Санкт-Петербургский государственный университет
Математика
Теория функций и функциональный анализ

Лузгарёв Анатолий Николаевич

Свободная интерполяция в функциональных гильбертовых пространствах

Магистерская диссертация

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент Виденский И. В.

Рецензент:
д. ф.-м. н., профессор Коточигов А. М.

Санкт-Петербург
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY
Mathematics
Theory of functions and functional analysis

Luzgaryov Anatoliy

Free interpolation in Hilbert function spaces

Master's Thesis

Scientific supervisor:
assosiated professor Ilya Videnskii

Reviewer:
professor Alexander Kotochigov

Saint-Petersburg
2017

Содержание

1 Введение.

Рассмотрим пространство ограниченных аналитических функций в круге $H^\infty(\mathbb{D})$.
Сформулируем оригинальную проблему Пика об интерполяции:
Пусть $\{z_j\}_{j=1}^n$ - различные точки единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\{w_j\}_{j=1}^n$ - комплексные числа. Когда существует функция ϕ из пространства $H^\infty(\mathbb{D})$ такая, что

$$||\phi||_{H^\infty(\mathbb{D})} \leq 1, \text{то есть } \sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |\phi(z)| \leq 1$$

и ϕ является интерполирующей функцией, то есть

$$\phi(z_j) = w_j \ \forall j = 1..n.$$

В 1916 году Пик показал [8], что такая функция существует тогда и только тогда, когда матрица

$$\left\{ \frac{1 - \overline{w_j} w_i}{1 - \overline{z_j} z_i} \right\}_{i,j=1}^n$$

положительно-полуопределена. Причём решение единственно тогда и только тогда, когда ранг этой матрицы строго меньше чем n, причём решение - это произведение Бляшке.
В 1927 г. Неванлинна описал множество решений в случае, когда ранг $= n$ [9].

$H^\infty(\mathbb{D})$ является пространством мультипликаторов для пространства $H^2(\mathbb{D})$, которое является функциональным гильбертовым пространством. Воспроизводящее ядро для $H^2(\mathbb{D})$ имеет вид:

$$k(z, \zeta) = \frac{1}{1 - \overline{\zeta} z}.$$

С учетом этого факта описанную выше матрицу можно переписать в следующей форме:

$$\left\{ (1 - \overline{w_j} w_i) k(z_i, z_j) \right\}.$$

Рассмотрим теперь произвольное функциональное гильбертово пространство H на множестве X. Пусть $M(H)$ - соответствующее ему пространство мультипликаторов. Мы говорим, что пространство H обладает свойством Неванлинны-Пика ($H \in (NP)$), если:

$$\forall \text{ набора различных точек} \{z_j\}_{j=1}^n \in X, \forall \{w_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{C}$$

из положительной-полуопределённости матрицы

$$\left\{(1-\overline{w_j}w_i)k(z_i,z_j)\right\}.$$

следует, что существует $\phi \in M(H)$, такой, что:

$$||\phi||_{M(H)} \le 1,\ \phi(z_j) = w_j\ \forall j = 1..n.$$

Нам потребуется усиленное свойство $(CNP)(CompleteNevanlinna - Pick)$, которое мы определим ниже в разделе основных определений.
Интересным направлением в этой области является анализ того, какие пространства обладают свойством (CNP). Приведём несколько примеров:
1. Весовое пространство

$$H^2(w_n) = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \text{аналитическая в } \mathbb{D} : ||f||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 w_n < \infty \right\},$$

где $w_n > 0\ \forall n \ge 0$. Весовое пространство обладает свойством (CNP) тогда и только тогда, когда веса удовлетворяют условию Шапиро-Шилдса [13]

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{w_n}} = w_0 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, b_n \ge 0.$$

