G_U-расслоение,

(ii) ограничение $\mathcal{G}_t$ на $\{0\} \times U$ это изначальное G_U-расслоение P_U.

(iii) $N(f)(1) \in \mathcal{O}$ обратим.

Доказательство. Свойство (i) это просто свойство (5*) выше. По (6*), G_U-расслоения

$$\mathcal{G}_t|_{\{0\}\times U} = (s \times \mathrm{id})^*(\mathcal{G}_t) = (\Delta)^*((\sigma_g^0)^*(\mathcal{G}_t)) \text{ и}$$

$$(\Delta')^*(q_X)^*(P_X) = (\mathrm{can})^*(P_X)$$

изоморфны, поскольку $\Delta^*(\Phi) = \mathrm{id}_{G_U}$. Остаётся вспомнить, что главное G_U-расслоение $(\mathrm{can})^*(P_X)$ это изначальное G_U-расслоение P_U по выбору P_X. Отсюда получаем Следствие.

□

Список литературы

[A] *Artin, M.* Comparaison avec la cohomologie classique: cas d'un préschéma lisse, in *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4). Tome 3.* Lect. Notes Math., vol. 305, Exp. XI, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[E] *Eisenbud, D.* Commutative algebra with a view toward algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics 150, Springer-Verlag, New York, 1995.

[PSV] *Panin, I.; Stavrova, A.; Vavilov, N.* On Grothendieck–Serre's conjecture concerning principal G-bundles over reductive group schemes: I. Compositio Mathematica, vol. 151, issue 3, March 2015, pp. 535-567 Springer-Verlag, New York, 1995.