

Санкт-Петербургский государственный университет

Механика и математическое моделирование

Механика разрушения

Соловьев Антон Сергеевич

Временные особенности
процесса разрушения
при гидроразрыве горных пород

Магистерская диссертация

Научный руководитель:
чл.-корр. РАН, д. ф.-м. н.,
проф. кафедры теории упругости
Петров Юрий Викторович

Рецензент:
д. ф.-м. н., зав. каф. математики
Санкт-Петербургского государственного
технологического института (технического университета)
Груздков Алексей Андреевич

Санкт-Петербург
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mechanics and mathematical modelling

Fracture mechanics

Anton Solovev

Temporal peculiarities
of the hydraulic fracture process in rocks

Graduation Thesis

Scientific supervisor:
professor of the elasticity department,
Dr. Yuri V. Petrov

Reviewer:
head of the department of mathematics at
St. Petersburg State Technological Institute
(technical university),
Dr. Alexey A. Gruzdkov

Saint-Petersburg
2017

Оглавление

Введение	4
1. Обзор литературы	5
1.1. Математические модели гидроразрыва	6
2. Постановка задачи	10
2.1. Основные соотношения	10
2.2. Преобразование системы уравнений	12
2.3. Основные соотношения после преобразований	15
3. Автомодельные решения	17
3.1. Вид решения	17
3.2. Алгоритм нахождения автомодельного решения	18
3.3. Особенности численного интегрирования	19
3.4. Аналитические решения	21
3.5. Численные результаты	22
4. Общий случай	26
4.1. Вычислительный алгоритм	26
4.2. Сходимость алгоритма	28
4.3. Результаты вычислений	30
4.3.1. Постоянный приток	31
4.3.2. Линейный рост	32
4.3.3. Кратковременное возмущение	33
4.3.4. Режим постоянного давления	35
4.3.5. Гармоническое возмущение режима с постоянным притоком	37
4.3.6. Гармоническое возмущение режима с постоянным давлением	39
Заключение	40
Список литературы	41

Введение

Гидравлический разрыв (гидроразрыв) является методом разрушения горной породы с целью стимулирования нефтяных и газовых скважин. Под большим давлением жидкость подается внутрь заранее созданной трещины в целевом пласте, трещина продвигается, открывая тем самым путь к месторождению. Гидравлический разрыв нашел широкое применение в нефтегазовой промышленности, в том числе он особенно важен для добычи сланцевой нефти.

Несмотря на повсеместное использование на практике, теоретическое изучение и компьютерное моделирование данного процесса содержит различные трудности [2]. Причиной этому служит тот факт, что во время гидроразрыва протекают сразу несколько взаимосвязанных физических процессов: перемещение частиц жидкости, деформирование горной породы, а также возникновение и продвижение трещин по породе.

В связи с этим, полное трехмерное моделирование процесса гидроразрыва является чрезвычайно ресурсоёмким. Поэтому были созданы упрощенные модели, которые обсуждаются более подробно в разделе 1, содержащем обзор литературы.

Данная работа посвящена компьютерному моделированию гидроразрыва на основе одномерной модели.

Чтобы обеспечить воспроизводимость исследования, в разделах 3–4 дается подробное описание как и математической модели, так и примененного вычислительного алгоритма.

Была написана компьютерная программа для получения численного решения. В разделе 4 изучается поведение полученного решения при различных граничных условиях. В том числе рассматривается влияние возмущений на приток жидкости: кратковременный резкий скачок и продолжительное периодическое возмущение.

1. Обзор литературы

Под гидравлическим разрывом в широком смысле понимается процесс разрушения, в котором трещина в материале создается и продвигается благодаря давлению жидкости внутри трещины [2].

До появления технологии гидравлического разрыва, при необходимости, месторождения стимулировались с помощью кислотной обработки, либо с помощью зарядов нитроглицерина. История гидравлического разрыва началась в 30-х годах прошлого века, когда сотрудники Dow Chemical Company обнаружили, что давление жидкости способно деформировать и разрушать горные породы, что в дальнейшем было использовано для увеличения эффективности кислотной стимуляции. Впервые гидроразрыв был применен в 1947 году на газовом месторождении Хаготон (Hugoton) в США [6].

С тех пор гидроразрыв доказал свою эффективность и сейчас используется повсеместно для стимуляции нефтяных и газовых скважин. Особенно актуален этот метод для добычи полезных ископаемых из пластов пород с низкой проницаемостью, на которые обратили внимание после повышения цен на нефть и газ в конце 1970-х.

Как правило, перед непосредственно процедурой гидроразрыва создается предварительная трещина с помощью взрывчатого заряда специальной формы. Таким образом в породе возникает слабое место для того, чтобы трещина продвигалась в желаемом направлении. Тем не менее, данная задача осложнена наличием неоднородностей, слоистостью породы, а также естественными трещинами в породе.

Сам процесс гидроразрыва начинается с закачки в скважину чистой жидкости. После достаточного увеличения давления происходит раскрытие трещины. На следующем этапе в жидкость добавляется пропант (с англ. propping agent — ”расклинивающий агент”) — мелкие зерна песка или другого вещества, которые позволяют предотвратить закрытие трещины. Вся процедура гидроразрыва может длиться от десятков минут до нескольких часов.

1.1. Математические модели гидроразрыва

Модель PKN

Одной из прорывных работ в этой области была работа Т. К. Perkins и Л. Р. Kern [16]. Авторы, используя результат Снеддона [17], строят модель продвижения линейной трещины. Результаты расчетов позволяют авторам сделать различные выводы, в частности они получили, что максимальная ширина раскрытия трещины в малой степени зависит от модуля Юнга породы, но намного важнее скорость закачки жидкости и свойства пропанта. Их работу развил R. P. Nordgren [15], в том числе затронув случай ненулевой утечки жидкости через стены трещины. Данная модель была названа PKN в честь этих авторов. Модель PKN предназначена для описания длинных трещин эллиптического сечения (рисунок 1а). Эллиптическое сечение удобно для рассмотрения тем, что площадь эллипса линейно меняется при изменении одной из полуосей.

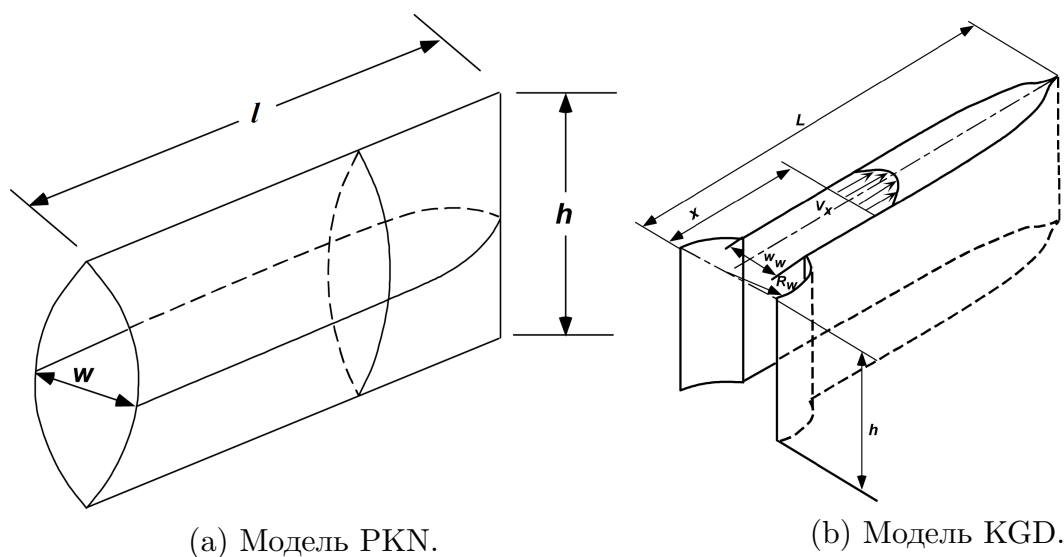


Рис. 1: Схема трещины согласно моделям PKN и KGD [6]

Модель KGD

Другая модель, носящая название KGD, была разработана независимо С. А. Христиановичем и Ю. П. Желтовым [21], а также J. Geertsma и F. de Klerk [5]. В отличие от PKN модели, авторы рассматривают трещину, имеющую относительно большую высоту (рисунок 1b), таким

образом предполагается плоская деформация [23, с. 293], а раскрытие трещины и давление связывают с помощью интегрального соотношения [4]. Эта модель лучше подходит для описания начального этапа развития трещины, когда её длина еще мала.

Разновидности PKN и KGD моделей начали широко применяться в 1990-х и развиваются по сей день.

Развитие одномерных моделей

В работе А. Linkov [9] рассматривается одномерная трещина по модели PKN. На примере автомодельного (по-другому — самоподобного, с англ. *self-similar*) случая [18], когда трещина увеличивается в длину, но форма раскрытия остается неизменной, автор показывает, что задача в формулировке Нордгрена [15] некорректно поставлена, что в результате приводит к высокой численной ошибке вблизи конца трещины вне зависимости от того, сколько степеней свободы взято при дискретизации. Для решения этой проблемы он вводит так называемую ε -регуляризацию. Используя известную асимптотику решения, граничные условия сносятся на небольшое расстояние от конца трещины. Решение задачи, сформулированной таким образом, сходится с эталонным аналитическим решением.

Метод ε -регуляризации применяется и в дальнейшей работе автора [11], где А. М. Линьков акцентирует внимание на фундаментальности уравнения баланса жидкости внутри трещины, а также ставит вопрос о наилучшем выборе переменных. Во-первых, такой переменной оказывается усредненная (по перечному сечению трещины) скорость жидкости, поскольку она меняется гладким образом, везде конечна и отлична нуля (при достаточных предположениях). Другая переменная — это раскрытие трещины, возведенное в такую степень, чтобы избежать сингулярности пространственной производной на конце трещины. Кроме автомодельного, в работе рассматривается общий случай, а также дается краткое описание подхода применительно к двумерной задаче.

В работе [12] А. Linkov находит аналитические (автомодельные) решения задач типа PKN и KGD, тем самым подтверждая эффективность

выбора усредненной скорости в качестве переменной.

Работа G. Mishuris, M. Wrobel, A. Linkov [14] основывается на предшествующих работах А. М. Линькова, упомянутых выше. Авторы анализируют решение, полученное с помощью уравнения локального баланса массы и переменных, введенных А. М. Линьковым. Оценивается точность решения, жесткость системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных после дискретизации, а также анализируется чувствительность к периодическим возмущениям притока. Авторы приходят к выводу, что подход А. М. Линькова позволяет уменьшить погрешность решения и жесткость системы ОДУ.

В работе P. Kusmierczyk, G. Mishuris, M. Wrobel [8] авторы также опираются на метод А. М. Линькова. Приводится анализ разных режимов утечки жидкости (через стенки трещины), в том числе показывается устойчивость решения после модификации на коротком интервале так называемого закона Картера, который оценивает объем жидкости, проникающего в породу через стенки трещины. Вводится альтернативная переменная, равная пространственному интегралу от раскрытия трещины. Применяется граничное регуляризационное условие, учитывающее следующий член в асимптотике, таким образом обобщается идея А. М. Линькова. Анализируется жесткость системы, численные результаты сравниваются с [7].

