Санкт-Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика
Динамические системы, эволюционные уравнения, экстремальные задачи
и математическая кибернетика

Магеркин Валентин Вячеславович

Синтез оптимальных полиномиальных фильтров

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., доцент, профессор Барабанов А. Е.

Рецензент:
д. т. н., ведущий научный сотрудник Фуртат И. Б.

Санкт-Петербург
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Applied Mathematics and Informatics
Dynamical systems, evolution equations, extremal problems and mathematical cybernetics

Valentin Magerkin

Synthesis of optimal polynomial filters

Graduation Thesis

Scientific supervisor:
Doctor of Physics and Mathematics, Professor A. E. Barabanov

Reviewer:
Doctor of Engineering, Leading researcher I. B. Furtat

Saint-Petersburg
2017

Оглавление

Введение

Данная работа посвящена линейно-квадратичным задачам синтеза оптимальных регуляторов и оптимальных полиномиальных фильтров. Не смотря на то, что линейно-квадратичные оптимизационные задачи известны давно [5], до сих пор зачастую их решения либо основаны на переходе к пространству состояний, либо являются некими итеративными алгоритмами, для которых требуется некоторое начальное допустимое решение. Представленное в данной работе решение задачи оптимального управления не требует нахождения начального регулятора и формулируется в терминах передаточных функций, что является существенным преимуществом при реализации регуляторов и фильтров. Прикладная значимость полиномиальных моделей динамических систем управления в рамках поведенческого подхода Я. Виллемса описана в [1].

В первом разделе данной работы рассмотрены решения линейно-квадратичных задач минимизации в классе стационарных процессов, удовлетворяющих уравнениям замкнутой системы, и синтеза оптимального стабилизирующего регулятора. Данные результаты используются в разделе 2, который посвящён задаче синтеза оптимальных полиномиальных фильтров. В третьем разделе представлены решения линейно-квадратичных задач в случаях полной информации и полного измерения выхода, а также сформулирована теорема разделения оценивания и управления для задачи синтеза оптимального регулятора по неполным зашумлённым измерениям.

1. Общая линейно-квадратичная задача управления

Объект управления описывается уравнениями

$$a(p)y(t) = b(p)u(t) + w(t), \tag{1.1}$$
$$s(t) = c(p)y(t) + e(t), \tag{1.2}$$

где y — n-мерный выход объекта, u — m-мерное управление, s — l-мерное измерение, w — возмущение в объекте, e — шум измерения, $a(z)$, $b(z)$ и $c(z)$ — матричные многочлены соответствующих размерностей, матрица a квадратная невырожденная. Предполагается, что пара матричных многочленов (a, b) — несократима слева, пара (a, c) — несократима справа [2].

Одновременно будут рассматриваться задачи с дискретным и непрерывным временем. Если время t — непрерывное, то $p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования. Если время t — дискретное, $t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, то p — оператор сдвига назад, $px(t) = x(t-1)$. В случае дискретного времени предполагается, что матрица $a(0)$ невырождена и $b(0) = 0$.

Пусть $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ — матричные многочлены размерностей $m \times m$ и $m \times l$, соответственно. Пусть квадратный матричный многочлен

$$\begin{pmatrix} a(z) & -b(z) \\ -\beta(z)c(z) & \alpha(z) \end{pmatrix}$$

не является вырожденным тождественно. Тогда допустимым регулятором называется уравнение вида

$$\alpha(p)u(t) = \beta(p)s(t). \tag{1.3}$$

Далее вектор-функция размерности $n+l$, составленная из возмущения в объекте и шума измерения, будет обозначаться

$$v = \mathrm{col}(w, e). \tag{1.4}$$

Предполагается, что совокупная векторная функция

$$\mu(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ e(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

является регулярным обобщённым стационарным случайным процессом с нулевым средним, а его спектральная плотность является матричной рациональной функцией.

Введём обозначения для спектральной плотности компонент μ и для взаимной спектральной плотности:

$$S_\mu(z) = \begin{pmatrix} S_v(z) & S_{v\lambda}(z) \\ S_{\lambda v}(z) & S_\lambda(z) \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Пусть O — область неустойчивости на комплексной плоскости и L — её граница. В случае дискретного времени O — замкнутый единичный круг, а L — окружность. В случае непрерывного времени O — замкнутая правая полуплоскость, а L — мнимая ось.

Отметим, что рациональная квадратная матричная функция $S(z)$ является спектральной плотностью некоторого обобщённого стационарного случайного процесса тогда и только тогда, когда она неотрицательна на L и не имеет полюсов в L. В дискретном времени такой стационарный процесс имеет дисперсию. В непрерывном времени для того, чтобы этот обобщённый стационарный процесс имел дисперсию и поэтому был обычным стационарным процессом, необходимо и достаточно, чтобы функция $S(z)$ была правильной рациональной, то есть степень её числителя была меньше степени знаменателя.

Для произвольной матричной рациональной функции f с вещественными коэффициентами введём обозначение f^* для рациональной функции, совпадающей с эрмитовым сопряжением на L. Для дискретного времени $f^*(z) = f(z^{-1})^T$, а для непрерывного времени $f^*(z) = f(-z)^T$.

Пусть задана рациональная квадратная матричная функция $H(z)$ размерности $2(m+n)$, $H(z) = H^*(z)$, $H(z) \geq 0$ при $z \in L$. Она допускает факторизацию [3]

$$H(z) = \Gamma^*(z)\Gamma(z), \tag{1.7}$$

где $\Gamma(z)$ — рациональная матричная функция без полюсов в O. Показателем качества управления выберем функционал

$$J = \mathsf{E}\left|\Gamma(p)\begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix}\right|^2, \tag{1.8}$$

вычисленный на стационарном решении (y, u) замкнутой системы и на стационарном выходе блока с передаточной функцией Γ. Если обобщённый случайный стационарный процесс $\Gamma(p)\,\mathrm{col}(y(t), u(t), \lambda(t))$ не имеет дисперсии, то, по определению, $J = +\infty$.

Будем рассматривать одновременно две задачи оптимального управления.

Задача 1. Минимизация в классе стационарных процессов. Найти матричные многочлены $(\alpha(z), \beta(z))$ и случайные процессы (y, u, s), удовлетворяющие уравнениям объекта и допустимого регулятора, при которых функционал J достигает наименьшего значения.

Задача 2. Синтез оптимального регулятора. Найти матричные многочлены $(\alpha(z), \beta(z))$, определяющие допустимый регулятор, при котором замкнутая система устойчива и функционал J достигает наименьшего значения.

Выделим в матрице H подматрицы в соответствии с разбиением $\mu = \mathrm{col}(v, \lambda)$:

$$H(z) = \begin{pmatrix} H_2(z) & H_1^*(z) \\ H_1(z) & H_0(z) \end{pmatrix}.$$

По условию, если $z \in L$, то $H(z) \geq 0$ и поэтому $H_2(z) \geq 0$ и $H_0(z) \geq 0$. Матрица H_2 определяет квадратичную форму относительно переменных объекта (y, u), матрица H_1 определяет линейную форму, а матрица H_0 — независящее от управления слагаемое.

Для каждой матрицы W размера $(n+m)\times(n+l)$ и числа $z \in L$ определим

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(W,z) = S_v(z)W^*H_2(z)W + S_{\lambda v}(z)W^*H_1^*(z) + \\ + H_1(z)WS_{v\lambda}(z) + H_0(z)S_\lambda(z).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Лемма 1.1. *Задачи 1 и 2 равносильны минимизации функционала*

$$J = \operatorname{tr}\int_L \mathcal{H}(W(z),z)\,dm(z) \tag{1.10}$$

по матричным многочленам $(\alpha(z),\beta(z))$, определяющим уравнение регулятора, где совокупная передаточная функция замкнутой системы W размерности $(n+m)\times(n+l)$,

$$W(z) = \begin{pmatrix} W_{y/w}(z) & W_{y/e}(z) \\ W_{u/w}(z) & W_{u/e}(z) \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

определяется уравнениями замкнутой системы

$$\begin{pmatrix} a(z) & -b(z) \\ -\beta(z)c(z) & \alpha(z) \end{pmatrix} W(z) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \beta(z) \end{pmatrix}.$$

В задаче 2 множество допустимых регуляторов ограничено дополнительным требованием устойчивости замкнутой системы.

Доказательство. Фиксируем некоторый допустимый регулятор. В задаче 2 устойчивая замкнутая система определяет преобразование обобщённых стационарных случайных процессов

$$x(t) = \Gamma(p)\begin{pmatrix} W(p)v(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix}.$$

В задаче 1 существование обобщённого стационарного процесса x является предположением.

Спектральная плотность процесса x есть

$$S_x(z) = \Gamma(z) \begin{pmatrix} W(z)S_v(z)W^*(z) & W(z)S_{v\lambda}(z) \\ S_{\lambda v}(z)W^*(z) & S_\lambda(z) \end{pmatrix} \Gamma^*(z).$$

Для существования дисперсии в случае непрерывного времени необходимо и достаточно, чтобы рациональные функции на главной диагонали матрицы $S_x(z)$ были правильными. В этом же случае сходится интеграл

$$J = \int\limits_L \operatorname{tr} S_x(z)\, dm(z) = \int\limits_L \operatorname{tr} H(z) \begin{pmatrix} W(z)S_v(z)W^*(z) & W(z)S_{v\lambda}(z) \\ S_{\lambda v}(z)W^*(z) & S_\lambda(z) \end{pmatrix} dm(z).$$

Утверждение леммы получается подстановкой компонент $H(z)$ и умножением двух матриц. □

1.1. Устойчивость и фиксированные полюсы замкнутой системы

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — все корни $\det(a(z))$ и $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — кратности этих корней. Передаточная функция объекта управления от u к s есть

$$W_{s/u}(z) = c(z)a(z)^{-1}b(z).$$

Полюсами этой функции могут быть только числа z_1, z_2, ..., z_n. Кратности этих полюсов у функции $W_{s/u}$ обозначим $l_1, l_2, \ldots, l_n$, соответственно.

Лемма 1.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1. $l_i \le k_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. Введём многочлен

$$p_{\mathrm{com}}(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)^{k_i - l_i}.$$

Тогда для любого регулятора характеристический многочлен замкнутой системы делится нацело на p_{com}.

Доказательство. Кратность полюса $a(z)^{-1}$ равна кратности корня $\det(a(z))$. При умножении на матричный многочлен кратность полюса не может увеличиться. Отсюда следует утверждение 1 леммы.

Пусть матричные многочлены $(\alpha(z), \beta(z))$ определяют некоторый регулятор. Далее для краткости аргумент (z) опускается. Вычислим характеристический многочлен замкнутой системы при помощи дополнения Шура [4].

$$\begin{aligned}\gamma(z) &= \det\begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ -c & I_l & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & -b \\ -\beta c & \alpha \end{pmatrix} = \\ &= \det(a)\det(\alpha - \beta c a^{-1} b) = \det(a)\det(\alpha - \beta W_{s/u}).\end{aligned}$$

Кратность полюса $W_{s/u}$ не может увеличиться при умножении и сложении с матричными многочленами. Отсюда следует утверждение 2 леммы. $\square$

Определим полиномиальные матрицы $h(z)$, $g(z)$, $q(z)$, $p(z)$ из условий:

$$h(z)g(z)^{-1} = a(z)^{-1}b(z), \tag{1.12}$$

$$p(z)^{-1}q(z) = c(z)a(z)^{-1} \tag{1.13}$$

и пара матричных функций $(h(z), g(z))$ несократима справа, а пара $(p(z), q(z))$ — слева. Введём матричные функции

$$f = \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

$$r = \begin{pmatrix} q & p \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Лемма 1.3. *Пусть матричные многочлены $(\alpha(z), \beta(z))$ определяют некоторый регулятор. Тогда для того, чтобы замкнутая система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $z \in O$ была невырождена матрица*

$$\chi(z) = \alpha(z)g(z) - \beta(z)c(z)h(z). \tag{1.16}$$

Доказательство. Выполним преобразование характеристического многочлена замкнутой системы при помощи дополнения Шура и тождества $a^{-1}b = hg^{-1}$.

$$\begin{aligned}\gamma(z) &= \det\begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ -c & I_l & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \det(a)\det(\alpha - \beta c a^{-1} b) = \\ &= \det(a)\det(\alpha - \beta c h g^{-1}) = \frac{\det(a)}{\det(g)}\det(\chi).\end{aligned}$$

Из условия $a^{-1}b = hg^{-1}$, несократимости слева в $\mathcal{L}$ пары (a, b) и несократимости справа пары (h, g) следует, что дробь $\det(a)/\det(g)$ является многочленом, не имеющим корней в O. □

1.2. Параметризация регуляторов и передаточных функций замкнутой системы

Определение. Два допустимых регулятора, определяемые парами $(\alpha_1(z), \beta_1(z))$ и $(\alpha_2(z), \beta_2(z))$, назовём эквивалентными, если существует такая рациональная квадратная матрица $A(z)$, что

$$\begin{pmatrix}\alpha_1(z) & \beta_1(z)\end{pmatrix} = A(z)\begin{pmatrix}\alpha_2(z) & \beta_2(z)\end{pmatrix}.$$

Теорема 1.1. *Пусть пара матричных многочленов $(\alpha_0(z), \beta_0(z))$ определяет некоторый допустимый регулятор $\mathcal{U}_0$. Передаточную функцию замкнутой системы с этим регулятором от $v = \mathrm{col}(w, e)$ к (y, u) обозначим $W_0(z)$. Тогда*

1. Множество всех передаточных функций замкнутой системы от $v = \mathrm{col}(w, e)$ к (y, u) при всех допустимых регуляторах является аффинным и допускает параметризацию

$$W(z) = W_0(z) + f(z)\psi(z)r(z), \tag{1.17}$$

где ψ — произвольная рациональная матричная функция размерности $m \times l$.

2. При заданной функции ψ передаточная функция замкнутой системы $W = W_0 + f\psi r$ реализуется регулятором $\mathcal{U}$ с параметрами

$$\begin{pmatrix}\alpha(z) & \beta(z)\end{pmatrix} = \kappa(z)\left[\chi_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_0(z) & \beta_0(z)\end{pmatrix} + \psi(z)\begin{pmatrix}q(z)b(z) & p(z)\end{pmatrix}\right], \quad (1.18)$$

где $\chi_0 = \alpha_0 g - \beta_0 ch$ и κ — произвольный квадратный невырожденный матричный многочлен размерности m, при котором правая часть становится парой матричных многочленов, несократимых слева.

Этот регулятор единственный с точностью до эквивалентности регуляторов.

