Санкт-Петербургский государственный университет

Математика

Теория функций и функциональный анализ

Сафроненко Евгений Владимирович

Оценки мер симметрии для выпуклых тел

Магистерская диссертация

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент Храбров А. И.

Рецензент:
д. ф.-м. н., в.н.с. Дубцов Е. С.

Санкт-Петербург
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mathematics

Theory of functions and functional analysis

Evgenii Safronenko

Estimates for measures of symmetry for convex bodies

Master's Thesis

Scientific supervisor:
associate professor Alexander Khrabrov

Reviewer:
leading researcher Evgeny Dubtsov

Saint-Petersburg
2017

Оглавление

1 Введение

Прежде чем сформулировать рассматриваемую в данной работе задачу, введем следующие определения.

Всюду под выпуклым телом или просто телом мы будем иметь в виду компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Обозначим через $\mathcal{K}_n$ множество всех выпуклых тел в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для любого выпуклого тела $K \in \mathcal{K}_n$ назовем точку $a(K) \in K$ афинно-инвариантной, если для любого невырожденного афинного отображения $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ выполнено равенство

$$a(T(K)) = T(a(K)).$$

В 2011 году в работе [1] М. Мейер, К. Шютт и Э. М. Вернер предложили определить меру ассиметрии для произвольного выпуклого тела $K \in \mathcal{K}_n$ и пары аффинно-инвариантных точек $a_1(K), a_2(K) \in K$ как величину равную

$$d(a_1(K), a_2(K)) = 0, \quad \text{если } a_1(K) = a_2(K)$$

и

$$d(a_1(K), a_2(K)) = \frac{\|a_1(K) - a_2(K)\|}{\mathrm{vol}_1(l \cup K)}, \quad \text{если } a_1(K) \neq a_2(K),$$

где l — прямая, проходящая через точки $a_1(K)$ и $a_2(K)$. Соответствующей мерой симметрии называется отображение, заданное на множестве выпуклых тел $\mathcal{K}_n$

$$K \to \varphi_{a_1,a_2}(K) = 1 - d(a_1(K), a_2(K)).$$

Заметим, что величина $d(a_1(K), a_2(K))$ инвариантна относильно афинных преобразований тела K и принимает значения в промежутке от 0 до 1. Если выпулое тело K центрально-симметрично, то для любых афинно-инвариантных точек $a_1(K), a_2(K) \in K$ следует равенство $d(a_1(K), a_2(K)) = 0$. Но центрально-симметричные тела — не единственные тела, обладающие таким свойством. Например, для симплекса мера ассиметрии будет также равна 0 для любой пары афинно-инвариантных точек.

Данная работа посвящена исследованию величины

$$\max_{K \in \mathcal{K}_n} d(a_1(K), a_2(K)).$$

в зависимости от n для некоторых пар известных афинно-инвариантных точек таких, как центр масс $g(K)$ выпуклого тела K и центры эллипсоидов Джона $j(K)$ и Левнера $l(K)$ (см. параграф опеределений и обозначений).

В статье [1] авторы рассматривали центр масс $g(K)$ и точку Сантало $s(K)$. Для данной пары афинно-инвариантных точек и произвольного тела $K \in \mathcal{K}_n$ они доказали оценку

$$d(g(K), s(K)) \leqslant 1 - \frac{2}{n+1} \tag{1}$$

и построили пример последовательности выпуклых тел $C_n \in \mathcal{K}_{n+1}$, для которых значения меры ассиметрии $d(g(C_n), s(C_n))$ отделены от нуля, а именно справедлива оценка

$$\frac{1}{e}\frac{\sqrt{e\pi}-2}{\sqrt{e\pi}+\frac{2}{e-1}} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} d(g(C_n), s(C_n)) \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} d(g(C_n), s(C_n)) \leqslant \frac{1}{e}\frac{\sqrt{e\pi}-1}{\sqrt{e\pi}+\frac{1}{e-1}}.$$

Еще один пример достаточно далеких афинно-инвариантных точек — пара центр эллипсоида Джона и центр эллипсоида Левнера. В этой же статье был приведен пример такой последовательности выпуклых тел $L_n \in \mathcal{K}_{n+1}$, что выполненно соотношение

$$d(j(L_n), l(L_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}. \tag{2}$$

В настоящей работе рассматриваются две пары афинно-инвариантных точек: первая пара — центры эллипсоидов Джона $j(K)$ и Левнера $l(K)$, вторая — центр масс $g(K)$ и центр эллипсоида Левнера. Рассуждениями схожими с доказательством формулы (1) из работы [1], для произвольного выпуклого тела $K \in \mathcal{K}_n$ доказываются оценки

$$d(j(K), l(K)) \leqslant 1 - \frac{2}{n+1} \tag{3}$$

и

$$d(g(K), l(K)) \leqslant 1 - \frac{2}{n+1}. \tag{4}$$

В параграфе 7 будет предложена конструкция выпуклых тел $G_n \in \mathcal{K}_n$, для которых оценка меры ассиметрии (3) точна по порядку, а именно

$$d(j(G_n), l(G_n)) = 1 - \frac{8}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

при $n \to \infty$. Данный результат улучшает полученную в работе Мейера, Шютта и Вернер [1] оценку (2).

Для второй изучаемой пары афинно-инвариантных точек мы построим пример выпуклых тел $F_n \in \mathcal{K}_n$, для которых существуют такие абсолютные положительные константы C_1 и C_2, что справедлива двухсторонняя оценка

$$1 - \frac{C_1}{n} \leqslant d(g(F_n), l(F_n)) \leqslant 1 - \frac{C_2}{n}.$$

Таким образом, установлены асимптотически точные оценки для мер симметрии

$$\frac{2}{n+1} \leqslant \varphi_{j,l} \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \frac{2}{n+1} \leqslant \varphi_{g,l} \leqslant 1.$$

2 Определения и обозначения

Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ при $1 \leqslant k \leqslant n$ обозначим через x^k его k-ую координату, $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n x^k y^k$ — его скалярное произведение с вектором $y \in \mathbb{R}^n$ и соответствующую евклидову норму вектора x через $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Единичному вектору $\xi \in S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ сопоставим его ортогональное подпространство

$$\xi^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi \rangle = 0\}.$$

Заданным числу $t \in \mathbb{R}$, единичному вектору $\xi \in S^{n-1}$ и выпуклому телу $K \in \mathcal{K}_n$ соответствует $(n-1)$-мерное сечение тела K, ортогональное направлению ξ и проходящее через точку $t\xi$

$$K(\xi, t) = \{x \in K : \langle x, \xi \rangle = t\} = K \cap \xi^{\perp}.$$

Нас будут интересовать сечения ортогональные направлению $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Их мы будем просто обозначать $K(t) = K(e_n, t)$ и отождествлять с соответствующим $(n-1)$-мерным выпуклым телом в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Заведем следующие обозначения для конкретных выпуклых тел, которые нам понадобятся для будущих конструкций: $B_1^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n |x^k| \leqslant 1\}$ — n-мерный октаэдр, $B_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ — евклидов шар, $B_\infty^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \max\limits_k |x^k| \leqslant 1\}$ — n-мерный куб, и Δ_n — n-мерный правильный симплекс, вписанный в шар B_2^n. Эллипсоидом будем называть выпуклое тело $\mathcal{E} \in \mathcal{K}_n$, являющееся образом шара B_2^n при афинном отображении. Обозначим через $\mathrm{vol}_n(K)$ n-мерную Лебегову меру выпуклого тела $K \in \mathcal{K}_n$. ∂K — граница выпуклого тела K.

Для заданных подмножеств A и B пространства $\mathbb{R}^n$ назовем выпуклой оболочкой множеств A и B множество

$$\mathrm{conv}(A, B) = \{\lambda x + (1-\lambda) y : x \in A, y \in B\}.$$

Из определения следует, что если A и B — выпуклые тела, то их выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(A, B)$ также является выпуклым телом.