В работе M. Wrobel, G. Mishuris [19] представлен новый путь к решению задачи, который не требует регуляризации. Преобразованные уравнения не требуют вычисления производных, а вместо этого вычисляются интегралы. Рассматриваются как автомодельный, так и общий режимы продвижения трещины. Дается подробный анализ точности алгоритма, которая оказывается лучше, чем в предыдущих работах.

В более новой работе M. Wrobel, G. Mishuris [20] применен похожий подход, сводящий процесс решения к итерационной процедуре вычисления интегралов. Рассматривается как и случай PKN, так и KGD, а также различные виды автомодельных решений, приводится более общий вид эталонного аналитического решения. Задача формулируется в таком виде, что случаи PKN и KGD обрабатываются практически

идентичным образом. Полученный алгоритм решения обладает универсальностью в том смысле, что позволяет решать и PKN, и KGD случаи, заменив лишь некоторые модули программы. Алгоритм показал точность, превышающую точность аналогов. Погрешность в 0.1% достигается с помощью всего нескольких десятков узлов пространственной сетки.

В связи с преимуществами последней работы, постановка задачи и алгоритм решения, представленные в ней, были взяты за основу данной магистерской диссертации.

2. Постановка задачи

В данном разделе описывается модель одномерного гидроразрыва согласно работе [20]. Она включает в себя систему взаимосвязанных уравнений, описывающих сохранение массы жидкости, упругое поведение и разрушение породы вместе с соответствующими граничными условиями. В этом же разделе эти уравнения преобразуются к удобному для компьютерных вычислений виду.

2.1. Основные соотношения

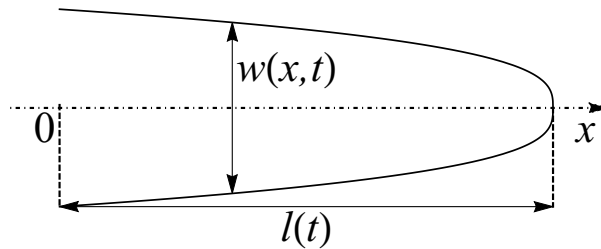


Рис. 2: Схема одномерной трещины.

Рассматривается прямолинейная трещина (рис. 2), симметричная относительно начала координат. В середину трещины поступает поток жидкости величины $2q_0(t)$. В силу симметрии задачи, рассматривается лишь половина трещины $0 < x < l(t)$. Жидкость предполагается несжимаемой и ньютоновской.

1. Уравнение неразрывности (уравнение баланса массы) жидкости.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + q_l = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < l(t), \quad (1)$$

где $w(x, t)$ — раскрытие трещины, $q_l(x, t)$ — функция утечки, т.е. объемная доля жидкости через стенки трещины, $q(x, t)$ — поток жидкости через поперечное сечение трещины.

1'. Глобальное уравнение сохранения массы жидкости.

$$\int_0^{l(t)} (w(x, t) - w_\diamond(x)) dx - \int_0^t q_0(t) dt + \int_0^{l(t)} \left(\int_0^t q_l(x, t) dt \right) dx = 0, \quad (2)$$

где $w_\diamond(x)$ — раскрытие трещины в начальный момент времени, $q_0(t)$ — приток жидкости (см. начальные и граничные условия (8)–(10)).

Уравнения (1) и (2) вытекают из закона сохранения массы непрерывной среды, с учетом несжимаемости жидкости.

2. Закон Пуазёйля (Poiseuille) для ньютоновской жидкости.

$$q = -\frac{1}{M} w^3 \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3)$$

где $p(x, t)$ — эффективное давление жидкости внутри трещины (давление жидкости за вычетом сдерживающих напряжений, вызванных весом окружающей породы), $M = 12\mu$, где μ — динамическая вязкость жидкости.

3. Упругое соотношение.

$$p = \mathcal{A}w, \quad (4)$$

где вид оператора \mathcal{A} различается в зависимости от модели.

- Модель PKN [16, 15]. Локальное соотношение

$$p(x, t) = k_1 w(x, t), \quad (5)$$

- Модель KGD [5, 4]. Интегральное соотношение

$$p(x, t) = \frac{k_2}{2\pi} \int_0^{l(t)} \frac{\partial w(s, t)}{\partial s} \frac{s}{x^2 - s^2} ds. \quad (6)$$

Здесь k_1 и k_2 — постоянные величины

$$k_1 = \frac{2}{\pi h} \frac{E}{1 - \nu}, \quad k_2 = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (7)$$

где h - высота эллиптической трещины в модели РКН, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона породы.

4. Граничные и начальные условия.

(a) $x = 0$ — условие притока.

$$q(0, t) = q_0(t) \quad (8)$$

(b) $x = l(t)$

$$q(l(t), t) = 0 \quad (9)$$

Трещина сужается к концу и переходит в сплошную породу, поэтому поток на конце отсутствует.

(c) $t = 0$

$$l(0) = l_\diamond, \quad w(x, 0) = w_\diamond(x), \quad 0 < x < l(t) \quad (10)$$

Остальные переменные выражаются из уравнений однозначным образом.

Такая запись системы уравнений позволяет рассматривать модели РКН и KGD схожим образом, но в данной работе основное внимание уделяется модели РКН, поскольку она отличается своей простотой, и при этом позволяет описать трещину на большем промежутке времени (когда длина трещины достаточно велика по сравнению с шириной и высотой).

2.2. Преобразование системы уравнений

Скорость течения жидкости

В ряде работ [11, 10, 12, 14, 3] авторы исключают из уравнений поток жидкости $q(x, t)$. Вместо него они вводят другую переменную — $v(x, t)$, среднюю скорость частиц жидкости через поперечное сечение трещины. Она связана с потоком следующим соотношением

$$q(x, t) = w(x, t)v(x, t). \quad (11)$$

Данный подход позволяет вычислить с большей точностью скорость продвижения трещины $v_1(t)$

$$v_1(t) = \frac{dl(t)}{dt} = \lim_{x \rightarrow l(t)} \frac{q(x, t)}{w(x, t)}. \quad (12)$$

Этот предел имеет конечную величину, однако и числитель, и знаменатель в правой части стремятся к нулю при приближении к концу трещины, а значит вычисление предела неизбежно приведет к повышенной погрешности. Если же изначально записать уравнения в терминах $v(x, t)$ вместо $q(x, t)$, то проблема отпадает сама собой, $v_1(t) = v(l(t), t)$. Точность в вычислении скорости продвижения трещины позволяет более точно определить длину трещины.

Ввод безразмерных переменных

Стандартной процедурой является замещение размерных величин безразмерными.

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{l(t)}, & \tilde{t} &= \frac{t}{t_m}, & \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \frac{w(x, t)}{l_*}, & L(\tilde{t}) &= \frac{l(t)}{l_*}, \\ \tilde{q}_l(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \frac{t_m}{l_*} q_l(x, t), & \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \frac{t_m}{l_*^2} q(x, t) \\ \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \frac{t_m}{M} p(x, t), & \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \frac{t_m}{l_*} v(x, t), \end{aligned} \quad (13)$$

где, $t_m = M/k_m$, k_m ($m = 1, 2$) — постоянные из (5), (6), l_* — масштаб длины, выбираемый из соображений удобства, $L(t)$ — безразмерная длина трещины.

Благодаря такому определению, новая пространственная переменная лежит на фиксированном отрезке $\tilde{x} \in [0, 1]$.

Далее рассматриваются только безразмерные величины и символ \sim над соответствующими переменными опускается.

Асимптотические соотношения вблизи вершины трещины

В предыдущих работах была установлена асимптотика решения вблизи вершины трещины. Учет этой асимптотики важен для поддержания

точности численного решения [19, 8]. Само асимптотическое разложение имеет вид

$$w(x, t) = w_0(t)(1-x^m)^{\alpha_0} + w_1(t)(1-x^m)^{\alpha_1} + \mathcal{O}((1-x^m)^{\alpha_2} \ln^\kappa(1-x^m)), \quad x \rightarrow 1, \quad (14)$$

где значения параметров m , ξ_0 , ξ_1 , ξ_2 приводятся в [20] и зависят от типа упругого соотношения (РКН или КГД). В случае РКН эти параметры принимают следующие значения: $m = 1$, $\alpha_0 = 1/3$, $\alpha_1 = 4/3$, $\alpha_2 = 7/3$, $\kappa = 0$. Таким образом

$$w(x, t) = w_0(t)(1-x)^{1/3} + w_1(t)(1-x)^{4/3} + \mathcal{O}((1-x)^{7/3}), \quad x \rightarrow 1. \quad (15)$$

Раскрытие трещины ведет себя вблизи трещины как кубический корень расстояния до вершины трещины. Из этого следует, что пространственная производная $\frac{\partial w}{\partial x}$ имеет сингулярность на конце трещины, что необходимо учитывать при выборе способа решения данной задачи.

Используя закон Пуазёйля (3) и тот факт, что $v(1, t) = v_1(t) = \frac{dL}{dt}$, получается соотношение

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{L^m} C_A \mathcal{L}(w), \quad (16)$$

где C_A — постоянная, \mathcal{L} - функционал. В случае РКН $C_A = 1/3$, $\mathcal{L}(w) = w_0^3$, где w_0 — коэффициент перед первым членом асимптотики раскрытия трещины (14). Таким образом, это соотношение связывает скорость продвижения трещины с асимптотикой решения. Далее через него будет выражаться длина трещины.

Усеченная скорость течения жидкости

Из соображений эффективности [20] вместо скорости жидкости $v(x, t)$ в дальнейших уравнениях будет использоваться другая зависимая переменная, так называемая усеченная скорость течения жидкости, $\phi(x, t)$, определяемая как

$$\phi(x, t) = v(x, t) - xv_1(t). \quad (17)$$

Усеченная скорость жидкости не имеет явного физического смысла, однако стоит отметить её математические свойства: $\phi(0, t) = v(0, t)$, $\phi(1, t) = 0$.

Соответствующее асимптотическое разложение

$$\phi(x, t) = \phi_0(t)(1 - x^m)^{\xi_0} + \phi_1(t)(1 - x^m)^{\xi_1} + \mathcal{O}((1 - x^m)^{\xi_2}), \quad x \rightarrow 1, \quad (18)$$

В случае РКН $m = 1$, $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 3$,

$$\phi(x, t) = \phi_0(t)(1 - x) + \phi_1(t)(1 - x)^2 + \mathcal{O}((1 - x)^3), \quad x \rightarrow 1. \quad (19)$$

2.3. Основные соотношения после преобразований

Далее приводятся основные уравнения с учетом описанных выше преобразований.