Пространства с весом $(n+1)^\alpha$ при положительном α называются пространствами типа Дирихле (обладают свойством CNP(Маршалл,Сандберг)[11]), при отрицательных α - пространствами типа Бергмана, которые не обладают свойством (CNP)[1].
2. Локальные пространства Дирихле

$$D(\mu) = \{f : ||f||^2_{D(\mu)} = ||f||^2_{H^2} + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 W_\mu(z) dm(z) < \infty\},$$

где μ - конечная положительная мера в замкнутом единичном круге,

$$W_\mu(z) = \int_{\mathbb{D}} log \left| \frac{1-\bar{t}z}{z-t} \right| \frac{d\mu(t)}{1-|t|^2} + \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|z-t|} d\mu(t)$$

- супергармническая функция. С.Шиморин установил [6], что они обладают свойством (CNP).

3. Пространство Арвесона H_n^2 это пространство аналитических функций в шаре $B_n \subset \mathbb{C}^n$, обладающее воспроизводящим ядром

$$k(x,y) = \frac{1}{1 - \langle x,y\rangle_{\mathbb{C}^n}}.$$

Оно обладает свойством (CNP).[1] Это ядро является универсальным в следующем смысле:
Для любого функционального гильбетова пространства H на множестве X, обладающего свойством (CNP), с воспроизводящим ядром $k_H(x,y)$, таким, что $k_H(x,y) \neq 0 \forall x,y \in X$ существуют число n, инъекция $b : X \to B_n$, функция $\delta(x) \neq 0 \ \forall \ x \in X$, такие, что

$$k_H(x,y) = \delta(x)\overline{\delta(y)} k_{H_n^2}(b(x), b(y)).[1]$$

4.Пространство Соболева с весом на отрезке.

$$W_2^1([0,1], w_{0,1}) = \{f-\text{абс. непр.} : ||f||^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 w_0(x)dx + \int_0^1 |f'(x)|^2 w_1(x)dx < \infty\}$$

где $w_0 \in C[0,1], w_1 \in C^1[0,1]$ - положительные функции, обладает свойством (CNP)(П.Куигген)[12], случай $w_0 = w_1 = 1$ рассмотрел Аглер [2].

Рассмотрим теперь пространство Соболева $W_2^k(\mathbb{R})$ на прямой. Аглер доказал [2], что

$$W_2^1(\mathbb{R}) \in (CNP).$$

По аналогии с классическими пространствами Дирихле, следовало бы ожидать, что при увеличении гладкости свойство (CNP) должно сохраняться и для пространств $W_2^k(\mathbb{R})$ при $k > 1$ (в пространствах Дирихле увеличивается α). Однако это не так. Основным результатом работы является доказательство отсутствия у пространства $W_2^2(\mathbb{R})$ свойства (CNP):

$$W_2^2(\mathbb{R}) \notin (CNP).$$

2 Основные определения.

Определение. H называется функциональным гильбертовым пространством на множестве X, если элементами этого гильбертова пространства являются функции на множестве X, и $\forall x_0 \in X$ функционал значения в точке x_0:

$$F_{x_0} f = f(x_0)$$

непрерывен.
По теореме Рисса существует k_{x_0}, такое, что

$$F_{x_0} f = \langle f, k_{x_0} \rangle_H .$$

Функция $k_{x_0} \in H$ называется воспроизводящим ядром для пространства H.

Определение. Функция ϕ называется мультипликатором для пространства H, если $\forall f \in H \quad \phi f \in H$. Пространство мультипликаторов это:

$$M(H) = \{\phi : X \to \mathbb{C} : f \in H \Rightarrow \phi f \in H\}.$$

Определение: Пусть H_1, H_2 - гильбертовы пространства. Тензорным произведение $H_1 \otimes H_2$ этих пространств называется пополнение алгебраического тензорного произведения по скалярному произведению:

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle_{H_1 \otimes H_2} = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2} .$$