Хорошо известно (см., например [2, 3]), что для любого выпуклого тела $K \in \mathcal{K}_n$ существуют единственные вписанный эллипсоид максимального объема $J(K)$ и описанный эллипсоид $L(K)$ минимального объема, то есть эллипсоиды, являющиеся решениями соответствующих экстремальных задач

$$\mathrm{vol}_n(J(K)) = \max_{\mathcal{E} \subset K} \mathrm{vol}_n(\mathcal{E}),$$
$$\mathrm{vol}_n(L(K)) = \min_{K \subset \mathcal{E}} \mathrm{vol}_n(\mathcal{E}),$$

где $\mathcal{E}$ — эллипсоид. Говорят, что выпуклое тело в положении Джона, если его эллипсоид Джона есть шар B_2^n. Центры эллипсоидов Джона $J(K)$ и Левнера $L(K)$, соответственно $j(K)$ и $l(K)$, являются афинно-инвариантными точками.

Еще одним примером афинно-инвариантных точек являются центр масс $g(K)$ и точка Сантало $s(K)$ выпуклого тела $K \in \mathcal{K}_n$ (см., например, [4, 5])

$$g(K) = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)} \int_K x \, dx$$

и

$$\mathrm{vol}_n\left(K^{s(K)}\right) = \min_{x \in K} \mathrm{vol}_n(K^x),$$

где K^x — поляра тела K относительно точки x

$$K^x = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle z - x, y\rangle \leqslant 1 \text{ для всех } z \in K\}.$$

В доказательствах нам понадобятся следующие известные факты из выпуклой геометрии (см.,[6, глава 3] и [7, §7]): для произвольного выпуклого тела $K \in \mathcal{K}_n$ справедливы включения

$$J(K) - j(K) \subset K - j(K) \subset n(J(K) - j(K)), \tag{5}$$

$$\frac{1}{n}(L(K) - l(K)) \subset K - l(K) \subset L(K) - l(K), \tag{6}$$

$$K - g(K) \subset n(g(K) - K). \tag{7}$$

Из теоремы Минковского (см., например, [8, §4.2] или [9, глава 6 §1]) известно, что для заданных выпуклых тел K, $L \in \mathcal{K}_n$ и неотрицательных чисел $\lambda, \mu \geqslant 0$ объем тела $\lambda K + \mu L$ является многочленом степени n от λ и μ, то есть справедливо разложение

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K + \mu L) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^{n-k}\mu^k V_{n-k,k}(K, L).$$

Коэффициенты $V_{n-k,k}(K, L)$ разложения называются смешанными объемамии и однородны степени $n - k$ и k по K и L соответственно.

Запись $a \asymp b$ будет означать, что существуют такие положительные числа $c_1, c_2 > 0$, для которых выполняется неравенство

$$c_1 a \leqslant b \leqslant c_2 a.$$

3 Верхние оценки для мер ассиметрии

Лемма 3.1. *Для произвольного выпуклого тела $K \in \mathcal{K}_n$ справедлива следующая оценка для мер асимметрии, порожденных точками центров эллипсоидов Джона и Левнера и точками центра масс и центра эллипсоида Левнера*

$$d(j(K), l(K)) \leqslant 1 - \frac{2}{n+1} \quad \text{и} \tag{8}$$

$$d(g(K), l(K)) \leqslant 1 - \frac{2}{n+1}. \tag{9}$$

Доказательство. Докажем оценку (8). Для простоты обозначений положим $j = j(K)$ и $l = l(K)$. Пусть J — эллипсоид Джона тела K. Пользуясь соотношением (5) получаем цепочку включений

$$K - j \subset n(J - j) \subset n(j - J) \subset n(j - K)$$

и, следовательно,

$$K - j \subset n(j - K). \tag{10}$$

Аналогично из (6) получается включение

$$K - l \subset n(l - K). \tag{11}$$

Положим $u = \frac{l-j}{\|l-j\|}$. Справедливы следующие равенства

$$\max_{x \in K-j} \langle u, x \rangle = \max_{x \in K} \langle u, x \rangle - \langle u, j \rangle$$

и

$$\max_{x \in n(j-K)} \langle u, x \rangle = n\langle u, j \rangle + n \max_{x \in K} \langle u, -x \rangle = n\langle u, j \rangle - n \min_{x \in K} \langle u, x \rangle.$$

Из включения (10) и двух предыдущих равенств следует неравенство

$$\max_{x \in K} \langle u, x \rangle + n \min_{x \in K} \langle u, x \rangle \leqslant (n+1)\langle u, j \rangle. \tag{12}$$

С другой стороны, из соотношений

$$\min_{x \in K-l} \langle u, x \rangle = \min_{x \in K} \langle u, x \rangle - \langle u, l \rangle$$

и

$$\min_{x \in n(l-K)} \langle u, x \rangle = n\langle u, l \rangle - n \max_{x \in K} \langle u, x \rangle$$

и включения (11) следует неравенство

$$\min_{x \in K} \langle u, x \rangle + n \max_{x \in K} \langle u, x \rangle \geqslant (n+1)\langle u, l \rangle. \tag{13}$$

Используя неравенства (12), (13) и определение u, получаем оценку

$$\|l - j\| = \langle u, l - j \rangle \leqslant \frac{n-1}{n+1} \left(\max_{x \in K} \langle u, x \rangle - \min_{x \in K} \langle u, x \rangle \right),$$

что эквивалентно (8).

При помощи включений (6) и (7) аналогично доказывается оценка для меры ассиметрии пары точек центра масс и центра эллипсоида Левнера (9). □

4 Афинно-инвариантные точки декартовых произведений выпуклых тел

Для доказательства леммы 4.1 нам понадобится следующая теорема (формулировка заимствована из [10]).

Теорема (Ф. Джон [11]). *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело.*

Шар B_2^n является эллипсоидом Джона тогда и только тогда, когда $B_2^n \subset K$ и существуют набор векторов $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \partial K \cap \partial B_2^n$ и положительные числа $\{c_i\}_{i=1}^m$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i=1}^m c_i u_i = 0$$

и

$$\sum_{i=1}^m c_i \langle x, u_i \rangle^2 = \|x\|^2 \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}^n.$$

Шар B_2^n является эллипсоидом Левнера тогда и только тогда, когда $K \subset B_2^n$ и существуют набор векторов $\{v_i\}_{i=1}^m \subset \partial K \cap \partial B_2^n$ и положительные числа $\{b_i\}_{i=1}^m$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i=1}^m b_i v_i = 0,$$

и

$$\sum_{i=1}^m b_i \langle x, v_i \rangle^2 = \|x\|^2 \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 4.1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ и $K \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклые тела. Тогда точки центров масс и эллипсоидов Джона и Левнера выпуклого тела $D \times K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned} g(D \times K) &= (g(D), g(K)), \\ j(D \times K) &= (j(D), j(K)), \\ l(D \times K) &= (l(D), l(K)). \end{aligned}$$

Доказательство. Равенство для центров масс следует из теоремы Фубини

$$\begin{aligned} g(D \times K) &= \frac{1}{\operatorname{vol}_{n+m}(D \times K)} \int_{D\times K} z\,dz = \frac{1}{\operatorname{vol}_n(D)\operatorname{vol}_m(K)} \int_D \int_K (x,y)\,dy\,dx = \\ &= \left(\frac{1}{\operatorname{vol}_n(D)\operatorname{vol}_m(K)} \int_D \int_K x\,dx\,dy, \frac{1}{\operatorname{vol}_n(D)\operatorname{vol}_m(K)} \int_D \int_K y\,dy\,dx \right) = \\ &= \left(\frac{1}{\operatorname{vol}_n(D)} \int_D x\,dx, \frac{1}{\operatorname{vol}_m(K)} \int_K y\,dy \right) = (g(D), g(K)). \end{aligned}$$

Докажем утверждение для центра эллипсоида Джона тела $D \times K$.