1. Преобразованное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x}(w\phi) + \frac{v_1}{L} w + q_l = 0. \quad (20)$$

2. Раскрытие трещины через проинтегрированное уравнение Пуазейля (3) с учетом упругого соотношения (5) или (6)

$$w = B_w(\phi, L, w, v_1), \quad (21)$$

где B_w — интегральный оператор, который в случае РКН имеет вид

$$w(x, t) = \left(3L(t) \int_x^1 (\phi(s, t) + sv_1(t)) ds \right)^{1/3}. \quad (22)$$

3. Выражение длины трещины через проинтегрированное соотношение (16).

$$L(t) = \left(L^{m+1}(0) + (m+1)C_A \int_0^t \mathcal{L}(w) d\tau \right)^{\frac{1}{m+1}}. \quad (23)$$

4. Граничные и начальные условия

(a) $x = 0$

$$w(0, t)\phi(0, t) = q_0(t) \quad (24)$$

(b) $x = 1$

$$\phi(1, t) = 0 \quad (25)$$

Условие $w(1, t) = 0$ выполняется автоматически с учетом (22).

(c) $t = 0$

$$L(0) = \frac{l_\diamond}{l_*}, \quad w(x, 0) = \frac{1}{l_*}w_\diamond(l_\diamond x) \quad (26)$$

Или для простоты

$$L(0) = L_\diamond, \quad w(x, 0) = w_\diamond(x) \quad (27)$$

3. Автомоделные решения

В данном разделе рассматриваются специальные, так называемые автомоделные (или же самоподобные, с англ. self-similar) решения системы уравнений, описанной в предыдущем разделе. Вид данных решений позволяет исключить из уравнений зависимость от времени, сводя задачу к краевой.

Была реализована итерационная процедура нахождения решения, представленная в работе [20]. Рассмотрены аналитические решения, которые были использованы для оценки точности численных результатов.

3.1. Вид решения

Под автомоделными решениями в данной работе понимаются решения вида

$$w(x, t) = \psi(t)\hat{w}(x), \quad p(x, t) = \frac{\psi(t)}{L^{m-1}}\hat{p}(x). \quad (28)$$

Здесь функции $\hat{w}(x)$, $\hat{p}(x)$ отвечают за форму решения, а $\psi(t)$ — за его рост во времени. Данный вид решения накладывает ограничения на остальные входящие в уравнение величины:

$$\phi(x, t) = \frac{\psi^3(t)}{L(t)^m}\hat{\phi}(x), \quad q_0(t) = \frac{\psi^4(t)}{L(t)^m}\hat{q}_0. \quad (29)$$

Уравнение неразрывности (20) переходит в

$$\frac{d\psi}{dt}\hat{w} + \frac{\psi^4}{L^{m+1}}\frac{d}{dx}(\hat{w}\hat{\phi}) + \frac{L'}{L}\psi\hat{w} + q_l = 0. \quad (30)$$

Для исключения из этого уравнения времени необходимо подобрать подходящие функции $L(t)$, $\psi(t)$, $\hat{q}_l(x)$.

Если рассматривать зависимость от времени по экспоненциальному

$$\psi(t) = e^{\gamma t}, \quad q_l = e^{\gamma t}\hat{q}_l(x), \quad \gamma > 0, \quad (31)$$

или степенному закону

$$\psi(t) = (a + t)^\gamma, \quad q_l = (a + t)^{\gamma-1} \hat{q}_l(x), \quad a \geq 0, \gamma > 0, \quad (32)$$

то из системы (20)-(27) можно прийти к следующим уравнениям [20], позволяющим найти $\hat{w}(x)$, $\hat{\phi}(x)$:

1. Эквивалент глобального уравнения баланса массы (2), из которого выражается параметр $\mathcal{L}(\hat{w})$, необходимый для нахождения $\hat{\phi}(x)$.

$$\frac{\hat{q}_0}{\mathcal{L}(\hat{w})} = \chi \int_0^1 \hat{w}(x) dx + \kappa \int_0^1 \hat{q}_l(x) dx. \quad (33)$$

Параметры χ и κ зависят от выбранного упругого соотношения (РКН или КГД) и типа автомодельности (экспоненциальный или степенной закон), точные значения приводятся в [20], таблица 2.

2. Уравнение локального баланса массы (20) позволяет выразить $\hat{\phi}(x)$.

$$\hat{\phi}(x) = \frac{\mathcal{L}(\hat{w})}{\hat{w}(x)} \left(\chi \int_x^1 \hat{w}(x) dx + \kappa \int_x^1 \hat{q}_l(x) dx \right). \quad (34)$$

3. Соотношение (21) переходит в

$$\hat{w}(x) = \left(3 \int_x^1 \left(\hat{\phi}(s) + s \mathcal{L}(\hat{w}) C_A \right) ds \right)^{1/3}. \quad (35)$$

4. Граничные условия

$$\hat{w}(0) \hat{\phi}(0) = \hat{q}_0, \quad \hat{w}(1) = 0, \quad \hat{\phi}(1) = 0. \quad (36)$$

3.2. Алгоритм нахождения автомодельного решения

Данная система уравнений решалась методом последовательных итераций (процедура Пикарда [1], подробнее обсуждается в разделе 4.2) по следующему алгоритму [20].

Сначала введем пространственную сетку узлов x_k , $k = 0..N - 1$, $x_0 = 0$, $x_{N-1} = 1 - \varepsilon$, где ε — малая величина. Также пусть $x_N = 1$, однако в вычислениях этот узел не участвует.

Рассмотрим некоторое начальное приближение $\hat{w}_0(x)$. Практика показала, что скорость сходимости практически не зависит от этого выбора, однако разумно брать $\hat{w}_0(x)$ в точности удовлетворяющее асимптотике, например $\hat{w}_0(x) = c(1 - x)^{1/3}$.

Далее последовательно выполняются шаги

1. Подставив $\hat{w}_j(x)$ в (33), найдем $\mathcal{L}_{j+1}(\hat{w})$.
2. Подставив $\hat{w}_j(x)$ и $\mathcal{L}_{j+1}(\hat{w})$ в (34), найдем $\hat{\phi}_{j+1}(x)$.
3. Подставив $\hat{\phi}_{j+1}(x)$, и $\mathcal{L}_{j+1}(\hat{w})$ в (35), найдем $\hat{w}_{j+1}(x)$.

Шаги 1–3 повторяются до тех пор, пока последовательности $\mathcal{L}_j(\hat{w})$, $\hat{w}_j(x)$, $\hat{\phi}_j(x)$ не сойдутся в себе с заданной точностью.

3.3. Особенности численного интегрирования

Важной частью данного алгоритма является вычисление интегралов. Именно эта часть является наиболее затратной в вычислительном плане, а также оказывает сильное влияние на точность решения.

Во-первых, для эффективного вычисления (34), (35) было использовано аддитивное свойство интегралов, а именно

$$\int_{x_k}^1 f(s)ds = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(s)ds + \int_{x_{k+1}}^1 f(s)ds, \quad (37)$$

где f — подынтегральное выражение из (34) либо (35).

Таким образом, каждый из интегралов $\int_{x_k}^1 f$ был вычислен последовательно (начиная с последнего, $\int_{x_{N-1}}^1 f$), путем сложения предыдущего результата $\int_{x_{k+1}}^1 f$ и интеграла по следующему промежутку $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f$.

Во-вторых, численное интегрирование (34) традиционными методами влечет высокие погрешности, поскольку $\hat{w}(x)$ ведет себя как кубический корень в окрестности 1. Например, погрешность метода трапеций [22] пропорциональна второй производной подынтегрального выражения, а производная $\hat{w}(x)$ имеет сингулярность в точке $x = 1$. Поэтому при интегрировании следует учитывать асимптотику решения.

Подынтегральное выражение f на промежутках между узлами сетки $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0..N - 1$) было интерполировано выражением

$$f(x) \approx a_k f_1(x) + b_k f_2(x), \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad (38)$$

где

$$f_1(x) = (1 - x)^{p_1}, \quad f_2(x) = (1 - x)^{p_2}, \quad (39)$$

а степени p_1 и p_2 соответствуют первыми степенями в асимптотическом разложении подынтегрального выражения в окрестности $x = 1$.

Для нахождения коэффициентов a_k, b_k составляется система уравнений

$$f(x_k) = a_k f_1(x_k) + b_k f_2(x_k), \quad k = 0..N - 1 \quad (40)$$

$$f(x_{k+1}) = a_k f_1(x_{k+1}) + b_k f_2(x_{k+1}), \quad k = 0..N - 2 \quad (41)$$

Пары уравнений (40), (41) для $k = 0..N - 2$ являются независимыми друг от друга и поэтому могут быть решены отдельно:

$$a_k = -\frac{f_2(x_{k+1}) f(x_k) - f(x_{k+1}) f_2(x_k)}{f_1(x_{k+1}) f_2(x_k) - f_2(x_{k+1}) f_1(x_k)}, \quad (42)$$

$$b_k = \frac{f(x_k) f_1(x_{k+1}) - f(x_{k+1}) f_1(x_k)}{f_1(x_{k+1}) f_2(x_k) - f_1(x_k) f_2(x_{k+1})}. \quad (43)$$

Поскольку при $x = 1$ функции $f_1(x), f_2(x)$ либо равны нулю (либо стремятся к бесконечности, если рассматривать отрицательные степени), уравнение (41) теряет смысл при $k = N - 1$. Поэтому на $2N - 1$ уравнений приходится $2N$ неизвестных коэффициента.

Чтобы уравновесить количество неизвестных, составляется дополнительное уравнение на основе информации об асимптотическом поведении функции:

$$f(x) \approx A f_1(x) + B f_2(x), \quad x \rightarrow 1 \quad (44)$$

где A и B — неизвестные постоянные. Подставив в выражение выше узлы, ближайšie к концу трещины, $x = x_{N-1}, x_{N-2}, x_{N-3}$, а в левую

часть подставив (38), получим еще 3 уравнения.

$$f(x_{N-1}) = a_{N-1}f_1(x_{N-1}) + b_{N-1}f_2(x_{N-1}) = Af_1(x_{N-1}) + Bf_2(x_{N-1}), \quad (45)$$

$$f(x_{N-2}) = a_{N-2}f_1(x_{N-2}) + b_{N-2}f_2(x_{N-2}) = Af_1(x_{N-2}) + Bf_2(x_{N-2}), \quad (46)$$

$$f(x_{N-3}) = a_{N-3}f_1(x_{N-3}) + b_{N-3}f_2(x_{N-3}) = Af_1(x_{N-3}) + Bf_2(x_{N-3}). \quad (47)$$

Этих уравнений достаточно для того, чтобы сделать систему (40), (41) полной и найти коэффициенты a_{N-1} , b_{N-1} , а также A и B .