Определение. Функциональное гильбертово пространство H обладает свойством (CNP), если для любого набора различных точек $\{z_j\}_{j=1}^n \subset X$, для любого набора матриц $\{W_j\}_{j=1}^n \subset M_{t \times s}$ из того, что

$$\sum_{j=1}^{n} \left\langle (I_{t \times t} - W_i W_j^*) v_i, v_j \right\rangle_{\mathbb{C}^n} k(z_i, z_j) \geq 0$$

для любого набора векторов $\{v_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}^n$ следует, что $\exists \phi \in M(H \otimes \mathbb{C}^t, H \otimes \mathbb{C}^t)$ такой, что

$$\phi(z_j) = W_j \ \forall j = 1..n, \ ||\phi||_{M(H \otimes \mathbb{C}^t, H \otimes \mathbb{C}^t)} \leq 1.$$

Помимо определения существует ряд критериев, с помощью которых можно определить, обладает ли данное функциональное гильбертово пространство свойством (CNP) или нет.

Теорема 1.1.[1] Пусть H - функциональное гильбертово пространство. H обладает свойством (CNP) тогда и только тогда, когда для любого набора различных точек $\{z_j\}_{j=1}^n$ матрица

$$\left\{\frac{1}{k(z_i, z_j)}\right\}_{i,j=1}^n$$

имеет ровно одно положительное собственное значение с учётом кратности.
Для проверки написанного выше критерия может быть полезна следующая лемма:
Лемма 1.1.[1] Пусть A - симметричная матрица, такая, что все диагональные элементы строго положительные. Тогда из того, что

$$sign(\det(\{A_{i,j}\}_{i,j=1}^k)) = (-1)^k,$$

следует, что матрица A имеет ровно одно положительное собственное значение.
Теорема 1.2.[7] Пусть H - функциональное гильбертово пространство на X. H обладает свойством (CNP) тогда и только тогда, когда для любого набора точек $\{x_i\}_{i=1}^N$ из X матрица

$$\left\{1 - \frac{k(x_i, x_N)k(x_j, x_N)}{k(x_i, x_j)k(x_N, x_N)}\right\}_{i,j=1}^{N-1}$$

положительно полуопределена.
Замечание.[1] Пусть H - функциональное гильбертово пространство на X, обладающее свойством (CNP). Рассмотрим следующее отношение на X:

$$x \sim y, \text{ если } k_H(x, y) = 0.$$

Это отношение является отношением эквивалентности, то есть X представляется как объединение непересекающихся множество, каждое из которых является классом эквивалентности.
Определение. Пространство Соболева:

$$W_2^1(\Omega) = \{f : ||f||^2_{W_2^1(\Omega)} = ||f||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^n ||D^i f||^2_{L^2(\Omega)} < \infty\},$$

Утверждение.[2] Пространства $W_2^1(\mathbb{R})$ и $W_2^1[0,1]$ обладают свойством (CNP). Эти пространства имеют следующие воспроизводящие ядра:

$$k_{W_2^1(\mathbb{R})}(x, y) = e^{-|x-y|}.$$

$$k_{W_2^1[0,1]}(x,y) = \begin{cases} \sqrt{cosech(1)}\cosh(1-y)\cosh(x) & \text{при } x \le y, \\ \sqrt{cosech(1)}\cosh(1-x)\cosh(y) & \text{при } x > y. \end{cases}$$

Определение. Пространство Дирихле:

$$D_\alpha = \left\{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : ||f||^2_{D_\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (1+n)^\alpha < \infty \right\}.$$

Утверждение.[11] Пространства Дирихле D_α обладают свойством (CNP) для любого $\alpha > 0$.
Замечание.

$$||f||^2_{D_\alpha} = ||f||^2_{H^2(\mathbb{D})} + ||f'||^2_{D_{\alpha-2}}$$

Мы можем написать аналогичное соотношение для пространств Соболева:

$$||f||_{W_2^k(\mathbb{R})} = ||f||_{L^2(\mathbb{R}} + ||f'||^2_{W_2^{k-1}(\mathbb{R})}.$$

Однако, в отличие от пространств Дирихле, пространства Соболева, как мы докажем дальше, не будут обладать свойством (CNP) при повышении гладкости.