Допустим, что тела D и K в положении Джона. Из теоремы 4 следует, что найдутся такие наборы векторов $\{u_i\}_{i=1}^k \subset \partial D \cap \partial B_2^n$ и $\{w_j\}_{j=1}^s \subset \partial K \cap \partial B_2^m$ и положительные числа $\{c_i\}_{i=1}^k$ и $\{d_j\}_{j=1}^s$, что выполняются тождества

$$\sum_{i=1}^k c_i u_i = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^k c_i \langle x, u_i \rangle^2 = \|x\|^2 \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^s d_j w_j = 0 \text{ и } \sum_{j=1}^s d_j \langle y, w_j \rangle^2 = \|y\|^2 \quad \text{для любого } y \in \mathbb{R}^m. \tag{15}$$

Заметим, что справедливо включение $B_2^{n+m} \subset B_2^n \times B_2^m \subset D \times K$. Рассмотрим набор векторов $\{(u_i, 0)\}_{i=1}^k \cup \{(0, w_j)\}_{j=1}^s \subset \partial D \times \partial K \subset \partial(D \times K)$ и набор положительных чисел $\{c_i\}_{i=1}^k \cup \{d_j\}_{j=1}^s$. Из условий $\{u_i\}_{i=1}^k \subset \partial B_2^n$ и $\{w_j\}_{j=1}^s \subset \partial B_2^m$ следует, что набор векторов $\{(u_i, 0)\}_{i=1}^k \cup \{(0, w_j)\}_{j=1}^s$ содержится в ∂B_2^{n+m}. Используя тождества (14) и

(15), получаем

$$\sum_{i=1}^{k} c_i(u_i, 0) + \sum_{j=1}^{s} d_j(0, w_j) = 0$$

и

$$\|(x,y)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{k} c_i\langle x, u_i\rangle^2 + \sum_{j=1}^{s} d_j\langle y, w_j\rangle^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} c_i\langle (x,y), (u_i, 0)\rangle^2 + \sum_{j=1}^{s} d_j\langle (x,y), (0, w_j)\rangle^2,$$

для любых $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Тем самым построенные наборы удовлетворяют всем необходимым условиям теоремы 4 и, следовательно, B_2^{n+m} является эллипсоидом Джона для тела $D \times K$. Таким образом, доказали равенства

$$j(D \times K) = (0, 0) = (j(D), j(K)).$$

Пусть теперь тела D и K произвольные, а $A_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $A_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — соответствующие афинные преобразования, переводящие тела D и K в положение Джона. По доказанному, для центров эллипсоидов Джона справедливо равенство

$$j(A_1D \times A_2K) = (j(A_1D), j(A_2K)).$$

Пусть $A_1 \times A_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ — афинное преобразование, определенное формулой

$$(A_1 \times A_2)(x, y) = (A_1x, A_2y) \text{ для любого } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Применяя обратное преобразование для $A_1 \times A_2$ к телу $A_1D \times A_2K$ получаем

$$j(D \times K) = (A_1 \times A_2)^{-1}((A_1 \times A_2)j(D \times K)) = (A_1 \times A_2)^{-1}j(A_1D \times A_2K) =$$
$$= (A_1 \times A_2)^{-1}(j(A_1D), j(A_2K)) = (A_1^{-1}j(A_1D), A_2^{-1}j(A_2K)) = (j(D), j(K)).$$

Перейдем к доказательству утверждения для центра эллипсоида Левнера выпуклого тела $D \times K$. Докажем это утверждение, когда эллипсоиды Левнера тел D и K — соответветственно шары B_2^n и B_2^m. Тогда по теореме 4 существуют наборы векторов $\{v_i\}_{i=1}^k \subset \partial D \cap \partial B_2^n$ и $\{z_j\}_{j=1}^s \subset \partial K \cap \partial B_2^m$ и положительные числа $\{a_i\}_{i=1}^k$ и $\{b_j\}_{j=1}^s$ такие, что выполняются тождества

$$\sum_{i=1}^{k} a_iv_i = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{k} a_i\langle x, v_i\rangle^2 = \|x\|^2 \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}^n, \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{s} b_jz_j = 0 \text{ и } \sum_{j=1}^{s} b_j\langle y, z_j\rangle^2 = \|y\|^2 \quad \text{для любого } y \in \mathbb{R}^m. \tag{17}$$

Рассмотрим набор векторов $\{(v_i, z_j)\}_{i=1,j=1}^{k,s} \subset \partial D \times \partial K \subset \partial(D \times K)$ и набор положительных чисел $\{\lambda a_ib_j\}_{i=1,j=1}^{k,s}$, где λ — положительное число, значение которого определим ниже. Пользуясь тождествами (16) и (17), получаем

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s}\lambda a_i b_j (v_i, z_j) = \lambda\left(\sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{i=1}^{k} a_i v_i, \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=1}^{s} b_j z_j\right) = 0$$

и

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s}\lambda a_i b_j \langle (x,y),(v_i,z_j)\rangle^2 = \lambda \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} a_i b_j \left(\langle x, v_i\rangle^2 + 2\langle x, v_i\rangle\langle y, z_j\rangle + \langle y, z_j\rangle^2\right) =$$

$$= \lambda\left(\sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{i=1}^{k} a_i \langle x, v_i\rangle^2 + 2\sum_{j=1}^{s} b_j\langle y, z_j\rangle \sum_{i=1}^{k} a_i\langle x, v_i\rangle + \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=1}^{s} b_j \langle y, z_j\rangle^2\right) =$$

$$= \lambda\sum_{j=1}^{s} b_j\|x\|^2 + \lambda\sum_{i=1}^{k} a_i\|y\|^2$$

для любых $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим $(n+m)$-мерный эллипсоид

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m : \lambda\|x\|^2\left(\sum_{j=1}^{s} b_j\right) + \lambda\|y\|^2\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) \leqslant 1\right\},$$

где λ выберем так, чтобы $\partial B_2^n \times \partial B_2^m \subset \partial\mathcal{E}$, а именно

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{j=1}^{s} b_j + \sum_{i=1}^{k} a_i}.$$

Тогда $(v_i, z_j)\in\partial\mathcal{E}$ при $1\leqslant i\leqslant k$ и $1\leqslant j\leqslant s$ и имеется включение $D\times K\subset B_2^n\times B_2^m\subset\mathcal{E}$. Обозначим через T линейный оператор, определенный следующим образом

$$T:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,$$

$$T(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{\lambda\sum_{j=1}^{s} b_j}}, \frac{y}{\sqrt{\lambda\sum_{i=1}^{k} a_i}}\right)$$

при любых $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$.

Проверим, что шар B_2^{n+m} является эллипсоидом Левнера для тела $T(D\times K)$. Из определения оператора T следует включение

$$T(D\times K)\subset T(\mathcal{E}) = B_2^{n+m}$$

и справедливость для любых $1\leqslant i\leqslant k, 1\leqslant j\leqslant s$ соотношений

$$T(v_i, z_j)\in T(\partial(D\times K)) = \partial T(D\times K).$$

Воспользовавшись линейностью и самосопряженностью оператора T получаем

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s}\lambda a_i b_j T(v_i, z_j) = T\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s}\lambda a_i b_j (v_i, z_j)\right) = 0$$

и

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s}\lambda a_i b_j\langle (x,y),T(v_i,z_j)\rangle^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s}\lambda a_i b_j\langle T(x,y),(v_i,z_j)\rangle^2=$$

$$=\lambda\sum_{j=1}^{s}b_j\frac{1}{\lambda\sum_{j=1}^{s}b_j}\|x\|^2+\lambda\sum_{i=1}^{k}a_i\frac{1}{\lambda\sum_{i=1}^{k}a_i}\|y\|^2=\|(x,y)\|^2.$$

Тем самым показали, что для тела $T(D\times K)$ и шара B_2^{n+m} выполнены условия теоремы 4. Отсюда B_2^{n+m} — эллипсоид Левнера для тела $T(D\times K)$. Так как эллипсоиды Левнера инвариантны относительно аффинных преобразований, $\mathcal{E}=T^{-1}B_2^{n+m}$ — эллипсоид Левнера для $D\times K$ и, следовательно, справедливо равенство

$$j(D\times K)=(0,0)=(j(D),j(K)).$$

Доказательство утверждения для произвольных выпуклых тел D и K аналогично соответствующей части доказательства утверждения для центров эллипсоидов Джона. $\square$

5 Две вспомогательные конструкции для центров эллипсоидов Джона и Левнера

В данном параграфе будут рассмотрены выпуклые тела $G_n, N_n\in\mathcal{K}_n$ со следующими свойствами: центр эллипсоида Джона выпуклого тела G_n близок к его границе, а центр элиипсоида Левнера, наоборот, от границы данного тела отделен; центры эллипсоидов Джона и Левнера выпуклого тела N_n обладают противоположным свойством.

В качестве выпуклых тел G_n будем использовать следующую конструкцию.

