

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Статистическое моделирование

Миллер Анастасия Александровна

ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ АМЕРИКАНСКОГО ОПЦИОНА

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор С. М. Ермаков

Рецензент:
нач. лаб. А. В. Дмитриев

Санкт-Петербург

2017

Saint Petersburg State University
Applied Mathematics and Computer Science
Statistical Modelling

Miller Anastasiia

SIMULATION MODEL OF AMERICAN OPTION

Graduation Project

Scientific Supervisor:
Professor S. M. Ermakov

Reviewer:
Head of the Lab A. V. Dmitriev

Saint Petersburg
2017

Оглавление

Введение	4
1. Понятие опциона	4
2. Стоимость Американского опциона как случайная величина	5
Глава 1. Классические методы оценки стоимости Американского опциона	7
1.1. Случайные деревья	7
1.2. Стохастические сетки	8
1.3. Метод наименьших квадратов	9
Глава 2. Применение Квази Монте-Карло для повышения точности оценок	12
2.1. Основные понятия	13
2.2. Рандомизация	14
2.3. Приложение к задаче оценки стоимости Американского опциона	15
Глава 3. Сглаживание случайных деревьев для оценки стоимости Американского опциона	18
3.1. Общий алгоритм случайного дерева с прореживанием	18
3.2. Состоятельность оценки	21
Глава 4. Численные результаты	23
4.1. Сравнение классических методов	24
4.2. Применение метода квази Монте-Карло к классическим методам	25
4.3. Оценки по сглаженным случайным деревьям	35
4.4. Применение метода квази Монте-Карло к сглаженным случайным деревьям	36
Заключение	39
Список литературы	40

Введение

В работе рассмотрены основные подходы к оценке стоимости Американских опционов и приведено их сравнение между собой (как теоретическое, так и на численных примерах). Основной целью работы было исследование вопроса о применении метода квази Монте-Карло к задаче оценки стоимости Американского опциона.

Ниже в этом разделе разобрано понятие опциона (секция 1) и описана формальная постановка задачи нахождения стоимости Американского опциона (секция 2). В главе 1 приведены основные способы оценки этой стоимости. В главе 2 даны основные сведения о методе квази Монте-Карло и рассмотрены особенности этого метода в приложении к финансовым задачам (в частности — задаче оценки стоимости Американского опциона). В главе 3 предложен новый подход к оценке стоимости Американского опциона, основывающийся на идее «прореживания» дерева состояний случайного процесса. Глава 4 содержит результаты численных экспериментов, подтверждающих или опровергающих высказанные в предыдущих главах гипотезы.

1. Понятие опциона

Опцион — это широко распространённый вторичный (производный) финансовый инструмент. Опцион является контрактом между продавцом опциона и покупателем опциона о том, что покупатель имеет право, но не обязательство, купить (в случае опциона на покупку, *call option*) или продать (в случае опциона на продажу, *put option*) указанный в контракте базовый актив по заранее оговорённой цене (*цене страйк*) в определённый контрактом момент в будущем или на протяжении определённого отрезка времени. Продавца опциона контракт обязует совершить ответную продажу (для опциона на покупку) или покупку (для опциона на продажу) в случае, если покупатель пожелает исполнить своё право. Реализация такой сделки называется *исполнением опциона*.

Различают опционы европейского и американского типа. Опцион европейского типа выписывается на фиксированный момент времени в будущем, опцион американского типа — на отрезок времени. Промежуточный вариант, когда опцион может быть исполнен только в определённые даты (например, в конце каждого квартала в течение года), часто называют Бермудским опционом.

Исполнение опциона может быть выгодно его владельцу (когда цена базового актива в контракте ниже текущей рыночной в случае опциона на покупку, когда цена базового актива выше текущей рыночной в случае опциона на продажу), поэтому опционный контракт сам по себе тоже имеет стоимость. Ищется стоимость опциона в модели эффективного рынка, то есть такая цена V , при которой ни продавец, ни покупатель опциона в среднем не получают прибыли.

2. Стоимость Американского опциона как случайная величина

В случае опциона европейского типа существует решение в замкнутой форме (модель Блэка-Шоулса [1] и её усовершенствования). Оценка Американского опциона является более сложной задачей.

Опцион определяется

- своим временем жизни $[0; T]$,
- базовым активом X (под $X(t)$ будем подразумевать состояние актива в момент времени t , являющееся случайной величиной, под $S(t) = S(X(t))$ — цену базового актива в момент t), на который выписан опцион (список возможных активов на территории Российской Федерации представлен в [16]),
- процессом $U(t)$, $t \in [0; T]$, представляющим дисконтированное значение функции выплат (разницы между рыночной стоимостью базового актива и ценой страйк, оговорённой в контракте; значение функции выплат показывает выгоду, получаемую владельцем опциона при исполнении),
- множеством \mathcal{T} моментов времени, в которых возможно исполнить опцион.

Будем также считать, что существует $h_t : U(t) = h_t(X(t))$. Тогда для Американского опциона с функцией выплат $h_t(X_t)$ нахождение цены V — это задача оптимальной остановки (optimal stopping problem):

$$V = \max_{\tau} E h_{\tau}(X_{\tau}). \quad (1)$$

При дискретизации (1) (принятии предположения о том, что \mathcal{T} — конечное множество $\{t_i\}_{i=0}^n \in [0; T]$, $t_0 = 0, t_n = T$) задача обретает эквивалентную формулировку о нахождении $V_0(X_0)$ в системе

$$\begin{aligned} V_m(x) &= h_m(x), \\ V_{i-1}(x) &= \max \{h_{i-1}(x), E[V_i(X_i) | X_{i-1} = x]\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\forall i \in 0:n \quad h_i = h_{t_i}$, и такие обозначения будут использоваться и далее в тексте.

Далее в работе в основном будет использоваться формулировка (2).

Классические методы оценки стоимости Американского опциона

Самый наивный способ оценить стоимость Американского опциона — это промоделировать множество возможных траекторий базового актива, посчитать максимальную выплату по опциону в каждом из этих случаев (как максимум из значений $h_t(X_t)$ на промоделированной траектории $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$) и усреднить результаты по всем промоделированным траекториям. Это классический метод Монте-Карло. Как будет видно далее (в разделе 4.1), дисперсия наивного Монте-Карло для этой задачи слишком велика.

Все рассмотренные далее способы — это различные попытки уменьшить дисперсию наивного варианта путём увеличения числа моделируемых траекторий.

1.1. Случайные деревья

Метод случайного дерева основан на моделировании цепи X_0, X_1, \dots, X_n состояний актива. Зафиксируем параметр ветвления b . Из исходного состояния X_0 смоделируем b независимых между собой следующих состояний $X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^b$, все с условием X_0 . Для каждого X_1^i снова смоделируем b независимых между собой последующих состояний $X_2^{i1}, \dots, X_2^{ib}$. На m -ом шаге будем иметь b^m состояний, и это и есть источник основного недостатка этого метода — времени работы порядка $O(b^m)$. Схема приведена на рис. 1.1.

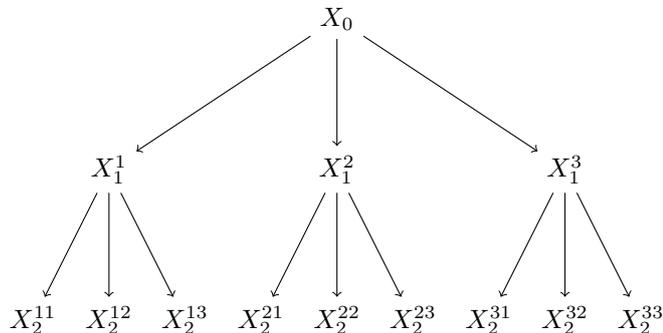


Рис. 1.1. Случайное дерево для $b = 3$ и $m = 2$

В [3] предложены оценки для $V_0(X_0)$ сверху (\hat{V}_0) и снизу (\hat{v}_0):

$$\begin{aligned}\hat{V}_m^{j_1 \dots j_m} &= h_m(X_m^{j_1 \dots j_m}), \\ \hat{V}_i^{j_1 \dots j_i} &= \max \left\{ h_i(X_i^{j_1 \dots j_i}), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{V}_{i+1}^{j_1 \dots j_i j} \right\},\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}\hat{v}_m^{j_1 j_2 \dots j_m} &= h(X_m^{j_1 j_2 \dots j_m}), \\ \hat{v}_{ik}^{j_1 j_2 \dots j_i} &= \begin{cases} h(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}), & \text{если } \frac{1}{b-1} \sum_{j=1, j \neq k}^b \hat{v}_{i+1}^{j_1 j_2 \dots j_i j} \leq h(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}), \\ \hat{v}_{i+1}^{j_1 j_2 \dots j_i k}, & \text{иначе} \end{cases} \\ \hat{v}_i^{j_1 j_2 \dots j_i} &= \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \hat{v}_{ik}^{j_1 j_2 \dots j_i}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

В этой же работе доказаны их состоятельность, смещённость и асимптотическая несмещённость. Так, если $\exists p' > 1 : \forall t \in \mathcal{T} \quad \mathbb{E} \left[|h_t(X_t)|^{p'} \right] < \infty$, то $\forall p \in (0; p')$ имеет место сходимость по вероятности $\hat{V}_0(b) \xrightarrow{\mathcal{L}^p} V_0$. Следовательно, $\mathbb{E} \hat{V}_0(b) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} V_0$. При этом $\forall b \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E} \hat{V}_0(b) \geq V_0$.

Алгоритм прост в реализации и нетребователен по памяти: при реализации обходом в глубину память ограничена $O(m)$. Основной недостаток — экспоненциальная сложность по времени: обойти всё дерево получится за $O(m^b)$.

1.2. Стохастические сетки

Метод стохастической сетки [2; 7] также предлагает оценки сверху и снизу для решения (2), но принцип построения оценок несколько отличается от рассмотренного выше метода случайного дерева.

Из начального состояния X_0 для оценки опциона с m моментами исполнения, равноотстоящими во времени от 0 до T , зададим сетку X_n^i , $n \in 1:m$, $i \in 1:b$, узлы которой — реализации случайной величины с плотностью $p_{0,n}(X_0, \cdot)$ (маргинальные плотности; также рассматриваются средние плотности), а $p_{k,n}(x, y) = \mathbb{P}(X_n = y | X_k = x)$. Тогда определяются $\rho_{n,j}(x, y) = p_{n-1,n}(x, y) / p_{0,n}(X_0, y)$, сокращения $\rho_{n,j}(i, j) = \rho_{n,j}(X_{n-1}^i, X_n^j)$ и оценка в каждом узле сетки

$$\hat{Y}_n(i) = \max \left\{ h_n(i), \frac{\sum_j \rho_{n+1}(i, j) \hat{Y}_{n+1}(j)}{\sum_j \rho_{n+1}(i, j)} \right\}.\tag{1.3}$$

Под знаком \max в (1.3) стоят выручка, которую можно получить, если исполнить опцион в момент n ($h_n(i)$), и оценка ожидаемой выручки $\mathbb{E}[V_i(X_i) | X_{i-1} = x]$: выражение

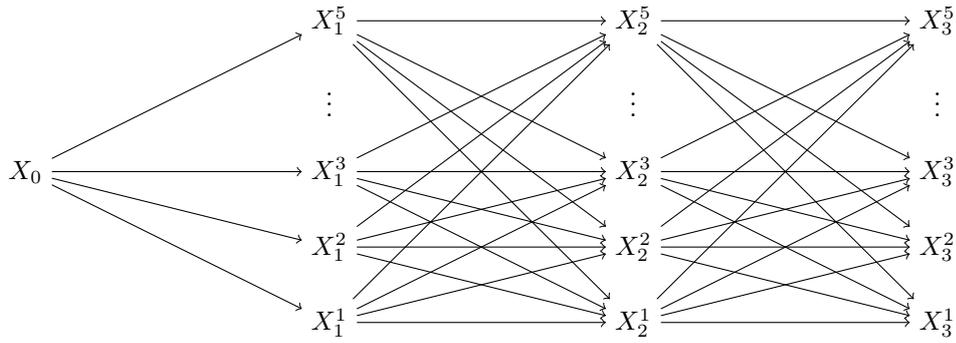


Рис. 1.2. Стохастическая сетка для $b = 5$ и $m = 3$

$\left(\sum_j \rho_{n+1}(i, j) \hat{Y}_{n+1}(j) \right) / \left(\sum_j \rho_{n+1}(i, j) \right)$ можно рассматривать как оценку математического ожидания с помощью непараметрической регрессии.