3 Пространство $\mathring{W}_2^1[0,1]$.

Рассмотрим пространство Соболева:

$$W_2^1(\Omega) = \{f : ||f||^2_{W_2^1(\Omega)} = ||f||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{n} ||D^i f||^2_{L^2(\Omega)} < \infty\},$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
Финитное пространство Соболева:

$$\mathring{W}_2^1(\Omega) = \{f \in W_2^1(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Для финитных пространств Соболева на множествах конечной меры справедливо неравенство Фридрихса:

$$||f||_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega ||\nabla f||_{L^2(\Omega)}.$$

Из этого неравенства следует, что для таких пространств можно ввести эквивалентную норму:

$$||f|| = \int_\Omega |f'(x)|^2 dx. \quad (*)$$

Соответствующее скалярное произведение имеет вид:

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f'(x) g'(x) dx.$$

Далее будем рассматривать $\Omega = [0,1]$. Пространство $W_2^1[0,1]$ это функциональное гильбертово пространство, которое обладает свойством (CNP) [Аглер]. При замене нормы на эквивалентную пространство может уже не обладать свойством (CNP). Сейчас мы рассмотрим финитное пространство $\mathring{W}_2^1[0,1]$ с эквивалентной нормой (*) и дополним результат Аглера следующей теоремой:
Теорема. Пространство $\mathring{W}_2^1[0,1]$ обладает свойством (CNP).
Доказательство.

Воспроизводящее ядро имеет вид:

$$k(x,y) = \begin{cases} (1-y)x & \text{при } x \leq y, \\ y(1-x) & \text{при } x > y. \end{cases}$$

Действительно,

$$\langle f(.), k(., y)\rangle_{\mathring{W}_2^1[0,1]} = \int_0^1 f'(x)\frac{d}{dx}(k(x,y))dx =$$

$$\int_0^y f'(x)(1-y)dx - \int_y^1 f'(x)ydx =$$

$$= f(y)(1-y) - f(0)(1-y) - f(1)(1-y) + f(y)y = f(y).$$

Для этого ядра выполняются необходимые свойства (положительная определённость, симметричность).

Проверим для этого ядра свойство (CNP). Достаточно показать, что для любого набора различных точек $\{x_i\}_{i=1}^n \subset [0,1]$ матрица

$$\left\{\frac{1}{k(x_i, x_j)}\right\}_{i,j=1}^n$$

имеет ровно одно положительное собственное значение. По лемме 1.1 это будет так, если

$$sgn(det\left(\left\{\frac{1}{k(x_i, x_j)}\right\}_{i,j=1}^k\right)) = (-1)^{k+1}.$$

Мы может считать, что $0 < x_i < x_j < 1 \;\; \forall i < j$. Также заметим, что воспроизводящее ядро есть произведение двух функций, зависящих от разных аргументов: $k(x,y) = f(x)g(y)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leq y, \\ 1-x & \text{при } x > y. \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1-y & \text{при } x \leq y, \\ y & \text{при } x > y. \end{cases}$$

Рассмотрим нужную матрицу:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{f(x_1)g(x_1)} & \frac{1}{f(x_1)g(x_2)} & \frac{1}{f(x_1)g(x_3)} & \cdots & \frac{1}{f(x_1)g(x_n)} \\ \frac{1}{f(x_1)g(x_2)} & \frac{1}{f(x_2)g(x_2)} & \frac{1}{f(x_2)g(x_3)} & \cdots & \frac{1}{f(x_2)g(x_n)} \\ \frac{1}{f(x_1)f(x_3)} & \frac{1}{f(x_2)g(x_3)} & \frac{1}{f(x_3)g(x_3)} & \cdots & \frac{1}{f(x_3)g(x_n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{f(x_1)f(x_n)} & \frac{1}{f(x_2)g(x_n)} & \frac{1}{f(x_3)g(x_n)} & \cdots & \frac{1}{f(x_n)g(x_n)} \end{pmatrix}$$