Лемма 5.1 (M. Meyer, C. Schütt, E. M. Werner [1]). *Обозначим через G_n $(n+1)$-мерное тело определенное равенством $G_n=\operatorname{conv}((B_2^n,0),(\Delta_n,1))$. Тогда центры эллипсоидов Левнера и Джона имеют вид*

$$l(G_n)=\left(0,\ldots,0,\frac{1}{2}\right)\quad и \tag{18}$$

$$j(G_n)=(0,\ldots,j^{n+1}(G_n)), \tag{19}$$

где $j^{n+1}(G_n)=\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Для построения выпуклых тел N_n нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.2 (M. Meyer, C. Schütt, E. M. Werner [1]). *Пусть для какого-то положительного числа $\alpha>0$ шар αB_2^n является эллипсоидом Джона (соответственно эллипсоидом Левнера) выпуклого тела $K\in\mathbb{R}^n$. Тогда для любых $s,t\geqslant 0$ эллипсоидом Джона (соответственно эллипсоидом Левнера) выпуклого тела $sK+tB_2^n$ будет шар $(s\alpha+t)B_2^n$.*

Лемма 5.3. *Рассмотрим следующее* $(n+1)$*-мерное выпуклое тело*

$$N_n = \operatorname{conv}\left((\Delta_n, 0), \left(\frac{1}{n}B_2^n, 1\right)\right).$$

Тогда центры эллипсоидов Джона и Левнера имеют вид

$$j(N_n) = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{2}\right) \quad \text{и} \tag{20}$$

$$l(N_n) = \left(0, \dots, 0, l^{n+1}(N_n)\right), \tag{21}$$

где $l^{n+1}(N_n) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Доказательство. Сперва докажем утверждение для центра эллипсоида Джона $j(N_n)$. В дальнейшем, будем обозначать этот эллипсоид через J.

Заметим, что выпуклые тела N_n инвариантны относительно нетривиального поворота вокруг оси, направленной вдоль вектора $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Следовательно, в силу единственности, центр эллипсоида Джона лежит на этой оси, а сам эллипсоид представим в виде

$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \frac{\|x\|^2}{a^2} + \frac{(t-c)^2}{b^2} \leqslant 1\right\} \tag{22}$$

для некоторых $a > 0, b > 0$ и $c \in [0; 1]$.

При $t \in [0,1]$ по лемме 5.2 эллипсоид Джона для сечений $N_n(t) = (1-t)\Delta_n + t\frac{1}{n}B_2^n$ равен $((1-t)\frac{1}{n} + t\frac{1}{n})B_2^n$. Отсюда, в силу представления (22), следуют включения для сечений $J(t) \subset \frac{1}{n}B_2^n$. Таким образом, получаем необходимое условие для параметров a, b, c: при всех $t \in [0; 1]$ выполняются неравенства

$$a\sqrt{1 - \frac{(t-c)^2}{b^2}} \leqslant \frac{1}{n}. \tag{23}$$

Так как эллипсоид Джона имеет наибольший объем, при каком-то $t \in [0; 1]$ в полученном неравенстве (23) должно быть равенство. Очевидно, оно достигается в точке $t = c$. Отсюда получаем, что для эллипсоида J в представлении (22) $a = \frac{1}{n}$. Из того, что эллипсоид Джона вписан в N_n, следуют условия $c \in [0; 1]$ и $b \in [0; \min(c, 1-c)]$. Осталось заметить, что объем эллипсоида $\mathcal{E}_{\frac{1}{n},b,c}$ равен

$$\operatorname{vol}_{n+1}\left(\mathcal{E}_{\frac{1}{n},b,c}\right) = b\frac{1}{n^n}\operatorname{vol}_{n+1}\left(B_2^{n+1}\right).$$

Ясно, что при $c \in [0; 1]$ и $b \in [0; \min(c, 1-c)]$ это выражение принимает максимальное значение в точке $b = c = \frac{1}{2}$.

По построению эллипсоида $\mathcal{E}_{\frac{1}{n},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ справедливо неравенсво

$$\operatorname{vol}_{n+1}(J) \leqslant \operatorname{vol}_{n+1}\left(\mathcal{E}_{\frac{1}{n},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right).$$

С другой стороны, эллипсоид $\mathcal{E}_{\frac{1}{n},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ содержится в выпуклом теле N_n, поскольку

$$\mathcal{E}_{\frac{1}{n},\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \subset \left(\frac{1}{n}B_2^n\right) \times [0; 1] \subset N_n.$$

Следовательно, в силу единственности эллипсоида Джона, $J = \mathcal{E}_{\frac{1}{n},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ и $j^{n+1}(N_n) = \frac{1}{2}$. Тем самым мы получили представление (20) для центра эллипсоида Джона.

Перейдем к доказательству утверждения про центр эллипсоида Левнера L выпуклого тела N_n. По аналогичным причинам, как в случае эллипсоида Джона, эллипсоид Левнера имеет вид (22), а его центр лежит на прямой, направленной вдоль вектора e_{n+1}.

Из определения эллипсоида Левнера L выпуклого тела N_n следуют включения для соответствующих сечений $N_n(t) = (1-t)\Delta_n + t\frac{1}{n}B_2^n \subset L(t)$ при $t \in [0;1]$. С другой стороны, для любого эллипсоида $\mathcal{E}_{a,b,c}$ из включений $N_n(0) \subset \mathcal{E}_{a,b,c}(0)$ и $N_n(1) \subset \mathcal{E}_{a,b,c}(1)$, в силу выпуклости тела N_n, получаются включения $N_n(t) = (1-t)\Delta_n + t\frac{1}{n}B_2^n \subset \mathcal{E}_{a,b,c}(t)$ при $t \in [0;1]$. Из минимальности объема эллипсоида Левнера L следует непустота пересечений $\partial L(0) \cap \partial N_n(0)$ и $\partial L(1) \cap \partial N_n(1)$. Отсюда получаем следующие два условия на a, b и c

$$\frac{1}{n^2} = a^2\left(1 - \frac{(1-c)^2}{b^2}\right)$$

и

$$1 = a^2\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right).$$

Решая систему из этих двух уравнений относительно a и b получаем соотношения

$$b^2 = \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)c^2 - 2c + 1}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

и

$$a^2 = \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)c^2 - 2c + 1}{1 - 2c}.$$

Также из положительности их левых частей следует ограничение

$$c < \frac{1}{2}.$$

Теперь пользуясь минимальностью объема эллипсоида Левнера будем искать значение $l_{n+1}(N_n)$, как решение задачи минимизации квадрата функции объема

$$f(c) = \operatorname{vol}_{n+1}^2(\mathcal{E}_{a,b,c}) = b^2 a^{2n} \operatorname{vol}_{n+1}^2(B_2^{n+1}) = \\ = \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)c^2 - 2c + 1}{1 - \frac{1}{n^2}} \left(\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)c^2 - 2c + 1}{1 - 2c}\right)^n \operatorname{vol}_{n+1}^2(B_2^{n+1})$$

при $c \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Найдем точки экстремума с помощью производной

$$f'(c) = \frac{\operatorname{vol}_{n+1}^2(B_2^{n+1})}{1-\frac{1}{n^2}} \frac{\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)c^2 - 2c + 1\right)^n}{(1-2c)^n} \cdot \\ \cdot \left((n+1)\left(2c\left(1 - \frac{1}{n}^2\right) - 2\right) + \frac{2n\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)c^2 - 2c + 1\right)}{(1-2c)}\right) = 0.$$

Поскольку многочлен $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)c^2 - 2c + 1$ строго положителен при $c \in (0; \frac{1}{2})$, достаточно рассмотреть корни многочлена

$$(n+1)\left(\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)c - 1\right)(1-2c) + n\left(\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)c^2 - 2c + 1\right) = 0.$$

Приведением подобных слагаемыемых получаем

$$\frac{(n^2-1)(n+2)}{n^2}c^2 - \frac{n^3+3n^2-n+1}{n^2}c + 1 = 0.$$

Последнее уравнение имеет два корня:

$$\alpha_1 = \frac{n^3+3n^2-n-1+\sqrt{(n^3+3n^2-n-1)^2-4n^2(n^2-1)(n+2)}}{2(n^2-1)(n+2)},$$
$$\alpha_2 = \frac{n^3+3n^2-n-1-\sqrt{(n^3+3n^2-n-1)^2-4n^2(n^2-1)(n+2)}}{2(n^2-1)(n+2)}.$$