Иллюстрация взаимоотношений между узлами сетки приведена на рис.,1.2. Тогда оценка справедливой стоимости опциона — это

$$\hat{Y}_0 = \max \left\{ h_0(X_0), \frac{\sum_j \rho_1(X_0, X_1^j) \hat{Y}_1(X_1^j)}{\sum_j \rho_1(X_0, X_1^j)} \right\}.$$

Этот метод работает гораздо быстрее, чем метод случайных деревьев: сложность и по времени, и по памяти составляет $O(mb)$. Недостатком являются трудоёмкие вычисления в многомерном случае: в отличие от случайного дерева, для подсчёта которого нужно лишь уметь вычислить $h_t(X_t)$ (для традиционного примера максимум-опциона на покупку $h_t(X_t) = (\max(X_t) - K)^+$, если X_t — вектор стоимостей базовых активов в момент t), для стохастических сеток нужно точно вычислять $\rho_n(i, j)$.

1.3. Метод наименьших квадратов

Несколько отличающийся от двух предыдущих вариантов — метод оценки с помощью линейной регрессии [8]. Согласно формулировке (2), в каждый момент t мы хотим знать математическое ожидание стоимости удержания (неисполнения) опциона при условии его текущего состояния. Классический инструмент для оценки условного математического ожидания — это линейная регрессия. Будем оценивать стоимость удержания опциона следующим образом:

$$E(V_i(X_i) | X_{i-1} = x) \approx \sum_{r=1}^M \beta_{ir} \psi_r(x) = \beta_i^T \psi(x). \quad (1.4)$$

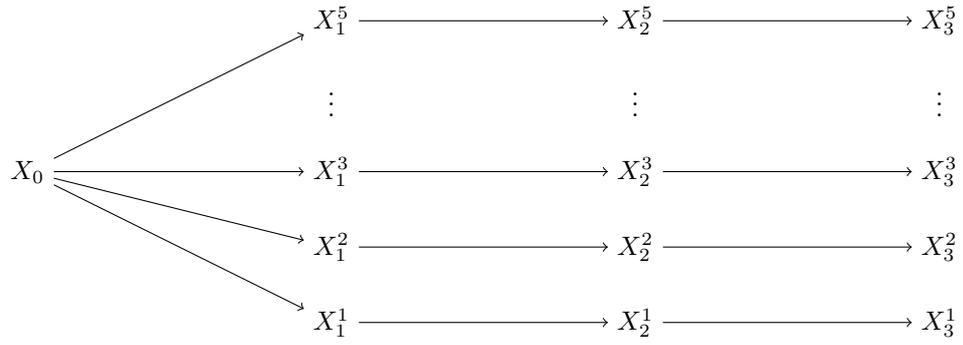


Рис. 1.3. Стохастическая сетка для метода наименьших квадратов, $b = 5$ и $m = 3$

Здесь $\psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_M(x))^T$ — это набор регрессоров, используемых для построения оценки. В оригинальной статье использовались полиномы Лагера ([8, секция 2.2 на стр. 122]) и для построения регрессии использовались только те траектории, на которых опцион в $i - 1$ -й момент времени находился в деньгах.

Используемая здесь сетка похожа на ту, что была в методе стохастической сетки: моделируем несколько траекторий, тем самым получая нужный набор примеров (см. рис., 1.3). Коэффициенты β оцениваются по методу наименьших квадратов.

Для каждого узла сетки теперь возможно оценить стоимость удержания опциона по выражению (1.4) и понять, было бы оптимальным решением исполнить опцион в этот момент (если выручка от немедленного исполнения превосходит стоимость удержания опциона, то оптимальным решением будет исполнить опцион, иначе — оставить его для исполнения в какой-либо из последующих моментов). После того, как установлены моменты оптимального исполнения опциона для каждой из исходных траекторий, составлявших сетку, стоимость опциона на траектории устанавливается равной выплате, полученной в оптимальный для этой траектории момент исполнения. Итоговая стоимость опциона оценивается усреднением по всем траекториям. Более формально эта процедура изложена в алгоритме 1.

В [6] указано, что метод наименьших квадратов можно считать частным случаем метода стохастической сетки со специальным выбором весов. Тем не менее, часто эти подходы рассматриваются по отдельности.

В той же статье, где предложен этот метод, приводится доказательство того, что обсуждаемая оценка является состоятельной и несмещённой. Сформулируем это утверждение несколько точнее: оно понадобится в разделе 3.2.

Из формулировок (1, 2) и предположения о марковости процесса следует, что функ-

Алгоритм 1: Оценка стоимости опциона по методу наименьших квадратов

Входные данные: сетка из b промоделированных траекторий состояния

базового актива X_n^i , $n \in 1:m$, $i \in 1:b$

Результат: \hat{V} – оценка стоимости опциона

положим стоимость опциона равной выплате по нему в последний момент исполнения:

$$C_i \leftarrow h_{t_m}(X_m^i), C = (C_1, \dots, C_b)^\top;$$

Для $n \leftarrow m - 1$ **до** 1 **:**

$$X_i \leftarrow S_n^i, X = (X_1, \dots, X_b)^\top;$$

$$\text{выплаты по исполнению опциона } P_i \leftarrow h_{t_n}(X_n^i), P = (P_1, \dots, P_b)^\top;$$

строим линейную регрессию C на X через набор базисных функций ψ по всем тем примерам, где опцион в деньгах:

$$\beta \leftarrow \arg \min_{\beta' \in \mathbb{R}^M} \left\| \left(\beta'^\top \psi(X_i) - C_i \right)_{\{i|P_i>0\}} \right\|^2;$$

стоимость удержания опциона $H_i = \beta^\top \psi(X_i)$;

Для всех i таких, что $P_i > H_i$ **:**

$$\left[\begin{array}{l} C_i \leftarrow P_i; \end{array} \right.$$

$$\hat{V} \leftarrow \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b C_i$$

ция $V_i(x)$ – это стоимость опциона, который может быть исполнен в моменты t_i, \dots, t_n и в момент t_i имеет стоимость x . Тогда результат из [8] можно сформулировать следующим образом:

Теорема 1. Пусть $E(V_i(X_i)|X_{i-1} = x) = F(i-1, x)$ является \mathcal{L}^2 -интегрируемой функцией. Тогда для набора базисных функций $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^\infty$ имеет место разложение

$$F(i-1, x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{i-1,j} \psi_j(x).$$

Введём также $F_M(i-1, x) = \sum_{j=1}^M a_{i-1,j} \psi_j(x)$ и будем оценивать его с помощью дисконтированных значений $V_i(x)$ на тех траекториях, где опцион в момент t_{i-1} находится в деньгах. Утверждается, что такая оценка $\widehat{F}_M(i-1, x)$ сходится к $F_M(i-1, x)$ при $N \rightarrow \infty$, где N – количество промоделированных траекторий, на которых опцион в момент t_{i-1} находился в деньгах. Более того, $\widehat{F}_M(i-1, x)$ является лучшей линейной несмещённой оценкой по среднеквадратичной метрике.

Применение Квази Монте-Карло для повышения точности оценок

Все методы, изложенные в главе 1, разработаны для того, чтобы за как можно меньшее время работы получить как можно более точную оценку для V_0 . Получить меньшую дисперсию оценки (а, значит, более точную оценку) можно не только использованием более эффективного алгоритма, но и с помощью техник снижения дисперсии.

Стандартные подходы к снижению дисперсии оценки по методу Монте-Карло используют случайную природу метода. Так, метод *противоположных переменных* использует тот факт, что дисперсия суммы двух одинаково распределённых зависимых случайных величин ξ и η с отрицательной ковариацией $\text{cov}(\xi, \eta) < 0$ равна

$$D(\xi + \eta) = D\xi + 2\text{cov}(\xi, \eta) + D\eta < 2D\eta.$$

Таким образом, использование в методе Монте-Карло вместо независимых одинаково распределённых случайных величин зависимых с отрицательной корреляцией позволяет снизить дисперсию оценки. Подробнее см. [6, раздел 4.2, стр. 205].

Метод *контрольных переменных* также использует разложение дисперсии суммы двух случайных величин. Идея здесь состоит в том, что если взять две скоррелированные случайные величины ξ и η , для одной из которых известно математическое ожидание (например, $E\eta$), то на каждой реализации пары можно осуществлять коррекцию. Отклонение величины ξ от $E\xi$ похоже на отклонение η от $E\eta$; отсюда можно сконструировать скорректированную оценку $\bar{\xi} = \xi - b(\eta - E\eta)$ и доказать, что при оптимальном b $D\bar{\xi}/D\xi = 1 - \text{cov}(\xi, \eta)$. Подробнее см. [6, раздел 4.1, стр. 185].

Принципиально иной подход к снижению дисперсии появляется из области численного интегрирования. Математическое ожидание случайной величины, к которому стремится среднее множества её реализаций, является интегралом по носителю этой случайной величины (по определению математического ожидания). Поэтому метод Монте-Карло можно использовать для вычисления значения интегралов, и по той же причине его можно сравнивать с методами вычисления интеграла по регулярной сетке.

Метод квази Монте-Карло [4] использует вместо последовательностей случайных точек детерминированные последовательности, обладающие свойством равномерно по-

крывать заданное пространство. Равномерность получаемой сетки и приводит к оценкам более точным, чем при использовании случайной сетки.

В этой главе изучаются особенности применения метода квази Монте-Карло для снижения дисперсии оценок в финансовых задачах (в частности, задаче оценки Американского опциона). В разделе 2.1 изложены основные сведения о квазислучайном методе: определение дискрепанса, неравенство Коксмы-Хлавки. В разделе 2.2 описан метод рандомизации сдвигом, использующийся для получения более простых оценок погрешности квазислучайного метода, нежели неравенство Коксмы-Хлавки. Раздел 2.3 освещает основные вопросы, связанные с применением квази Монте-Карло к финансовым задачам. Для одного из этих вопросов решение известно, для второго в этом разделе предложено два варианта решения, которые сравниваются на численных экспериментах в разделе 4.2.

2.1. Основные понятия

Отклонением (star discrepancy, D^*) последовательности из N d -мерных случайных векторов в гиперкубе $[0; 1]^d$ называют величину

$$D_N^* = D_N^*(X_1, \dots, X_N) = \sup_{v=(v_1, \dots, v_d) \in [0; 1]^d} N \left| \frac{\#\{X_i \in J(v)\}}{N} - \prod_{j=1}^d v_j \right|,$$

где $J(v) = [0; v_1] \times \dots \times [0; v_d]$.

В случае, когда последовательность $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ такова, что $\forall N D_N^* \leq C_s \frac{(\ln N)^s}{N}$, последовательность называется последовательностью с низким отклонением (или с низким дискрепансом). С вычислительной точки зрения она представляет интерес из-за неравенства Коксмы-Хлавки: для интеграла, оцененного по этой последовательности, верно утверждение

$$\left| \int_{[0; 1]^d} f(X) dX - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i) \right| \leq \text{Var} f \cdot \frac{D_N^*(X_1, \dots, X_N)}{N}, \quad (2.1)$$

где $\text{Var} f$ – вариация функции в смысле Харди-Крауде. Тогда при использовании последовательности с низким дискрепансом ошибка оценки интеграла имеет порядок $O(D_N^*(X_1, \dots, X_N)/N) = O((\ln N)^s/N^2)$. В случае обычного Монте-Карло размер отклонения оценки от математического ожидания имеет порядок $O(1/\sqrt{N})$. Нетрудно заметить, что ошибка для квази Монте-Карло убывает быстрее.