3. Пусть регулятор $\mathcal{U}_0$ стабилизирует систему и регулятор $\mathcal{U}$ определяется параметром ψ по формулам п. 2. Тогда для того чтобы замкнутая система с регулятором $\mathcal{U}$ была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы функция $\psi(z)$ не имела полюсов в O.

Доказательство. Пусть допустимый регулятор определяется парой $(\alpha(z), \beta(z))$. Передаточная функция замкнутой системы $W(z)$ от $v = \mathrm{col}(w, e)$ к (y, u) удовлетворяет уравнению

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ -\beta c & \alpha \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Поскольку при допустимом регуляторе матрица системы невырождена, то

$$0 \not\equiv \det \begin{pmatrix} a & -b \\ -\beta c & \alpha \end{pmatrix} = \det(a)\det(\alpha - \beta c a^{-1} b).$$

Поэтому матрица

$$\xi = \alpha - \beta c a^{-1} b$$

не является вырожденной тождественно. Обращая матрицу перед W с помощью дополнения Шура для a, получим

$$W = \begin{pmatrix} a^{-1} + a^{-1}b\xi^{-1}\beta c a^{-1} & a^{-1}b\xi^{-1}\beta \\ \xi^{-1}\beta c a^{-1} & \xi^{-1}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + fg^{-1}\xi^{-1}\beta p^{-1} r.$$

Аналогично,

$$W_0 = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + fg^{-1}\xi_0^{-1}\beta_0 p^{-1} r,$$

где $\xi_0 = \alpha_0 - \beta_0 c a^{-1} b$. Вычитая, получим

$$W = W_0 + f\psi r, \qquad \psi = g^{-1}(\xi^{-1}\beta - \xi_0^{-1}\beta_0)p^{-1}.$$

Поэтому передаточная функция W замкнутой системы представима в форме из утверждения 1. Совпадение аффинного множества функций из утверждения 1 с множеством всех передаточных функций замкнутой системы следует из утверждения 2.

Докажем утверждение 2. Сначала докажем, что существует такой матричный многочлен κ, что пара (α, β) из утверждения теоремы несократима слева. Выберем произвольный квадратный матричный многочлен $\lambda(z)$ с ненулевым определителем, для которого сокращаются знаменатели в правой части и является матричным многочленом функция

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(z) & \beta_1(z) \end{pmatrix} = \lambda(z) \left[\chi_0^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0(z) & \beta_0(z) \end{pmatrix} + \psi(z) \begin{pmatrix} q(z)b(z) & p(z) \end{pmatrix} \right].$$

Если пара (α_1, β_1) сократима слева, то существует такой квадратный матричный многочлен $A(z)$, что пара

$$\begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \end{pmatrix} = A(z)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1(z) & \beta_1(z) \end{pmatrix}$$

является несократимой слева парой матричных многочленов [2]. Очевидно, что

$$\begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \end{pmatrix} = \kappa(z) \left[\chi_0^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0(z) & \beta_0(z) \end{pmatrix} + \psi(z) \begin{pmatrix} q(z)b(z) & p(z) \end{pmatrix} \right],$$

где $\kappa = A^{-1}\lambda$ является рациональной матричной функцией, невырожденной тождественно. Докажем, что эта функция есть матричный многочлен. Поскольку $\alpha_0 g - \beta_0 ch = \chi_0$ и $qbg = pch$, то подстановка выражений для α и β даёт

$$\alpha g - \beta ch = \kappa,$$

и левая часть есть матричный многочлен.

Докажем, что матричная функция $W = W_0 + f\psi r$ удовлетворяет уравнениям замкнутой системы

$$\begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -\beta & \alpha \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} W + \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0,$$

где пара (α, β) определена в утверждении 2. Подставим $W = W_0 + f\psi r$ и

$$\begin{pmatrix} -\beta(z) & \alpha(z) \end{pmatrix} = \kappa(z) \left[\chi_0^{-1} \begin{pmatrix} -\beta_0(z) & \alpha_0(z) \end{pmatrix} + \psi(z) \begin{pmatrix} -p(z) & q(z)b(z) \end{pmatrix} \right].$$

Функция W_0 является передаточной функцией при регуляторе $\mathcal{U}_0$. Поэтому выполнены соответствующие уравнения

$$\begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix} W_0 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -\beta_0 & \alpha_0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} W_0 + \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Первое уравнение для функции W выполняется ввиду условия

$$(a, -b)\, f = 0,$$

которое равносильно уравнению факторизации $a^{-1}b = hg^{-1}$.

Второе уравнение для функции W следует из следующих преобразований, в которые подставляются тождества $pc = qa$ и $ah = bg$:

$$\begin{aligned}
\chi_0^{-1} \begin{pmatrix} -\beta_0 & \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} f\psi r &= \chi_0^{-1}(-\beta_0 ch + \alpha_0 g)\psi r = \psi r, \\
\psi \begin{pmatrix} -pc & qb \end{pmatrix} f &= \psi(-pch + qbg) = 0, \\
\psi \begin{pmatrix} -p & qb \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} W_0 + \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] &= \psi \begin{pmatrix} -pc & qb \end{pmatrix} W_0 + \psi \begin{pmatrix} 0 & -p \end{pmatrix} = \\
= -\psi q \begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix} W_0 + \psi \begin{pmatrix} 0 & -p \end{pmatrix} &= -\psi r.
\end{aligned}$$

Таким образом, при заданном регуляторе $\mathcal{U}$ передаточная функция замкнутой системы от v к $\mathrm{col}(y, u)$ действительно равна W.

Докажем единственность регулятора с точностью до эквивалентности. Функция ψ однозначно определяет передаточную функцию замкнутой системы от v к $x = \mathrm{col}(y, u, s)$, которую обозначим $W_x(z)$. Пусть регуляторы с параметрами (α_1, β_1) и (α_2, β_2) определяют эту функцию. Из уравнения замкнутой системы

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ -c & 0 & I_l \\ 0 & \alpha_i & -\beta_i \end{pmatrix} W_x = \begin{pmatrix} I_{n+l} \\ 0_{m\times(n+l)} \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2.$$

При $i = 1$ матрица системы невырождена по определению допустимого регулятора. Следовательно, последняя строка матрицы при $i = 2$ является линейной комбинацией строк при $i = 1$. А именно, существуют такие рациональные матричные функции γ_1, γ_2 и γ_3, что

$$0 = \gamma_1 a - \gamma_2 c, \qquad \alpha_2 = -\gamma_1 b + \gamma_3 \alpha_1, \qquad \beta_2 = \gamma_2 + \gamma_3 \beta_1.$$

Из первого уравнения $\gamma_1 = \gamma_2 c a^{-1} = \gamma_2 p^{-1} q$. Введём обозначение $\gamma = \gamma_2 p^{-1}$. Тогда подстановка во второе и третье уравнения даст

$$\begin{pmatrix} \Delta\alpha & \Delta\beta \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -qb & p \end{pmatrix},$$

где $\Delta\alpha = \alpha_2 - \gamma_3\alpha_1$, $\Delta\alpha = \beta_2 - \gamma_3\beta_1$. Умножим первые два уравнения системы слева на $\gamma(q, p)$. Левая часть равна

$$\gamma \begin{pmatrix} q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ -c & 0 & I_l \end{pmatrix} W_x = \gamma \begin{pmatrix} 0 & \Delta\alpha & \Delta\beta \end{pmatrix} W_x = 0.$$

Правая часть равна $\gamma(q, p)$. Пара (p, q) несократима слева по определению. Это значит, что для любого $z \in \mathbb{C}$ ранг матрицы $(p(z), q(z))$ равен количеству строк. Следовательно, $\gamma = 0$ и

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \gamma_3 \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

что означает эквивалентность регуляторов.

Докажем утверждение 3. По предположению регулятор $\mathcal{U}_0$ стабилизирующий. Следовательно, функция W_0 не имеет полюсов в O. По лемме функция $\chi_0(z)^{-1}$ не имеет полюсов в O.

Докажем необходимость. Пара матричных многочленов (h, g) несократима справа, а пара матричных многочленов (q, p) несократима слева по определению. Существуют такие матричные многочлены (μ, ν, ξ, η), что

$$
\begin{aligned}
\mu(z)h(z) + \nu(z)g(z) &= I_m, \\
p(z)\xi(z) + q(z)\eta(z) &= I_l,
\end{aligned}
$$

где I_m и I_l — единичная матрица размеров m и l, соответственно [2].

Пусть замкнутая система устойчива и, следовательно, передаточная функция замкнутой системы W не имеет полюсов в O. Из уравнения параметризации

$$
W = W_0 + \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \psi \begin{pmatrix} q & p \end{pmatrix}
$$

следует, что

$$
\psi = \begin{pmatrix} \mu & \nu \end{pmatrix} (W - W_0) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.
$$

Правая часть не имеет полюсов в O, что доказывает необходимость.

Докажем достаточность. Пусть функция ψ не имеет полюсов в O. По лемме замкнутая система устойчива, если для любого $z \in O$ невырождена матрица

$$
\chi(z) = \alpha(z)g(z) - \beta(z)c(z)h(z) = \kappa(z),
$$

так как $\alpha_0 g - \beta_0 ch = \chi_0$ и $qbg = pch$. Требуется доказать, что матрица $\kappa(z)$ невырождена для любого $z \in O$.

Поскольку ψ не имеет полюсов в O, то матричная рациональная функция

$$
V(z) = \kappa(z)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \end{pmatrix} = \chi_0^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0(z) & \beta_0(z) \end{pmatrix} + \psi(z) \begin{pmatrix} q(z)b(z) & p(z) \end{pmatrix}
$$

не имеет полюсов в O. Рациональная функция V допускает факторизацию $V(z) = \lambda(z)^{-1}\delta(z)$, где пара матричных многочленов (λ, δ) несократима слева [2]. При этом нули λ являются полюсами V и поэтому не лежат в O. Разобьём матрицу $\delta = (\alpha_1, \beta_1)$ в соответствии с размерностями α и β. Определим $\mu = \lambda\kappa^{-1}$. Тогда

$$\begin{pmatrix}\alpha_1(z) & \beta_1(z)\end{pmatrix} = \mu(z)\begin{pmatrix}\alpha(z) & \beta(z)\end{pmatrix}.$$

Эта функция является матричным многочленом. Пара матриц (α, β) несократима слева по условию, что по определению означает, что для любого комплексного числа z ранг матрицы $(\alpha(z), \beta(z))$ равен количеству строк. Поэтому рациональная матричная функция μ не имеет полюсов и, следовательно, является матричным многочленом. Поэтому все полюсы $\kappa^{-1} = \lambda^{-1}\mu$ лежат вне O. $\square$

1.3. Формула оптимального регулятора в общем случае

Предположение 1. Рациональные матричные функции $T(z)$ и $\mathcal{F}(z)$, определяемые как

$$T(z) = r(z)S_v(z)r^*(z), \tag{1.19}$$

$$\mathcal{F}(z) = f^*(z)H_2(z)f(z), \tag{1.20}$$

имеют постоянный ранг на L.

Можно доказать, что если предположение 1 не выполнено, то поставленная линейно-квадратичная задача является сингулярной: оптимальный регулятор существует только в классе обобщённых функций.

Пусть выполнено предположение 1. Выполним матричную факторизацию [3] над рациональными матричными функциями, неотрицательно определёнными на L:

$$T(z) = D(z)D^*(z), \tag{1.21}$$

$$\mathcal{F}(z) = \Pi^*(z)\Pi(z), \tag{1.22}$$

где D и Π — матричные рациональные функции размерностей $l\times k_o$ и $m\times k_c$ и рангов k_o и k_c, соответственно, которые не имеют нулей и полюсов в O.

Существуют матричные рациональные функции D^+ и Π^+ без нулей и полюсов в O, для которых

$$D^+D = I_{k_o}, \qquad \Pi\Pi^+ = I_{k_c}$$

— единичные матрицы.

Лемма 1.4. *Во введённых обозначениях*

$$\begin{aligned} S_v r^* &= S_v r^* (D^+)^* D^*, && (1.23)\\ S_{\lambda v} r^* &= S_{\lambda v} r^* (D^+)^* D^*, && (1.24)\\ r S_v r^* (D^+)^* &= D, && (1.25)\\ H_2 f &= H_2 f \Pi^+ \Pi, && (1.26)\\ H_1 f &= H_1 f \Pi^+ \Pi. && (1.27) \end{aligned}$$

Доказательство. Определим случайный стационарный процесс $x(t)$ при помощи устойчивого фильтра

$$x(t) = [I_l - D(p)D^+(p)]r(p)v(t).$$

Докажем, что $x(t) = 0$ почти наверное при всех t. Действительно, спектральная плотность процесса x есть

$$\begin{aligned} S_x(z) &= (I_l - D(z)D^+(z))r(z)S_v(z)r^*(z)(I_l - D(z)D^+(z))^* = \\ &= (I_l - D(z)D^+(z))D(z)D^*(z)(I_l - D(z)D^+(z))^* = 0, \end{aligned}$$

так как $D^+D = I_{k_o}$ — единичная матрица. Отсюда $x = 0$. Следовательно, равны нулю взаимные спектральные функции процессов (v, x) и (λ, x):

$$\begin{aligned} 0 &= S_{vx}(z) = S_v(z)r^*(z)(I_l - D(z)D^+(z))^*, \\ 0 &= S_{\lambda x}(z) = S_{\lambda v}(z)r^*(z)(I_l - D(z)D^+(z))^*. \end{aligned}$$

Отсюда следуют первые два утверждения леммы. Третье утверждение следует из тождеств $I_{k_o} = D^+(z)D(z) = D^*(z)(D^+)^*(z)$ и $T(z) = D(z)D^*(z) = r(z)S_v(z)r^*(z)$. Четвёртое и пятое тождества получаются аналогично первым двум, поскольку рациональную матричную функцию H, неотрицательную на L и без полюсов в L, можно рассматривать как спектральную плотность некоторого стационарного случайного процесса $\mathrm{col}(\eta, \xi)$, H_2, соответственно, является спектральной плотностью стационарного процесса η, а $H_1 = S_{\xi\eta}$. $\square$

Определим матричные рациональные функции $P_c(z)$ и $P_o(z)$ равенствами

$$\begin{aligned} P_c &= f\mathcal{F}^+ f^* H_2, && (1.28)\\ P_o &= S_v r^* T^+ r. && (1.29)\end{aligned}$$

Очевидно, что это проекторы: $P_c^2 = P_c$ и $P_o^2 = P_o$. Определим матричную функцию M размерности $(n+m)\times(n+l)$ равенством

$$\begin{aligned} M(z) &= W_a(z) - P_c(z) W_a(z) P_o(z), && (1.30)\\ W_a(z) &= \begin{pmatrix} a(z)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. && (1.31)\end{aligned}$$

Теорема 1.2. *Предположим, что выполнено предположение 1. Тогда*

1. В задаче 1 оптимальный регулятор определяется парой матричных многочленов

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\end{pmatrix} = \kappa_1 \Big\{ \begin{pmatrix} g^{-1} & 0 \end{pmatrix} + \big[-\mathcal{F}^+ f^* (H_2 W_a S_v + H_1^* S_{\lambda v}) r^* T^+ + \\ + (I_m - \Pi^+\Pi)\delta_{c,1} + \delta_{o,1}(I_l - DD^+) \big] \begin{pmatrix} qb & p \end{pmatrix} \Big\}, \qquad (1.32)$$

где $\delta_{c,1}(z)$, $\delta_{o,1}(z)$ — произвольные рациональные матричные функции размерности $m\times l$, $\kappa_1(z)$ — произвольная рациональная квадратная матричная функция размера m, при которой пара (α_1, β_1) — матричные многочлены.