Поскольку a_{N-2} , b_{N-2} , a_{N-3} , b_{N-3} уже известны из (42), (43), коэффициенты A и B выражаются через (46), (47), а затем через (45) можно прямоком выразить значение интеграла на последнем узле

$$\int_{x_{N-1}}^1 f(x)dx = AF_1(x_{N-1}, 1) + BF_2(x_{N-1}, 1). \quad (48)$$

где

$$F_k(a, b) = \int_a^b f_k(x)dx, \quad k = 1, 2. \quad (49)$$

Для остальных узлов искомый интеграл находится по формуле

$$\int_{x_k}^1 f(x)dx = a_k F_1(x_k, x_{k+1}) + b_k F_2(x_k, x_{k+1}) + \int_{x_{k+1}}^1 f(x)dx. \quad (50)$$

В результате применения данного подхода точность была увеличена на несколько порядков (по сравнению с методом трапеций).

3.4. Аналитические решения

У рассматриваемой системы уравнений возможны аналитические решения. Эти решения использовались для проверки точности алго-

ритма. Рассматривались аналитические решения [20], имеющие вид

$$\hat{w}(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \hat{w}_k(x). \quad (51)$$

Функции $\hat{w}_k(x)$ подбираются таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия, а давление могло быть найдено аналитически из упругого соотношения. Тогда давление представляется в виде

$$\hat{p}(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \hat{p}_k(x), \quad (52)$$

где $\hat{p}_k(x) = \hat{w}_k(x)$ в случае РКН.

Отсюда находятся

$$\hat{\phi}(x) = - \left(\sum_{k=0}^n \lambda_k \hat{w}_k(x) \right)^2 \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{d}{dx} \hat{p}_k(x) - x C_A \mathcal{L}(\hat{w}), \quad (53)$$

$$\hat{q}_0 = - \left(\sum_{k=0}^n \lambda_k \hat{w}_k(0) \right)^3 \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{d\hat{p}_k}{dx} \Big|_{x=0}. \quad (54)$$

$\hat{q}_l(x)$ находится из уравнения баланса массы (20)

$$\frac{1}{\mathcal{L}(\hat{w})} \frac{d}{dx} (\hat{w} \hat{\phi}) = -\chi \hat{w} - \kappa \hat{q}_l. \quad (55)$$

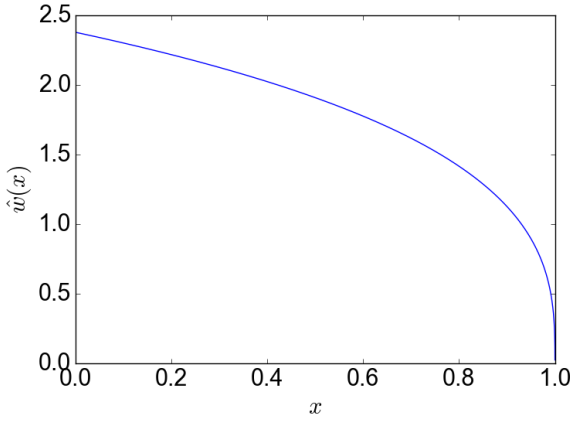
Таким образом, задав последовательность λ_k , $\hat{w}_k(x)$, определяются параметры системы \hat{q}_0 и $\hat{q}_l(x)$ при которых данное аналитическое решение имеет место.

В случае РКН для проверки точности были использованы вида (51) при

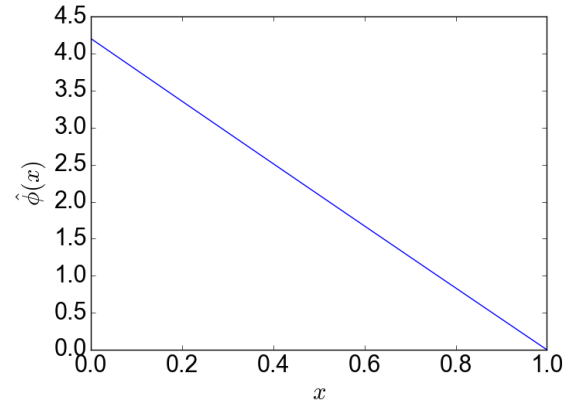
$$\hat{w}_k = (1-x)^{k+1/3}, \quad k = 0..n-1; \quad \hat{w}_n = e^x (1-x)^{n+1/3}. \quad (56)$$

3.5. Численные результаты

По определенному выше алгоритму была написана компьютерная программа на языке Python 3.5, позволяющая найти автомодельные решения задачи типа РКН, с экспоненциальной или степенной времен-



(a) Профиль раскрытия трещины, $\hat{w}(x)$.



(b) Профиль усеченной скорости, $\hat{\phi}(x)$.

Рис. 3: Профиль решения при $\hat{q}_0 = 10$, $\hat{q}_l = 0$, $\gamma = 0.1$.

ной зависимостью.

Профиль решения

Автомодельные решения по данному выше определению имеют одинаковый (с точностью до масштаба) профиль в любой момент времени. На рисунке 3 в качестве примера показано решение при $\hat{q}_0 = 10$, $\hat{q}_l = 0$, $\gamma = 0.1$. Из графиков четко видно, что функции \hat{w} и $\hat{\phi}$ ведут себя согласно описанной ранее асимптотике.

Точность решения

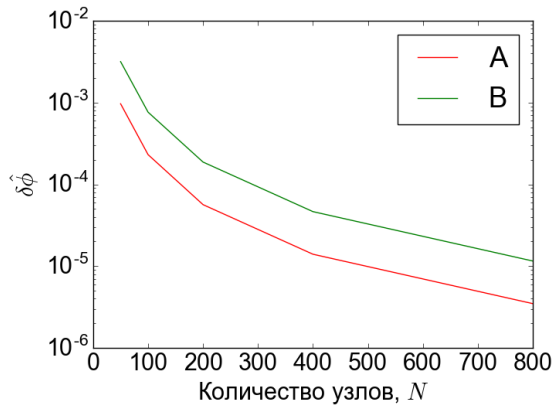
Была исследована точность решения, основываясь на максимальном относительном отклонении численного решения от эталонного аналитического

$$\delta\hat{w} = \max_{k=0..N-1} \frac{|\hat{w}(x_k) - \hat{w}^{\text{theory}}(x_k)|}{\hat{w}^{\text{theory}}(x_k)}, \quad (57)$$

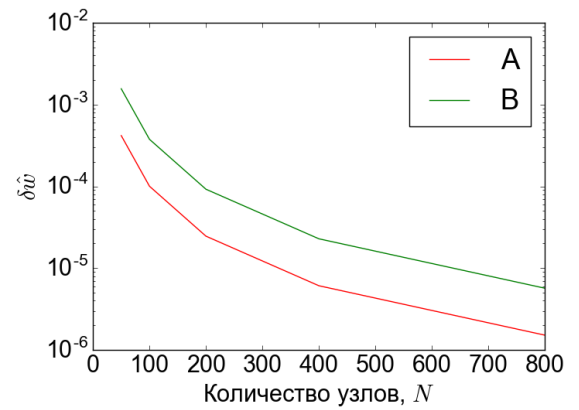
где \hat{w}^{theory} — аналитическое решение. Аналогичным образом определяется $\delta\hat{\phi}$.

Далее представлены результаты для решений, имеющих вид (51), (56), где коэффициенты равны (А) $\lambda_k = 1/(k+1)$, (В) $\lambda_k = 2^{-k-1}$, $k = 0..9$.

На рисунках 4а и 4б представлены относительные погрешности $\delta\hat{w}$ и



(a) Погрешность по $\hat{\phi}$

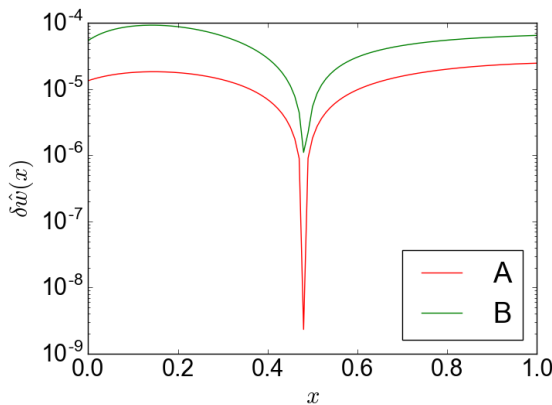


(b) Погрешность по \hat{w}

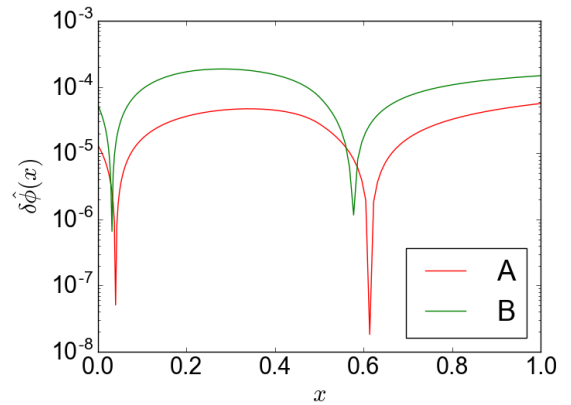
Рис. 4: Зависимость максимальной относительной погрешности от количества узлов. Шкала логарифмическая.

$\delta\hat{\phi}$ соответственно в зависимости от количества узлов пространственной сетки N . Сетка бралась неравномерной, сгущающейся к концам интервала. Параметры сгущения брались одинаковыми для каждой точки на графике.

Уже при 200 узлах погрешность не превышает 0.1%, а с увеличением количества узлов становится еще меньше.



(a) Погрешность по \hat{w}



(b) Погрешность по $\hat{\phi}$

Рис. 5: Зависимость относительной погрешности от координаты x . Шкала логарифмическая.

На рисунках 5а и 5б представлены соответственно относительные

погрешности $\delta\hat{w}(x)$ и $\delta\hat{\phi}(x)$

$$\delta\hat{w}(x_k) = \frac{|\hat{w}(x_k) - \hat{w}^{\text{theory}}(x_k)|}{\hat{w}^{\text{theory}}(x_k)} \quad (58)$$

в зависимости от координаты при $N = 200$.

В связи с тем, что обе величины $\hat{w}(x)$ и $\hat{\phi}(x)$ близки к нулю в окрестности $x = 1$, логично ожидать наибольшую погрешность вблизи конца трещины. Вместо этого наблюдается погрешность одного порядка в широком диапазоне значений x . Это является следствием неравномерного расположения узлов сетки. Эффект, когда погрешность резко уходит к нулю, а потом возвращается на прежнее значение объясняется сменой знака выражения под знаком модуля в числителе (58).

4. Общий случай

В этом разделе рассматриваются решения в общем, т.е. временно-зависимом случае.

Опираясь на алгоритм из работы [20], была написана компьютерная программа для нахождения численных решений. далее описывается сам алгоритм, а также полученные результаты.

4.1. Вычислительный алгоритм

В отличие от алгоритма для нахождения автомодельного решения, здесь в алгоритме присутствуют шаги по времени ($t = t_0..t_{K-1}$). На каждом отдельно взятом временном шаге используется итерационная процедура [20], аналогичная той, что была применена при нахождении автомодельного решения.