2.2. Рандомизация

Неравенство Коксмы-Хлавки (2.1) с точки зрения оценивания погрешности вычислений обладает двумя существенными недостатками: $\text{Var} f$ сложно вычислить (особенно в тех случаях, когда функция вообще плохо описывается в явном виде, как в задаче оценки опциона) и оно даёт очень консервативную оценку (настоящая погрешность обычно существенно меньше, чем эта верхняя граница, см. [12, стр. 22]). Тогда как для большинства приложений необходим инструмент, позволяющий хорошо и быстро оценивать, насколько сильно ошибается оценка — такой, как доверительные интервалы в методе Монте-Карло.

Одно из решений этой задачи — рандомизация квазислучайных последовательностей. К последовательности применяется некоторое случайное преобразование, которое детерминированной последовательности сопоставляет реализации некоторой случайной величины.

Основные типы преобразований — это случайный сдвиг (см. [13]) и случайные перестановки (см. [11]). В этой работе рассматривается случайный сдвиг как более удобный с точки зрения анализа дисперсии вариант.

Квази Монте-Карло последовательность $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset [0; 1]^d$, рандомизированная с помощью случайного сдвига — это последовательность $\{\hat{X}_i = X_i + \Xi_i \pmod{1}\}_{i \in \mathbb{N}} \subset [0; 1]^d$, где $\Xi_i \sim U[0; 1]^d$. В случае, когда каждое \hat{X}_i получено с помощью своей собственной реализации Ξ_i , результат ничем не отличается от стандартного Монте-Карло. В случае, когда последовательность длины N делится на g групп одинаковой длины $G = N/g$ и $\hat{X}_{(k-1)G+l} = X_{(k-1)G+l} + \Xi_k$, $k \in 1:g$, $l \in 1:G$ (то есть все элементы одной группы смещаются одинаково), полученная последовательность состоит из независимых между собой групп, которые зависимы внутри себя. При этом внутри каждой из таких групп взаимное расположение точек меняется мало (меняются только расстояния между теми точками, у которых значение какой-либо из координат превысило единицу после прибавления случайного вектора, и теми, у которых координаты «не попали» под оператор mod), что позволяет надеяться на сохранение преимуществ регулярной сетки. Наличие выигрыша в дисперсии при использовании такой рандомизации для задач численного интегрирования демонстрируют численные эксперименты в [13].

2.2.1. Оценка дисперсии рандомизированного квази Монте-Карло

В случае рандомизированного с помощью случайного сдвига квази Монте-Карло получаемые оценки \hat{V} являются одинаково распределёнными, но не независимыми. С использованием обозначений, аналогичных введённым в предыдущем абзаце, имеем N оценок, каждая из которых принадлежит одной из g групп. Пусть тогда j -ю оценку в i -й группе обозначает \hat{V}_{ij} , $i \in 1:g$, $j \in 1:G$. По построению оценки из разных групп независимы, но оценки внутри одной группы имеют ненулевую корреляцию.

Положим теперь

$$\hat{V}_{i.} = \frac{1}{G} \sum_{j=1}^G \hat{V}_{ij}.$$

Оценки $\hat{V}_{i.}$, $i \in 1:g$ всё так же являются оценками V , но уже независимыми друг от друга. В таблицах в главе 4 для результатов квази Монте-Карло будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{V}_{i.} \\ \text{sd}\hat{V} &= \sqrt{\frac{1}{g} \sum_{i=1}^g (\hat{V}_{i.} - \hat{V})^2} \\ \text{se}\hat{V} &= \sqrt{\frac{1}{g} \sum_{i=1}^g (\hat{V}_{i.} - V)^2} \\ \text{bias}\hat{V} &= \hat{V} - V \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.3. Приложение к задаче оценки стоимости Американского опциона

Несмотря на то, что сама возможность использования квази Монте-Карло в финансовых задачах в целом в литературе упоминается ([6, глава 5] и ссылки оттуда), подробного разбора метода в приложении к задаче оценки Американского опциона ещё не публиковалось.

В этом разделе освещены некоторые технические аспекты использования рандомизированного квази Монте-Карло и анализа его результатов для финансовых задач.

2.3.1. Преобразование в нормальное распределение

Квази Монте-Карло обычно рассматривается в контексте задачи интегрирования функции на $[0; 1]^d$, а параллели проводятся с классическим Монте-Карло с использованием распределения $U [0; 1]^d$. В финансовых задачах же обычно используются нормальное и логнормальное распределения, но не равномерное. Поэтому первый вопрос, которому стоит уделить внимание — это вопрос о корректном преобразовании, которое переводило бы последовательность с низким дискрепансом на $[0; 1]^d$ в последовательность, обладающую теми же свойствами для нормального распределения. То есть, если определить дискрепанс по мере нормального распределения как

$${}^{\mu}D_N^* = {}^{\mu}D_N^*(X_1, \dots, X_N) = \sup_{v=(v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d} N \left| \frac{\#\{X_i \in J(v)\}}{N} - \mu(J(v)) \right|,$$

где $J(v) = [-\infty; v_1] \times \dots \times [-\infty; v_d]$, μ — плотность d -мерного стандартного нормального распределения, то необходимо получить последовательность с наименьшим возможным ${}^{\mu}D_N^*$ (формулировка близка к используемой в [10]). Согласно [10], преобразование Бокса-Мюллера, применённое к «распрямлённой» квазислучайной последовательности, применимо в этом случае.

2.3.2. Выбор размерности

В контексте задачи многомерного интегрирования, в которой обычно говорится о квази Монте-Карло, размерность пространства, по которому происходит интегрирование, является условием задачи. В случае задачи оценивания опционов ответ на вопрос о том, какой же должна быть размерность квазислучайной последовательности, не столь очевиден.

Во-первых, все итоговые оценки по методу Монте-Карло имеют вид $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{V}_i$, где \hat{V}_i — это i -я реализация метода (i -е дерево, сетка и т.п.), то есть оценивается математическое ожидание случайной величины \hat{V} . Тогда размерность интегрируемого пространства — это конструктивная размерность алгоритма (КРА), суммарное число псевдо- или квазислучайных чисел, требуемых для получения одной оценки. Для оценки по случайным деревьям КРА равна $\dim X_t \cdot \sum_{i=1}^m b^i$, где $\dim X_t$ — размерность базового актива, для метода сетки или наименьших квадратов — $\dim X_t \cdot mb$.

Для значений параметров m и b , дающих достаточно малую дисперсию при использовании обычного метода Монте-Карло (например, $m = 3$ и $b = 50$) конструктивная

размерность линейных методов уже достаточно высока для квазислучайных последовательностей, а для метода случайных деревьев гораздо выше допустимых пределов. Так, для построения последовательности Холтона размерности 150 нужно получить 150 взаимно простых чисел. В случае, когда мы берём последовательность простых чисел, сто пятидесятое из них равно 853. Это означает, что по построению последовательности последняя координата первых её 852 точек будет идти равноотстоящими шагами от 0 до 1, что уже не очень похоже на случайные равномерно распределённые на $[0; 1]$ числа, и рандомизация сдвигом не исправит ситуацию.

Другой вариант — это использование размерности, равной размерности базового актива. Мотивацией здесь может послужить то соображение, что оцениваемая величина — это $V_0(x) = \max\{h_0(x), E[V_1(X_1) | X_0 = x]\}$ (см. (2)), которая в модели Блэка-Шоулса (в рамках которой проводились численные эксперименты) на самом деле является m -мерным интегралом по носителю X_t .

В главе 4 приведены результаты экспериментов для обоих вариантов. Согласно этим результатам, вариант КРА работает лучше. Также в его пользу говорит то, что использование КРА не противоречит восприятию метода квази Монте-Карло как квадратурной формулы с одним свободным узлом (подробнее об этом подходе можно узнать в [14]).

Сглаживание случайных деревьев для оценки стоимости Американского опциона

Метод случайных деревьев, рассмотренный в секции 1.1, наряду с преимуществом в виде простоты реализации, обладает существенным недостатком: из-за экспоненциальной сложности его фактически невозможно использовать для оценки «настоящих» Американских опционов, то есть при $m \rightarrow \infty$. В этой главе предлагается метод, позволяющий сохранить простоту и точность оценки и при этом использовать случайные деревья для сколь угодно часто исполняемых опционов.

В некотором смысле предлагаемый метод является комбинацией метода наименьших квадратов и метода случайных деревьев. Основная идея заключается в том, что, как только вершин дерева становится слишком много, меняется способ оценки величины $E[V_i(X_i) | X_{i-1} = x]$: вместо рекурсивного построения дальнейшего дерева из точки x используется регрессионная оценка условного математического ожидания (как в методе наименьших квадратов).

3.1. Общий алгоритм случайного дерева с прореживанием

Схема метода представлена на рис. 3.1. Параметрами алгоритма являются высота дерева h , число ветвей b и количество точек для оценки линейной регрессии n . Предположим для упрощения рассуждений, что $(m - 1) \bmod (h - 1) = 0$ (с учётом того, что $m \rightarrow \infty$, это не умаляет общности рассуждений). В дальнейших рассуждениях m моментов выполнения опциона t_0, \dots, t_{m-1} равномерно распределены по временному отрезку $[0; T]$: $t_i = iT/(m - 1)$, $i \in 0 : m - 1$.

Общий алгоритм можно сформулировать следующим образом:

1. Из состояния X_0 моделируется дерево высоты h с b ветвями, исходящими из каждой вершины. Обозначим вершины этого дерева как ${}^0X_i^{j_1 \dots j_i}$, $i \in 1 : h - 1$, $j_i \in 1 : b$.
2. Из множества состояний $\left\{ {}^0X_{h-1}^{j_1 \dots j_{h-1}} \right\}$, соответствующих моменту t_{h-1} , выбираются случайным образом n состояний $\left\{ X_{h-1}^k \right\}_{k=1}^n$, из которых будет продолжаться построение дерева. На рис. 3.1 $h = 3$, множество состояний на момент t_{h-1} — это

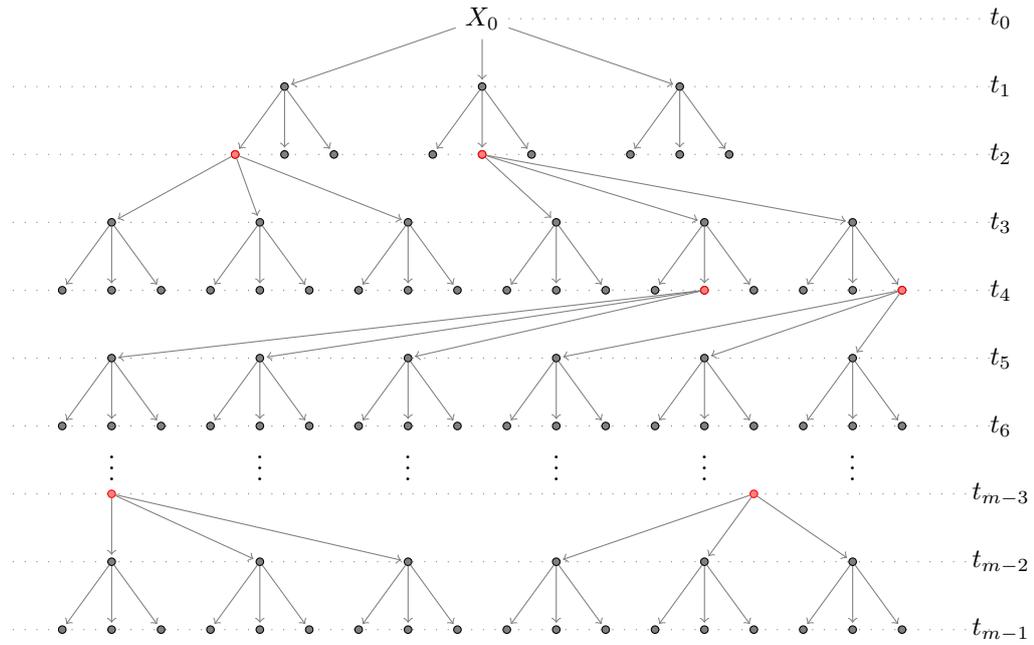


Рис. 3.1. Схема состояний для алгоритма сглаживания

Красным выделены те (выбранные случайным образом) состояния, из которых дерево продолжает расти дальше. Для всех остальных состояний на шаге сглаживания (когда ширина всей схемы достигает установленного предела) стоимость удержания опциона оценивается с помощью регрессии, подобранной по результатам оценки по дереву для «красных» состояний.