2. Существуют единственная правильная рациональная матричная функция $Y_-(z)$ размерности $k_c\times k_o$, имеющая все полюсы в O, и рациональные матричные функции $\delta_{c,2}(z)$, $\delta_{o,2}(z)$ размерности $m\times l$, для *которых матричная функция размерности* $m{\times}(m+l)$

$$\begin{aligned}\gamma_2 = \begin{pmatrix} g^{-1} & 0\end{pmatrix} + \big[-\mathcal{F}^{+} f^{*}(H_2 W_a S_v + H_1^{*} S_{\lambda v}) r^{*} T^{+} + \\ + (I_m - \Pi^{+}\Pi)\delta_{c,2} + \delta_{o,2}(I_l - DD^{+}) + \Pi^{+} Y_{-} D^{+}\big] \begin{pmatrix} qb & p\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.33}$$

не имеет полюсов в O.

В задаче 2 оптимальный регулятор определяется парой матричных многочленов

$$\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix} = \kappa_2\gamma_2, \tag{1.34}$$

где $\kappa_2(z)$ *— произвольная рациональная квадратная матричная функция, без полюсов в* O *и невырожденная в* O*, при которой пара* (α_2, β_2) *— матричные многочлены.*

3. Других оптимальных регуляторов в задачах 1 и 2 нет с точностью до эквивалентности регуляторов.

4. Функция $\operatorname{tr}\mathcal{H}(M(z), z)$ *не имеет полюсов на* L*. Минимум функционала качества в задаче 1 равен*

$$J_{1,\min} = \operatorname{tr}\int\limits_L \big[\mathcal{H}(M(z), z) - N(z)\mathcal{F}^{+} N^{*}(z) T^{+}(z)\big]\, dm(z), \tag{1.35}$$

где

$$N(z) = r(z) S_{v\lambda}(z) H_1(z) f(z).$$

Минимум функционала качества в задаче 2 равен

$$J_{2,\min} = J_{1,\min} + \operatorname{tr}\int\limits_L Y_{-}^{*}(z) Y_{-}(z)\, dm(z). \tag{1.36}$$

Доказательство. Пусть $X(t) = \operatorname{col}(y(t), u(t))$ — векторный процесс размерности $n{+}m$. Множество всех передаточных функций замкнутых систем от $v(t)$ к $X(t)$ допускает параметризацию

$$W(z) = W_0(z) + f(z)\psi(z) r(z),$$

где $W_0(z)$ — некоторая передаточная функция устойчивой замкнутой системы, с регулятором, порождённым парой (α_0, β_0), а ψ — произвольная матричная рациональная функция. Для того чтобы замкнутая система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы функция ψ не имела полюсов в O.

После подстановки уравнений параметризации в выражение для функционала качества из леммы 1.1, получим

$$\begin{aligned}
J(\alpha,\beta) &= \operatorname{tr}\int\limits_L \left[\psi^*(z)\mathcal{F}(z)\psi(z)T(z) + 2\operatorname{Re}\psi^*(z)\ell(z)\right] dm(z) + J(\alpha_0,\beta_0) = \\
&= \operatorname{tr}\int\limits_L \left[D^*(z)\psi^*(z)\Pi^*(z)\Pi(z)\psi(z)D(z) + 2\operatorname{Re}\psi^*(z)\ell(z)\right] dm(z) + \\
&\quad + J(\alpha_0,\beta_0),
\end{aligned}$$

где функции $\mathcal{F} = \Pi^*\Pi$ и $T = DD^*$ определены в формулировке предположения 1 и

$$\ell(z) = f^*(z)\left[H_2(z)W_0(z)S_v(z) + H_1^*(z)S_{\lambda v}(z)\right] r^*(z).$$

Подстановка результата леммы 1.4 даёт

$$\ell(z) = \Pi^*(\Pi^+)^* f^*(z)\left[H_2(z)W_0(z)S_v(z) + H_1^*(z)S_{\lambda v}(z)\right] r^*(z)(D^+)^*D^*(z).$$

и поэтому

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}\psi^*(z)\ell(z) = \\
&= \operatorname{tr} D^*(z)\psi^*(z)\Pi^*(\Pi^+)^* f^*(z)[H_2(z)W_0(z)S_v(z) + H_1^*(z)S_{\lambda v}(z)]r^*(z)(D^+)^*.
\end{aligned}$$

Выделим полный квадрат от ψ:

$$\begin{aligned}
J(\alpha,\beta) &= \operatorname{tr}\int_L [\Pi(z)\psi(z)D(z) + Y(z)]^*[\Pi(z)\psi(z)D(z) + Y(z)]\, dm(z) \\
&\quad - \operatorname{tr}\int_L Y^*(z)Y(z)\, dm(z) + J(\alpha_0,\beta_0),
\end{aligned}$$

где

$$Y = (\Pi^*)^+ f^*[H_2W_0S_v + H_1^*S_{\lambda v}]r^*(D^+)^*.$$

Очевидно, что в задаче 1 минимум функционала качества достигается только при условии

$$\Pi\psi D + Y = 0.$$

Это уравнение имеет решение

$$\begin{aligned}\psi &= -\Pi^+ Y D^+ + (I_m - \Pi^+\Pi)\delta_{c,1} + \delta_{o,1}(I_l - DD^+) = \\ &= -\mathcal{F}^+ f^*(H_2 W_0 S_v + H_1^* S_{\lambda v}) r^* T^+ + \\ &\quad + (I_m - \Pi^+\Pi)\delta_{c,1} + \delta_{o,1}(I_l - DD^+)\end{aligned}$$

с произвольными рациональными матричными функциями $\delta_{c,1}$ и $\delta_{o,1}$. Утверждение 1 теоремы следует из утверждения 2 теоремы 1.1 о параметризации, если выбрать $\alpha_0 = I_m$, $\beta_0 = 0$.

Докажем утверждение 2 теоремы. Пусть пара матричных многочленов (α_0, β_0) порождает стабилизирующий регулятор. Тогда по теореме 1.1 множество всех передаточных функций устойчивых замкнутых систем определяется той же формулой

$$W = W_0 + f\psi r,$$

в которой ψ — произвольная рациональная матричная функция размерности $m\times l$ без полюсов в O. Решение уравнения $\Pi\psi D + Y = 0$ этим свойством не обладает.

Пусть функция ψ не имеет полюсов в O. Существует правильная рациональная матричная функция Y_- с полюсами в O, для которой функция

$$Y_+ = Y - Y_-$$

не имеет полюсов в O. По свойству ортогональности в классе Харди H^2:

$$\begin{aligned}&\int_L [\Pi(z)\psi(z)D(z) + Y(z)]^*[\Pi(z)\psi(z)D(z) + Y(z)]\, dm(z) = \\ &= \int_L [\Pi(z)\psi(z)D(z) + Y_+(z)]^*[\Pi(z)\psi(z)D(z) + Y_+(z)]\, dm(z) + \\ &\quad + \int_L Y_-^*(z) Y_-(z)\, dm(z).\end{aligned}$$

Поэтому в задаче 2 минимум функционала качества достигается только при условии

$$\Pi\psi D + Y_+ = 0.$$

Это уравнение имеет решение

$$\begin{aligned}\psi &= -\Pi^+ Y_+ D^+ + (I_m - \Pi^+\Pi)\delta_{c,0} + \delta_{o,0}(I_l - DD^+) = \\ &= -\mathcal{F}^+ f^*(H_2 W_0 S_v + H_1^* S_{\lambda v}) r^* T^+ + \\ &\quad + (I_m - \Pi^+\Pi)\delta_{c,0} + \delta_{o,0}(I_l - DD^+) + \Pi^+ Y_- D^+\end{aligned}$$

с произвольными рациональными матричными функциями $\delta_{c,0}$, $\delta_{o,0}$, не имеющими полюсов в O. По теореме 1.1 оптимальным будет регулятор, определяемый парой многочленов

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix} = \kappa_2\Big\{&\chi_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_0 & \beta_0\end{pmatrix} + [-\mathcal{F}^+ f^*(H_2 W_0 S_v + H_1^* S_{\lambda v}) r^* T^+ + \\ &+ (I_m - \Pi\Pi^+)\delta_{c,0} + \delta_{o,0}(I - DD^+) + \Pi^+ Y_- D^+]\begin{pmatrix}qb & p\end{pmatrix}\Big\},\end{aligned}$$

где $\chi_0 = \alpha_0 g - \beta_0 ch$. Остаётся доказать, что в этой формуле можно заменить регулятор (α_0, β_0) на $(I_m, 0)$ и что матричная функция Y_- единственная.

По утверждению 1 теоремы о параметризации существует такая функция ψ_a, что

$$W_0 = W_a + f\psi_a r.$$

Функция W_a получается при выборе $\alpha = I_m$, $\beta = 0$. По утверждению 2 той же теоремы

$$\begin{pmatrix}\alpha_0 & \beta_0\end{pmatrix} = \kappa_a\left[\begin{pmatrix}g^{-1} & 0\end{pmatrix} + \psi_a\begin{pmatrix}qb & p\end{pmatrix}\right].$$

Отсюда следует, что $\chi_0 = \kappa_a$. Подстановка выражений для W_0 и (α_0, β_0) в формулу оптимального регулятора даст

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix} \;=\; \kappa_2\Big\{&\begin{pmatrix}g^{-1} & 0\end{pmatrix} + \psi_a\begin{pmatrix}qb & p\end{pmatrix} + \\ &+ \big[-\mathcal{F}^+ f^*(H_2W_0S_v + H_1^*S_{\lambda v})r^*T^+ - \mathcal{F}^+ f^* H_2 f\psi_a r S_v r^* T^+ + \\ &+ (I_m - \Pi^+\Pi)\delta_{c,0} + \delta_{o,0}(I_l - DD^+) + \Pi^{-1}Y_- D^+\big]\begin{pmatrix}qb & p\end{pmatrix}\Big\}.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\mathcal{F}^+ f^* H_2 f = (\Pi^*\Pi)^+\Pi^*\Pi = \Pi^+\Pi, \qquad rS_v r^* T^+ = DD^*(DD^*)^+ = DD^+,$$

то

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix} \;=\; \kappa_2\Big\{&\begin{pmatrix}g^{-1} & 0\end{pmatrix} + [-\mathcal{F}^+ f^*(H_2W_aS_v + H_1^*S_{\lambda v})r^*T^+ + \\ &+ (I_m - \Pi^+\Pi)(\delta_{c,0} + \psi_a) + (\delta_{o,0} + \Pi^+\Pi\psi_a)(I_l - DD^+) + \\ &+ \Pi^+ Y_- D^+]\begin{pmatrix}qb & p\end{pmatrix}\Big\},\end{aligned}$$

и остаётся обозначить $\delta_{c,2} = \delta_{c,0} + \psi_a$ и $\delta_{o,2} = \delta_{o,0} + \Pi^+\Pi\psi_a$.

Докажем единственность Y_-. Ранг матрицы $\begin{pmatrix}q(z)b(z) & p(z)\end{pmatrix}$ равен количеству строк для любого $z \in O$. Существуют такие матричные многочлены $\mu(z)$, $\nu(z)$, что

$$qb\nu + p\mu = I_l$$

— единичная матрица [2]. По определению γ_2

$$\Pi\gamma_2\begin{pmatrix}\nu \\ \mu\end{pmatrix}D = \Pi g^{-1}\nu D - (\Pi^+)^* f^*(H_2W_aS_v + H_1^*S_{\lambda v})r^*(D^+)^* + Y_-.$$

По условию, левая часть не имеет полюсов в O. Правильная рациональная матричная функция Y_- определяется единственным образом после разложения на простейшие остальных слагаемых в правой части.

Утверждение 3 является следствием единственности из теоремы о параметризации.

Докажем утверждение 4. Полюсами функции $M(z)$ могут быть только полюсы функций $\mathcal{F}^+$, T^+, a^{-1} и в дискретном времени ещё $z = 0$. По предположению 1 функции $\mathcal{F}$ и T не имеют нулей в L, поэтому функции $\mathcal{F}^+$ и T^+ не имеют полюсов в L.

Остаются только полюсы a^{-1}, которые могут оказаться на L. Функция W_a является передаточной функцией замкнутой системы при регуляторе $u = 0$. Пусть W_0 — передаточная функция некоторой устойчивой замкнутой системы. По утверждению 2 теоремы 1.1 существует такая функция ψ_0, что

$$W_a = W_0 + f\psi_0 r.$$

Подставим это выражение в определение M.

$$\begin{aligned} M &= W_0 - P_c W_0 P_o + f\psi_0 r - f\mathcal{F}^+ f^* H_2 f\psi_0 r S_v r^* T^+ r \\ &= W_0 - P_c W_0 P_o + f(\psi_0 - \Pi^+\Pi\psi_0 DD^+)r, \end{aligned}$$

так как $\mathcal{F}^+\mathcal{F} = \Pi^+\Pi$ и $TT^+ = DD^+$.