Нулевой шаг

В начале из начальных условий (27) выводятся значения величин $\frac{\partial w}{\partial t}$, $\mathcal{L}(w)$ при $t = 0$.

Это делается следующим образом. Из (11) находится скорость

$$v_{\diamond}(x) = \frac{1}{3L_{\diamond}} \frac{dw_{\diamond}^3}{dx}, \quad (59)$$

где $v_{\diamond}(x) = v(x, t_0)$ — значение скорости в начальный момент времени, обозначается по аналогии с (27).

Далее, из соотношения (16) выражается $\mathcal{L}(w)$

$$\mathcal{L}(w_{\diamond}) = \frac{v_{\diamond}(1)}{C_A} L_{\diamond}^m. \quad (60)$$

По определению (17) выражается ϕ

$$\phi_{\diamond}(x) = \phi(x, t_0) = v_{\diamond}(x) - v_{\diamond}(1)x. \quad (61)$$

И, наконец, из уравнения неразрывности (20) выражается $\frac{\partial w}{\partial t}$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t_0} = -\frac{1}{L_\diamond} \frac{d}{dx} (w_\diamond \phi_\diamond) - \frac{v_\diamond(1)}{L_\diamond} w_\diamond - q_l|_{t_0}. \quad (62)$$

Переход на следующий шаг

Нулевое приближение для итерационной процедуры берется, основываясь на величинах, полученных на предыдущем временном шаге: $w(x, t_i)$, $\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t_i}$, $\mathcal{L}(w_i)$ (здесь $w_i = w|_{t_i}$). А именно

$$w^{(0)}(x, t_{i+1}) = w(x, t_i) + (t_{i+1} - t_i) \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t_i}. \quad (63)$$

Если $i \geq 1$, то

$$\left. \frac{\partial w^{(0)}}{\partial t} \right|_{t_{i+1}} = \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t_i} + \left(\left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t_i} - \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t_{i-1}} \right) \frac{t_{i+1} - t_i}{t_i - t_{i-1}}, \quad (64)$$

иначе

$$\left. \frac{\partial w^{(0)}}{\partial t} \right|_{t_1} = \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t_0}. \quad (65)$$

Нулевое приближение длины $L^{(0)}(t_{i+1})$ вычисляется согласно (71), приняв $\mathcal{L}^{(0)}(w_1) = \mathcal{L}(w_0)$ и

$$\mathcal{L}^{(0)}(w_{i+1}) = \mathcal{L}(w_i) + (t_{i+1} - t_i) \frac{\mathcal{L}(w_i) - \mathcal{L}(w_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \quad (66)$$

при $i \geq 1$.

Основной алгоритм

В соответствии с системой уравнений (20)–(27) последовательно вычисляются

1. Параметр $\mathcal{L}(w)$

$$\mathcal{L}^{(j+1)}(w_{i+1}) = \frac{(L^{(j)})^{m+1}}{\mathcal{C}_A} \left(\int_0^1 w^{(j)} dx \right)^{-1} \left(\frac{q_0}{L^{(j)}} - \int_0^1 q_l dx - \int \frac{\partial w^{(j)}}{\partial t} dx \right) \quad (67)$$

2. Усеченная скорость жидкости $\phi(x)$

$$\phi^{(j+1)}(x, t_{i+1}) = \frac{L^{(j)}}{w^{(j)}(x)} \int_x^1 \left(\frac{\partial w^{(j)}}{\partial t} + \frac{C_A \mathcal{L}^{(j+1)}(w)}{(L^{(j)})^{m+1}} w^{(j)} + q_l \right) ds \quad (68)$$

3. Раскрытие трещины $w(x)$. В случае PKN

$$w^{(j+1)}(x, t_{i+1}) = \left(3L^{(j)} \int_x^1 \left(\phi^{(j+1)} + s \frac{C_A \mathcal{L}^{(j+1)}(w)}{(L^{(j)})^m} \right) ds \right)^{1/3}. \quad (69)$$

4. Производная раскрытия трещины по времени

$$\left. \frac{\partial w^{(j+1)}}{\partial t} \right|_{t_{i+1}} = \frac{w^{(j)}(x, t_{i+1}) - w(x, t_i)}{t_{i+1} - t_i} \quad (70)$$

5. Длина трещины $L(t)$

$$L^{(j+1)}(t_{i+1}) = \left(L^{m+1}(0) + (m+1)C_A \int_0^{t_{i+1}} \mathcal{L}(w) d\tau \right)^{\frac{1}{m+1}}. \quad (71)$$

Этапы 1–5 повторяются до тех пор, пока последовательности иско-
мых величин не сойдутся в себе с достаточной точностью. Затем про-
исходит переход на следующий шаг по времени.

4.2. Сходимость алгоритма

Проверка алгоритма выявила проблемы со стабильностью. В част-
ности, при некоторых вводных параметрах алгоритм расходится, и ре-
шение получить не удается.

Процедуру на отдельно взятом временном шаге можно рассматри-
вать как последовательный итерационный процесс (процедуру) Пикар-
да [1], который в общем случае имеет вид

$$w^{(j+1)}(t_i) = T_w w^{(j)}(t_i), \quad (72)$$

где T_w — оператор, эквивалентный преобразованиям, проводимыми над
 $w^{(j)}$ за одну итерацию.

Обобщением процедуры Пикарда является процедура Манна [13, 1]:

$$w^{(j+1)}(t_i) = \alpha_j T_w w^{(j)}(t_i) + (1 - \alpha_j) w^{(j)}(t_i), \quad (73)$$

где коэффициенты α_j удовлетворяют условиям

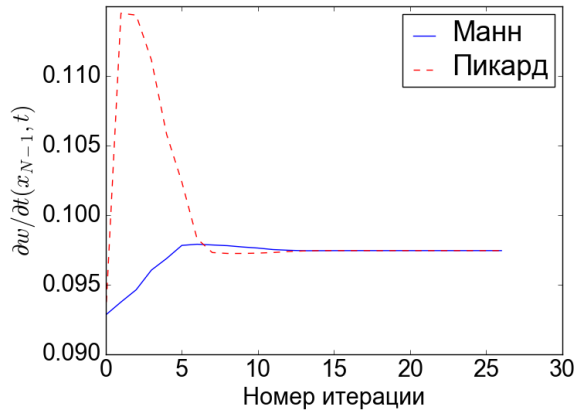
$$0 < \alpha_j \leq 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j = \infty. \quad (74)$$

Другими словами, процедура Манна усредняет значение с предыдущей итерации со значением, которое должно было получиться в результате последовательного итерационного процесса.

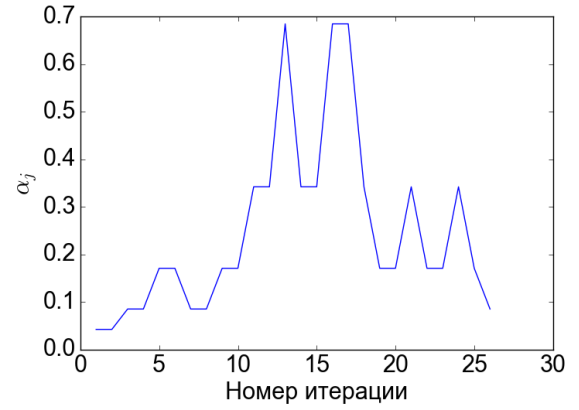
При правильном выборе α_j процедура Манна позволяет улучшить стабильность алгоритма. Практика показала, что наибольшую проблему представляет сходимость производной раскрытия трещины $\frac{\partial w}{\partial t}$. По этой причине α_j выбирались по следующим правилам:

1. Начальное значение α_0 выбирается так: (А) на первом временном шаге таким образом, чтобы значение $\frac{\partial w}{\partial t}$ изменилось не больше, чем на 1%, (Б) на последующих шагах берется среднее значение между значением из (А) и последним значением α_k с предыдущего временного шага.
2. Если производная растет (или падает) 3 итерации подряд, то α_j увеличивается в m_α раз (изначально $m_\alpha = 2$).
3. Если рост (падение) производной меняется падением (ростом), то α_j уменьшается в 2 раза.
4. В случае если при таких параметрах алгоритм расходится, итерации начинаются сначала с другими значениями: начальное значение α_0 уменьшается в 2 раза: $\alpha_0^{\text{new}} = \alpha_0/2$; параметр m_α берется ближе к единице: $m_\alpha^{\text{new}} = (1 + 2m_\alpha)/3$.

Понятия ”рост” и ”падение” можно понимать по-разному, поскольку $\frac{\partial w}{\partial t}$ может вести себя по-разному в разных узлах. Тем не менее, по причине вычислительной экономии, а также по причине высокого влияния



(а) Значение производной на последнем узле.



(б) Параметр α_j .

Рис. 6: Зависимость величин от номера итерации.

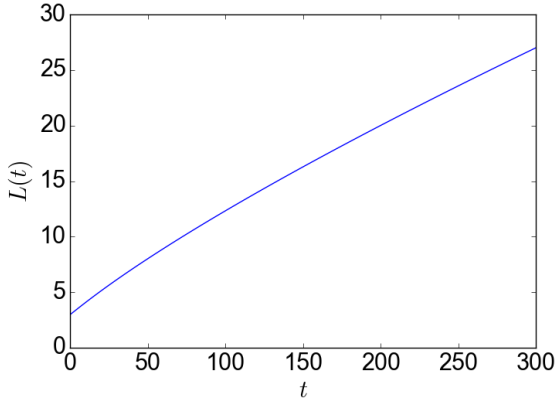
значений вблизи вершины трещины, выводы о "росте" или "падении" производились на основе наблюдений лишь за значением на последнем узле x_{N-1} .

Использование процедуры Манна вместо процедуры Пикарда позволило улучшить стабильность алгоритма. На рисунке 6а изображена зависимость $\frac{\partial w}{\partial t}$ на последнем узле при использовании процедуры Манна, а также то значение этой величины, которое получалось бы при применении процедуры Пикарда. Как видно, значение по Пикарду имеет резкий скачок уже на первой итерации, и если бы не была применена процедура Манна, алгоритм бы не сошелся. На рисунке 6б изображена динамика параметра α_j .

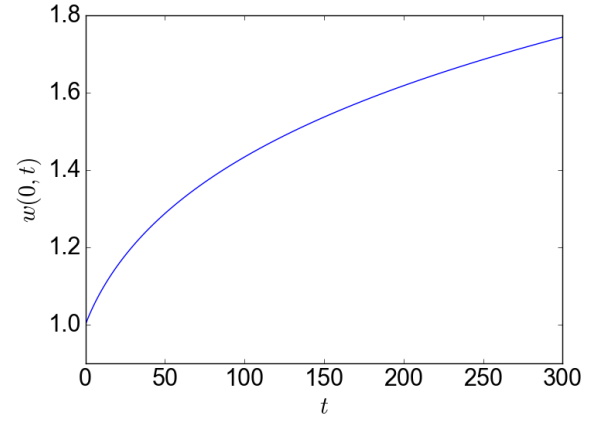
Несмотря на достигнутые успехи, при выборе размера временного шага требуется осторожность. Стабильная работа возможна лишь при размере шага, лежащем в относительно узком диапазоне, который зависит от скоротечности процесса.