все точки, находящиеся на линии t_2 , выбранные $n = 2$ из них обозначены красным цветом.

3. Для каждого из состояний X_{h-1}^k моделируется дерево высоты h с b ветвями, исходящими из каждой вершины (корень дерева – X_{h-1}^k , остальные вершины обозначим как ${}^k X_{h-1+i}^{j_1 \dots j_i}$, $k \in 1:n$, $i \in 1:h-1$, $j_i \in 1:b$). Так появляется множество состояний актива на момент $t_{2(h-1)}$ (на рис. 3.1 это все точки на линии t_4).
4. Из полученного множества состояний актива $\left\{ {}^k X_{2(h-1)}^{j_1 \dots j_{h-1}} \right\}$ на момент $t_{2(h-1)}$ выбираем случайным образом n состояний $\left\{ X_{2(h-1)}^i \right\}_{i=1}^n$, из которых будет продолжаться построение дерева (на рис. 3.1 выбранные $n = 2$ обозначены красным цветом).
5. Шаги 3–4 повторяются для последующих моментов времени до тех пор, пока на шаге 3 листья дерева не оказываются множеством состояний актива на момент t_{m-1} (на рис. 3.1 это все состояния в строке t_{m-1}). Несложно заметить, что для этого требуется $L = (m - h)/(h - 1)$ повторений, включая первое. Обозначим номера моментов, в которые совершается прореживание дерева (шаг 4), как

$$p_l = l(h - 1), \quad l \in 1:L.$$

6. Теперь по смоделированной системе можно построить оценку. Для последнего набора деревьев, корни которых находятся в моменте $t_{p_L} = t_{(m-1)-(h-1)} = t_{m-h}$, а листья – в моменте t_{m-1} (на рис 3.1 это $n = 2$ дерева, расположенных на линиях $t_{m-3} - t_{m-1}$) оценка строится в точности как в методе случайных деревьев (1.1, 1.2)¹:

$$\begin{aligned} {}^k\hat{V}_{m-1}^{j_1 \dots j_{h-1}} &= h_{m-1} \left({}^kX_{m-1}^{j_1 \dots j_{h-1}} \right), \\ {}^k\hat{V}_{p_L+i}^{j_1 \dots j_i} &= \max \left\{ h_{p_L+i} \left({}^kX_{p_L+i}^{j_1 \dots j_i} \right), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b {}^k\hat{V}_{p_L+i+1}^{j_1 \dots j_i j} \right\}, \quad i \in 0 : h-1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В случае $i = 0$ под вершиной ${}^kX_{p_L+i}^{j_1 \dots j_i}$ следует понимать $X_{p_L}^k$ (корень соответствующего дерева). Здесь используется только оценка сверху (1.1), но разработать аналог для оценки снизу (1.2) тоже вполне возможно.

7. Для всех $X_{p_L}^k$ (все красные состояния в строке $t_{p_L} = t_{m-h} = t_{m-3}$ на рис. 3.1) на шаге 6 получена оценка стоимости удержания опциона $(\frac{1}{b} \sum_{j=1}^b {}^k\hat{V}_{p_L+1}^j)$. По этим n наблюдениям строится оценка для $E[V_{p_L+1}(X_{p_L+1})|X_{p_L} = x]$ с помощью линейной или непараметрической регрессии $\hat{V}_{p_L+1}^{\text{regr.}}(x)$. Положим теперь для всех состояний ${}^kX_{p_L}^{j_1 \dots j_{h-1}}$ на момент t_{p_L} стоимость опциона равной

$${}^k\hat{V}_{p_L}^{j_1 \dots j_{h-1}} = \max \left\{ h_{p_L} \left({}^kX_{p_L}^{j_1 \dots j_{h-1}} \right), \hat{V}_{p_L+1}^{\text{regr.}} \left({}^kX_{p_L}^{j_1 \dots j_{h-1}} \right) \right\}.$$

То есть для всех тех вершин, из которых дерево не было продолжено, стоимость удержания опциона (для оценки которой и строится дальнейшее дерево) оценивается по регрессии, как в методе наименьших квадратов (секция 1.3).

8. Теперь, когда для всех листьев из предыдущего поколения известна оценка ${}^k\hat{V}_{p_L}^{j_1 \dots j_{h-1}}$, методом случайных деревьев можно получить оценки для стоимости опциона в точках $X_{p_L-1}^k$:

$${}^k\hat{V}_{p_L-1+i}^{j_1 \dots j_i} = \max \left\{ h_{p_L-1+i} \left({}^kX_{p_L-1+i}^{j_1 \dots j_i} \right), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b {}^k\hat{V}_{p_L-1+i+1}^{j_1 \dots j_i j} \right\}, \quad i \in 0 : h-2.$$

9. Шаги 7–8 повторяются для всех p_l до тех пор, пока в конце шага 8 алгоритм не окажется в вершине X_0 . Оценка в X_0 и будет итоговой оценкой.

Вычислительная сложность алгоритма — $O(Lnb^h) = O(nb^{h-1}(m-h)/(h-1)) = O(mnb^h)$ по времени и столько же по памяти (так как в описанной выше реализации

¹ главное — не забыть, что $\Delta t = t_{m-1} - t_{m-2} = T/(m-1)$ (в методе случайных деревьев высота дерева h равна числу моментов исполнения опциона m , здесь же $m \neq h$)

приходится хранить все промоделированные вершины). При $m \rightarrow \infty$ алгоритм обладает полиномиальной сложностью, в отличие от исходного метода случайных деревьев.

Предложенный алгоритм обладает одним существенным недостатком: наивная реализация требует хранить в памяти всё множество вершин от X_0 до ${}^k X_{m-1}^{j_1 \dots j_{h-1}}$. Это вполне осуществимо, но исходные алгоритмы (как метод случайных деревьев, так и метод наименьших квадратов) позволяют расходовать гораздо меньше памяти.

Простое решение этой проблемы состоит в том, чтобы вместо того, чтобы в моменты t_{p_l} создавать новые деревья с корнями из уже существующих, выбирать точки в пространстве состояний случайным образом (так же, как это делается в методе стохастических сеток). Тогда вместо полного прохода вперёд (шаги 1–4) и назад (шаги 6–9) можно начинать генерировать деревья с последнего поколения (момент p_L) и идти только назад. В таком случае достаточно хранить одно поколение вершин, и сложность по памяти становится равной $O(nb^h)$, оставаясь постоянной при $m \rightarrow \infty$.

3.2. Состоятельность оценки

Оценка по методу случайного дерева с прореживанием является асимптотически состоятельной и несмещённой. Доказательство этого факта является совмещением соответствующих утверждений об оценке методом случайных деревьев (1.1) и оценке методом наименьших квадратов (алг. 1).

Теорема 2. Пусть $h_t(X_t)$ имеет конечный второй момент, $E(V_i(X_i)|X_{i-1} = x)$ – интегрируема в \mathcal{L}^2 . Тогда оценка по методу случайного дерева $\hat{V}_0^{(p)}$ при $b \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ является состоятельной и несмещённой.

Доказательство.

1. Оценка ${}^k \hat{V}_{p_L+1}^j$ является асимптотически состоятельной и несмещённой оценкой для $V_{p_L+1}({}^k X_{p_L+1}^j)$, так как в точности является оценкой по методу случайных деревьев (1.1).
2. Оценка $\hat{V}_{p_L+1}^{\text{regr.}}$ – это оценка по методу наименьших квадратов для стоимости удержания опциона в момент p_L , использующая вместо дисконтированных значений $V_{p_L+1}(x)$ их точечные оценки ${}^k \hat{V}_{p_L+1}^j$. Как показано в [8], использование аппроксимации вместо недоступных точных значений вполне позволительно.

3. При построении ${}^k \hat{V}_{p_{L-1}+1}^j$ вновь используется метод случайных деревьев, при этом в листьях дерева функция выплат заменяется на оценку стоимости удержания опциона. В индукционном доказательстве асимптотической состоятельности оценки по случайному дереву это меняет только проверку граничного условия: вместо

$$\left\| \hat{V}_m(x) - V_m(x) \right\| = \|h_m(x) - h_m(x)\| = 0$$

имеет место быть

$$\begin{aligned} \left\| \hat{V}_{p_L}(x) - V_{p_L}(x) \right\| &= \left\| \max \{h_{p_L}(x), V_{p_{L+1}}(x)\} - \max \{h_{p_L}(x), \hat{V}_{p_{L+1}}^{\text{regr.}}(x)\} \right\| \\ &\leq \left\| V_{p_{L+1}}(x) - \hat{V}_{p_{L+1}}^{\text{regr.}}(x) \right\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Повторяя шаги 2–3 для каждого p_l и для финального дерева, получаем, что оценка $\hat{V}_0^{(p)}$ является асимптотически состоятельной и несмещённой. \square

Численные результаты

В этой главе приведены результаты численных экспериментов, по которым можно оценить практическую применимость предлагаемых подходов.

Везде далее будут использоваться следующие сокращения:

МС метод Монте-Карло с использованием псевдослучайных чисел,

QMC метод Монте-Карло с использованием квазислучайных чисел,

RQMC метод Монте-Карло с использованием рандомизированных квазислучайных чисел.

Основные вопросы, ответами на которые должны стать приведённые ниже численные эксперименты, можно сформулировать следующим образом:

1. Улучшает ли применение квази Монте-Карло (QMC) работу классических методов оценки стоимости Американских опционов? В частности,
 - как ведёт себя дисперсия при использовании обычного Монте-Карло (МС) и QMC и зависит ли это поведение от размера выборки?
 - какая размерность QMC (см. секцию 2.3.2) оптимальна для задачи оценивания опциона?
2. Является ли предложенный в главе 3 метод более эффективным, чем стандартные подходы?

Все численные эксперименты — это оценки стоимости некоторого опциона различными методами. Использовались следующие опционы:

- П1 Опцион на покупку на максимум из двух базовых активов. Состояние актива описывается вектором цен $X_t = (S_t^1, S_t^2)$. Функция выплат по такому опциону равна $h_t(X_t) = \max\{0, \max_{i=1,2} S_t^i - K\}$. Цены S_t моделируются с помощью геометрического броуновского движения, моментальная корреляция процессов равна $\rho = 0.3$. Начальная стоимость активов $S_0^1 = S_0^2 = 100$, $K = 100$, $r = 0.05$, $\delta = 0.10$, $T = 1$, $\sigma = 0.2$. Опцион может быть исполнен в один из $m = 4$ моментов исполнения:

$0, T/3, 2T/3, T$. Истинные значения стоимости опциона в этом примере взяты из [3, стр. 1340].

П2 Опцион на покупку на максимум из пяти базовых активов. Состояние актива описывается вектором цен $X_t = (S_t^i)_{i=1}^5$. Функция выплат по такому опциону равна $h_t(X_t) = \max\{0, \max_{i \in 1:5} S_t^i - K\}$. Цены S_t моделируются с помощью геометрического броуновского движения, моментальная корреляция процессов равна $\rho = 0.3$. Начальная стоимость активов $\forall i \in 1:5 S_0^i = 100$, $K = 100$, $r = 0.05$, $\delta = 0.10$, $T = 1$, $\sigma = 0.2$. Опцион может быть исполнен в один из $m = 4$ моментов исполнения: $0, T/3, 2T/3, T$. Истинные значения стоимости опциона в этом примере взяты из [3, стр. 1340].