Обозначим $M_0 = W_0 - P_c W_0 P_o$ и $\phi = f(\psi_0 - \Pi^+\Pi\psi_0 DD^+)r$. Под знаком следа матрицы можно переставлять циклически. Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\mathcal{H}(M(z), z) &= \operatorname{tr}\Big\{\mathcal{H}(M_0(z), z) + S_v\phi^* H_2\phi + S_v\phi^* H_2 M_0 + M_0^* H_2\phi S_v \\ &\quad + S_{\lambda v}\phi^* H_1^* + H_1\phi S_{v\lambda}\Big\}. \end{aligned}$$

В последней сумме все слагаемые, кроме первого, равны нулю, что следует из равенств, справедливых в силу леммы 1.4

$$\begin{aligned} H_2\phi S_v &= H_2 f(\psi_0 - \Pi^+\Pi\psi_0 DD^+)r S_v = 0, \\ H_1\phi S_{v\lambda} &= H_1 f(\psi_0 - \Pi^+\Pi\psi_0 DD^+)r S_{v\lambda} = 0. \end{aligned}$$

Полюсами функции

$$\operatorname{tr}\mathcal{H}(M(z), z) = \operatorname{tr}\mathcal{H}(M_0(z), z)$$

могут быть только полюсы W_0, спектральных плотностей, функций T^+ и $\mathcal{F}^+$. Все они не лежат на L.

Докажем формулу для оптимального значения функционала качества. При подстановке оптимальных значений ψ_1 и ψ_2 в функционал качества получим, что

$$\begin{aligned} J_{1,\min} &= \operatorname{tr} \int\limits_L [\mathcal{H}(W_0(z), z) - Y^*(z)Y(z)]\, dm(z), \\ J_{2,\min} &= J_{1,\min} + \operatorname{tr} \int\limits_L Y_-^*(z)Y_-(z)\, dm(z). \end{aligned}$$

Остаётся доказать, что

$$\operatorname{tr} \mathcal{H}(W_0(z), z) - \operatorname{tr} Y^*(z)Y(z) = \operatorname{tr} \mathcal{H}(M(z), z) - \operatorname{tr} N(z)\mathcal{F}^+ N^*(z)T^+(z).$$

Проекторы P_c и P_o, определённые перед формулировкой теоремы, обладают свойствами

$$\begin{aligned} P_c^* H_2 P_c &= P_c^* H_2 = H_2 P_c = H_2 f \mathcal{F}^+ f^* H_2, \\ P_o S_v P_o^* &= P_o S_v = S_v P_o^* = S_v r^* T^+ r S_v, \\ P_o S_{v\lambda} &= S_v r^* (D^*)^+ D^+ r S_{v\lambda}, \\ H_1 P_c &= H_1 f \Pi^+ (\Pi^*)^+ f^* H_2. \end{aligned}$$

Обозначим данные выражения через $P_{\mathcal{F}}$, P_T, P_D и P_Π соответственно. В данных обозначениях

$$\operatorname{tr} Y^* Y = \operatorname{tr} \left\{ P_T W_0^* P_{\mathcal{F}} W_0 + P_D P_\Pi W_0 + W_0^* P_\Pi^* P_D^* + T^+ N \mathcal{F}^+ N^* \right\},$$

где N определена в условии теоремы. Выполним следующие преобразования:

$$\operatorname{tr} \mathcal{H}(M(z), z) = \operatorname{tr} \mathcal{H}(M_0(z), z) = \operatorname{tr} \Big\{ (W_0 - P_c W_0 P_o)^* H_2 (W_0 - P_c W_0 P_o) S_v +$$

$$+ S_{\lambda v} (W_0 - P_c W_0 P_o)^* H_1^* + H_1 (W_0 - P_c W_0 P_o) S_{v\lambda} + H_0 S_\lambda \Big\} = \operatorname{tr} \mathcal{H}(W_0(z), z) +$$

$$+ \operatorname{tr} \Big\{ - W_0^* P_{\mathcal{F}} W_0 P_T - P_T W_0^* P_{\mathcal{F}} W_0 + W_0^* P_{\mathcal{F}} W_0 P_T - P_D^* W_0^* P_\Pi^* - P_\Pi W_0 P_D \Big\} =$$

$$= \operatorname{tr} \mathcal{H}(W_0(z), z) - \operatorname{tr} \Big\{ P_T W_0^* P_{\mathcal{F}} W_0 + P_D^* W_0^* P_\Pi^* + P_\Pi W_0 P_D \Big\} =$$

$$= \operatorname{tr}[\mathcal{H}(W_0(z), z) - Y^*(z)Y(z) + N(z)\mathcal{F}^+ N^*(z) T^+(z)],$$

что завершает доказательство теоремы. □

2. Синтез оптимальных полиномиальных фильтров

2.1. Оптимальное оценивание

Пусть $\mathrm{col}(y(t), u(t), s(t))$ — произвольный стационарный случайный процесс, удовлетворяющий уравнению замкнутой системы с некоторым стабилизирующим регулятором

$$\begin{aligned} a(\sigma)y(t) &= b(\sigma)u(t) + w(t), \\ s(t) &= c(\sigma)y(t) + e(t), \\ \alpha_0(\sigma)u(t) &= \beta_0(\sigma)s(t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ставится задача оптимального оценивания вектора $y(t)$. Однако ради общности постановки задачи, которая потребуется в дальнейшем для применения теоремы разделения оценивания и управления, оценивать будем также измеряемое управление $u(t)$.

Требуется найти матричные многочлены α, β_s, β_u, причём $\alpha(z)$ — невырожденная квадратная матрица для любого $z \in O$, для которых достигает минимума функционал

$$J = \mathsf{E}\left|\Gamma(\sigma)\begin{pmatrix} y - \widehat{y} \\ u - \widehat{u} \end{pmatrix}\right|^2, \tag{2.2}$$

где $\Gamma(z)$ — матричная рациональная функция размерности $k_c \times (n+m)$ ранга k_c без нулей и полюсов в O, а $\widehat{y}(t)$, $\widehat{u}(t)$ — стационарные случайные процессы, определяемые фильтром

$$\alpha(\sigma)\begin{pmatrix} \widehat{y}(t) \\ \widehat{u}(t) \end{pmatrix} = \beta_s(\sigma)s(t) + \beta_u(\sigma)u(t). \tag{2.3}$$

Далее будет доказано, что существует оптимальный фильтр, не зависящий от исходного регулятора с параметрами (α_0, β_0).

На первый взгляд выглядит удивительным оценивание процесса $u(t)$, который измеряется. Однако перекрёстные слагаемые в квадратичной форме в функционале J могут оказаться важнее, чем квадратичная форма от $u - \widehat{u}$, которая может быть сделана нулевой. Далее будет показано, в каких случаях оптимальное значение $\widehat{u}(t)$ отлично от $u(t)$.

Передаточную функцию фильтра обозначим $H = \alpha^{-1}(\beta_s, \beta_u)$. Требуется найти эту передаточную функцию без полюсов в O и затем представить её в виде $H = \alpha^{-1}\beta$, где пара матричных многочленов (α, β) несократима слева в O.

Введём обозначение для матрицы квадратичной формы в показателе качества

$$F(z) = \Gamma^*(z)\Gamma(z) = \begin{pmatrix} F_y(z) & F_{yu}(z) \\ F_{uy}(z) & F_u(z) \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Пусть $\Gamma^+(z)$ — рациональная матричная функция размерности $(n+m)\times k_c$ без нулей и полюсов в O, для которой $\Gamma(z)\Gamma^+(z) = I_{k_c}$ — единичная матрица.

Теорема 2.1. *Существуют единственная правильная рациональная матричная функция $Y_-(z)$ размерности $k_c\times k_o$, имеющая все полюсы в O, и рациональные матричные функции $\delta_c(z)$, $\delta_o(z)$ размерности $(n+m)\times l$, для которых матричная функция размерности $(n+m)\times(l+m)$*

$$H_{\text{est}} = \left[\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S_v r^* T^+ + (I_{n+m} - \Gamma^+\Gamma)\delta_c + \delta_o(I_l - DD^+) + \Gamma^+ Y_- D^+ \right] *$$
$$* \begin{pmatrix} p & -qb \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a^{-1}b \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

не имеет полюсов в O.

Функция H_{est} является передаточной функцией оптимального фильтра. Минимум функционала качества равен

$$J_{\min} = \operatorname{tr} \int_L \left\{ F_y \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \end{pmatrix} (S_v - S_v r^* T^+ r S_v) \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \end{pmatrix}^* + Y_- Y_-^* \right\} dm(z),$$

где $F_y = (I_n,\, 0)F(I_n,\, 0)^*$.

Доказательство. Данная задача оценивания сводится к задаче общей задаче управления при неполном измерении. Обозначим

$$u_0 = \mathrm{col}(\widehat{y}, \widehat{u}).$$

Уравнения расширенного объекта размерности $n+m$ и измерения размерности $l+m$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_0(\sigma)y_0(t) &= b_0(\sigma)u_0(t) + w_0(t), \\ s_0(t) &= c_0(\sigma)y_0(t) + e_0(t), \end{aligned}$$

где введены переменные

$$y_0 = \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}, \qquad w_0(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ \beta_0(p)e(t) \end{pmatrix}, \qquad s_0 = \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}, \qquad e_0 = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$$

и матрицы

$$a_0 = \begin{pmatrix} a & -b \\ -\beta_0 c & \alpha_0 \end{pmatrix}, \qquad b_0 = 0, \qquad c_0 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}.$$

Функция $u_0 = \mathrm{col}(\widehat{y}, \widehat{u})$ не влияет на объект управления и измерения, но входит в функционал качества

$$J = \mathsf{E}\,|\Gamma(y_0 - u_0)|^2,$$

который требуется минимизировать в классе стабилизирующих регуляторов

$$\alpha(\sigma)u_0(t) = \beta(\sigma)s_0(t).$$

Применим теорему об оптимальном регуляторе к данному расширенному объекту управления. Вычислим вспомогательные матричные функции. Поскольку $b_0 = 0$, то факторизация передаточной функции от управлению к выходу объекта $h_0 g_0^{-1} = a_0^{-1} b_0$ даёт $h_0 = 0$, $g_0 = I_n$.

Функции, связанные с подсистемой управления:

$$F_0(z) = \begin{pmatrix} F & -F \\ -F & F \end{pmatrix}, \quad f_0 = \begin{pmatrix} h_0 \\ g_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_0 = f_0^* F_0 f_0 = F = \Pi_0^* \Pi_0.$$

Отсюда очевидно, что $\Pi_0 = \Gamma$ и

$$\mathcal{F}_0^+ f_0^* F_0 = \Gamma^+ \Gamma \begin{pmatrix} -I_{n+m} & I_{n+m} \end{pmatrix}.$$

Факторизация передаточной функции от возмущения в объекте к измерению: $p_0^{-1} q_0 = c_0 a_0^{-1}$. Определим

$$p_0 = \begin{pmatrix} p & -qb \\ -\beta_0 & \alpha_0 \end{pmatrix}, \qquad q_0 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$p_0 c_0 = \begin{pmatrix} pc & -qb \\ -\beta_0 c & \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qa & -qb \\ -\beta_0 c & \alpha_0 \end{pmatrix} = q_0 a_0$$

и что матрица p_0 невырождена, так как

$$\det p_0 = \det(p) \det(\alpha_0 - \beta_0 p^{-1} qb) = \det(p) \det(\alpha_0 - \beta_0 c a^{-1} b) = \frac{\det p}{\det a} \det a_0,$$

и матрица a_0 невырождена в силу допустимости регулятора и устойчивости замкнутой системы.

Пусть $S_{v_0}(z)$ — спектральная плотность процесса $v_0 = \mathrm{col}(w_0, e_0)$. Поскольку

$$v_0 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \beta_0 \\ 0 & I_l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = G_0 v,$$

и $r_0 = (q_0, p_0)$, то

$$T_0 = r_0 S_{v_0} r_0^* = (r_0 G_0) S_v (r_0 G_0)^* = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} S_v \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} I_l \\ 0 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} I_l \\ 0 \end{pmatrix}^*.$$

Результат факторизации этого матричного многочлена и псевдообратная матрица:

$$T_0 = D_0 D_0^*, \qquad D_0 = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad D_0^+ = \begin{pmatrix} D^+ & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставим эти выражения в формулу оптимального регулятора:

$$\begin{pmatrix}\alpha_{\text{opt}} & \beta_{\text{opt}}\end{pmatrix} = \kappa\Bigg\{\begin{pmatrix}I_n & 0\end{pmatrix} + \Bigg[-\Gamma^+\Gamma\begin{pmatrix}-I_{n+m} & I_{n+m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} S_{v_0} r_0^* T_0^+ +$$
$$+ (I_{n+m} - \Gamma^+\Gamma)\delta_{c,0} + \delta_{o,0}(I_{l+n} - D_0 D_0^+) +$$
$$+ \Gamma^+ Y_- D_0^+\Bigg]\begin{pmatrix}0 & p_0\end{pmatrix}\Bigg\},$$

где κ — матричный многочлен, функция Y_- правильная рациональная. Очевидно, что $\alpha_{\text{opt}} = \kappa$. Разобьём матрицу $\delta_{o,0} = (\delta_{o,l}, \delta_{o,n})$ по количеству столбцов l и n, а также выберем матричную функцию $\delta_{c,0}$ так, что $\delta_{c,0} = (\delta_{c,l}, 0)$, где $\delta_{c,l}$ имеет l столбцов. Подставим полученные выражения в формулу для $\beta_{\text{opt}} = (\beta_s, \beta_u)$:

$$\alpha_{\text{opt}}^{-1}\begin{pmatrix}\beta_s & \beta_u\end{pmatrix} = \Bigg[\Gamma^+\Gamma a_0^{-1}\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & \beta_0\end{pmatrix} S_v r^* T^+ + \delta_{o,l}(I_l - DD^+) +$$
$$+ (I_{n+m} - \Gamma^+\Gamma)\delta_{c,l} + \Gamma Y_- D^+\Bigg]\begin{pmatrix}p & -qb\end{pmatrix} + \delta_{o,n}\begin{pmatrix}-\beta_0 & \alpha_0\end{pmatrix}.$$

Матрица a_0 есть матрица замкнутой системы для исходного объекта управления с регулятором, определяемым (α_0, β_0). Поэтому матричная функция

$$W_0 = a_0^{-1}\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & \beta_0\end{pmatrix}$$

есть передаточная функция замкнутой системы от $v = \operatorname{col}(w, e)$ к $\operatorname{col}(y, u)$. Применим теорему о параметризации всех передаточных функций замкнутой системы, выбрав регулятор $u = 0$, для которого передаточная функция есть

$$W_a = \begin{pmatrix}a^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = W_0 + f\psi r,$$

где $\psi(z)$ — некоторая матричная рациональная функция размерности $m \times l$. Кроме того, по той же теореме

$$\begin{pmatrix}g^{-1} & 0\end{pmatrix} = \chi_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_0 & \beta_0\end{pmatrix} + \psi\begin{pmatrix}qb & p\end{pmatrix},$$