4.3. Результаты вычислений

В данном разделе рассматриваются численные решения, полученные при различных функциях притока. При этом утечка предполагается нулевой, а первоначальная форма трещины берется в виде первого



(a) Длина трещины, $L(t)$.



(b) Максимальное раскрытие, $w(0, t)$.

Рис. 7: Графики зависимости величин, полученных при постоянном притоке.

члена асимптотики, а именно

$$q_l(x, t) = 0, \quad w_\diamond(x) = (1 - x)^{1/3}, \quad L_\diamond = 3. \quad (75)$$

4.3.1. Постоянный приток

Рассматривался приток постоянной величины. Сама величина выбиралась таким образом, чтобы граничные и начальные условия были совместимы, т. е.

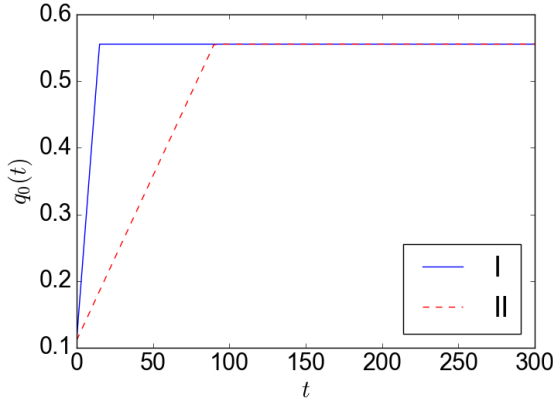
$$q_0(0) = w_\diamond(0)v_\diamond(0) = q_\diamond, \quad (76)$$

Таким образом

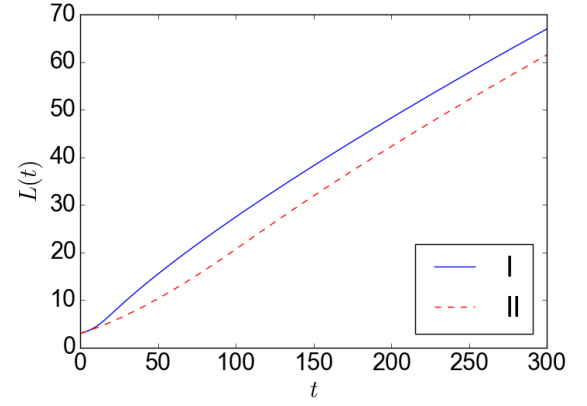
$$q_0(t) = w_\diamond(0)v_\diamond(0) = -\frac{1}{3L_\diamond}w \frac{dw_\diamond^3}{dx} = \frac{1}{9}. \quad (77)$$

Интерес представляют длина и максимальное раскрытие трещины (которое, очевидно, наблюдается в точке $x = 0$). Зависимость этих величин от времени представлена на рисунках 7а и 7б.

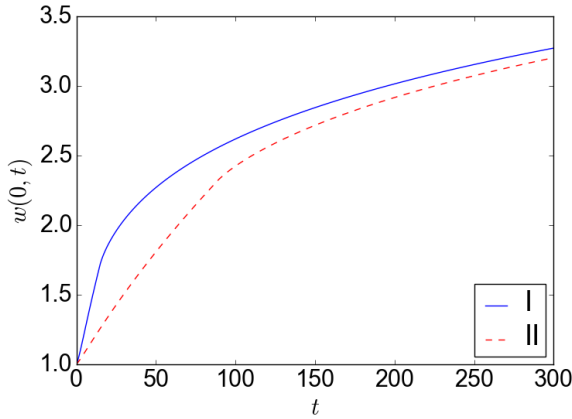
В работе [14] было найдено автомодельное решение при постоянном притоке и нулевой утечке, имеющее, однако, форму трещины отличную от рассмотренной здесь. По всей видимости, при $t \rightarrow \infty$ решение стремится к автомодельному, и $w \sim t^{1/5}$, $L \sim t^{4/5}$.



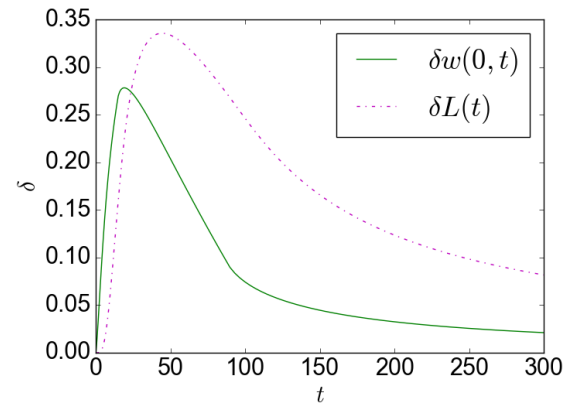
(a) Функции притока, $q_0(t)$.



(b) Длины трещин, $L(t)$.



(c) Максимальные раскрытия трещин, $w(0, t)$.



(d) Относительная разница.

Рис. 8: Графики зависимости от времени величин, относящимся к решениям I и II.

4.3.2. Линейный рост

Далее были рассмотрены решения при постоянном притоке q_0^* , превышающем начальный q_\diamond в несколько раз. При этом режиму постоянного притока предшествовал линейный рост, и была изучена зависимость от скорости этого роста. Таким образом

$$q_0(t) = q_\diamond + (q_0^* - q_\diamond) \frac{t}{t_1}, \quad t < t_1, \quad (78)$$

$$q_0(t) = q_0^*, \quad t \geq t_1, \quad (79)$$

t_1 — время, за которое приток достигает постоянного режима.

Были рассмотрены случаи, когда $t_1 = 15$ (решение I) и $t_1 = 90$ (решение II), $q_0^* = 5q_\diamond$, соответствующие функции притока изображены на

рисунке 8a. На рисунках 8b, 8c показано, как меняются максимальные раскрытия и длины трещин со временем. На рисунке 8d изображена относительная разница между первым и вторым решениями, при этом положительный знак означает, что величина, соответствующая решению I больше.

Как и ожидалось, более быстрое нарастание притока приводит к более быстрому нарастанию $w(0, t)$ и $L(t)$. Во время роста притока раскрытие трещины в нуле растет линейно, а длина растет быстрее, чем линейно (поскольку графики длины являются выпуклыми при $t < t_1$). Прирост к раскрытию трещины сначала оказывается более значительным, однако со временем максимальное раскрытие трещин практически сравнивается, и более существенной остается разница длин трещин.

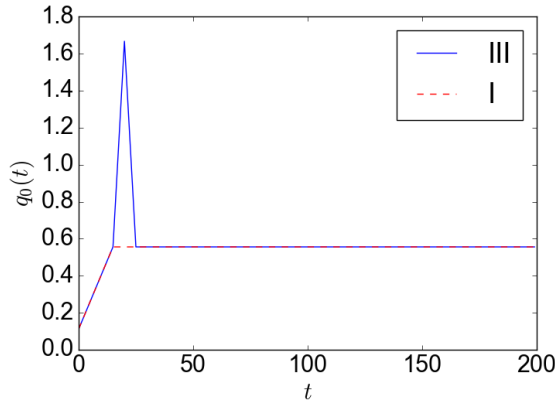
4.3.3. Кратковременное возмущение

Было рассмотрено влияние кратковременного возмущения треугольной формы на функцию притока, обсуждаемую в предыдущем разделе. На рисунке 9a линия I соответствует функции притока из предыдущего раздела ($q_0^* = 5q_\diamond$, $t_1 = 15$), а линия III соответствует возмущенному притоку, максимальная величина притока $\max(q_0^{\text{III}}) = 15q_\diamond$, продолжительность возмущения $\Delta t = 10$.

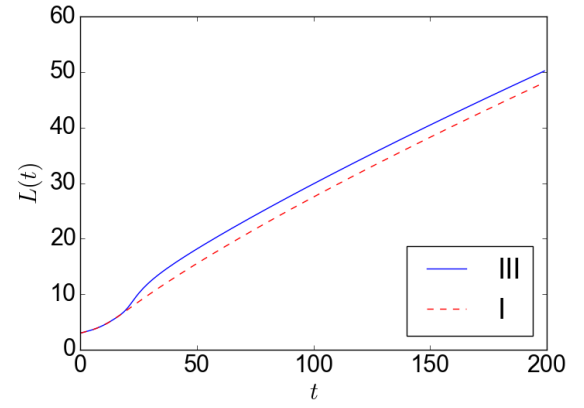
По аналогии с предыдущим разделом, на рисунках 9b, 9c изображены соответственно максимальные раскрытия и длины трещин в зависимости от времени. На рисунке 9d изображена относительная разница между невозмущенным и возмущенным решениями, при этом положительный знак означает, что величина, соответствующая решению III больше.

Во время возмущения максимальное раскрытие трещины росло и падало в соответствии с быстрым увеличением или же падением притока. В тоже время скорость роста трещины была повышенной как и во время подъема, так и во время спада притока. В итоге, скачок притока привел к увеличению как и длины трещины, так и максимального раскрытия, однако прирост к длине оказался существеннее.

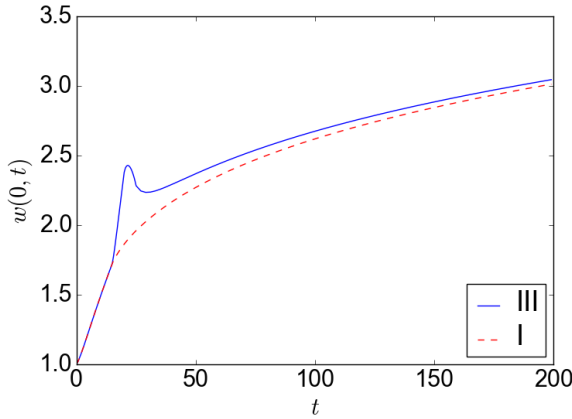
При больших значениях t линии на графиках длины 8b, 9b идут



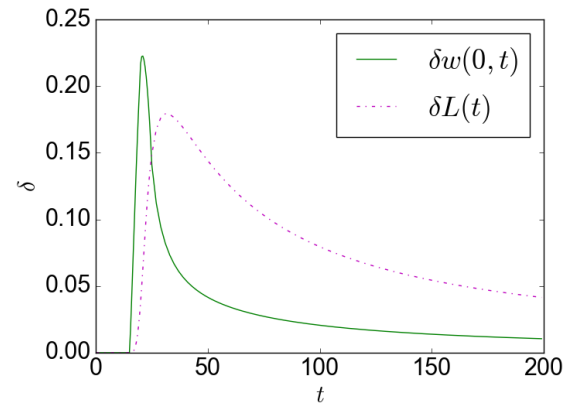
(a) Функции притока, $q_0(t)$.



(b) Длины трещин, $L(t)$.



(c) Максимальные раскрытия трещин, $w(0, t)$.