Корень α_1 нам не подходит, так как он выходит из области определения $c \in (0; \frac{1}{2})$ при достаточно больших n

$$\alpha_1 = \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{15}{n^2}-\frac{4}{n^3}+\frac{3}{n^4}+\frac{2}{n^5}+\frac{1}{n^6}}}{2(1-\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Поскольку для любого выпуклого тела существует единственный эллипсоид Левнера, а α_2 — единственный возможный центр такого эллипсоида, получаем $l_{n+1}(N_n) = \alpha_2$. Для завершения доказательства посчитаем асимптотику $l_{n+1}(N_n)$

$$l_{n+1}(N_n) = \alpha_2 = \frac{1+\frac{3}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-\sqrt{1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}}{2(1-\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n})} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

□

6 Две вспоготалеьные конструкции для центров масс и эллипсоида Левнера

Как и для пары точек центров элиипсоидов Джона и Левнера, нам понадобятся две вспомогаетльные конструкции. Рассмотрим выпуклые тела $H_n \in \mathcal{K}_{n+1}$ и $P_n \in \mathcal{K}_{n+1}$, определенные следующим образом

$$H_n = \operatorname{conv}\left((B_2^n, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{n}}B_\infty^n, 1\right)\right) \tag{24}$$

и

$$P_n = \operatorname{conv}\left(\left(\frac{B_1^n}{\operatorname{vol}_n(B_1^n)^{\frac{1}{n}}}, 0\right), \left(\frac{1}{2}B_\infty^n, 1\right)\right). \tag{25}$$

Заметим, что в силу наличия нетривиального поворота вокруг оси, направленной вдоль вектора $e_{n+1} = (0,\ldots,0,1)$, центры масс и центры эллипсоида Левнера тел H_n и

P_n имеют вид

$$g(H_n) = (0, \ldots, 0, g^{n+1}(H_n)), \tag{26}$$

$$l(H_n) = (0, \ldots, 0, l^{n+1}(H_n)) \tag{27}$$

и

$$g(P_n) = (0, \ldots, 0, g^{n+1}(P_n)), \tag{28}$$

$$l(P_n) = (0, \ldots, 0, l^{n+1}(P_n)), \tag{29}$$

где $g^{n+1}(H_n), g^{n+1}(H_n), l^{n+1}(P_n), l^{n+1}(P_n)$ — это $(n+1)$-ые коодинаты соответствующих точек.

Для вычисления центров масс данной конструкции нам понадобится следующая лемма, выражающая их через смешанные объемы.

Лемма 6.1 (M. Meyer, C. Schütt, E. M. Werner [1]). *Пусть $K, L \in \mathcal{K}_n$ — выпуклые тела, $c > 0$ — положительное число и $M_n = \operatorname{conv}((K,0),(L,c))$. Тогда $(n+1)$-ая координата точки центра масс $g^{n+1}(M_n)$ тела M_n вычисляется по формуле*

$$g^{n+1}(M_n) = \frac{c}{n+2} \frac{\sum_{k=0}^{n}(k+1)V_{n-k,k}(K,L)}{\sum_{k=0}^{n} V_{n-k,k}(K,L)}. \tag{30}$$

Воспользуемся следующим утверждением, чтобы посчитать значения смешанных объемов $V_{n-k,k}(B_2^n, B_\infty^n)$.

Лемма 6.2 (A. Pajor [12, теорема 1.10], [13, теорема 6]). *Для любого выпуклого тела $K \in \mathcal{K}_n$ смешанные объемы $V_{n-k,k}(B_2^n, B_\infty^n)$ удовлетворяют равенству*

$$V_{n-k,k}(K, B_\infty^n) = \frac{2^k}{C_n^k} \left(\sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I| = n-k}} \operatorname{vol}_n P^I K \right),$$

где для подмножества $I \subset \{1, \ldots, n\}, |I| = n-k$, через P^I обозначается проектор пространства $\mathbb{R}^n$ на $(n-k)$-мерное подпространство $\mathbb{R}^I$

В нашем случае $P^I B_1^n = B_1^{n-k}$ и $P^I B_2^n = B_2^{n-k}$ для любого $I \subset \{1, \ldots, n\}, |I| = n-k$. Следовательно $V_{n-k,k}\left(B_n^1, B_\infty^n\right) = 2^k \operatorname{vol}_{n-k}(B_1^{n-k})$ и $V_{n-k,k}\left(B_n^2, B_\infty^n\right) = 2^k \operatorname{vol}_{n-k}(B_2^{n-k})$. Пользуясь однородностью смешанных объемов получаем, что для любого натурального k, $0 \leqslant k \leqslant n$, имеют место равенства

$$V_{n-k,k}\left(\frac{B_n^1}{\operatorname{vol}_n(B_1^n)}, \frac{B_\infty^n}{2} \right) = \frac{\operatorname{vol}_{n-k}(B_1^{n-k})}{\operatorname{vol}_n(B_1^n)^{\frac{n-k}{n}}} \tag{31}$$

и

$$V_{n-k,k}\left(B_n^2, \frac{1}{\sqrt{n}} B_\infty^n \right) = \left(\frac{2}{\sqrt{n}} \right)^k \operatorname{vol}_{n-k}(B_2^{n-k}). \tag{32}$$

Объем n-мерного октаэдра B_1^n равен (см., например, [6, глава 1])

$$\operatorname{vol}_n(B_1^n) = \frac{2^n}{\Gamma(1+n)} = \frac{2^n}{n!} \asymp \left(\frac{2e}{n} \right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{33}$$

Для объема n-мерного евклидова шара нам понадобится следующая асимптотика

$$\mathrm{vol}_n(B_2^n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} \asymp \frac{(2e\pi)^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{n+1}{2}}}, \qquad \text{при } n \geqslant 1$$

и (34)

$$\mathrm{vol}_0(B_2^0) = 1.$$

Теперь мы готовы доказать следующие две леммы.

Лемма 6.3. *Пусть $H_n \in \mathcal{K}_{n+1}$ — выпуклые тела, определенные в* (24). *Тогда центры эллипсоидов Левнера имеют вид*

$$l(H_n) = \left(0, \ldots, 0, \frac{1}{2}\right),$$

а центры масс тел H_n равны

$$g(H_n) = (0, \ldots, 0, g^{n+1}(H_n)),$$

где $g^{n+1}(H_n) \asymp \frac{1}{n}$.

Доказательство. В начале этого параграфа мы уже отметили, что имеют место представления (26) и (27).

Покажем, что $l^{n+1}(H_n) = \frac{1}{2}$. Пусть L — эллипсоид Левнера тела H_n. В силу единственности, эллипсоид Левнера тела H_n имеет вид

$$L = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \frac{\|x\|^2}{a^2} + \frac{(t - l^{n+1}(H_n))^2}{b^2} \leqslant 1\right\},$$

где a и b — некоторые положительные числа зависящие от n. Заметим, что при $t \in [0;1]$ сечения $L(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,t) \in L\}$ эллипсоида L — n-мерные евклидовы шары с некоторым коэффициентом растяжения. Так как эллипсоид Левнера для B_∞^n равен $\sqrt{n}B_2^n$, эллипсоид Левнера для $\frac{1}{\sqrt{n}}B_\infty^n$ — это шар B_2^n. Пользуясь минимальностью эллипсоидов Левнера для тел B_n^2 и $\frac{1}{\sqrt{n}}B_\infty^n$, получаем включения $B_2^n \subset L(0)$ и $B_2^n \subset L(1)$. Следовательно, справедливы включения

$$H_n = \mathrm{conv}\left((B_2^n, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{n}}B_\infty^n, 1\right)\right) \subset \mathrm{conv}\left((B_2^n, 0), (B_2^n, 1)\right) \subset L.$$

Из минимимальности элипсоида Левнера L следует, что L — также элипсоид Левнера и для выпуклого тела $\mathrm{conv}\left((B_2^n, 0), (B_2^n, 1)\right)$. Так как тело $\mathrm{conv}\left((B_2^n, 0), (B_2^n, 1)\right)$ центрально-симметрично относительно точки $(0, \ldots, 0, \frac{1}{2})$, оно имеет единственную афинно-инвариантную точку — это $(0, \ldots, 0, \frac{1}{2})$, и следовательно, эта точка совпадает с центром эллипсоида L. Отсюда $l^{n+1}(H_n) = \frac{1}{2}$.