где $\chi_0 = \alpha_0 g - \beta_0 ch$ — невырожденная матрица. Подставим эти выражения в формулу оптимального фильтра.

$$
\begin{aligned}
H_{\text{est}} = \alpha_{\text{opt}}^{-1}\begin{pmatrix}\beta_s & \beta_u\end{pmatrix} = \Big[&\Gamma^+\Gamma W_a S_v r^* T^+ - \Gamma^+\Gamma f\psi r S_v r^* T^+ + \\
&+ (I_{n+m} - \Gamma^+\Gamma)\delta_{c,l} + \delta_{o,l}(I_l - DD^+) + \Gamma^+ Y_- D^+\Big]\begin{pmatrix}p & -qb\end{pmatrix} + \\
&+ \delta_{o,n}\begin{pmatrix}-\beta_0 & \alpha_0\end{pmatrix} = \\
= \Big[W_a S_v r^* T^+ &+ (I_{n+m} - \Gamma^+\Gamma)\delta_c + \delta_o(I_l - DD^+) + \Gamma^+ Y_- D^+\Big]\begin{pmatrix}p & -qb\end{pmatrix} - \\
&- f\psi\begin{pmatrix}p & -qb\end{pmatrix} + \delta_{o,n}\begin{pmatrix}-\beta_0 & \alpha_0\end{pmatrix} = \\
= \Big[W_a S_v r^* T^+ &+ (I_{n+m} - \Gamma^+\Gamma)\delta_c + \delta_o(I_l - DD^+) + \Gamma^+ Y_- D^+\Big]\begin{pmatrix}p & -qb\end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix}0 & fg^{-1}\end{pmatrix} + (\delta_{o,n} - f\chi_0^{-1})\begin{pmatrix}-\beta_0 & \alpha_0\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

где

$$\delta_c = \delta_{c,l} + f\psi - W_a S_v r^* T^+, \qquad \delta_o = \delta_{o,l}.$$

По условию, $-\beta_0 s + \alpha_0 u = 0$, и поэтому последнее слагаемое в передаточной функции фильтра можно отбросить. Подстановка $fg^{-1} = \operatorname{col}(a^{-1}b, I_m)$ завершает доказательство первой части теоремы.

Выражение для минимума функционала качества получается алгебраическими преобразованиями. Подставим преобразования в операторной форме

$$
\begin{gathered}
ps - qbu = p(cy + e) - qbu = pe + q(ay - bu) = rv, \\
\begin{pmatrix}y \\ u\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a^{-1}b \\ I_m\end{pmatrix} u = \begin{pmatrix}a^{-1} \\ 0\end{pmatrix} w = \begin{pmatrix}a^{-1} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} v = W_a v
\end{gathered}
$$

в формулу невязки оптимального фильтра. Передаточная функция от v к ε есть

$$H_{\varepsilon/v} = \Gamma W_a(I_{l+n} - P_o) + \Gamma\delta_o(I_l - DD^+)r + Y_- D^+ r,$$

где $P_o = S_v r^* T^+ r$. Минимальное значение показателя качества равно

$$J_{\min} = \mathsf{E}|\varepsilon|^2 = \operatorname{tr} \int\limits_L H_{\varepsilon/v}(z) S_v(z) H^*_{\varepsilon/v}(z)\, dm(z).$$

По лемме 1.4 $(I_l - DD^+) r S_v = 0$, поэтому после раскрытия скобок слагаемое с δ_o исчезает. Кроме того, по той же лемме

$$r S_v (I_{l+n} - P_o)^* = r S_v - T T^+ r S_v = 0,$$

вследствие чего перекрёстные слагаемые исчезают. После раскрытия скобок получим

$$J_{\min} = \operatorname{tr} \int\limits_L \{\Theta + Y_- Y_-^*\}(z)\, dm(z),$$

где

$$\Theta = \Gamma \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \end{pmatrix} (I_{l+n} - P_o) S_v (I_{l+n} - P_o)^* \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}^* \Gamma^*.$$

Остаётся подставить тождества

$$(I_{l+n} - P_o) S_v (I_{l+n} - P_o)^* = S_v - S_v r^* T^+ r S_v$$

и $F_y = (I_n, 0)\Gamma^* \Gamma (I_n, 0)^*$. $\square$

Замечание (Об оптимальной оценке $\widehat{\boldsymbol{u}}$). Очевидно, что если функционал качества оценивания можно записать в виде $\mathsf{E}|\Gamma_y(y - \widehat{y})|^2 + \mathsf{E}|\Gamma_u(u - \widehat{u})|^2$, то оптимальной для u является оценка $\widehat{u} = u$. Однако это не всегда так. Следующее утверждение показывает, что это свойство полностью определяется функцией $F(z)$ из функционала качества.

Лемма 2.1. *Для того чтобы в поставленной задаче оптимальная оценка $\widehat{u}(t)$ была равна $u(t)$, необходимо и достаточно, чтобы матричная рациональная функция $F_y^+(z) F_{yu}(z)$ не имела полюсов в O.*

При выполнении этого условия оптимальная оценка $\widehat{y}(t)$ для процесса $y(t)$ определяется фильтром с входом (s, u) и передаточной функ-

цией

$$H_{y,\mathrm{est}} = \left[\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \end{pmatrix} S_v r^* T^+ + (I_n - \Gamma_y^+ \Gamma_y)\delta_c + \delta_o(I_l - DD^+) + \Gamma_y^+ Y_- D^+\right] * \\ * \begin{pmatrix} p & -qb \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a^{-1}b \end{pmatrix},$$

где $\delta_c(z)$ и $\delta_o(z)$ — матричные функции размерности $n \times l$, а функции $\Gamma_y(z)$ и $\Gamma_y^+(z)$ определяются следующими условиями: $F_y(z) = \Gamma_y^*(z)\Gamma_y(z)$, $\Gamma_y(z)\Gamma_y^+(z) = I_{k_y}$, функции $\Gamma_y(z)$ и $\Gamma_y^+(z)$ не имеют полюсов и нулей в O, имеют размерности $k_y \times n$ и $n \times k_y$, соответственно, и ранги k_y. Правильная матричная рациональная функция $Y_-(z)$ размерности $k_y \times k_o$ вместе с δ_c и δ_o обеспечивает отсутствие полюсов у $H_{y,\mathrm{est}}$ в O.

Замечание (О минимизации матрицы ковариаций). Фильтр Калмана минимизирует не только дисперсию вектора ошибки фильтрации, но и матрицу ковариаций этого вектора. Поэтому он оптимален при оценивании любой части вектора состояний. Решение задачи оценивания в теореме является фильтром Винера-Колмогорова, частным случаем фильтра Калмана для стационарных процессов. Проиллюстрируем его оптимальность по отношению к матрице ковариаций ошибок оценивания.

Пусть $\varepsilon = \Gamma(\sigma)\,\mathrm{col}(y - \widehat{y}, u - \widehat{u})$ — погрешность оценивания. Минимизируемый функционал есть $J = \mathsf{E}|\varepsilon|^2$. Докажем, что фильтр из теоремы, минимизирующий J, минимизирует также матрицу ковариаций $\mathrm{Cov}(\varepsilon) = \mathsf{E}\varepsilon\varepsilon^*$.

Достаточно доказать, что для любого вектора–строки $C \in \mathbb{R}^{k_c}$ фильтр из теоремы минимизирует функционал $J_0 = \mathsf{E}|C\varepsilon|^2$. Рассмотрим задачу минимизации функционала J_0. Эта задача отличается от исходной только функцией $\Gamma_0(z) = C\Gamma(z)$. Матрица $C^+ = C^*/\|C\|^2$ — псевдообратная для C. Псевдообратной матрицей для Γ_0 будет $\Gamma_0^+ = \Gamma^+ C^+$.

Выберем функции δ_c, δ_o и правильную функцию Y_- так, чтобы функция H_{est} в формулировке теоремы не имела полюсов в O и поэтому была оптимальной. Определим функции

$$\delta_c^0 = (I_{n+m} - \Gamma^+\Gamma)\delta_c + \Gamma^+(I_{k_c} - C^+C)Y_- D^+, \qquad Y_-^0 = CY_-.$$

Нетрудно проверить, что

$$(I - \Gamma^+\Gamma)\delta_c + \Gamma^+ Y_- D^+ = (I - \Gamma_0^+\Gamma_0)\delta_c^0 + \Gamma_0^+ Y_-^0 D^+.$$

Остальные слагаемые не зависят от Γ и поэтому одинаковые в задачах минимизации J и J_0. По теореме фильтр с передаточной функцией H_{est} оптимален и при минимизации функционала J_0.

Замечание (О выбеливании и согласованной фильтрации). Решение задачи оптимального оценивания в классе стационарно связанных процессов, как известно, решается фильтром Винера-Колмогорова — частным случаем фильтра Калмана для стационарных систем наблюдения. Фильтр с передаточной функцией разбивается на две операции: выбеливание и согласованная фильтрация.

Лемма 2.2 (О выбеливании и согласованной фильтрации). *Справедливы следующие утверждения:*

1. Случайный процесс $\xi(t)$, определяемый как выход устойчивого линейного фильтра

$$\xi = D^+(ps - qbu),$$

является белым шумом.

2. Пусть $a(z)$ не имеет нулей в O либо матрица T невырождена. Тогда оптимальные оценки определяются согласованным фильтром

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widehat{y} \\ \widehat{u} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^{-1}b \\ I_m \end{pmatrix} u + H_{\mathrm{opt}}\xi, \\ H_{\mathrm{opt}} &= \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S_v r^*(D^+)^* + \Gamma^+ Y_- + (I_{n+m} - \Gamma^+\Gamma)\delta, \end{aligned}$$

где Y_- — матричная правильная рациональная функция,имеющая все полюсы в O, а δ — произвольная рациональная матричная функция, для которых H_{opt} не имеет полюсов в O.

Доказательство. 1. Из уравнений объекта и измерения следует, что

$$\xi = D^+(p(cy + e) - qbu) = D^+(pe + q(ay - bu)) = D^+(qw + pe).$$

Спектральная плотность процесса ξ есть

$$S_\xi = D^+ \begin{pmatrix} q & p \end{pmatrix} \mathsf{E} \begin{pmatrix} w \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ e \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} q & p \end{pmatrix}^* (D^+)^* =$$

$$= D^+ r S_v r^* (D^+)^* = D^+(DD^*)(D^+)^* = I_l$$

— единичная матрица, так как $D^+D = I_l$ и $D^*(D^+)^* = (D^+D)^*$. Отсюда ξ — стандартный белый шум.

2. В формуле оптимального фильтра из теоремы можно выбрать $\delta_o = 0$ и $\delta_c = \delta D^+$. Получается утверждение леммы. $\square$

2.2. Спектральный фильтр Калмана

По лемме о выбеливании и согласованной фильтрации обобщённый случайный стационарный процесс $\xi(t)$, определяемый устойчивым фильтром

$$D\xi = ps - qbu,$$

является стандартным белым шумом.

Следующее утверждение показывает, что уравнение оптимального фильтра можно записать в привычной форме фильтра Калмана, где вместо матриц из уравнения в пространстве состояний стоят передаточные функции объекта управления.

Теорема 2.2 (О спектральном фильтре Калмана). *Пусть матрица $T(z)$ невырождена. Введём обозначение*

$$\Gamma_v = S_v r^* (D^*)^{-1}. \tag{2.5}$$

Выполнены следующие утверждения.

1. Существуют единственная правильная рациональная матричная функция $Y_-(z)$ размерности $(n+m)\times k_c$, имеющая все полюсы в O, *и рациональная матричная функция $\delta_c(z)$ размерности $(n+m)\times l$, для которых матричная функция*

$$Y_-^0 = \Gamma_y^+(z)Y_-(z) + (I_n - \Gamma_y^+(z)\Gamma_y(z))\delta_c(z) = \begin{pmatrix} Y_y^0 \\ Y_u^0 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

обладает следующим свойством: матричные функции $Y_u^0(z)$ размерности $m\times l$ и

$$\Gamma_{v+}(z) = \Gamma_v(z) + \begin{pmatrix} a(z) \\ -c(z) \end{pmatrix} Y_y^0(z) \tag{2.7}$$

размерности $(n+l)\times l$ не имеют полюсов в O.

2. Разобьём матрицу Γ_{v+} в соответствии с количеством строк n и l:

$$\Gamma_{v+} = \begin{pmatrix} \Gamma_\xi \\ L \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

где размерность Γ_ξ есть $n\times l$, а размерность L — $l\times l$. Тогда оптимальные оценки $\widehat{y}(t)$ и $\widehat{u}(t)$ удовлетворяют операторному уравнению

$$\begin{aligned} a\widehat{y} &= bu + \Gamma_\xi\xi, \\ \widehat{u} &= u + Y_u^0\xi, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где ξ — стандартный белый шум, измеримый относительно (s,u).

3. Предположим, что $\det L \neq 0$. Тогда оптимальная оценка $\widehat{y}$ процесса y определяется фильтром с входом (s,u) и выходом $\widehat{y}$:

$$a\widehat{y} = bu + K(s - \widehat{s}), \tag{2.10}$$

где $\widehat{s} = c\widehat{y}$ — оценка измеряемой переменной, а матричная рациональная функция $K(z)$ определяется формулой

$$K = \Gamma_\xi L^{-1} \tag{2.11}$$

и является аналогом коэффициента усиления Калмана. Этот фильтр устойчив.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пара (a,b) несократима слева, а пара (a,c) — справа, следовательно,

$$\mathrm{Root}(a)=\mathrm{Pol}(ca^{-1}b)=\mathrm{Pol}(p^{-1}qb)=\mathrm{Root}(p).$$

Также существует такая пара рациональных матричных функций (μ,ν) без полюсов в O, что

$$\mu p-\nu qb=I_n$$

— единичная матрица.

По теореме об оптимальном оценивании передаточная функция оптимального фильтра от $\mathrm{col}(s,u)$ к $\mathrm{col}(\widehat{y},\widehat{u})$ имеет вид

$$H_{\mathrm{est}}=\begin{pmatrix}H_{\mathrm{est},y}\\ H_{\mathrm{est},u}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}a^{-1} & 0\end{pmatrix}\Gamma_v+Y_y^0\right]D^{-1}\begin{pmatrix}p & -qb\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a^{-1}b\end{pmatrix}\\ Y_u^0D^{-1}\begin{pmatrix}p & -qb\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & I_m\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

и не имеет полюсов в O. Поэтому матричная функция

$$Y_u^0=\left[H_{\mathrm{est},u}-\begin{pmatrix}0 & I_m\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}D$$

не имеет полюсов в O, что доказывает первую часть утверждения 1.