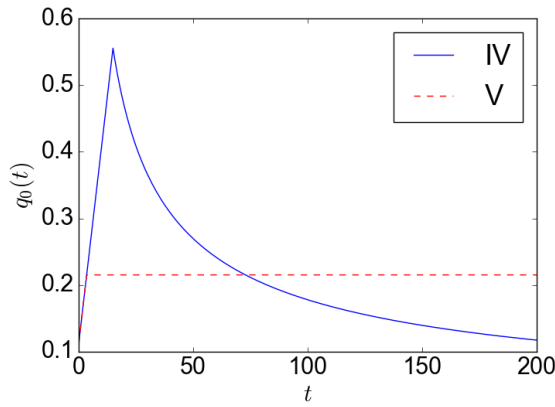


(d) Относительная разница.

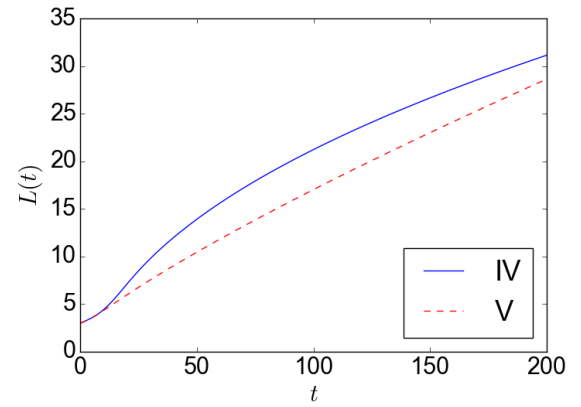
Рис. 9: Графики зависимости от времени величин, относящимся к решениям III и I.

практически параллельно, в то время как линии на графиках максимального раскрытия δ_s , δ_c начинают сливаться.

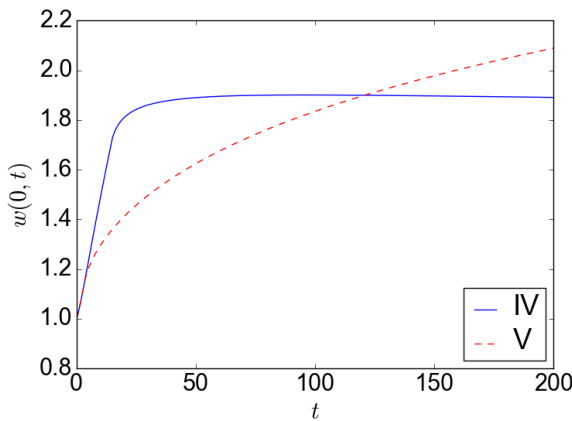
Таким образом, сравнение решений I и II, III и I, имеющих одинаковую постоянную функцию притока начиная с $t = 90$, показало, что качественное поведение решений на больших временах совпадает. Абсолютная разница решений по длине стремится к постоянной величине, а разница по максимальному раскрытию уходит к нулю (либо стремится к постоянной величине другого порядка малости, нежели разница по длине). Различие в длине трещин объясняется различным объемом жидкости, введенным в каждую из трещин.



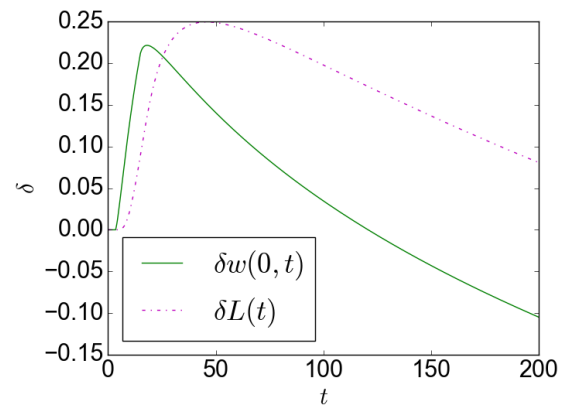
(a) Функции притока, $q_0(t)$.



(b) Длины трещин, $L(t)$.



(c) Максимальные раскрытия трещин, $w(0, t)$.



(d) Относительная разница.

Рис. 10: Графики зависимости от времени величин, относящимся к решениям IV и V.

4.3.4. Режим постоянного давления

При постоянном притоке рост раскрытия трещины не ограничен (рисунок 7b). Как известно из упругого соотношения 5, давление пропорционально раскрытию трещины, что означает неограниченный рост давления. Тем не менее, на практике давление ограничено техническими возможностями оборудования, используемого при гидроразрыве.

В системе уравнений, используемой в этой работе, невозможно напрямую задать давление, однако была подобрана такая функция притока, что максимальное раскрытие трещины остается ограниченным и стремится к постоянной величине при $t \rightarrow \infty$.

Соответствующая функция притока изображена на рисунке 10а (ре-

шение IV). Она имеет следующую структуру:

$$q_0(t) = q_\diamond + (q_0^* - q_\diamond) \frac{t}{t_1}, \quad t < t_1, \quad (80)$$

$$q_0(t) = q_0^* \left(\frac{t}{t_1} \right)^{-3/5}, \quad t \geq t_1, \quad (81)$$

где $q_0^* = 5q_\diamond$, $t_1 = 15$.

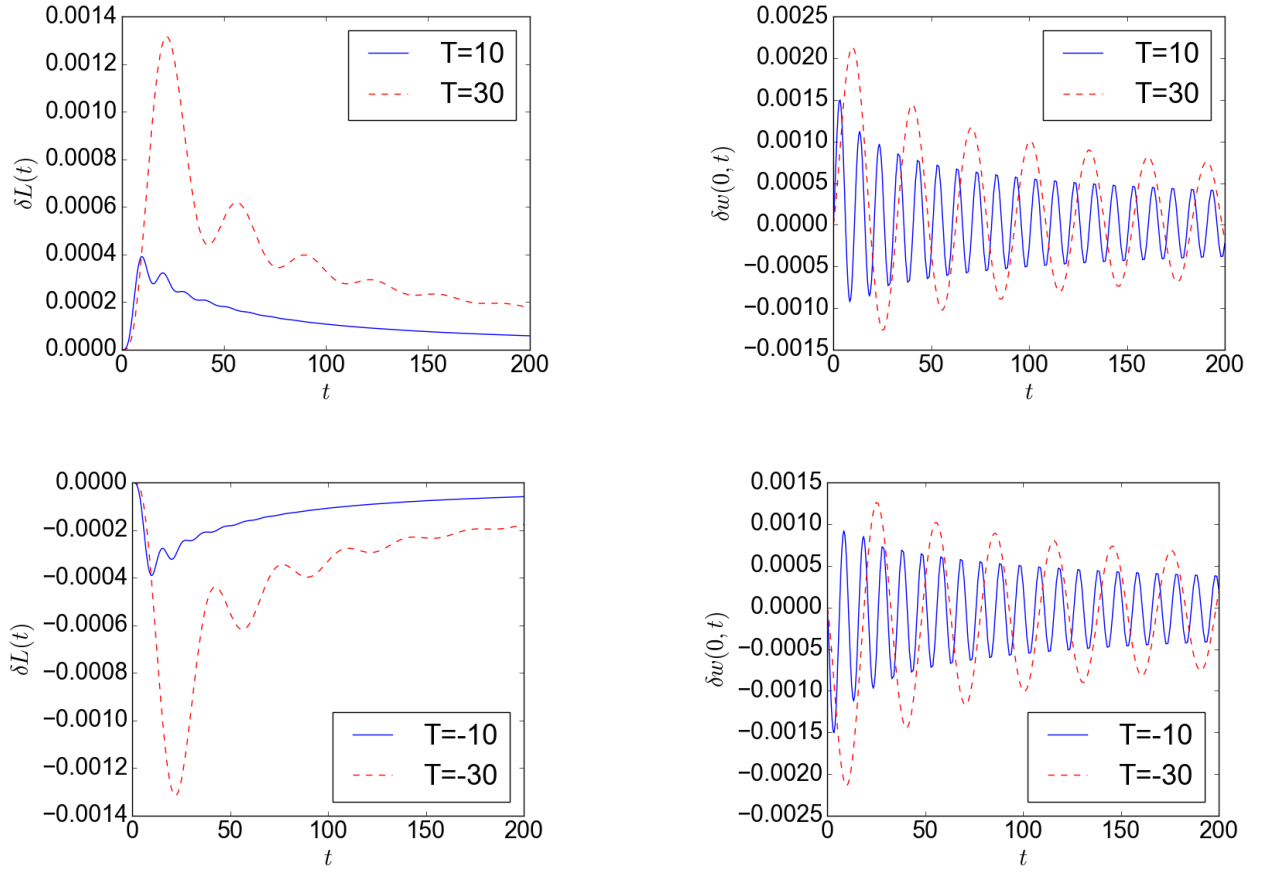
Также для сравнения рассмотрено решение, полученное при притоке, который возрастает линейно с той же скоростью, а затем постоянен. Размер этой постоянной величины выбирался так, чтобы объем закаченной в трещину жидкости в момент времени $t = 200$ был одинаков в обоих случаях. Данное решение обозначено номером V.

На рисунке 10с изображена зависимость максимального раскрытия $w(0, t)$ от времени. Во время роста притока значение $w(0, t)$ решения IV растет линейно. После смены режима $w(0, t)$ растет еще некоторое время, а затем его значение остается практически неизменным. Поскольку приток уменьшается со временем, длина трещины растет медленнее, чем линейно (рисунок 10b).

На рисунке 10d изображен график относительной разницы между решениями IV и V, при чем положительный знак означает, что величина соответствующая решению IV больше. Из графика видно, что ограничение на $w(0, t)$ выливается в дополнительную длину трещины.

Сама же величина $w(0, t)$ сначала больше для решения IV, а затем для решения V. Это можно объяснить тем, что сначала приток IV превышает приток V, а затем наоборот.

Таким образом, функция притока IV может описывать выход насоса на рабочее давление и его последующей работе при этом давлении. Сравнение показало, что этот режим позволяет получить большую длину трещины по сравнению с режимом постоянного притока при равном объеме затраченной гидроразрывной жидкости.



(a) Относительные отклонения по $L(t)$.

(b) Относительные отклонения по $w(0, t)$.

Рис. 11: Относительные отклонения решений с гармонически возмущенным притоком по сравнению с решением при постоянном притоке из раздела 4.3.1.