Перейдем к доказательству утверждения об асимптотике $g^{n+1}(H_n)$. Из формулы (30) очевидна оценка снизу:

$$\frac{1}{n+2} \leqslant \frac{1}{n+2} \frac{\sum_{k=0}^{n}(k+1)V_{n-k,k}\left(B_n^2, \frac{1}{\sqrt{n}}B_\infty^n\right)}{\sum_{k=0}^{n} V_{n-k,k}\left(B_n^2, \frac{1}{\sqrt{n}}B_\infty^n\right)} = g^{n+1}(H_n).$$

Для оценки сверху воспользуемся соотношением (32) и асимптотикой (34)

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{k=0}^{n}(k+1)V_{n-k,k}\big(B_n^2,\frac{1}{\sqrt{n}}B_\infty^n\big)}{\sum_{k=0}^{n}V_{n-k,k}\big(B_n^2,\frac{1}{\sqrt{n}}B_\infty^n\big)} &= \frac{\sum_{k=0}^{n}(k+1)\big(\frac{2}{\sqrt{n}}\big)^k \operatorname{vol}_{n-k}(B_2^{n-k})}{\sum_{k=0}^{n}\big(\frac{2}{\sqrt{n}}\big)^k \operatorname{vol}_{n-k}(B_2^{n-k})} \asymp \\ \asymp \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\big(\frac{2}{\sqrt{n}}\big)^k(2e\pi)^{\frac{n-k}{2}}(n-k)^{-\frac{n-k+1}{2}}+(n+1)\big(\frac{2}{\sqrt{n}}\big)^n}{\sum_{k=0}^{n-1}\big(\frac{2}{\sqrt{n}}\big)^k(2e\pi)^{\frac{n-k}{2}}(n-k)^{-\frac{n-k+1}{2}}+\big(\frac{2}{\sqrt{n}}\big)^n} &= \\ = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)2^{\frac{n+k}{2}}(e\pi)^{\frac{n-k}{2}}n^{-\frac{k}{2}}(n-k)^{-\frac{n-k+1}{2}}+(n+1)2^n n^{-\frac{n}{2}}}{\sum_{k=0}^{n-1}2^{\frac{n+k}{2}}(e\pi)^{\frac{n-k}{2}}n^{-\frac{k}{2}}(n-k)^{-\frac{n-k+1}{2}}+2^n n^{-\frac{n}{2}}}&. \end{aligned} \tag{35}$$

Чтобы при $0 \leqslant k < n$ оценить k-ое слагаемое суммы в числителе последней дроби через первое — $2^{\frac{n}{2}}(e\pi)^{\frac{n}{2}}n^{-\frac{n+1}{2}}$, рассмотрим следующее отношение

$$\frac{2^{\frac{n+k}{2}}(e\pi)^{\frac{n-k}{2}}n^{-\frac{k}{2}}(n-k)^{-\frac{n-k+1}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}(e\pi)^{\frac{n}{2}}n^{-\frac{n+1}{2}}} = 2^{\frac{k}{2}}(e\pi)^{-\frac{k}{2}}(n-k)^{-\frac{n-k+1}{2}}n^{\frac{n-k+1}{2}}.$$

Логарифмируя последнее выражение и используя неравенство $\ln(1+x) \leqslant x$ справедливое при $x \geqslant 0$, получаем

$$\begin{aligned}&\frac{k}{2}\ln 2 - \frac{k}{2}\ln(e\pi) - \frac{n-k+1}{2}\ln(n-k) + \frac{n-k+1}{2}\ln n = \\ &\quad = \frac{k}{2}(\ln 2 - \ln\pi - 1) + \frac{n-k}{2}\ln\left(1+\frac{k}{n-k}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{k}{n-k}\right) \leqslant \\ &\quad \leqslant \frac{k}{2}(\ln 2 - \ln\pi - 1) + \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+k) = \frac{k}{2}(\ln 2 - \ln\pi) + \frac{1}{2}\ln(1+k).\end{aligned}$$

Отсюда следует оценка для k-го слагаемого суммы при $k < n$

$$2^{\frac{n+k}{2}}(e\pi)^{\frac{n-k}{2}}n^{-\frac{k}{2}}(n-k)^{-\frac{n-k+1}{2}} \leqslant e^{\left(\frac{k}{2}(\ln 2-\ln\pi)+\frac{1}{2}\ln(1+k)\right)}2^{\frac{n}{2}}(e\pi)^{\frac{n}{2}}n^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{36}$$

Также заметим, что последнее слагаемое суммы в числителе последней дроби (35) удовлетворяет неравенству

$$(n+1)2^n n^{-\frac{n}{2}} \leqslant 2^{\frac{n}{2}}(e\pi)^{\frac{n}{2}}n^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{37}$$

Используя сделанные наблюдения (36) и (37), оценим сумму

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)2^{\frac{n+k}{2}}(e\pi)^{\frac{n-k}{2}}n^{-\frac{k}{2}}(n-k)^{-\frac{n-k+1}{2}} + (n+1)2^n n^{-\frac{n}{2}} \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{k}{2}(\ln 2-\ln\pi)} + 2\right)2^{\frac{n}{2}}(e\pi)^{\frac{n}{2}}n^{-\frac{n+1}{2}}.\end{aligned}$$

В силу строгого возрастания логарифма, величина $\ln 2 - \ln\pi$ отрицательна. Следовательно, в скобках записана частичная сумма сходящегося ряда, которая оценивается константой

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{k}{2}(\ln 2-\ln\pi)} + 2 = C < \infty.$$

Вернемся к оценке сверху $(n+1)$-ой координаты центра масс $g(H_n)$

$$g^{n+1}(H_n) \asymp \frac{1}{n+2}\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)2^{\frac{n+k}{2}}(e\pi)^{\frac{n-k}{2}}n^{-\frac{k}{2}}(n-k)^{-\frac{n-k+1}{2}}+(n+1)2^n n^{-\frac{n}{2}}}{\sum_{k=0}^{n-1}2^{\frac{n+k}{2}}(e\pi)^{\frac{n-k}{2}}n^{-\frac{k}{2}}(n-k)^{-\frac{n-k+1}{2}}+2^n n^{-\frac{n}{2}}}.$$

Оценивая числитель через константу $C2^{\frac{n}{2}}(e\pi)^{\frac{n}{2}}n^{-\frac{n+1}{2}}$, а знаменатель — слагаемым при $k=0$, получаем

$$g^{n+1}(H_n) \leqslant \frac{1}{n+2}\frac{C2^{\frac{n}{2}}(e\pi)^{\frac{n}{2}}n^{-\frac{n+1}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}(e\pi)^{\frac{n}{2}}n^{-\frac{n+1}{2}}} = \frac{C}{n+2}.$$

□

Лемма 6.4. *Пусть $P_n \in \mathcal{K}_{n+1}$ — выпуклые тела, определенные в (25). Тогда центры эллипсоидов Левнера и цетры масс имеют вид*

$$l(P_n) = \big(0,\dots,0,l^{n+1}(P_n)\big)$$

и

$$g(P_n) = (0,\dots,0,g^{n+1}(P_n)),$$

где $l^{n+1}(P_n) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ и $g^{n+1}(P_n) = 1 - \frac{1}{e} - \frac{\ln n}{2en} - \frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{e}-\frac{\ln(2\pi)}{2e}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Доказательство. В силу наблюдений (28) и (29), достаточно доказать утверждения про соответствующие $(n+1)$-ые координаты точек.

Пусть L — эллипсоид Левнера для выпуклого тела P_n. Из единственности эллипсоида Левнера следует, что он имеет вид

$$\mathcal{E}_{a,b,c} = \left\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} : \frac{\|x\|^2}{a^2}+\frac{(t-c)^2}{b^2}\leqslant 1\right\} \tag{38}$$

для некоторых $a>0, b>0$ и $c\in[0;1]$.

Обозначим через r_n величину $\frac{1}{\mathrm{vol}_n(B_1^n)^{\frac{1}{n}}}$. Из двухсторонней оценки (33) следует асимптотика $r_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2e}{n}$. Заметим, что эллипсоиды Левнера для тел $r_nB_1^n$ и $\frac{B_\infty^n}{2}$ соответственно равны $r_nB_2^n$ и $\frac{\sqrt{n}B_2^n}{2}$, а сечения $L(t) = \{x\in\mathbb{R}^n : (x,t)\in L\}$ эллипсоида L — n-мерные евклидовы шары с некоторым коэффициентом растяжения. Аналогичными рассуждениями, как в лемме 5.3, получаются равенства $L(0) = r_nB_2^n$ и $L(1) = \frac{\sqrt{n}B_2^n}{2}$ и следующие условия на переменные a, b и c

$$r_n^2 = a^2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)$$

и

$$\frac{n}{4} = a^2\left(1-\frac{(1-c)^2}{b^2}\right).$$

Решая систему из этих двух уравнений относительно a и b получаем необходимые соотношения

$$b^2 = \frac{r_n^2(1-c)^2-\frac{n}{4}c^2}{r_n^2-\frac{n}{4}}$$

и

$$a^2 = \frac{r_n^2\,(1-c)^2-\frac{n}{4}c^2}{1-2c}.$$

Из положительности левых частей следует необходимое условие $0 < c < \frac{1}{2}$.