П3 Опцион на покупку на максимум из пяти базовых активов. Состояние актива описывается вектором цен $X_t = (S_t^i)_{i=1}^5$. Функция выплат по такому опциону равна $h_t(X_t) = \max\{0, \max_{i \in 1:5} S_t^i - K\}$. Цены S_t моделируются с помощью геометрического броуновского движения, процессы независимы ($\rho = 0$). Начальная стоимость активов $\forall i \in 1:5 S_0^i = 100$, $K = 100$, $r = 0.05$, $\delta = 0.10$, $T = 3$, $\sigma = 0.2$. Опцион может быть исполнен в один из $m = 4$ моментов исполнения: $0, 1, 2, 3$. Истинные значения стоимости опциона в этом примере взяты из [2].

П4 Опцион на покупку на максимум из двух базовых активов. Состояние актива описывается вектором цен $X_t = (S_t^1, S_t^2)$. Функция выплат по такому опциону равна $h_t(X_t) = \max\{0, \max_{i=1,2} S_t^i - K\}$. Цены S_t моделируются с помощью геометрического броуновского движения, моментальная корреляция процессов равна $\rho = 0.3$. Начальная стоимость активов $S_0^1 = S_0^2 = 100$, $K = 100$, $r = 0.05$, $\delta = 0.10$, $T = 1$, $\sigma = 0.2$. Опцион может быть исполнен в любой момент от 0 до T . Истинные значения стоимости опциона в этом примере взяты из [3, стр. 1342].

4.1. Сравнение классических методов

Для проведения сравнения были реализованы два метода: метод случайных деревьев (см. секцию 1.1) и метод линейной регрессии (он же – метод наименьших квадратов, секция 1.3). Для полноты картины был также реализован упомянутый в начале главы 1 наивный Монте-Карло. Результаты представлены на рис. 4.1.

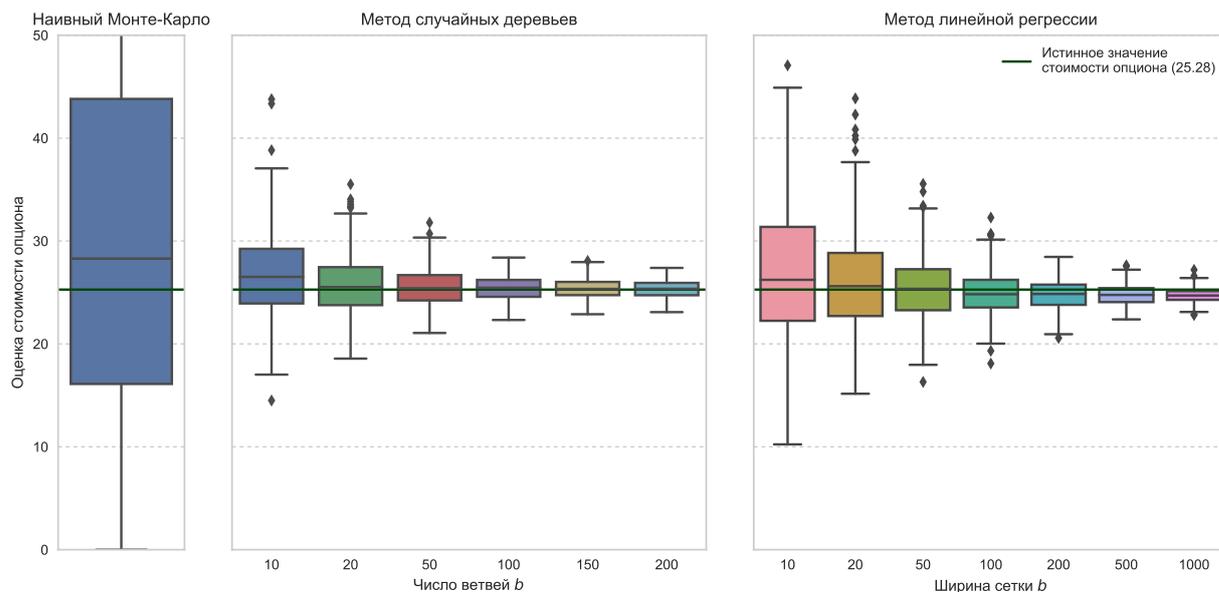


Рис. 4.1. Оценки стоимости опциона различными классическими методами
 Оценки построены для примера ПЗ. Из метода случайных деревьев взята оценка сверху.
 Вертикальная ось общая у всех трёх графиков.

Здесь видно, что примерно одинаковый размер дисперсии (ориентироваться здесь имеет смысл на интерквартильный размах множества оценок, то есть высоту изображённого ящика) достигается в методе случайных деревьев при $b = 100$ и в методе наименьших квадратов при $b = 500$. Для случайного дерева для такого результата потребуется $\dim X_t \sum_{i=1}^{m-1} b^i = 5 \cdot 1,010,100$ обращений к генератору псевдослучайных чисел (обращения к генератору можно считать элементарной операцией, по количеству которых сравнивать время работы различных методов). В методе наименьших квадратов этот результат достигается за $\dim X_t \cdot (m - 1)b = 5 \cdot 1500$ обращений, то есть оценку с той же дисперсией можно получить за гораздо меньшее время.

4.2. Применение метода квази Монте-Карло к классическим методам

В этом разделе обсуждаются результаты применения квази Монте-Карло к методам из предыдущей секции: методу случайных деревьев и методу наименьших квадратов. Были использованы две различные квазислучайные последовательности: квазислучайные числа Соболя [9] и квазислучайные числа Холтона [5].

Малые значения параметров алгоритмов используются специально для того, что-

бы было возможным применить QMC и осуществить сравнение. В том числе по этой же причине сравнение приводится только для первых трёх примеров из списка выше: пример П4 требует слишком большой размерности алгоритма для оценки. Несомненно, ограничения на размерность существующих последовательностей с низким дискрепансом серьёзно ограничивают область применения квазислучайных методов. Тем не менее, задачей работы было исследование самой возможности применения QMC для интегрирования сложных негладких функций (которой является стоимость Американского опциона), поэтому дискуссия о повышении размерности квазислучайной последовательности остаётся за рамками обсуждения.

Для каждой из последовательностей и каждого метода ниже приведено сравнение смещения и дисперсии (там, где её можно посчитать) оценок, полученных с использованием MC, QMC и RQMC. Подробное описание методики подсчёта дисперсии, стандартного отклонения и смещения приведено в секции 2.2.1. Для каждой оценки было посчитано $N = 15,000$ реализаций, разделённых на $g = 600$ групп по $G = 25$ реализаций в каждой.

4.2.1. Последовательность Соболя

Квазислучайные числа Соболя показывают хорошие результаты интегрирования в умеренно высоких размерностях (см. [15]). Примеры с использованием квазислучайных последовательностей Соболя различных размерностей посчитаны для размерностей, не превышающих 40. То есть, к примеру, если КРА (конструктивная размерность алгоритма) оценки по методу случайных деревьев превышает 40, то эта оценка не считается и не присутствует в таблицах результатов.

Метод наименьших квадратов

Результаты представлены на рис. 4.2 и в табл. 4.1, 4.2, 4.3.

Результаты показывают, что использование квазислучайной последовательности Соболя размерности КРА снижает дисперсию оценки. Как и ожидалось, оценки с помощью квазислучайной последовательности размерности $\dim X$ не дают содержательных результатов: для некоторых случаев дисперсия меньше, чем в MC (пример 1, $b = 2, 5, 10$; пример 2, $b = 2$), для других — больше.

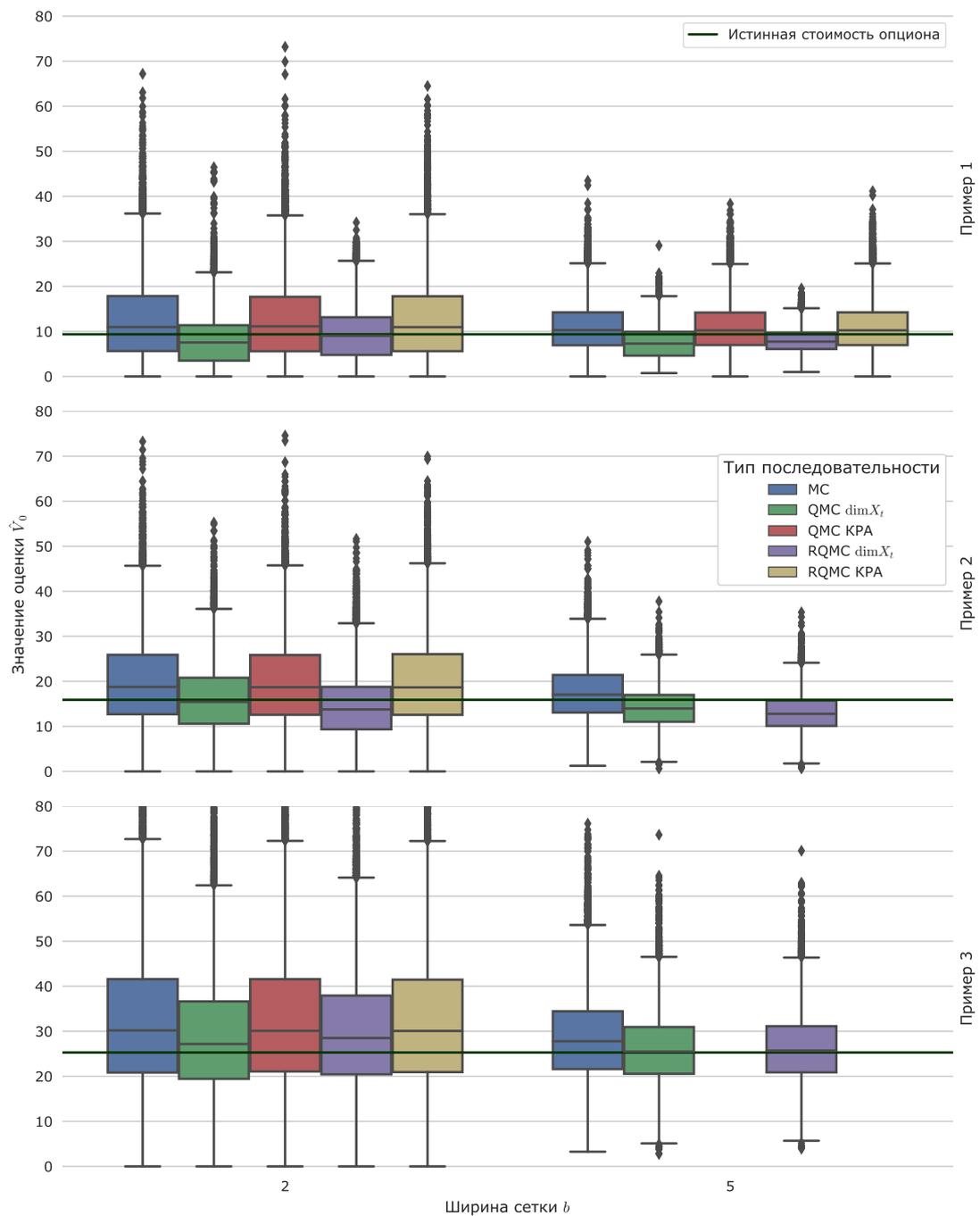


Рис. 4.2. Разброс оценок стоимости Американского опциона методом наименьших квадратов при использовании псевдослучайных последовательностей и квазислучайных последовательностей Соболя различных размерностей

На рисунке изображён именно разброс оценок, полученных при использовании различных отрезков квази- или псевдослучайной последовательности: подсчёт дисперсии и доверительных интервалов в случае QMC невозможен.