В O не имеют полюсов также матричные функции

$$\begin{aligned}aH_{\mathrm{est},y} &= \left[\begin{pmatrix}I_n & 0\end{pmatrix}\Gamma_v+aY_y^0\right]D^{-1}\begin{pmatrix}p & -qb\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & b\end{pmatrix},\\ cH_{\mathrm{est}} &= \left[p^{-1}(r-\begin{pmatrix}0 & p\end{pmatrix})\Gamma_v+cY_y^0\right]D^{-1}\begin{pmatrix}p & -qb\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & p^{-1}qb\end{pmatrix}=\\ &= \left[-\begin{pmatrix}0 & I_l\end{pmatrix}\Gamma_v+cY_y^0\right]D^{-1}\begin{pmatrix}p & -qb\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}I_n & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Поэтому полюсов в O не имеет функция

$$\left[\begin{pmatrix}a\\ -c\end{pmatrix}H_{\mathrm{est},y}+\begin{pmatrix}0 & -b\\ I_n & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}D=\Gamma_v+\begin{pmatrix}a\\ -c\end{pmatrix}Y_y^0.$$

Единственность Y_- следует из несократимости справа пары (a,c).

Утверждение 2 следует из леммы 2.2 и свойства

$$\begin{pmatrix} aH_{\mathrm{est},y} \\ H_{\mathrm{est},u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_\xi D^{-1}\begin{pmatrix} p & -qb \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \end{pmatrix} \\ Y_u^0 D^{-1}\begin{pmatrix} p & -qb \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_m \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Докажем утверждение 3. По определению H_{est}, Γ_v и G_l,

$$s - \widehat{s} = \left[\begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix} - cH_{\mathrm{est}}\right]\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & I_l \end{pmatrix}\Gamma_v - cY_-^0\right] D^{-1}(ps - qbu) = L\xi.$$

Замена ξ на $L^{-1}(s - \widehat{s})$ в утверждении 2 приводит к уравнению фильтра в форме Калмана.

Докажем устойчивость фильтра. Представим рациональную матричную функцию $K(z)$ в виде

$$K = \Gamma_\xi L^{-1} = P_r^{-1} Q_r,$$

где пара матричных полиномов (P_r, Q_r) несократима в O. Поскольку функция $\Gamma_v = \mathrm{col}(\Gamma_\xi, L)$ не имеет полюсов в O, то дробь $\det(L)/\det(P_r)$ также не имеет полюсов в O.

Уравнение фильтра можно записать в виде

$$P_r a\widehat{y} = P_r bu + Q_r(s - c\widehat{y}).$$

Полюсы передаточной функции этого фильтра совпадают с корнями многочлена

$$\begin{aligned} \Delta &= \det(P_r a + Q_r c) = \det(P_r a)\det(I + P_r^{-1}Q_r c a^{-1}) = \\ &= \det(P_r a)\det(I + ca^{-1}\Gamma_\xi L^{-1}) = \frac{\det(P_r)\det(a))}{\det(L)\det(p)}\det(pL + q\Gamma_\xi). \end{aligned}$$

Из определения $\Gamma_v = \mathrm{col}(\Gamma_\xi, L)$ и леммы 1.4 следует, что

$$pL + q\Gamma_\xi = r\Gamma_v = D.$$

Дробь $\det(a)/\det(p)$ является многочленом, корни которого совпадают с нулями матричного многочлена $\mathrm{col}(a, c)$. Эти корни, а также нули D находятся вне O. $\square$

3. Случай полной информации и теорема разделения

3.1. Случай полной информации

Пусть измеряется весь вектор y без шумов. Уравнение объекта управления запишем в виде

$$\begin{gathered} a(\sigma)y(t) = b(\sigma)u(t) + w(t), \\ w(t) = d(\sigma)\widetilde{w}(t), \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $\widetilde{w}$ — обобщённый стационарный случайный процесс размерности k со спектральной плотностью $S_{\widetilde{w}}(z)$, а $d(z)$ — матричная рациональная функция без полюсов в O. Спектральная плотность процесса w равна

$$S_w(z) = d(z)S_{\widetilde{w}}(z)d^*(z). \tag{3.2}$$

Поскольку измеряется y и u, то из уравнения объекта следует, что измеряется также и w, причём эти измерения неупреждающие и поэтому могут быть использованы в регуляторе. Для уравнений в пространстве состояний нет различия между постановками задач с измерением y или измерением (y, w).

Однако величина $\widetilde{w}(t)$ может не быть измеримой по предыстории (y, u) до момента t. Это зависит от устойчивости фильтра, определяемого функцией $d(z)$. Если ранг $d(z)$ максимальный при всех $z \in O$, то фильтр устойчив и величина $\widetilde{w}(t)$ измеряется.

Если ранг $d(z)$ уменьшается хотя бы для одного значения $z \in O$, то величина $\widetilde{w}(t)$ не измеряется по предыстории (y, u) до момента t. Далее будет доказано, что в этом случае задачи синтеза оптимального регулятора по измерениям y или по измерениям $(y, \widetilde{w})$ имеют разные решения. Случаем полной информации будем называть по-прежнему задачу с полным измерением $(y, \widetilde{w})$. Если измеряется только y, то этот случай будем называть полным измерением выхода.

Спектральные плотности допускают факторизацию:

$$S_w(z) = \Gamma_w(z)\Gamma_w^*(z), \qquad S_{\widetilde{w}}(z) = \Gamma_{\widetilde{w}}(z)\Gamma_{\widetilde{w}}^*(z),$$

где матричные рациональные функции $\Gamma_{\widetilde{w}}$ и Γ_w не имеют полюсов в O и для любого $z \in O \setminus L$ ранги матриц $\Gamma_{\widetilde{w}}(z)$ и $\Gamma_w(z)$ равны количеству столбцов.

Как и выше, факторизуем функцию

$$\mathcal{F}(z) = f^*(z)F(z)f(z) = \Pi^*(z)\Pi(z),$$

где $\Pi(z)$ — матричный многочлен размерности $n \times k_c$, имеющий ранг k_c для любого $z \in O$. Введём обозначение для преобразованного ядра показателя качества

$$F^{\mathrm{opt}}(z) = F(z) - F(z)f(z)\mathcal{F}^+(z)f^*(z)F(z) = \begin{pmatrix} F_y^{\mathrm{opt}}(z) & F_{yu}^{\mathrm{opt}}(z) \\ F_{uy}^{\mathrm{opt}}(z) & F_u^{\mathrm{opt}}(z) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где $\mathcal{F}^+ = \Pi^+(\Pi^+)^*$, а Π^+ — такая рациональная матричная функция без нулей и полюсов в O, что $\Pi^+\Pi = I_{k_c}$ — единичная матрица.

Определим также матричную функцию

$$S_{y^0}(z) = a(z)^{-1}S_w(z)a^*(z)^{-1}, \quad (3.4)$$

которая является спектральной плотностью обобщённого стационарного процесса $y(t)$, если $u(t) = 0$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено предположение 1.*

1.Рассмотрим задачу минимизации J в классе стационарных процессов. В случаях полной информации и полного измерения выхода оптимальный регулятор одинаков и определяется матричными многочленами

$$\begin{pmatrix} -\beta_{\mathrm{st}} & \alpha_{\mathrm{st}} \end{pmatrix} = \kappa_{\mathrm{st}} \left\{ \mathcal{F}^+ f^* F + \delta_{\mathrm{st}} \right\}, \quad \textit{(3.5)}$$

где $\kappa_{\mathrm{st}}(z)$ — произвольная невырожденная квадратная матричная рациональная функция размера m, при которой пара $(\alpha_{\mathrm{st}}, \beta_{\mathrm{st}})$ — матрич-

ные многочлены, и

$$\delta_{\mathrm{st}} = \delta_{o,\mathrm{st}}(I_n - \Gamma_w\Gamma_w^+)\begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix} + (I_m - \Pi^+\Pi)\left[\delta_{c,\mathrm{st}}\begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \end{pmatrix}\right],$$

где $\delta_{c,\mathrm{st}}(z)$ и $\delta_{o,\mathrm{st}}(z)$ — произвольные рациональные матричные функции размерности $m{\times}n$.

Других оптимальных регуляторов нет с точностью до эквивалентности. Минимальное значение функционала качества равно

$$J_{\mathrm{st}} = \mathrm{tr}\int\limits_L S_{y^0}(z)F_y^{\mathrm{opt}}(z)\,dm(z). \qquad (3.6)$$

2.Рассмотрим задачу синтеза оптимального стабилизирующего регулятора в случае полного измерения выхода (full output). Существуют единственная правильная рациональная матричная функция $Y_{\mathrm{fo}}(z)$ размерности $m{\times}k_c$, имеющая все полюсы в O, и произвольные рациональные матричные функции $\delta_{c,\mathrm{fo}}(z)$ и $\delta_{o,\mathrm{fo}}(z)$ размерности $m{\times}n$, для которых матричные функции

$$\gamma_0 = (\Pi^+)^* f^* F + \left[\delta_{o,\mathrm{fo}}(I_n - \Gamma_w\Gamma_w^+) + Y_{\mathrm{fo}}\Gamma_w^+\right]\begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix}, \qquad (3.7)$$

$$\gamma_1 = (I_m - \Pi^+\Pi)\left[\delta_{c,\mathrm{fo}}\begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \end{pmatrix}\right] \qquad (3.8)$$

не имеют полюсов в O.

Оптимальный регулятор определяется парой матричных многочленов

$$\begin{pmatrix} -\beta_{\mathrm{fo}} & \alpha_{\mathrm{fo}} \end{pmatrix} = \kappa_{\mathrm{fo}}\left[\Pi^+\gamma_0 + \gamma_1\right], \qquad (3.9)$$

где $\kappa_{\mathrm{fo}}(z)$ — произвольная невырожденная квадратная матричная рациональная функция без полюсов и нулей в O, при которой пара $(\alpha_{\mathrm{fo}}, \beta_{\mathrm{fo}})$ — матричные многочлены. Других оптимальных регуляторов нет с точностью до эквивалентности. Минимальное значение функционала качества равно

$$J_{\mathrm{fo}} = J_{\mathrm{st}} + \mathrm{tr}\int\limits_L Y_{\mathrm{fo}}^*(z)Y_{\mathrm{fo}}(z)\,dm(z). \qquad (3.10)$$

3. Рассмотрим задачу синтеза оптимального стабилизирующего регулятора в случае полной информации (full information). Существуют единственная правильная рациональная матричная функция $Y_{\mathrm{fi}}(z)$ размерности $m \times k_c$, имеющая все полюсы в O, и произвольные рациональные матричные функции $\delta_{c,1}(z)$, $\delta_{c,2}(z)$, $\delta_{c,1}(z)$, $\delta_{c,2}(z)$ размерностей, соответственно, $m \times n$, $m \times k$, $k_c \times n$, $k_c \times k$, для которых матричные функции

$$\begin{aligned} \gamma_{0,\mathrm{fi}} &= \Big((\Pi^+)^* f^* F \quad Y_{\mathrm{fi}} \Gamma_{\widetilde{w}}^+ + \delta_{o,2}(I_k - \Gamma_{\widetilde{w}} \Gamma_{\widetilde{w}}^+) \Big) + \delta_{o,1} \Big(a \quad -b \quad -d \Big), & (3.11) \\ \gamma_{1,\mathrm{fi}} &= (I_m - \Pi^+ \Pi) \Big[\Big(0 \quad g^{-1} \quad \delta_{c,2} \Big) + \delta_{c,1} \Big(a \quad -b \quad -d \Big) \Big] & (3.12) \end{aligned}$$

не имеют полюсов в O.

Оптимальный регулятор имеет вид

$$\alpha_{\mathrm{fi}}(\sigma) u(t) = \beta_{y,\mathrm{fi}}(\sigma) y(t) + \beta_{w,\mathrm{fi}}(\sigma) \widetilde{w}(t), \tag{3.13}$$

где матричные многочлены α_{fi}, $\beta_{y,\mathrm{fi}}$ и $\beta_{w,\mathrm{fi}}$ определяются как

$$\Big(-\beta_{y,\mathrm{fi}} \quad \alpha_{\mathrm{fi}} \quad -\beta_{w,\mathrm{fi}} \Big) = \kappa_{\mathrm{fi}} \left[\Pi^+ \gamma_{0,\mathrm{fi}} + \gamma_{1,\mathrm{fi}} \right], \tag{3.14}$$

где κ_{fi} — произвольная невырожденная квадратная матричная рациональная функция без нулей и полюсов в O, для которой правая часть есть матричный многочлен. Других оптимальных регуляторов нет с точностью до эквивалентности. Минимальное значение функционала качества равно

$$J_{\mathrm{fi}} = J_{\mathrm{st}} + \mathrm{tr} \int_L Y_{\mathrm{fi}}^*(z) Y_{\mathrm{fi}}(z) \, dm(z). \tag{3.15}$$

4. Выделим в следующей функции устойчивую и неустойчивую части:

$$Y_{\mathrm{fo}}(z) \Gamma_w^+(z) d(z) \Gamma_w(z) = Z_+(z) + Z_-(z), \tag{3.16}$$

где Z_+ не имеет полюсов в O, Z_- — правильная рациональная матричная функция, все полюсы которой находятся в O.