Воспользуемся методом математической индукции. Ясно, что

$$\frac{1}{f(x_1)g(x_1)} > 0 \ \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

Пусть утверждение справедливо для произвольного $n-1$.
Разложим определитель этой матрицы по первому столбцу, и учитывая, что первые две строки линейно зависимы, получим :

$$det(A_n) = \frac{1}{f(x_1)g(x_1)} det(A_{n-1}) - \frac{1}{f(x_1)g(x_2)} \frac{f(x_2)}{f(x_1)} det(A_{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{f(x_1)g(x_1)} (1 - \frac{f(x_2)g(x_1)}{f(x_1)g(x_2)}) det(A_{n-1}).$$

Отметим, что f/g монотонно возрастает, поэтому получаем:

$$sign(\det(A_n)) = -sign(\det(A_{n-1})).$$

То есть пространство $\mathring{W}_2^1[0,1]$ обладает свойством (CNP).

4 Пространство $W_2^k(\mathbb{R})$.

Пространство $W_2^k(\Omega)$ это пространство функций:

$$W_2^k(\Omega) = \{f : ||f||^2_{W_2^k(\Omega)} = ||f||^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|\leq 1} ||D^\alpha f||^2_{L^2(\Omega)} < \infty\},$$

Будем рассматривать $\Omega = \mathbb{R}$. Сначала рассмотрим случай $k = 2$ и докажем основный результат работы.
Теорема. Пространство $W_2^2(\mathbb{R})$ не обладает свойством (CNP).
Доказательство:
Запишем скалярное произведение для пространства $W_2^2(\mathbb{R})$:

$$\langle f(.), k(., y)\rangle_{W_2^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f(x)k(x,y)dx+$$

$$+\int_{\mathbb{R}} f'(x)\frac{\partial}{\partial x}(k(x,y))dx + \int_{\mathbb{R}} f''(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k(x,y))dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)(k(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(k(x,y)) + \frac{\partial^4}{\partial x^4}(k(x,y)))dx+$$

$$+f(x)(\frac{\partial}{\partial x}(k(x,y)) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}(k(x,y)))\Big|_{-\infty}^{\infty} + f'(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k(x,y))\Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Пусть $k(x,y) = g(x)h(y)$. Тогда рассмотрим уравнение:

$$g(x) - g''(x) + g^{(4)}(x) = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 - \lambda^2 + 1 = 0.$$

У этого уравнения есть корень с отрицательной вещественной частью, обозначим его за γ. (Заметим, что $\overline{\gamma}$ также корень уравнения).
Кандидатом на воспроизводящее ядро является следующая функция:

$$k(x,y) = C_1 e^{\gamma|x-y|} + C_2 e^{\overline{\gamma}|x-y|}).$$

В силу того, что $\gamma, \overline{\gamma}$ - корни характеристического уравнения, имеем:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(k(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(k(x,y)) + \frac{\partial^4}{\partial x^4}(k(x,y)))dx = 0.$$

Заметим, что эта функция не дифференцируема по x в точке y (кроме одного случая, когда константы удовлетворяют специальному соотношению, который мы рассмотрим ниже), но если взять вторую производную в смысле обобщённых функций, то она будет непрерывна. Поэтому

$$f'(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k(x,y))\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Так как $k(x,y)$ должно принадлежать пространству $W_2^2(\mathbb{R})$, то производная $\frac{\partial}{\partial x}(k(x,y)$ должна быть непрерывна по x в точке y. Чтобы это было так, выберем константы C_1 и C_2 специальным образом.

$$C_1\gamma + C_2\overline{\gamma} = -C_1\gamma - \gamma C_2.$$

То есть воспроизводящее ядро можно уже записать так:

$$k(x,y) = C\left(\overline{\gamma}e^{\gamma|x-y|} - \gamma e^{\overline{\gamma}|x-y|}\right)$$