Оценки методом наименьших квадратов с псевдослучайной последовательностью (МС) и квазислучайной последовательностью Соболя (QMC)

Таблица 4.1. Пример 1

b	тип	$\dim X_t$	\hat{V}	$sd\hat{V}$	$se\hat{V}$	$bias\hat{V}$
2	МС		12.562	1.856	3.700	3.201
2	RQMC	2	9.516	1.112	1.123	0.155
2	RQMC	12	12.535	1.139	3.372	3.174
5	МС		10.992	1.045	1.937	1.631
5	RQMC	2	7.938	0.606	1.546	-1.423
5	RQMC	30	10.957	0.843	1.806	1.596

Таблица 4.2. Пример 2

b	тип	$\dim X_t$	\hat{V}	$sd\hat{V}$	$se\hat{V}$	$bias\hat{V}$
2	МС		19.907	2.077	4.513	4.007
2	RQMC	5	14.446	1.154	1.856	-1.454
2	RQMC	30	19.851	1.528	4.236	3.951
5	МС		17.557	1.270	2.088	1.657
5	RQMC	5	13.058	1.205	3.087	-2.842

Таблица 4.3. Пример 3

b	тип	$\dim X_t$	\hat{V}	$sd\hat{V}$	$se\hat{V}$	$bias\hat{V}$
2	МС		32.438	3.421	7.934	7.158
2	RQMC	30	32.285	7.987	10.623	7.005
2	RQMC	5	35.431	1.825	10.314	10.151
5	МС		28.570	1.990	3.845	3.290
5	RQMC	5	25.258	2.010	2.010	-0.022

Расшифровку обозначений см. в 2.2

Оценки методом случайных деревьев с псевдослучайной последовательностью (МС) и квазислучайной последовательностью Соболя (QMC)

Таблица 4.4. Пример 1

b	тип	$\dim X_t$	\hat{V}	$sd\hat{V}$	$se\hat{V}$	$bias\hat{V}$
2	МС		11.232	1.456	2.370	1.871
2	RQMC	2	10.983	0.638	1.743	1.622
2	RQMC	28	11.275	0.801	2.075	1.914
5	МС		10.324	0.762	1.228	0.963
5	RQMC	2	9.617	0.280	0.380	0.256

Расшифровку обозначений см. в 2.2

Метод случайных деревьев

Результаты представлены на рис. 4.3 и в табл. 4.4.

При использовании метода случайных деревьев только в одном случае КРА достаточно мала, чтобы строить оценку с использованием квазислучайной последовательности размерности, равной КРА. При этом остаётся неясным, насколько точными являются полученные оценки $sd\hat{V}$ и $se\hat{V}$ (возможно, если взять размер выборки N чуть больше или чуть меньше, то отношение между $sd\hat{V}$ для МС и RQMC существенно изменится?). Одним из способов оценить поведение оценок является рис. 4.4, на котором обсуждаемые оценки стандартного и среднеквадратичного отклонения изображены как функции от размера выборки. Он показывает, что оценки отклонений вполне статичны и преимущество RQMC в этом случае не является случайным эффектом малой выборки.

4.2.2. Последовательность Холтона

Примеры с использованием квазислучайных последовательностей Холтона различных размерностей посчитаны для размерностей < 40 . Стоит отметить, что в силу своей конструкции последовательности Холтона обычно не показывают хороших результатов при численном интегрировании в умеренно высоких размерностях (см., например, [5]).

Метод наименьших квадратов

Результаты представлены на рис. 4.5 и в табл. 4.5, 4.6, 4.7.

Из таблиц 4.5, 4.6 видно, что на тех же примерах, где использование последовательность Соболя размерности, равной КРА, давало выигрыш в дисперсии, использование

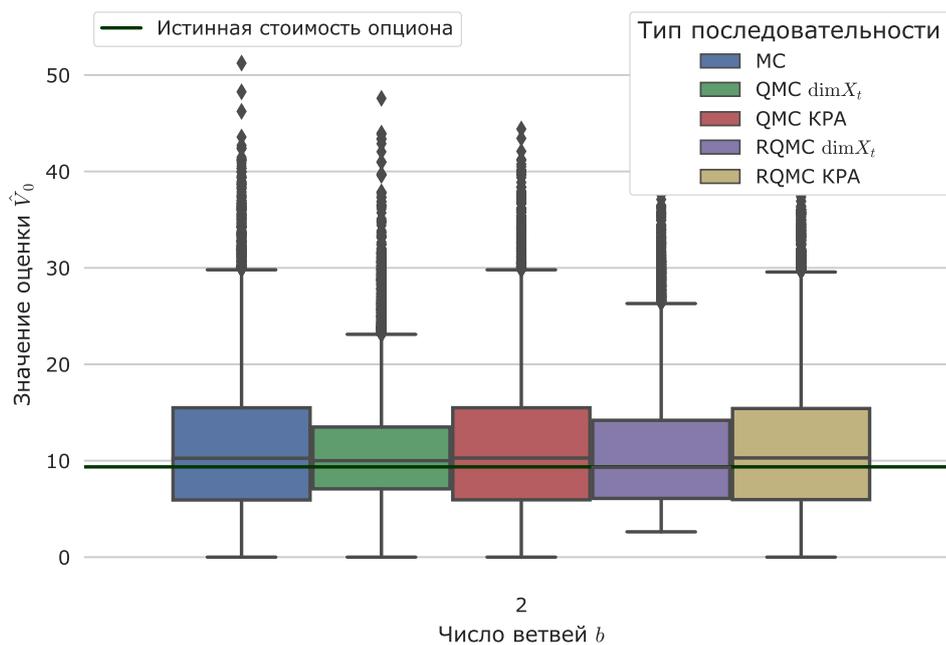


Рис. 4.3. Разброс оценок стоимости Американского опциона методом случайных деревьев при использовании псевдослучайных последовательностей и квазислучайных последовательностей Соболя различных размерностей

На рисунке изображён именно разброс оценок, полученных при использовании различных отрезков квази- или псевдослучайной последовательности: подсчёт дисперсии и доверительных интервалов в случае QMC невозможен.

Оценки методом наименьших квадратов с псевдослучайной последовательностью и квазислучайной последовательностью Холтона

Таблица 4.5. Пример 1

b	тип	$\dim X_t$	\hat{V}	$sd\hat{V}$	$se\hat{V}$	$bias\hat{V}$
2	MC		12.535	1.818	3.658	3.174
2	RQMC	12	12.540	2.339	3.947	3.179
2	RQMC	2	6.119	0.543	3.287	-3.242
5	MC		10.979	1.094	1.953	1.618
5	RQMC	30	10.967	2.810	3.237	1.606
5	RQMC	2	7.349	0.208	2.023	-2.012
10	MC		10.120	0.736	1.058	0.759
10	RQMC	2	11.696	0.117	2.338	2.335

Таблица 4.6. Пример 2

b	тип	$\dim X_t$	\hat{V}	$sd\hat{V}$	$se\hat{V}$	$bias\hat{V}$
2	MC		19.753	1.956	4.321	3.853
2	RQMC	30	19.860	5.361	6.665	3.960
2	RQMC	5	15.481	0.713	0.827	-0.419
5	MC		17.478	1.243	2.009	1.578
5	RQMC	5	19.220	0.622	3.377	3.320

Таблица 4.7. Пример 3

b	тип	$\dim X_t$	\hat{V}	$sd\hat{V}$	$se\hat{V}$	$bias\hat{V}$
2	MC		32.438	3.421	7.934	7.158
2	RQMC	30	32.285	7.987	10.623	7.005
2	RQMC	5	35.431	1.825	10.314	10.151
5	MC		28.570	1.990	3.845	3.290
5	RQMC	5	25.258	2.010	2.010	-0.022

Расшифровку обозначений см. в 2.2

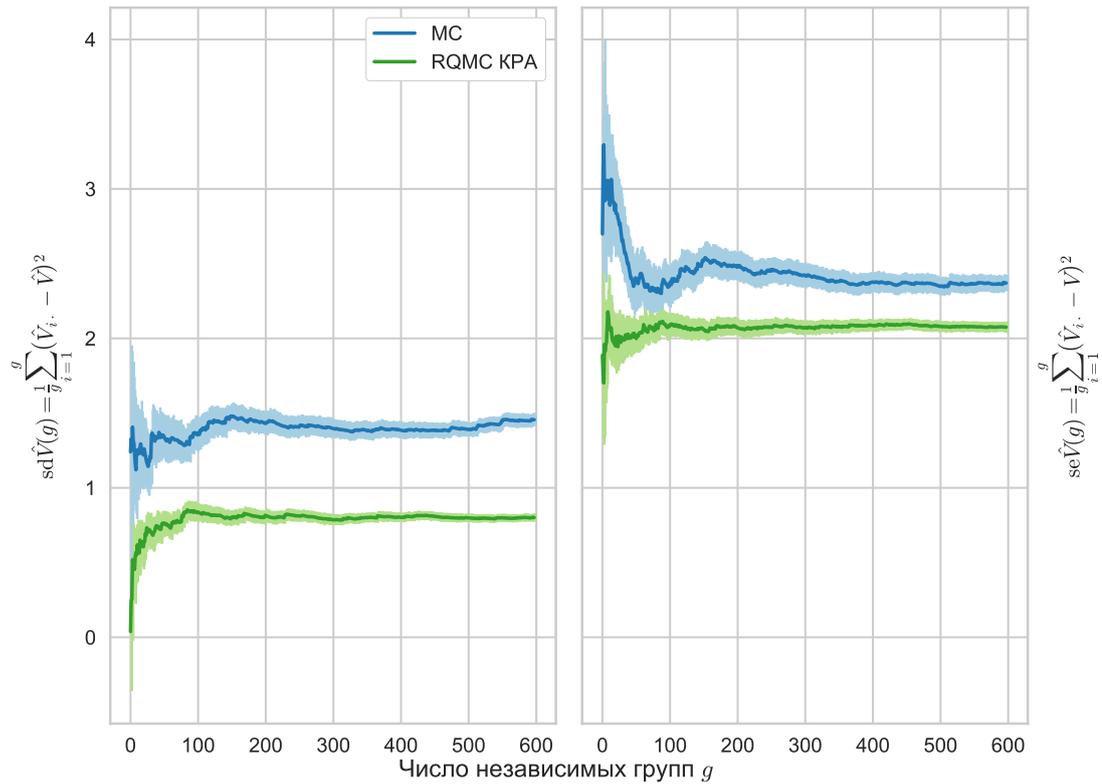


Рис. 4.4. Оценки $sd\hat{V}$ и $se\hat{V}$ в зависимости от размера выборки

Оценки стандартного и среднеквадратичного отклонения оценки стоимости Американского опциона из примера П1 при использовании метода случайных деревьев с MC и RQMC Соболя размерности KPA. Количество коррелированных оценок в группе постоянно и равно $G = 25$, при росте g увеличивается размер выборки $N = g \cdot G$. Значения крайних правых точек графика указаны в табл. 4.4. Значение оценки на выборке из первых g групп указано более тёмной линией, более бледным обозначено стандартное отклонение этой оценки, посчитанное с помощью бутстрепа.

последовательности Холтона существенно увеличивает дисперсию.

Метод случайных деревьев

Результаты представлены на рис. 4.6 и в табл. 4.8.

Здесь, как и в случае с последовательностью Соболя (см. секцию 4.2.1), для KPA есть только одно наблюдение, поэтому стоит посмотреть на поведение отклонений в зависимости от размера выборки. Оно изображено на рис. 4.7. Судя по представленному на графике поведению, оценка стандартного отклонения для 600 наблюдений достаточно устойчива, и оснований считать, что QMC размерности KPA превосходит MC, нет.