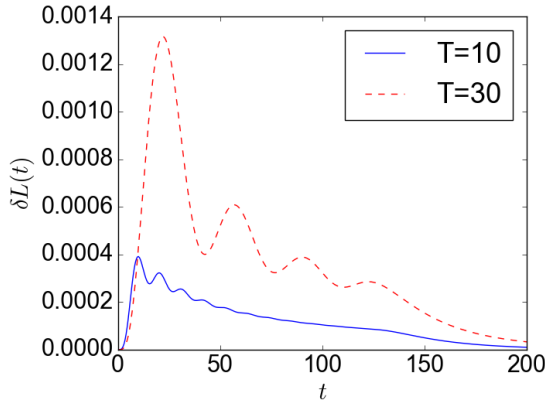
4.3.5. Гармоническое возмущение режима с постоянным притоком

Было рассмотрено решение при гармонически возмущенном постоянном притоке

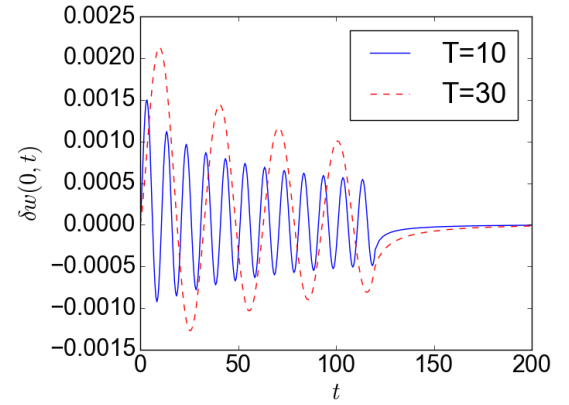
$$q_0(t) = q_\diamond(1 + A \sin(\frac{2\pi}{T}t)). \quad (82)$$

Рассматривались два решения с одинаковой относительной амплитудой возмущения $A = 0.01$ и различными периодами $T = 10$ и $T = 30$, а также два решения при $T = -10$ и $T = -30$, то есть решения при тех же периодах, но со сдвигом по фазе на π .

На рисунке 11a изображено относительное изменение длины, а на рисунке 11b — относительное изменение максимального раскрытия, по



(a) Относительные отклонения по $L(t)$.



(b) Относительные отклонения по $w(0, t)$.

Рис. 12: Относительные отклонения решений с гармонически возмущенным притоком до $t = 120$ по сравнению с решением при постоянном притоке из раздела 4.3.1.

сравнению с режимом постоянного притока из раздела 4.3.1.

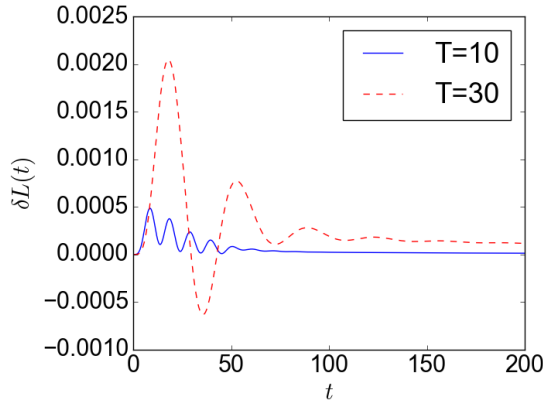
По относительному изменению максимального раскрытия $\delta w(0, t)$ наблюдаются медленно затухающие колебания около 0, тогда как изменение по длине $\delta L(t)$ быстро возрастает, а затем снижается и стремится к некоторой постоянной величине, также испытывая колебания.

При сдвиге по фазе наблюдается абсолютно такая же картина, но изменение имеет уже противоположный знак.

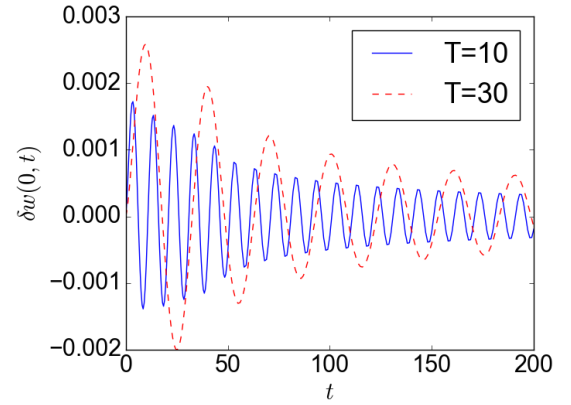
Стоит отметить, что величина $\delta w(0, t)$ на 1 порядок, а $\delta L(t)$ на 2 порядка меньше порядка возмущения $A = 0.01$, что совпадает с выводами, сделанными в работе [14]. Также видно, что больший период возмущения вызвал большие изменения максимального раскрытия и длины трещины.

Кроме того, было изучено поведение решения, получающегося, если после некоторого момента времени ($t = 120$) убрать гармоническую добавку, получив опять постоянный приток. На рисунке 12 показаны соответствующие результаты.

Как видно, изменение максимального раскрытия $\delta w(0, t)$ перестает колебаться и быстро затухает. Изменение по длине $\delta L(t)$ также затухает к нулю.



(а) Относительные отклонения по $L(t)$.



(б) Относительные отклонения по $w(0, t)$.

Рис. 13: Относительные отклонения решений с гармонически возмущенным притоком по сравнению с решением IV

4.3.6. Гармоническое возмущение режима с постоянным давлением

Также рассматривалось гармоническое возмущение притока, который соответствует выходу на постоянное давление. Подробно этот случай описан в разделе 4.3.4.

$$q_0(t) = \tilde{q}_0(t) \left(1 + A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right), \quad (83)$$

где $\tilde{q}_0(t)$ — приток IV из раздела 4.3.4.

Амплитуда возмущения бралась также $A = 0.01$, и периоды $T = 10$, $T = 30$.

На рисунках 13а и 13б показаны соответственно относительное изменение длины и максимального раскрытия трещин по сравнению с решением IV.

Качественная картина практически совпадает с той, которая была получена в предыдущем разделе: $\delta w(0, t)$ меняется периодическим образом, колеблясь около нуля и медленно затухая. Как и в предыдущем разделе, $\delta L(t)$ возрастает, а затем затухает, стремясь к ненулевой величине при $t \rightarrow \infty$, испытывая при этом колебания. Однако здесь величина этих колебаний больше, и в некотором промежутке времени $\delta L(t)$ даже меняет знак.

Заключение

В работе изложены математическая модель одномерного гидравлического разрыва, преобразования системы уравнений этой модели, а также алгоритм, использованный в компьютерных вычислениях.

Была написана программа для нахождения решения в модели РКН, как и в автомодельном, так и в общем случаях. Точность численного решения была проверена с помощью автомодельных аналитических решений.

Исследовано поведение решение в зависимости от различных режимов закачки жидкости. Выявилось, что максимальное раскрытие трещины чувствительно реагирует на кратковременное изменение притока. Тем не менее, эта реакция угасает со временем, но при этом воздействие на длину трещины имеет более продолжительный характер. Из поведения решения можно сделать вывод, что поведение максимального раскрытия трещины в большой степени зависит от притока жидкости, когда как длина трещины управляется объемом введенной жидкости (то есть интегралом притока по времени).

Был найден режим роста трещины, при котором максимальное давление сначала растет линейно, а затем стремится к постоянной величине. В этом режиме ограничено максимальное раскрытие трещины, а значит больший объем жидкости уходит на продвижение трещины, чем на её раскрытие.

Также было исследовано поведение решения при добавлении гармонического возмущения. Такое возмущение позволяет увеличить длину трещины, однако при выключении возмущения, дополнительная длина быстро стремится к нулю.

Список литературы

- [1] Berinde Vasile. Iterative approximation of fixed points. — Springer, 2007. — Vol. 1912.
- [2] Computer simulation of hydraulic fractures / J. Adachi, E. Siebrits, A. Peirce, J. Desroches // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2007. — Vol. 44, no. 5. — P. 739–757.
- [3] Detournay Emmanuel, Peirce Anthony. On the moving boundary conditions for a hydraulic fracture // International Journal of Engineering Science. — 2014. — Vol. 84. — P. 147–155.
- [4] England AH, Green AE. Some two-dimensional punch and crack problems in classical elasticity // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society / Cambridge University Press. — Vol. 59. — 1963. — P. 489–500.
- [5] Geertsma J, De Klerk F et al. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures // Journal of Petroleum Technology. — 1969. — Vol. 21, no. 12. — P. 1–571.
- [6] Gidley John L. Recent advances in hydraulic fracturing. — 1989.
- [7] Kovalyshen Y, Detournay E. A reexamination of the classical PKN model of hydraulic fracture // Transport in porous media. — 2010. — Vol. 81, no. 2. — P. 317–339.
- [8] Kusmierczyk P, Mishuris G, Wrobel M. Remarks on application of different variables for the PKN model of hydrofracturing: various fluid-flow regimes // International Journal of Fracture. — 2013. — Vol. 184, no. 1-2. — P. 185–213.
- [9] Linkov AM. Speed equation and its application for solving ill-posed problems of hydraulic fracturing // Doklady Physics / Springer. — Vol. 56. — 2011. — P. 436–438.

- [10] Linkov Alexander M. On numerical simulation of hydraulic fracturing // Proc. XXXVIII Summer School-Conference, “Advanced Problems in Mechanics-2011”, Repino, St. Petersburg. — 2011. — P. 291–296.
- [11] Linkov Alexander M. Use of a speed equation for numerical simulation of hydraulic fractures // arXiv preprint arXiv:1108.6146. — 2011.
- [12] Linkov Alexander M. On efficient simulation of hydraulic fracturing in terms of particle velocity // International Journal of Engineering Science. — 2012. — Vol. 52. — P. 77–88.
- [13] Mann W Robert. Mean value methods in iteration // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1953. — Vol. 4, no. 3. — P. 506–510.
- [14] Mishuris Gennady, Wrobel Michal, Linkov Alexander. On modeling hydraulic fracture in proper variables: stiffness, accuracy, sensitivity // International Journal of Engineering Science. — 2012. — Vol. 61. — P. 10–23.
- [15] Nordgren RP et al. Propagation of a vertical hydraulic fracture // Society of Petroleum Engineers Journal. — 1972. — Vol. 12, no. 04. — P. 306–314.
- [16] Perkins TK, Kern LR et al. Widths of hydraulic fractures // Journal of Petroleum Technology. — 1961. — Vol. 13, no. 09. — P. 937–949.
- [17] Sneddon IN, Elliot HA. The opening of a Griffith crack under internal pressure // Quarterly of Applied Mathematics. — 1946. — Vol. 4, no. 3. — P. 262–267.
- [18] Spence DA, Sharp P. Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences / The Royal Society. — Vol. 400. — 1985. — P. 289–313.

- [19] Wrobel Michal, Mishuris Gennady. Efficient pseudo-spectral solvers for the PKN model of hydrofracturing // International Journal of Fracture. — 2013. — Vol. 184, no. 1-2. — P. 151–170.
- [20] Wrobel M., Mishuris G. Hydraulic fracture revisited: Particle velocity based simulation // International Journal of Engineering Science. — 2015. — Vol. 94. — P. 23–58.
- [21] Zheltov A Khristianovic et al. 3. Formation of Vertical Fractures by Means of Highly Viscous Liquid // 4th World Petroleum Congress / World Petroleum Congress. — 1955.
- [22] Википедия. Метод трапеций — Википедия, свободная энциклопедия. — 2016. — [Online; accessed 16-апрель-2017]. URL: <http://ru.wikipedia.org/?oldid=79195499>.
- [23] Новожилов Валентин Валентинович. Теория упругости. — 1958.