Рассмотрим теперь первую подстановку:

$$f(x)C\left(\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\gamma}e^{\gamma|x-y|} - \gamma e^{\overline{\gamma}|x-y|}) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}(e^{\gamma|x-y|} - e^{\overline{\gamma}|x-y|})\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= -f(x)C\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\overline{\gamma}e^{\gamma|x-y|} - \gamma e^{\overline{\gamma}|x-y|})\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}$$

$$= f(y)C((|\gamma|^2\gamma^2 - |\gamma|^2\overline{\gamma^2}) + (|\gamma|^2\gamma^2 - |\gamma|^2\overline{\gamma^2})) =$$

$$= f(y)4Ci|\gamma|^2\Im\gamma^2.$$

То есть мы нашли константу:

$$C = \frac{1}{4i|\gamma|^2\Im\gamma^2}.$$

Воспроизводящее ядро имеет вид:

$$k(x,y) = \frac{\overline{\gamma}e^{\gamma|x-y|} - \gamma e^{\overline{\gamma}|x-y|}}{4i|\gamma|^2\Im\gamma^2}$$

Заметим, что: $\Re\gamma = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\Im\gamma = \dfrac{1}{2}$.
Перепишем воспроизводящее ядро в следующем виде:

$$k(x,y) = \frac{\overline{\gamma}e^{\gamma|x-y|} - \gamma e^{\overline{\gamma}|x-y|}}{4i|\gamma|^2\Im\gamma^2} = \frac{\Re\gamma i \sin\Im|x-y| - \Im\gamma i\cos\Im\gamma|x-y|}{4i|\gamma|^2\Im\gamma^2} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}|x-y|}(\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}|x-y| + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{1}{2}|x-y|)}{C}$$

Если бы пространство $W_2^2(\mathbb{R})$ обладало свойством (CNP), тогда вещественная прямая представляется как объединение непересекающихся множеств

$$\mathbb{R} = \bigcup_i X_i$$

так, что точки x, y лежат в одном множестве, если $k(x,y) \neq 0$. Ясно, что полуинтервал $[0, \frac{5\pi}{3})$ целиком лежит в каком-то из таких множеств. Полуинтервал $[\frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{3})$ также лежит в целиком в каком-то множестве, не совпадающим с предыдущим, так как $k(0, \frac{5\pi}{3}) = 0$. С другой стороны, $k(\frac{\pi}{2}, 2\pi) \neq 0$, из чего следует, что эти точки лежат в одном множестве, чего не может быть. ■

Рассмотрим теперь случай произвольного k и покажем, какой вид имеет ядро в общем случае.
Утверждение. Воспроизводящее ядро для пространства $W_2^k(\mathbb{R})$ имеет вид:

$$k(x,y) = \begin{cases} e^{-|x-y|} + \sum_{j=2l+1}(C_j e^{\alpha_j|x-y|} + \overline{C_j}e^{\overline{\alpha_j}|x-y|}) & \text{при нечётном } k. \\ \sum_{j=2l+1}(C_j e^{\alpha_j|x-y|} - \overline{C_j}e^{\overline{\alpha_j}|x-y|}) & \text{при чётном } k, \end{cases}$$

где C_j - некоторые комплексные числа.

Доказательство.
Рассмотрим скалярное произведение в $W_2^k(\mathbb{R})$:

$$< f(.), k(.,y) >_{W_2^k(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f(x)k(x,y)dx + \sum_{j=1}^{k}\int_{\mathbb{R}} f^{(j)}(x)\frac{\partial^j}{\partial x^j}k(x,y)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}(-1)^j k(x,y)\right)dx + \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(x)\sum_{i=0}^{k-j}(-1)^i\frac{\partial^{j+1+2i}}{\partial x^{j+1+2i}}k(x,y))\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\lambda^{2j}=0.$$