Представленные в этом разделе результаты подтверждают, что последовательность Холтона плохо справляется с интегрированием в пространствах умеренно высокой раз-

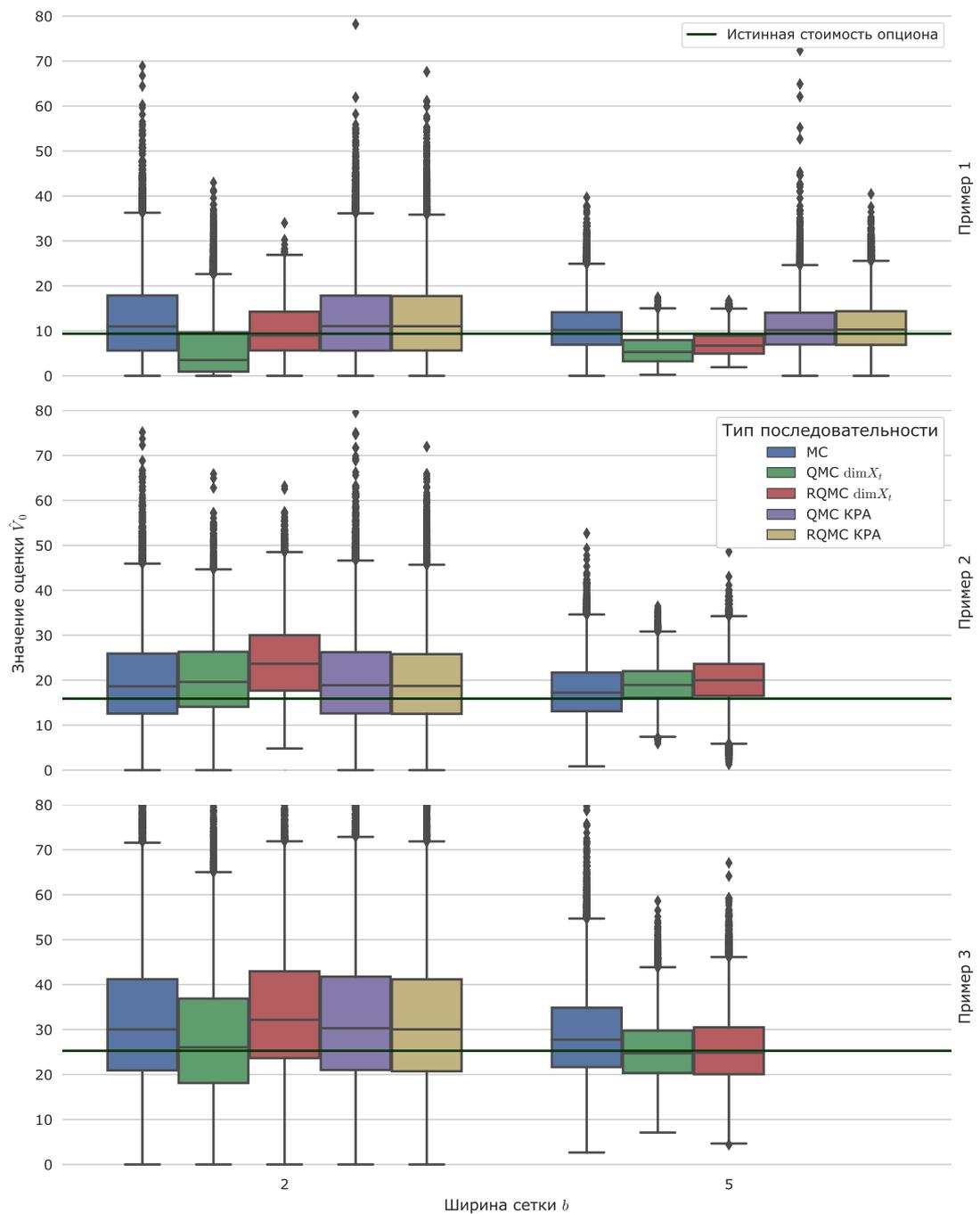


Рис. 4.5. Разброс оценок стоимости Американского опциона методом наименьших квадратов при использовании псевдослучайных последовательностей и квазислучайных последовательностей Холтона различных размерностей

На рисунке изображён именно разброс оценок, полученных при использовании различных отрезков квази- или псевдослучайной последовательности: подсчёт дисперсии и доверительных интервалов в случае QMC невозможен.

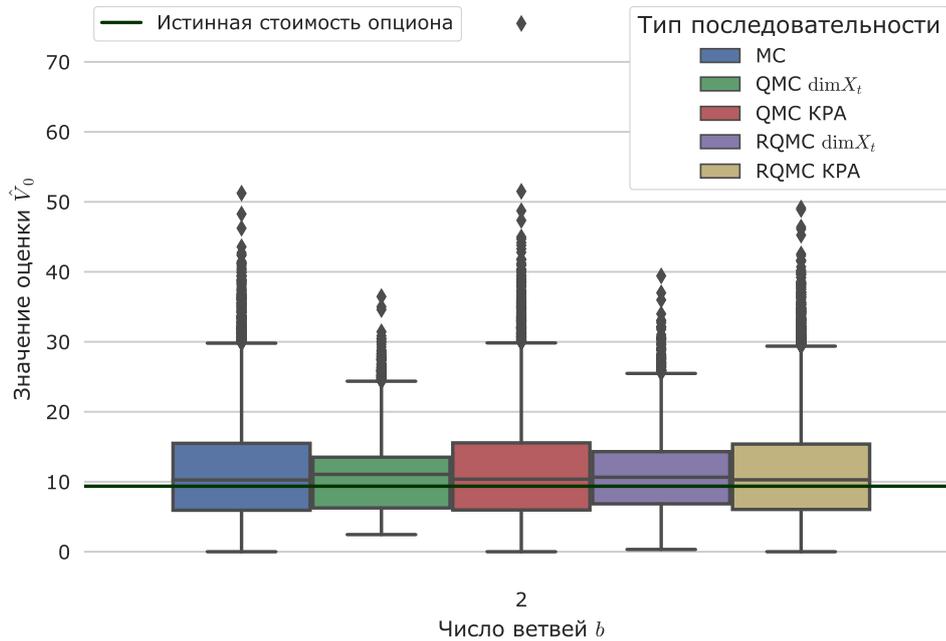


Рис. 4.6. Разброс оценок стоимости Американского опциона методом случайных деревьев при использовании псевдослучайных последовательностей (MC) и квазислучайных последовательностей Холтона (QMC) различных размерностей

На рисунке изображён именно разброс оценок, полученных при использовании различных отрезков квази- или псевдослучайной последовательности: подсчёт дисперсии и доверительных интервалов в случае QMC невозможен.

Оценки методом случайных деревьев с псевдослучайной последовательностью (MC) и квазислучайной последовательностью Холтона (QMC)

Таблица 4.8. Пример 1

b	тип	d	\hat{V}	$sd\hat{V}$	$se\hat{V}$	$bias\hat{V}$
2	MC		11.232	1.456	2.370	1.871
2	RQMC	2	11.014	0.429	1.708	1.653
2	RQMC	28	11.273	1.969	2.745	1.912
5	MC		10.324	0.762	1.228	0.963
5	RQMC	2	9.879	0.217	0.562	0.518

Расшифровку обозначений см. в 2.2

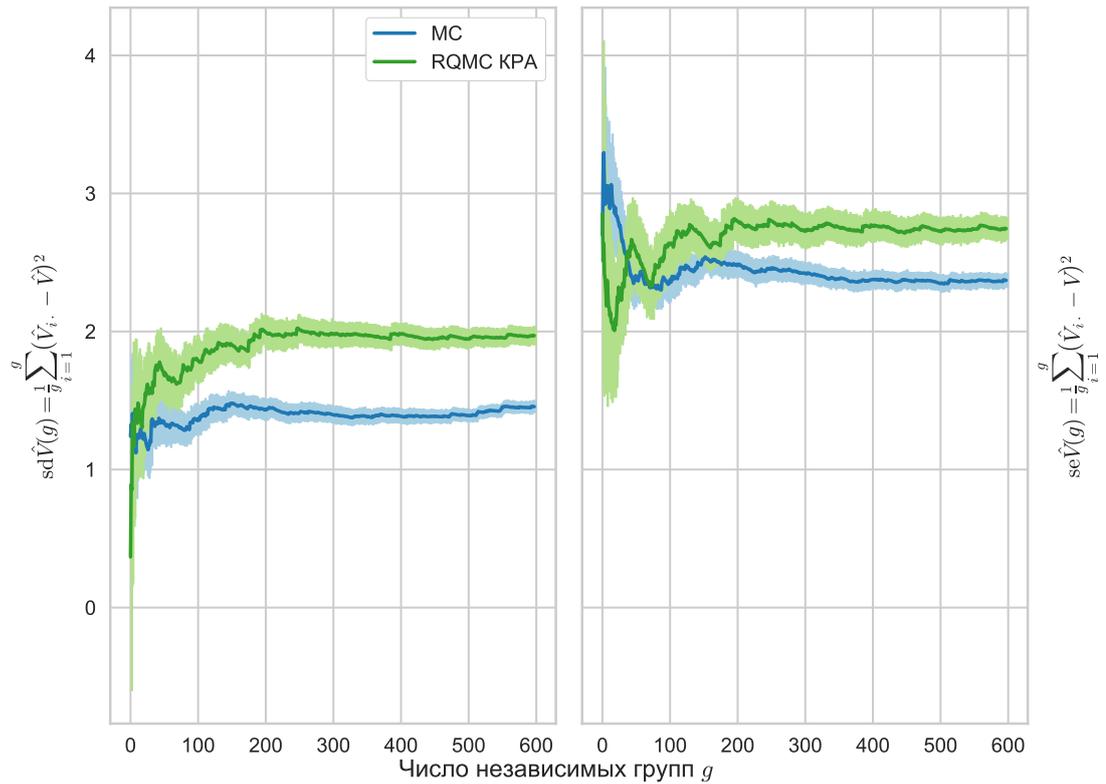


Рис. 4.7. Оценки $sd\hat{V}$ и $se\hat{V}$ в зависимости от размера выборки

Оценки стандартного и среднеквадратичного отклонения оценки стоимости Американского опциона из примера П1 при использовании метода случайных деревьев с MC и с RQMC Холтона размерности, равной конструктивной размерности алгоритма. Количество коррелированных оценок в группе постоянно и равно $G = 25$, при росте g увеличивается размер выборки $N = g \cdot G$. Значения крайних правых точек графика указаны в табл. 4.4. Значение оценки на выборке из первых g групп указано более тёмной линией, более бледным обозначено стандартное отклонение этой оценки, посчитанное с помощью бутстрепа.

мерности. Напротив, последовательность Соболя демонстрирует гораздо более хорошие результаты, чем классический Монте-Карло, даже в случае сложной негладкой функции.

4.3. Оценки по сглаженным случайным деревьям

Для сравнения алгоритмов требуется пример с известным ответом: Американский опцион с известными параметрами, для которого известна стоимость при условии возможности исполнения опциона в любой момент времени (т.е. при $t \rightarrow \infty$). Поэтому сравнение проводится для примера П4.

Оценка по сглаженным деревьям сравнивается с оценкой по методу наименьших квадратов. Параметры оценки по сглаженным деревьям (b, h, n) выбраны таким образом, чтобы доставлять наименьшую дисперсию при фиксированном t и ограниченном

сверху n . Параметр b для метода наименьших квадратов выбирался таким образом, чтобы конструктивная размерность оценок совпала. Сравнение дисперсий представлено на рис. 4.8, и, согласно этим данным, дисперсия в методе сглаженных деревьев ниже.