Будем искать значение $l^{n+1}(P_n)$, как точку минимума функции квадрата объема

$$f(c) = \mathrm{vol}_{n+1}^2(\mathcal{E}_{a,b,c}) = b^2 a^{2n} \mathrm{vol}_{n+1}^2(B_2^{n+1}) = \\ = \frac{r_n^2(1-c)^2 - \frac{n}{4}c^2}{r_n^2 - \frac{n}{4}} \left(\frac{r_n^2\,(1-c)^2 - \frac{n}{4}c^2}{1-2c}\right)^n \mathrm{vol}_{n+1}^2(B_2^{n+1})$$

при $c \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Найдем точки экстремума

$$f'(c) = \frac{\mathrm{vol}_{n+1}^2(B_2^{n+1})}{r_n^2 - \frac{n}{4}} \left(\frac{r_n^2\,(1-c)^2 - \frac{n}{4}c^2}{1-2c}\right)^n \cdot \\ \cdot \left((n+1)\left(2\left(r_n^2 - \frac{n}{4}\right)c - 2r_n^2\right) + 2n\frac{r_n^2\,(1-c)^2 - \frac{n}{4}c^2}{1-2c}\right) = 0,$$

Заметим, что при n таких, что $\frac{n}{4} < r_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{4e^2}$, многочлен $r_n^2\,(1-c)^2 - \frac{n}{4}c^2$ всюду положителен при $c \in (0, \frac{1}{2})$:

$$\left(r_n^2 - \frac{n}{4}\right)c^2 + r_n^2(1-2c) \geqslant r_n^2(1-2c) > 0.$$

Следовательно, достаточно рассматривать корни уравнения

$$(n+1)\left(\left(r_n^2 - \frac{n}{4}\right)c - 2r_n^2\right)(1-2c) + n\left(r_n^2(1-c)^2 - \frac{n}{4}c^2\right) = 0.$$

Приведением подобных слагаемыемых получаем

$$(n+2)\left(r_n^2 - \frac{n}{4}\right)c^2 - \left((n+3)r_n^2 - (n+1)\frac{n}{4}\right)c + r_n^2 = 0.$$

Данный многочлен имеет два корня:

$$\beta_n^1 = \frac{(n+3)r_n^2 - (n+1)\frac{n}{4} + \sqrt{\left((n+3)r_n^2 - (n+1)\frac{n}{4}\right)^2 - 4(n+2)\left(r_n^2 - \frac{n}{4}\right)r_n^2}}{2(n+2)\left(r_n^2 - \frac{n}{4}\right)},$$

$$\beta_n^2 = \frac{(n+3)r_n^2 - (n+1)\frac{n}{4} - \sqrt{\left((n+3)r_n^2 - (n+1)\frac{n}{4}\right)^2 - 4(n+2)\left(r_n^2 - \frac{n}{4}\right)r_n^2}}{2(n+2)\left(r_n^2 - \frac{n}{4}\right)}.$$

Так как справедлива асимптотика $r_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{2e}$, при достаточно больших n корень β_n^1 не лежит в интервале $(0; \frac{1}{2})$

$$\beta_n^1 = \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{n}{4r_n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{1 + \frac{6}{n} - \frac{n}{2r_n^2} - \frac{4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}}{2\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{n}{4r_n^2}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Так как корень β_n^2 — единственный кандидат, удовлетворяющий необходимым условиям, получаем $l^{n+1}(P_n) = \beta_n^2$. Посчитаем ассимптотику для $l^{n+1}(P_n)$

$$l^{n+1}(P_n) = \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{n}{4r_n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{n}{2r_n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)}}{2\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{n}{4r_n^2}\right)} = \\ = \frac{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{n}{4r_n^2}\right)} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Перейдем к доказательству утверждения про $(n+1)$-ую координату точки $g(P_n)$. Используя формулу (30) для тела P_n и соотношения (31) и (33), получаем равенства

$$g^{n+1}(P_n) = \frac{1}{n+2}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)\dfrac{\mathrm{vol}_{n-k}(B_1^{n-k})}{\mathrm{vol}_n(B_1^n)^{\frac{n-k}{n}}}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\mathrm{vol}_{n-k}(B_1^{n-k})}{\mathrm{vol}_n(B_1^n)^{\frac{n-k}{n}}}} = \frac{1}{n+2}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{k+1}{n!^{\frac{k}{n}}(n-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{n!^{\frac{k}{n}}(n-k)!}} =$$

$$= \frac{1}{n+2}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n-k+1}{n!^{\frac{n-k}{n}}k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{n!^{\frac{n-k}{n}}k!}} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{n+2}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}k\dfrac{n!^{\frac{k}{n}}}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n!^{\frac{k}{n}}}{k!}}.$$

Поэтому достаточно доказать асимптотику

$$\frac{1}{n+2}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}k\dfrac{n!^{\frac{k}{n}}}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n!^{\frac{k}{n}}}{k!}} = \frac{1}{e} + \frac{\ln n}{2en} + \frac{\ln(2\pi)}{2en} - \frac{2}{ne} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Заметим, что для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{kx^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{kx^k}{k(k-1)!} = x\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}.$$

Подставим $x = n!^{\frac{1}{n}}$ и разделим обе части на $\sum_{k=0}^{n}\frac{n!^{\frac{k}{n}}}{k!}$

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{kn!^{\frac{k}{n}}}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n!^{\frac{k}{n}}}{k!}} = \frac{n!^{\frac{1}{n}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{n!^{\frac{k}{n}}}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n!^{\frac{k}{n}}}{k!}} = n!^{\frac{1}{n}}\left(1 - \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n!^{\frac{k}{n}}}{k!}}\right).$$

Используя формулу Стирлинга (см., например [14])

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+o(1))$$

и следующее неравенство

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!^{\frac{k}{n}}}{k!} \geqslant \frac{n!^{\frac{2}{n}}}{2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{2e^2}, \tag{39}$$

считаем асимптотику

$$\frac{1}{n+2}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}k\dfrac{n!^{\frac{k}{n}}}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n!^{\frac{k}{n}}}{k!}} = \frac{n!^{\frac{1}{n}}}{n+2}\left(1 - \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n!^{\frac{k}{n}}}{k!}}\right) =$$

$$= \frac{n}{e}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\exp\left(\frac{\ln(2\pi n)}{2n} + \frac{1}{n}\ln(1+o(1))\right)\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{e} + \frac{\ln n}{2en} + \frac{\ln(2\pi)}{2en} - \frac{2}{en} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$\square$

7 Асимптотическая точность верхних оценок для мер ассиметрии

Лемма 7.1. *Для двух различных внутренних точек* $(x^1, y^1), (x^2, y^2) \in [0;1] \times [0;1]$ *обозначим через* s *прямую, проходящую через эти точки. Тогда справедлива формула*

$$\frac{\|(x^1, y^1) - (x^2, y^2)\|}{\mathrm{vol}_1(s \cap [0;1] \times [0;1])} = \frac{|x^2 - x^1|\,|y^2 - y^1|}{|x^1 y^2 - x^2 y^1|}.$$

Доказательство. Подставим точки (x^1, y^1) и (x^2, y^2) в уравнение $y = k_1 x + k_2$ прямой s

$$y^1 = k_1 x^1 + k_2 \quad \text{и} \quad y^2 = k_1 x^2 + k_2.$$

Решая систему из этих двух уравнений, находим коэффициенты k_1 и k_2:

$$k_1 = \frac{y^1 - y^2}{x^1 - x^2} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{x^1 y^2 - y^1 x^2}{x^1 - x^2}.$$

Отсюда длина пересечения прямой s с квадратом $[0;1] \times [0;1]$ равна

$$\mathrm{vol}_1(s \cap [0;1] \times [0;1]) = \sqrt{k_2^2 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2} = \frac{|x^1 y^2 - y^1 x^2|}{|x^1 - x^2|\,|y^1 - y^2|} \sqrt{(x^1 - x^2)^2 + (y^1 - y^2)^2}.$$