Тогда $Z_- = Y_{\mathrm{fi}}$ *и*

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\int_L Y_{\mathrm{fi}}^*(z)Y_{\mathrm{fi}}(z)\,dm(z) = \\ = \operatorname{tr}\int_L Y_{\mathrm{fo}}^*(z)Y_{\mathrm{fo}}(z)\,dm(z) - \operatorname{tr}\int_L Z_+(z)Z_+^*(z)\,dm(z).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Доказательство. В задаче минимизации J в классе стационарных процессов и в задаче синтеза оптимального стабилизирующего регулятора в случае полного измерения выхода можно считать, что измерением является процесс y. При этом

$$p = a, \quad q = I_n, \quad S_v = \operatorname{diag}\{S_w, 0\}, \quad T = S_w, \quad D = \Gamma_w.$$

Поэтому $S_wS_w^+ = \Gamma_w\Gamma_w^+$, $\mathcal{F}^+\mathcal{F} = \Pi^+\Pi$ и

$$W_aS_vr^*T^+ = \begin{pmatrix} a^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} S_wS_w^+ = \begin{pmatrix} a^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \Gamma_w\Gamma_w^+.$$

Докажем утверждение 1. По теореме 1.2 нормированная оптимальная пара матричных многочленов $\gamma = \kappa^{-1}(\alpha, \beta)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\gamma \;&=\; \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \end{pmatrix} + \\ &+\; \left[\mathcal{F}^+f^*F\begin{pmatrix} a^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}\Gamma_w\Gamma_w^+ + (I_m - \Pi^+\Pi)\delta_{c,0} + \delta_{o,0}(I_n - \Gamma_w\Gamma_w^+)\right]\begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix} = \\ &=\; \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \end{pmatrix} + \\ &+\; \left[\mathcal{F}^+f^*F\begin{pmatrix} a^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} + (I_m - \Pi^+\Pi)\delta_{c,0} + \delta_{o,1}(I_n - \Gamma_w\Gamma_w^+)\right]\begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где $\delta_{o,1} = \delta_o - \mathcal{F}^+f^*F\operatorname{col}(a^{-1}0)$. Выполним тождественные преобразования первых двух слагаемых:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \end{pmatrix} + \mathcal{F}^+ f^* F \begin{pmatrix} a^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix} = \\
= \;&\begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \end{pmatrix} + \mathcal{F}^+ f^* F \begin{pmatrix} I_n & -hg^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
= \;&\begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \end{pmatrix} + \mathcal{F}^+ f^* F \left[I_{n+m} - f \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \end{pmatrix} \right] = \\
= \;&\mathcal{F}^+ f^* F + (I_m - \Pi^+\Pi) \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Подстановка этого выражения приводит к утверждению 1 теоремы 1.2, в котором $\delta_{c,\mathrm{st}} = \delta_{c,0}$ и $\delta_{o,\mathrm{st}} = \delta_{o,1}$.

Докажем формулу минимального значения J. Поскольку $e = 0$ и $q = I_n$, то $S_v = E_y S_w E_y^*$, где $E_y = \mathrm{col}(I_n, 0)$. Проектор P_o имеет вид

$$P_o = E_y S_w S_w^+ E_y^* = E_y \Gamma_w \Gamma_w^+ E_y^*,$$

поэтому

$$P_o S_v P_o^* = E_y S_w E_y^*.$$

Подставим это выражение в формулу из утверждения 4 теоремы 1.2:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,\mathcal{H}(M, z) \;&=\; \mathrm{tr}(S_v W_a^* F W_a - P_o S_v P_o^* W_a^* P_c^* F P_c W_a) = \\
&=\; \mathrm{tr}[S_w (a^*)^{-1} E_y^* F E_y a^{-1} - S_w (a^*)^{-1} E_y^* F f \mathcal{F}^+ f^* F E_y a^{-1}] = \\
&=\; \mathrm{tr}[a^{-1} S_w (a^*)^{-1} (F - F f^* \mathcal{F}^+ f F)],
\end{aligned}$$

что соответствует утверждению 1 теоремы.

Докажем утверждение 2. По теореме оптимальный регулятор определяется парой матричных многочленов, которые с учётом преобразований из доказательства предыдущего утверждения можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -\beta_{\mathrm{fo}} & \alpha_{\mathrm{fo}} \end{pmatrix} \;=\; \kappa_{\mathrm{fo}} \Big\{ &\mathcal{F}^+ f^* F + (I_m - \Pi^+\Pi) \begin{pmatrix} 0 & g^{-1} \end{pmatrix} + \Pi^+ Y_- \Gamma_w^+ \begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix} + \\
&+ \Big[(I_m - \Pi^+\Pi)\delta_{c,2} + \delta_{o,2}(I_n - \Gamma_w \Gamma_w^+) \Big] \begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix} \Big\},
\end{aligned}$$

причём матрица в фигурных скобках не имеет полюсов в O. Подставим тождество $\mathcal{F}^+ = \Pi^+(\Pi^+)^*$ и введём обозначения

$$\begin{aligned}
\delta_{c,\mathrm{fo}} &= \delta_{c,2} + \delta_{o,2}(I_n - \Gamma_w \Gamma_w^+), \\
\delta_{o,\mathrm{fo}} &= \Pi \delta_{o,2},
\end{aligned}$$

а также $Y_{\mathrm{fo}} = Y_-$. Тогда получатся формулы из утверждения 2 теоремы.

Докажем, что функции γ_0 и γ_1 не имеют полюсов в O. По условию, в O не имеет полюсов матричная функция

$$\gamma_2 = \kappa_{\mathrm{fo}}^{-1} \begin{pmatrix} -\beta_{\mathrm{fo}} & \alpha_{\mathrm{fo}} \end{pmatrix} = \Pi^+ \gamma_0 + \gamma_1.$$

Поскольку $\gamma_1 = (I_m - \Pi^+\Pi)\gamma_1$, то

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \Pi \gamma_2, \\
\gamma_1 &= (I_m - \Pi^+\Pi)\gamma_2,
\end{aligned}$$

и эти функции не имеют полюсов в O, что завершает доказательство утверждения 2.

Докажем утверждение 3. Сведём задачу к случаю полного измерения выхода, рассмотренному в утверждении 2. Измерением является вектор $y_0 = \mathrm{col}(y, \widetilde{w})$ размерности $n + k$. Он удовлетворяет уравнению

$$a_0(\sigma) y_0(t) = b_0(\sigma) u(t) + w_0(t),$$

где $w_0(t) = \mathrm{col}(0, \widetilde{w}(t))$ и

$$a_0 = \begin{pmatrix} a & -d \\ 0 & I_k \end{pmatrix}, \qquad b_0 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Введём матрицы

$$E_{yu} = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{pmatrix}, \qquad E_w = \begin{pmatrix} 0 & I_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица квадратичной формы в функционале качества и вспомогательные матричные многочлены правосторонней факторизации передаточной функции от u к y_0 имеют вид

$$F_0 = E_{yu}^* F E_{yu}, \qquad h_0 = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_0 = g, \qquad \Gamma_{w_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma_{\widetilde{w}} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $f_0 = E_{yu}^* f$, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ и $\Pi_0 = \Pi$, а также $\Gamma_{w_0}^+ = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{\widetilde{w}}^+ \end{pmatrix}$.

Применим решение задачи с полным измерением выхода из утверждения 2 теоремы. Для упрощения формул заметим, что

$$\begin{pmatrix} a_0 & -b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -d & -b \\ 0 & I_k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E_{yu} + \begin{pmatrix} -d \\ I_k \end{pmatrix} E_w.$$

Разобьём матрицы δ_c размерности $m \times (n+k)$ и матрицу δ_o размерности $k_c \times (n+k)$ на первые n и последние k столбцов: $\delta_c = (\delta_{c,1}, \delta_{c,2})$, $\delta_o = (\delta_{o,1}, \delta_{o,2})$. Тогда в обозначениях утверждения 2 теоремы

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= (\Pi^+)^* f^* F E_{yu} + [Y_{\mathrm{fi}} \Gamma_{\widetilde{w}}^+ + \delta_{o,2}(I_k - \Gamma_{\widetilde{w}} \Gamma_{\widetilde{w}}^+)] E_w + \delta_{o,1} \begin{pmatrix} a & -d & -b \end{pmatrix}, \\ \gamma_1 &= (I_m - \Pi^+ \Pi) \left[\begin{pmatrix} 0 & \delta_{c,2} & g^{-1} \end{pmatrix} + \delta_{c,1} \begin{pmatrix} a & -d & -b \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Докажем утверждение 4. Введём обозначение $\kappa = \Gamma_w^+ d \Gamma_{\widetilde{w}}$. Поскольку $w(t) = d(\sigma)\widetilde{w}(t)$, то спектральная плотность процесса w может быть представлена в виде

$$S_w(z) = d(z) S_{\widetilde{w}}(z) d^*(z).$$

Из факторизаций $S_w = \Gamma_w \Gamma_w^*$ и $S_{\widetilde{w}} = \Gamma_{\widetilde{w}} \Gamma_{\widetilde{w}}^*$ и условия $\Gamma_w^+ \Gamma_w = I_{k_o}$ следует, что

$$\kappa\kappa^* = \Gamma_w^+ d \Gamma \widetilde{w} \Gamma \widetilde{w}^* d^* (\Gamma_w^+)^* = \Gamma_w^+ S_w (\Gamma_w^+)^* = I_{k_o}$$

— единичная матрица. Функция $\kappa(z)$ не имеет полюсов в O и по этому свойству является внутренней в O.

Функция $X = (I_n - \Gamma_w \Gamma_w^+) d \Gamma_{\widetilde{w}}$ удовлетворяет уравнению

$$XX^* = (I_n - \Gamma_w \Gamma_w^+) S_w (I_n - \Gamma_w \Gamma_w^+)^* = 0,$$

так как $S_w = \Gamma_w \Gamma_w^*$. Следовательно, $X = 0$ и

$$\Gamma_w \kappa = d\Gamma_{\widetilde{w}}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix}$ размерности $n \times (n+m)$ не имеет нулей в O по условию. Поэтому существует такая матричная рациональная функция $\lambda(z)$ без полюсов в O, что

$$\begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix} \lambda(z) = I_n.$$

Из уравнений в утверждении 2 следует, что

$$\gamma_0 \lambda \Gamma_w = (\Pi^+)^* f^* F \lambda \Gamma_w + Y_{\mathrm{fo}}.$$

Введём операции $[\cdot]_-$ и $[\cdot]_+$. Далее для любой матричной рациональной функции $f(z)$ в разложении $f = [f]_- + [f]_+$ функция $[f]_-$ правильная рациональная с полюсами только в O, а $[f]_+$ не имеет полюсов в O. Тогда

$$Y_{\mathrm{fo}} = [-(\Pi^+)^* f^* F \lambda \Gamma_w]_-.$$

Аналогично, из уравнений в утверждении 3 следует, что

$$\begin{aligned}
\gamma_{0,\mathrm{fi}} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} &= (\Pi^+)^* f^* F \lambda + \delta_{o,1}, \\
\gamma_{0,\mathrm{fi}} \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{\widetilde{w}} \end{pmatrix} &= Y_{\mathrm{fi}} - \delta_{o,1} d\Gamma_{\widetilde{w}}.
\end{aligned}$$

После подстановки $\delta_{o,1}$ из первого уравнения во второе, получим

$$\gamma_{0,\mathrm{fi}} \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{\widetilde{w}} \end{pmatrix} = Y_{\mathrm{fi}} - \gamma_{0,\mathrm{fi}} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} d\Gamma_{\widetilde{w}} + (\Pi^+)^* f^* F \lambda d\Gamma_{\widetilde{w}}.$$

Следовательно,

$$Y_{\mathrm{fi}} = [-(\Pi^+)^* f^* F \lambda d\Gamma_{\widetilde{w}}]_- = [-(\Pi^+)^* f^* F \lambda \Gamma_w \kappa]_-.$$

Введём обозначение $X = -(\Pi^+)^* f^* F \lambda d\Gamma_{\widetilde{w}}$. Тогда $[X]_- = Y_{\mathrm{fo}}$, $[X\kappa]_- = Y_{\mathrm{fi}}$.

В соответствии с обозначениями в утверждении 4,

$$Y_{\text{fi}} = [X\kappa]_- = [X_+\kappa + Z_+ + Z_-]_- = Z_-$$

Наконец, $Y_{\text{fo}}\kappa = Z_+ + Z_-$,

$$(Y_{\text{fo}}\kappa)(Y_{\text{fo}}\kappa)^* = Y_{\text{fo}}(\kappa\kappa^*)Y_{\text{fo}}^* = Y_{\text{fo}}Y_{\text{fo}}^*,$$

и в силу ортогональности Z_+ и Z_-

$$\operatorname{tr}\int_L Y_{\text{fo}}Y_{\text{fo}}^*\,dm(z) = \operatorname{tr}\int_L Z_+Z_+^*\,dm(z) + \operatorname{tr}\int_L Z_-Z_-^*\,dm(z),$$

что завершает доказательство теоремы. □

Из утверждений 2, 3 и 4 теоремы следует, что минимальное значение показателя качества для случая полной информации меньше либо равно, чем для случая полного измерения выхода. Эти значения равны тогда и только тогда, когда функция $Y_{\text{fo}}\Gamma_w^+ d\Gamma_{\widetilde{w}}$ правильная и не имеет полюсов вне O. В частности, если ранг матрицы $d(z)$ равен количеству столбцов для любого $z \in O$, то функция $\Gamma_w^+(z)d(z)\Gamma_{\widetilde{w}}(z)$ постоянная и это условие выполнено.

Рассмотрим частный случай. Пусть матрица $\mathcal{F}$ невырождена, и поэтому $\Pi^+ = \Pi^{-1}$. Тогда в утверждениях теоремы $I_m - \Pi^+\Pi = 0$, и поэтому

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}-\beta_{\text{st}} & \alpha_{\text{st}}\end{pmatrix} &= \kappa_{\text{st}}\left\{\mathcal{F}^{-1}f^*F + \delta_{o,\text{st}}(I_n - \Gamma_w\Gamma_w^+)\begin{pmatrix}a & -b\end{pmatrix}\right\},\\
\begin{pmatrix}-\beta_{\text{fo}} & \alpha_{\text{fo}}\end{pmatrix} &= \kappa_{\text{fo}}\Big\{(\Pi^*)^{-1}f^*F + \\
&\quad + \left[Y_{\text{fo}}\Gamma_w^+ + \delta_{o,\text{fo}}(I_n - \Gamma_w\Gamma_w^+)\right]\begin{pmatrix}a & -b\end{pmatrix}\Big\},\\
\begin{pmatrix}-\beta_{y,\text{fi}} & \alpha_{\text{fi}} & -\beta_{w,\text{fi}}\end{pmatrix} &= \kappa_{\text{fi}}\Big\{\Big((\Pi^*)^{-1}f^*F \quad Y_{\text{fi}}\Gamma_{\widetilde{w}}^+ + \delta_{o,2}(I_k - \Gamma_{\widetilde{w}}\Gamma_{\widetilde{w}}^+)\Big) + \\
&\quad + \delta_{o,1}\begin{pmatrix}a & -b & -d\end{pmatrix}\Big\}.
\end{aligned}$$

В первой формуле $\delta_{o,\text{st}}$ — произвольная рациональная матричная функция. Во второй и третьей формулах Y_{fo} и Y_{fi} — правильные рациональные матричные функции, имеющие полюсы только в O, а $\delta_{o,\mathrm{fo}}$, $\delta_{o,1}$ и $\delta_{o,2}$ — произвольные рациональные матричные функции, при которых выражения в фигурных скобках не имеют полюсов в O. Невырожденные квадратные рациональные матричные функции κ_{st}, κ_{fo}, κ_{fi} сокращают знаменатели в правых частях, функции κ_{fo} и κ_{fi} не имеют полюсов и нулей в O, а в остальном они произвольные. Других оптимальных регуляторов нет с точностью до эквивалентности.