Так как характеристический многочлен зависит от λ^2, то ровно половина корней уравнения имеет отрицательную вещественную часть. Если k нечётно, то такими корнями будут:

$$-1,\alpha_1,\overline{\alpha_1},...,\alpha_{\frac{k-1}{2}},\overline{\alpha_{\frac{k-1}{2}}}.$$

(Эти числа - это корни $2k+2$-ой степени из 1, имеющие строго отрицательную вещественную часть.)
Если же k - чётно, то корнями будут:

$$\alpha_1,\overline{\alpha_1},...,\alpha_{\frac{k}{2}},\overline{\alpha_{\frac{k}{2}}}.$$

(Эти числа - это корни $2k+2$-ой степени из -1, имеющие строго отрицательную вещественню часть.)
Будем искать воспроизводящее ядро в виде

$$k(x,y)=\begin{cases}C_0e^{-|x-y|}+\sum_{j=2l+1}(C_je^{\alpha_j|x-y|}+\widehat{C_j}e^{\overline{\alpha_j}|x-y|}) & \text{при нечётном } k.\\ \sum_{j=2l+1}(C_je^{\alpha_j|x-y|}+\widehat{C_j}e^{\overline{\alpha_j}|x-y|}) & \text{при чётном } k,\end{cases}$$

где $\{C_j,\widehat{C_j}\}_j$ - константы которые нам предстоит вычислить. Заметим, что все чётные производные непрерывны. Нам необходимо, чтобы были непрерывны также нечётные производные вплоть до $(2k-3)$-ей. Для этого необходмо подобрать константы C_j так, чтобы левые производные были равны правым:

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial}{\partial x_+}k(x,y)\right|_{x=y}=\left.\dfrac{\partial}{\partial x_-}k(x,y)\right|_{x=y}\\ \left.\dfrac{\partial^3}{\partial x_+^3}k(x,y)\right|_{x=y}=\left.\dfrac{\partial^3}{\partial x_-^3}k(x,y)\right|_{x=y}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \left.\dfrac{\partial^{2k-3}}{\partial x_+^{2k-3}}k(x,y)\right|_{x=y}=\left.\dfrac{\partial^{2k-3}}{\partial x_-^{2k-3}}k(x,y)\right|_{x=y}\end{cases}$$

Теперь найдём левые и правые производные и приравняем друг к другу, получим систему линейных уравнений, которую сначала рассмотрим при нечётном k:

$$\begin{cases} C_0 = \sum_{j=1} C_j\alpha_j + \widehat{C_j}\overline{\alpha} \\ C_0 = \sum_{j=1} C_j\alpha_j^3 + \widehat{C_j}\overline{\alpha}^3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_0 = \sum_{j=1} C_j\alpha_j^{2k-3} + \widehat{C_j}\overline{\alpha}^{2k-3} \end{cases}$$

Это система из $k-1$ -го уравнения с k неизвестными. Поэтому НУО $C_0 = 1$. Ясно, что определитель матрицы:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \overline{\alpha_1} & \alpha_2 & \overline{\alpha_2} & \cdots & \alpha_{\frac{k-1}{2}} & \overline{\alpha_{\frac{k-1}{2}}} \\ \alpha_1^3 & \overline{\alpha_1}^3 & \alpha_2^3 & \overline{\alpha_2}^3 & \cdots & \alpha_{\frac{k-1}{2}}^3 & \overline{\alpha_{\frac{k-1}{2}}}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \alpha_1^{2k-3} & \overline{\alpha_1}^{2k-3} & \alpha_2^{2k-3} & \overline{\alpha_2}^{2k-3} & \cdots & \alpha_{\frac{k-1}{2}}^{2k-3} & \overline{\alpha_{\frac{k-1}{2}}}^{2k-3} \end{pmatrix}$$

не равен нулю. Используя формулы Крамера для решения систем линейных уравнений [5]:

$$C_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где $\Delta = \det(A)$, Δ_j - определитель матрицы, полученной заменой j-го стобца на столбец свободных членов (в данном случае столбец, состоящий из единиц), получаем, что $\widehat{C_j} = \overline{C_j}$.