Следовательно, получаем равенство

$$\frac{\|(x^1, y^1) - (x^2, y^2)\|}{\mathrm{vol}_1(s \cap [0;1] \times [0;1])} = \frac{|x^2 - x^1|\,|y^2 - y^1|}{|x^1 y^2 - x^2 y^1|}.$$

$\square$

Теорема 7.1. *Существует последовательность выпуклых тел* $M_n \in \mathcal{K}_n$, *для которой*

$$d(j(M_n), l(M_n)) = 1 - \frac{8}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

То есть верхняя оценка (8) *асимптотически точна.*

Доказательство. Докажем утверждение для $n = 2k$. Рассмотрим следующие $2k$-мерные выпуклые тела

$$M_{2k} = G_{k-1} \times N_{k-1},$$

где тела G_{k-1} и N_{k-1} определены в леммах 5.1 и 5.3. Воспользовавшись леммой 4.1 для тел M_{2k} и результатами лемм 5.1 и 5.3, получаем представления для центров эллипсоидов Джона и Левнера

$$j(M_{2k}) = (j(G_{k-1}), j(N_{k-1})) = \Big(\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0,}_{k-1 \text{ координата}} j^k, \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0,}_{k-1 \text{ координата}} \frac{1}{2}\Big),$$

$$l(M_{2k}) = (l(G_{k-1}), l(N_{k-1})) = \Big(\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0,}_{k-1 \text{ координата}} \frac{1}{2}, \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0,}_{k-1 \text{ координата}} l^{2k}\Big),$$

где $j^k = \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$ и $l^{2k} = \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$.

Обозначим через s прямую проходящую через точки $j(M_{2k})$ и $l(M_{2k})$. Заметим, что в силу полученных представлений для $j(M_{2k})$ и $l(M_{2k})$, достаточно искать длину пересечения прямой s с телом M_{2k} в плоскости $\underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{k-1 \text{ сомножитель}} \times \mathbb{R} \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{k-1 \text{ сомножитель}} \times \mathbb{R}$. Пересечение этой плоскости с телом M_n имеет вид $\underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{k-1 \text{ сомножитель}} \times [0;1] \times \underbrace{\{0\} \times \ldots \times \{0\}}_{k-1 \text{ сомножитель}} \times [0;1]$.
Применяя лемму 7.1 к точкам $(j^k, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, l^{2k})$, при достаточно больших n получаем равенства

$$d(j(M_{2k}), l(M_{2k})) = \frac{\|j(M_{2k}) - l(M_{2k})\|}{\mathrm{vol}_1(s \cap M_{2k})} = \frac{|j^k - \frac{1}{2}|\,|l^{2k} - \frac{1}{2}|}{|\frac{1}{4} - l^{2k} j^k|} =$$
$$= \frac{(1 - \frac{2}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right))(1 - \frac{2}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right))}{1 + o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 - \frac{4}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

Для случая $n = 2k+1$ доказательство утверждения аналогично при помощи конструкции

$$M_{2k+1} = G_{k-1} \times N_k.$$

□

Теорема 7.2. *Существуют последовательность выпуклых тел $F_n \in \mathcal{K}_n$, и такие положительные константы C_1 и C_2, что выполняется оценка*

$$1 - \frac{C_1}{n} \leqslant d(g(F_n), l(F_n)) \leqslant 1 - \frac{C_2}{n}.$$

То есть верхняя оценка (9) *асимптотически точна.*

Доказательство. Докажем утверждение для четных $n = 2k$. Рассмотрим следующие $2k$-мерные выпуклые тела

$$H_{2k} = G_{k-1} \times P_{k-1},$$

где тела H_{k-1} и P_{k-1} соответственно определенные равенствами (24) и (25). Используя лемму 4.1 для тел F_{2k} и результаты лемм 6.3 и 6.4 получаем представления для центров масс и эллипсоида Левнера

$$g(F_{2k}) = (g(H_{k-1}), g(P_{k-1})) = \Big(\underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{k-1 \text{ координат}}, g^k, \underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{k-1 \text{ координат}}, g^{2k}\Big),$$
$$l(F_{2k}) = (l(H_{k-1}), l(P_{k-1})) = \Big(\underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{k-1 \text{ координат}}, \frac{1}{2}, \underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{k-1 \text{ координат}}, l^{2k}\Big),$$

где $g^k \asymp \frac{1}{k}$, $l^{2k} = \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$ и $g^{2k} = 1 - \frac{1}{e} - \frac{\ln k}{2ek} - \frac{1}{k}\left(1 + \frac{2}{e} - \frac{\ln(2\pi)}{2e}\right) + o\left(\frac{1}{k}\right)$.

Обозначим через s прямую проходящую через точки $g(F_{2k})$ и $l(F_{2k})$. Совершенно по аналогичным причинам, как в теореме 7.1, мера ассиметрии $d(g(F_{2k}), l(F_{2k}))$ вычисляется при помощи леммы 7.1, примененной к точкам (g^k, g^{2k}) и $(\frac{1}{2}, l^{2k})$

$$d(g(F_{2k}), l(F_{2k})) = \frac{\|g(F_{2k}) - l(F_{2k})\|}{\mathrm{vol}_1(s \cap F_{2k})} = \frac{|g^k - g^{2k}|\,|\frac{1}{2} - l^{2k}|}{|g^k l^{2k} - \frac{1}{2} g^{2k}|} =$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{e} - \frac{\ln k}{2ek} - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{e} - \frac{\ln(2\pi)}{2e}\right) + o\left(\frac{1}{k}\right) - g^k\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)}{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e} - \frac{\ln k}{2ek} - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{e} - \frac{\ln(2\pi)}{2e}\right) + o\left(\frac{1}{k}\right)\right) + o\left(\frac{1}{k}\right)} =$$

$$= 1 - \frac{2}{k} - \frac{e}{e-1} g^k + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

Так как $g^k \asymp \frac{1}{k}$, существуют такие положительные константы C_1 и C_2, что для достаточно больших n справедлива оценка

$$1 - \frac{C_1}{k} \leqslant 1 - \frac{2}{k} - \frac{e}{e-1} g^k + o\left(\frac{1}{k}\right) = d(g(F_{2k}), l(F_{2k})) \leqslant 1 - \frac{C_2}{k}.$$

Для случая $n = 2k + 1$ доказательство утверждения аналогично при помощи конструкции

$$F_{2k+1} = H_{k-1} \times P_k.$$

$\square$

8 Список литературы

[1] *Meyer M., Schütt C., Werner E. M.* New affine measures of symmetry for convex bodies // Advances in Mathematics, Vol. 228, Issue 5, 2011, P. 2920–2942.

[2] *Загускин В. Л.* Об описанных и вписанных эллипсоидах экстремального объёма // УМН 13, №6, 1958, С. 89–93.

[3] *Danzer L., Laugwitz D., Leuz H.* Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogen unter deu einem Eikorper einbeschriebener Ellipsoiden // Arch. Math. 8, 1957, P.214–219.

[4] *Meyer M., Schütt C., Werner E.* Affine invariant points // Israel J. Math. 208, No. 1, 2015, P. 163–192.

[5] *Meyer M., Schütt C., Werner E.* Dual affine invariant points // Indiana Univ. Math. J. 64 ,No. 3, 2015, P. 735–768.

[6] *Pisier G.* The volume of convex bodies and Banach space theory, Cambridge Tracts in Mathematics 94, Cambridge University Press, 1989.

[7] *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002

[8] *Schneider R.* Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory, Cambridge university press, 2013.

[9] *Хадвигер Г.* Лекции об объеме площади поверхности и изопериметрии, Наука, 1966.

[10] *Ball K.* An Elementary Introduction to Modern Convex Geometry // MSRI Publications Vol. 31, 1997.

[11] *John F.* Extremum Problems with Inequalities as Subsidiary Conditions // Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, Interscience Publishers Inc., New York, 1948, P. 187–204.

[12] *Pajor A.* Sous-espaces l_n^1 des espaces de Banach // Hermann, Paris, Collection Travaux en cours, 1985.

[13] *Pajor A.* Volumes mixtes et sous-espaces l_1^n des espaces de Banach // Colloquium in honor of Laurent Schwartz, Vol. 1. Astérisque No. 131, 1985, P. 401–411.

[14] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. II., М.: Наука, 1964.