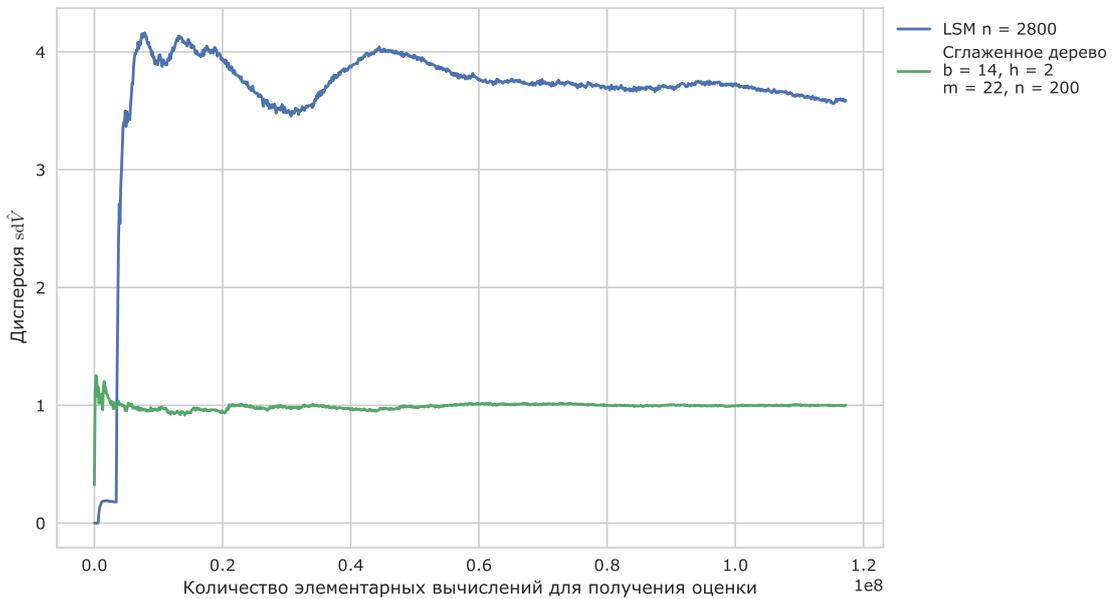


Рис. 4.8. Дисперсия оценок по методу наименьших квадратов и методу сглаженных случайных деревьев

4.4. Применение метода квази Монте-Карло к сглаженным случайным деревьям

Существует два наиболее очевидных варианта применения квази Монте-Карло к исследуемому методу:

1. Использование QMC для генерирования более регулярной сетки на шаге выбора точек роста для новых деревьев: размерность QMC равна размерности базового актива, для генерации деревьев используется генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ).
2. Использование QMC для генерации деревьев: размерность QMC равна $\dim X_t \cdot \sum_{i=1}^h b^i$, для выбора сетки используется ГПСЧ или другая QMC-последовательность (уже другой размерности).

В таблицах далее эти варианты обозначаются суффиксами «grid» и «tree» соответственно. Сравнение оценок с использованием QMC с оценками с использованием MC приведено на рис. 4.9 и в табл. 4.9. Использовалась квазислучайная последовательность Соболя. Как видно из рисунка, использование QMC для генерации деревьев меньшую ошибку относительно истинного значения стоимости опциона. Это можно объяснить тем, что использование QMC для генерации сетки вершин обеспечивает более равномерную решётку, порождая более точные оценки линейной регрессии $\hat{V}_{p_i}^{\text{regr.}}$ и компенсируя тем самым один из источников смещения.

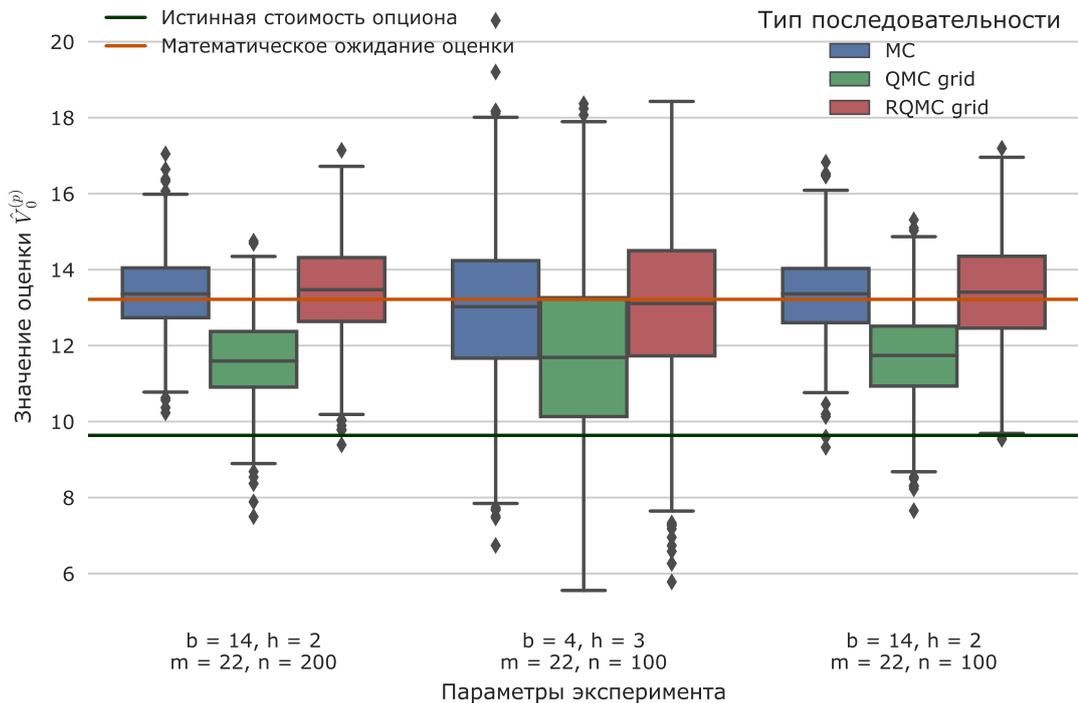


Рис. 4.9. Разброс оценок стоимости Американского опциона методом сглаженных случайных деревьев при использовании псевдослучайных последовательностей (MC) и квазислучайных последовательностей Соболя (QMC) в различных частях алгоритма

Вычисления представлены для примера П4. На рисунке изображён именно разброс оценок, полученных при использовании различных отрезков квази- или псевдослучайной последовательности: подсчёт дисперсии и доверительных интервалов в случае QMC невозможен.

Сведения из табл. 4.9 также демонстрируют, что использование рандомизированных квазислучайных методов не даёт большого выигрыша в дисперсии для оценки по сглаженным деревьям (по крайней мере, на исследуемом примере). При этом использование квазислучайных методов позволяет добиться разброса в значениях оценки по различным частям квазислучайной последовательности меньшего, чем в методе Монте-

Таблица 4.9. Оценки методом сглаженных случайных деревьев при использовании псевдослучайных последовательностей (MC) и квазислучайных последовательностей Соболя (QMC) в различных частях алгоритма

b	h	m	n	тип	\hat{V}	$sd\hat{V}$	$se\hat{V}$	$bias\hat{V}$
4	3	22	100	MC	12.952	0.371	3.336	3.315
4	3	22	100	QMC grid	11.669	-	-	2.032
4	3	22	100	QMC tree	2.373	-	-	-7.264
4	3	22	100	RQMC grid	13.006	0.934	3.496	3.369
4	3	22	100	RQMC tree	13.202	4.744	5.935	3.565
14	2	22	100	MC	13.321	0.224	3.691	3.684
14	2	22	100	QMC grid	11.709	-	-	2.072
14	2	22	100	QMC tree	2.532	-	-	-7.105
14	2	22	100	RQMC grid	13.383	1.025	3.884	3.746
14	2	22	100	RQMC tree	13.540	4.642	6.065	3.903
14	2	22	200	MC	13.379	0.208	3.748	3.742
14	2	22	200	QMC grid	11.632	-	-	1.995
14	2	22	200	QMC tree	2.458	-	-	-7.179
14	2	22	200	RQMC grid	13.426	0.893	3.893	3.789
14	2	22	200	RQMC tree	14.784	5.571	7.584	5.147

Карло (не указано в таблице).

Заключение

В работе проведено исследование вопроса применимости метода квази Монте-Карло к задаче оценивания Американского опциона. Из приведённых результатов следует, что метод в целом применим к задаче. Разрешён вопрос о выборе размерности квазислучайной последовательности: в общем случае размерность, равная конструктивной размерности алгоритма, показывает наилучшие результаты. Подтверждены ранее известные сведения о неудовлетворительных результатах применения квазислучайных чисел Холтона в задачах численного интегрирования умеренно высокой размерности и продемонстрированы результаты для квазислучайных чисел Соболя, показывающие, что эта последовательность может быть успешно применена.

Также предложен новый алгоритм оценки стоимости Американских опционов. Доказана состоятельность оценок, получаемых с помощью предложенного алгоритма. Проведены численные сравнения алгоритма с существующими и продемонстрировано преимущество (меньшая дисперсия) по сравнению с оценкой по методу наименьших квадратов.

Список литературы

1. *Black F., Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. — 1973. — Т. 81, № 3. — С. 637–654. — DOI: 10.1086/260062. — eprint: <http://dx.doi.org/10.1086/260062>. — URL: <http://dx.doi.org/10.1086/260062>.
2. *Broadie M., Glasserman P.* A stochastic mesh method for pricing high-dimensional American options // Journal of Computational Finance. — 2004. — Т. 7. — С. 35–72.
3. *Broadie M., Glasserman P.* Pricing American-style securities by simulation // Journal of Economic Dynamics and Control. — 1997. — Т. 21. — С. 1323–1352.
4. *Chi H.* Scrambled Quasirandom Sequences and Their Applications : дис. ... канд. / Chi Hongmei. — The Florida State University, 2004.
5. *Faure H., Lemieux C.* Generalized Halton Sequences in 2008: A Comparative Study // ACM Trans. Model. Comput. Simul. — New York, NY, USA, 2009. — Ноябрь. — Т. 19, № 4. — 15:1–15:31. — ISSN 1049-3301. — DOI: 10.1145/1596519.1596520. — URL: <http://doi.acm.org/10.1145/1596519.1596520>.
6. *Glasserman P.* Monte Carlo Methods in Financial Engineering. — Springer, 2004.
7. *Kashtanov Y.* Stochastic Mesh Method for Optimal Stopping Problems. — 2015. — не опубликовано.
8. *Longstaff F. A., Schwartz E. S.* Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach // Review of Financial studies. — 2001. — Т. 14, № 1. — С. 113–147.
9. *Niederreiter H.* Low-discrepancy and low-dispersion sequences // Journal of Number Theory. — 1988. — Т. 30, № 1. — С. 51–70. — ISSN 0022-314X. — DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X\(88\)90025-X](http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X(88)90025-X). — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022314X8890025X>.
10. *Ökten G., Göncü A.* Generating low-discrepancy sequences from the normal distribution: Box–Muller or inverse transform? // Mathematical and Computer Modelling. — 2011. — Т. 53, № 5/6. — С. 1268–1281. — ISSN 0895-7177. — DOI: <http://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.12.011>. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717710005935>.

11. *Owen A. B.* Randomly Permuted (t,m,s)-Nets and (t, s)-Sequences // Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing: Proceedings of a conference at the University of Nevada, Las Vegas, Nevada, USA, June 23–25, 1994 / под ред. H. Niederreiter, P. J.-S. Shiue. — New York, NY : Springer New York, 1995. — С. 299–317. — ISBN 978-1-4612-2552-2. — DOI: 10.1007/978-1-4612-2552-2_19. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-2552-2_19.
12. *Spanier J., Maize E. H.* Quasi-Random Methods for Estimating Integrals Using Relatively Small Samples // SIAM Review. — 1994. — Т. 36, № 1. — С. 18–44. — DOI: 10.1137/1036002. — eprint: <http://dx.doi.org/10.1137/1036002>. — URL: <http://dx.doi.org/10.1137/1036002>.
13. *Tuffin B.* Randomization of Quasi-Monte Carlo Methods for Error Estimation: Survey and Normal Approximation // Monte Carlo Meth. and Appl. — 2004. — Т. 10. — С. 617–628.
14. *Ермаков С. М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. — Наука, 1975.
15. *Р.Б. Статников И. С. и.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. — Дрофа, 2006.
16. Указание Банка России от 16.02.2015 №3565-У «О видах производных финансовых инструментов».