3.2. Разделение оценивания и управления

Рассмотрим объект управления с неполными зашумлёнными измерениями

$$
\begin{aligned}
a(\sigma)y(t) &= b(\sigma)u(t) + w(t), &\quad (3.18)\\
s(t) &= c(\sigma)y(t) + e(t), &\quad (3.19)
\end{aligned}
$$

где y — выход размерности n, u — управление размерности m, s — измерение размерности l, $v(t) = \mathrm{col}(w(t), e(t))$ — обобщённый стационарный процесс со спектральной плотностью $S_v(z)$, $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ — матричные многочлены.

Как и выше, введём матричные многочлены h, g, f, p, q, r и рациональные матричные функции $\mathcal{F}$ и T условиями

$$
\begin{aligned}
hg^{-1} = &\ a^{-1}b, & f = &\ \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix}, & \mathcal{F} = &\ f^* F f,\\
p^{-1}q = &\ ca^{-1}, & r = &\ \begin{pmatrix} q & p \end{pmatrix}, & T = &\ r S_v r^*,
\end{aligned}
$$

причём пара (h, g) несократима справа в O, пара (p, q) несократима слева в O. В факторизациях $\mathcal{F} = \Pi^*\Pi$ и $T = DD^*$ матричные рациональные функции Π размерности $k_c \times m$ и D размерности $l \times k_o$ не имеют полюсов в O и имеют ранги k_c и k_o, соответственно, в $O \backslash L$.

Требуется решить задачу $\mathcal{P}$ синтеза оптимального стабилизирующего регулятора по неполным зашумлёниым измерениям.

Задача управления $\mathcal{P}$: синтезировать стабилизирующий регулятор

$$\alpha(\sigma)u(t) = \beta(\sigma)s(t), \tag{3.20}$$

минимизирующий функционал качества

$$J(\alpha, \beta) = \mathsf{E}\left|\Gamma(\sigma)\begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \end{pmatrix}\right|^2, \tag{3.21}$$

вычисляемый на стационарных процессах, удовлетворяющих уравнениям замкнутой системы. Здесь $\Gamma(z)$ — матричная рациональная функция размерности $k_c \times (n+m)$ без полюсов в O и имеющая ранг k_c в O. Квадратичная форма в функционале качества полностью определяется матрицей $F(z) = \Gamma^*(z)\Gamma(z)$.

Наряду $\mathcal{P}$ рассмотрим дополнительные две задачи: задачу $\mathcal{P}_o$ оценивания y и задачу $\mathcal{P}_c$ синтеза регулятора при полном измерении выхода.

Задача оценивания $\mathcal{P}_o$: требуется найти передаточную функцию H_o устойчивого неупреждающего фильтра

$$\begin{pmatrix} \widehat{y}(t) \\ \widehat{u}(t) \end{pmatrix} = H_o(\sigma)\begin{pmatrix} s(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

минимизирующего функционал качества

$$J_o(H_o) = \mathsf{E}\left|\Gamma(\sigma)\begin{pmatrix} y(t) - \widehat{y}(t) \\ u(t) - \widehat{u}(t) \end{pmatrix}\right|^2, \tag{3.23}$$

вычисленный на стационарных процессах.

Задача управления $\mathcal{P}_c$: для объекта управления

$$a(\sigma)\widetilde{y}(t) = b(\sigma)u(t) + \Gamma_\xi(\sigma)\widetilde{w}(t), \tag{3.24}$$

$$\widetilde{u}(t) = u(t) + Y_u^0(\sigma)\widetilde{w}(t) \tag{3.25}$$

с управлением $u(t)$, выходом $\widetilde{X}(t) = \mathrm{col}(\widetilde{y}(t), \widetilde{u}(t))$ и стандартным белым шумом $\widetilde{w}(t)$ найти оптимальный стабилизирующий регулятор в случае полной информации относительно функционала качества

$$J_c = \mathsf{E}|\Gamma(\sigma)\widetilde{X}(t)|^2, \tag{3.26}$$

вычисляемого на стационарном режиме. В уравнении объекта рациональные матричные функции Γ_ξ и Y_u^0 без полюсов в O определяются в формулировке теоремы о спектральном фильтре Калмана.

Лемма 3.1. *Пусть матричные многочлены (α, β) определяют некоторый стабилизирующий регулятор в задаче $\mathcal{P}$, при котором функционал $J(\alpha, \beta)$ конечен. Пусть $\widehat{y}(t)$, $\widehat{u}(t)$ — оптимальные оценки $y(t)$ и $u(t)$. Тогда на стационарном решении замкнутой системы*

$$J(\alpha, \beta) = \mathsf{E}\left|\Gamma(\sigma)\begin{pmatrix} y(t) - \widehat{y}(t) \\ u(t) - \widehat{u}(t)\end{pmatrix}\right|^2 + \mathsf{E}\left|\Gamma(\sigma)\begin{pmatrix} \widehat{y}(t) \\ \widehat{u}(t)\end{pmatrix}\right|^2. \tag{3.27}$$

Доказательство. Введём обозначения $X = \mathrm{col}(y, u)$, $\widehat{X} = \mathrm{col}(\widehat{y}, \widehat{u})$ и $\varepsilon = X - \widehat{X}$. Поскольку $J = \mathsf{E}|\Gamma(\varepsilon + \widehat{X})|^2$, то достаточно доказать, что

$$\Delta = \mathsf{E}(\Gamma\varepsilon)^*(\Gamma\widehat{X}) = 0.$$

Передаточные функции в замкнутой системе от $v = \mathrm{col}(w, e)$ к y, u, $\widehat{y}$, ε, η обозначим, соответственно, $H_{y/v}(z)$, $H_{u/v}(z)$, $H_{\widehat{y}/v}(z)$, $H_{\varepsilon/v}(z)$, $H_{\eta/v}(z)$. Требуется доказать, что равна нулю величина

$$\Delta = \mathrm{tr}\int\limits_L \Gamma(z)H_{\widehat{X}/v}(z)S_v(z)H^*_{\varepsilon/v}(z)\Gamma^*(z)\,dm(z).$$

В произведении матрицы можно переставлять под знаком следа в циклическом порядке. Поскольку $\Gamma^*\Gamma = F$, то

$$\Delta = \mathrm{tr}\int\limits_L H_{\widehat{X}/v}(z)S_v(z)H^*_{\varepsilon/v}(z)F(z)\,dm(z).$$

По теореме, передаточная функция оптимального фильтра с входом

$\mathrm{col}(s,u)$ равна

$$H_{\mathrm{est}} = \left[\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S_v r^* T^{-1} + Y_-^0 D^{-1} \right] \begin{pmatrix} p & -qb \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a^{-1}b \\ 0 & I_m \end{pmatrix},$$

где

$$Y_-^0 = (I_{n+m} - \Gamma^+\Gamma)\delta_c + \Gamma_y^+ Y_- = \begin{pmatrix} Y_y^0 \\ Y_u^0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $pc = qa$, то

$$p(\sigma)s(t) - q(\sigma)b(\sigma)u(t) = q(\sigma)w(t) + p(\sigma)e(t) = r(\sigma)v(t).$$

Поэтому передаточная функция от v к $\widehat{X}$ равна

$$H_{\widehat{X}/v} = \begin{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \end{pmatrix} S_v r^* T^{-1} + Y_y^0 D^{-1} \right] r \\ Y_u^0 D^{-1} r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^{-1}b \\ I_m \end{pmatrix} H_{u/v}.$$

Из уравнения объекта следует, что

$$H_{X/v} = \begin{pmatrix} a^{-1}b \\ I_m \end{pmatrix} H_{u/v} + \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычитая эти равенства, получим

$$H_{\varepsilon/v} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \end{pmatrix} (I_{n+l} - S_v r^* T^{-1} r) - Y^0 D^{-1} r \\ -Y_u^0 D^{-1} r \end{pmatrix}.$$

Передаточную функцию замкнутой системы от v к u можно записать в виде

$$H_{u/v} = \begin{pmatrix} g\chi^{-1}\beta c a^{-1} & g\chi^{-1}\beta \end{pmatrix} = g\chi^{-1}\beta p^{-1} r = Gr,$$

где $\chi = \alpha g - \beta c h$ и $G = g\chi^{-1}\beta p^{-1}$.

Таким образом,

$$H_{\widehat{X}/v} = Wr, \qquad W = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \end{pmatrix} S_v r^* T^{-1} + Y_y^0 D^{-1} \\ Y_u^0 D^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^{-1}b \\ I_m \end{pmatrix} G.$$

Матрица $r(z) = (q(z), p(z))$ имеет полный ранг l при всех z по определению. Поэтому существует такой матричный многочлен $\rho(z)$ размерности $(n+l)\times l$, что $r\rho = I_l$. Поэтому

$$W = H_{\widehat{X}/v}\rho,$$

и эта функция не имеет полюсов в O.

Подстановка даёт

$$\begin{aligned}
\Delta &= \operatorname{tr}\int\limits_L WrS_v\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{-1} & 0\end{pmatrix}(I_{n+l} - S_v r^* T^{-1} r) - Y_y^0 D^{-1} r\\ -Y_u^0 D^{-1} r\end{pmatrix}^* F\,dm(z) = \\
&= \operatorname{tr}\int\limits_L W\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{-1} & 0\end{pmatrix}(I_{n+l} - S_v r^* T^{-1} r)S_v r^* - Y^0 D^{-1} r S_v r^*\\ -Y_u^0 D^{-1} r S_v r^*\end{pmatrix}^* F\,dm(z) = \\
&= -\operatorname{tr}\int\limits_L W(Y^0 D^*)^* F\,dm(z) = \\
&= -\operatorname{tr}\int\limits_L WD[(I_{n+m} - \Gamma^+\Gamma)\delta_c D + \Gamma^+ Y_-]^* \Gamma^*\Gamma\,dm(z),
\end{aligned}$$

так как $rS_v r^* = T = DD^*$. Поскольку $\Gamma\Gamma^+ = I_{k_c}$, то

$$\Delta = -\operatorname{tr}\int\limits_L \Gamma W D Y_-^*\,dm(z).$$

Это скалярное произведение функции $\Gamma(z)W(z)D(z)$, не имеющей полюсов в O, и правильной рациональной функции $Y_-(z)$, все полюсы которой находятся в O. Эти функции принадлежат ортогональным подпространствам, поэтому $\Delta = 0$. □

Теорема 3.2 (О разделении оценивания и управления). *Пусть квадратная матрица $T(z)$ невырождена при всех $z \in L$. Пусть H_{est} — передаточная функция оптимального фильтра в задаче $\mathcal{P}_o$, порождающего оптимальные оценки*

$$\begin{pmatrix}\widehat{y}(t)\\ \widehat{u}(t)\end{pmatrix} = H_{\mathrm{est}}(\sigma)\begin{pmatrix}s(t)\\ u(t)\end{pmatrix}, \qquad (3.28)$$

и минимум функционала качества равен $J_{o,\min}$.

Пусть оптимальный регулятор в задаче $\mathcal{P}_c$ *имеет вид*

$$\alpha(\sigma)u(t) = \beta_y(\sigma)\widetilde{y}(t) + \beta_u(\sigma)\widetilde{u}(t) + \beta_w(\sigma)\widetilde{w}(t) \tag{3.29}$$

и минимум функционала качества равен $J_{c,\min}$.

Тогда в задаче управления $\mathcal{P}$ *по неполным зашумлённым измерениям оптимальным регулятором является система, состоящая из фильтра* H_{est} *и регулятора*

$$\alpha(\sigma)u(t) = \beta_y(\sigma)\widehat{y}(t) + \beta_u(\sigma)\widehat{u}(t) + \beta_w(\sigma)\widehat{w}(t), \tag{3.30}$$

где $(\widehat{y}, \widehat{u})$ *— выход фильтра, и* $\widehat{w}$ *определяется уравнением*

$$D(\sigma)\widehat{w}(t) = p(\sigma)s(t) - q(\sigma)b(\sigma)u(t). \tag{3.31}$$

Минимум функционала качества равен $J_{\min} = J_{c,\min} + J_{o,\min}$.

Доказательство. Для любого стабилизирующего регулятора функция $\varepsilon = \operatorname{col}(y-\widehat{y}, u-\widehat{u})$ одна и та же, так как определяется только возмущением v и устойчивым фильтром $\varepsilon = H_{\varepsilon/v}v$ с передаточной функцией

$$H_{\varepsilon/v} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \end{pmatrix} (I_{n+l} - S_v r^* T^{-1} r) - Y^0 D^{-1} r \\ -Y_u^0 D^{-1} r \end{pmatrix}.$$

По лемме задача $\mathcal{P}$ сводится к задаче $\mathcal{P}_c$. □

Заключение

В работе представлено доказательство теоремы об оптимальном линейном регуляторе, минимизирующем квадратичный функционал качества общего вида, при стационарных возмущениях в объекте и неполных зашумлённых измерениях. Полученный регулятор является единственным с точностью до эквивалентности регуляторов. При этом указаны как формула оптимального регулятора, так и минимальное значение функционала качества. Также предъявлена формула расчёта оптимального полиномиального фильтра, минимизирущего квадратичную невязку, причём уравнение фильтра может быть представлено в форме фильтра Калмана, где вместо матриц из уравнения в пространстве состояний стоят передаточные функции объекта управления. Более того указанное решение, в отличие от классического фильтра Калмана, работает с произвольным стационарным возмущением, что исключает необходимость поиска и применения формирующих фильтров.

Работа выполнена в рамках НИР СПбГУ № 6.37.349.2015.

Список литературы

[1] A.E. Barabanov, A.N. Miroshnikov, A. Rantzer. Multiband H-infty control in a behavioral settings // The 36th IEEE Conf. on Decision and Control. — USA, December 15–17, 1997. — P. 3172–3177.

[2] Барабанов А.Е. Синтез минимаксных регуляторов. — СПб. : Издательство Санкт-Петербургского Университета, 1996. — 224 с.

[3] Барабанов А.Е. Факторизация матричных полиномов с ограничением на степень // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 5. — С. 86–100.

[4] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М. : Наука, 1966. — 576 с.

[5] Якубович В.А. Оптимизация и инвариантность линейных стационарных систем управления // Автоматика и телемеханика. — 1984. — № 8. — С. 5–45.