При чётном k:

$$\begin{cases} \sum_{j=1} C_j\alpha_j + \widehat{C_j}\overline{\alpha} = 0 \\ \sum_{j=1} C_j\alpha_j^3 + \widehat{C_j}\overline{\alpha}^3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1} C_j\alpha_j^{2k-3} + \widehat{C_j}\overline{\alpha}^{2k-3} = 0 \end{cases}$$

Данная система всегда разрешима, как система из k уравнений с $k-1$ переменной. НУО, $C_1 = 1$. Тогда с помощью формул Крамера получаем, что $\widehat{C_1} = -\overline{C_1}$ и $\widehat{C_j} = -\overline{C_j}$.

5 Пространства Соболева-Слободецкого

Опр.Пространство Соболева-Слободецкого:

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f : (1+|y|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(y) \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Норма в пространстве Соболева-Слободецкого:

$$||f||^2_{H^s(\mathbb{R})} = ||(1+|y|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(y)||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Отметим, что

$$H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}).$$

Пространство $L^2(\mathbb{R})$ не является функциональным гильбертовым пространством. При $s < 0$, пространство $H^s(\mathbb{R})$ является пространством распределений. При $s > \frac{1}{2}$ пространство вкладывается в пространство непрерывных функций [3] и является функциональным гильбертовым пространством. При целых s норма в $H^s(\mathbb{R})$ эквивалентна норме в $W_2^s(\mathbb{R})$ [3], и следовательно пространства Соболева $W_2^s(\mathbb{R})$ и Соболева-Слободецкого $H^s(\mathbb{R})$ совпадают как множества.
Скалярное произведение в $H^s(\mathbb{R})$ имеет вид:

$$\langle f, g \rangle_{H^s(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} (1+|x|^2)^s \widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}(x)} dx.$$

$$f(y) =< f, k(.,y) >_{H^s(\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) e^{ixy} dx = \int_{\mathbb{R}} (1+|x|^2)^s \widehat{f}(x) \frac{e^{ixy}}{(1+|x|^2)^s} dx.$$

То есть ядро равно:

$$k(x,y) = \frac{\check{e^{-ixy}}}{(1+|x|^2)^s}.$$

При $s = 2$:

$$k(x,y) = C(1+|x-y|)e^{-|x-y|}.$$

Такое же ядро имеет пространство $W_2^2(\mathbb{R})$ с нормой:

$$||f||^2 = ||f||^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2||f'||^2_{L^2(\mathbb{R})} + ||f''||^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Как показывают компьютерные вычисления, оно не обладает свойством (CNP). Для этого воспользуемся теоремой 1.2 и возьмём

$$x_1 = 1, x_2 = 100, x_3 = 200, x_4 = 20.$$

Тогда

$$det\left\{1-\frac{k(x_i,x_4)k(x_j,x_4)}{k(x_i,x_j)k(x_4,x_4)}\right\}_{i,j=1}^{3}=-3.609999518$$

из чего следует, что эта матрица не является положительно определённой.

При $s=3$:

$$k(x,y)=C(3+3|x-y|+|x-y|^2)e^{-|x-y|}.$$

Компьютерные вычисления показывают, что это ядро также не обладает свойством (CNP):

$$x_1=1, x_2=100, x_3=3, x_4=4.$$

Тогда

$$det\left\{1-\frac{k(x_i,x_4)k(x_j,x_4)}{k(x_i,x_j)k(x_4,x_4)}\right\}_{i,j=1}^{3}=-2.638624877.$$

Список литературы

[1] Agler J., McCarthy J.E-Pick Interpolation and functional Hilbert spaces, Graduate Studies in Mathematics 44, Amer. Math. Soc., (2002).

[2] Agler J. Nevanlinn-Pick Interpolation on Sobolev Space, Proc. Amer.Math. Soc. 108, 341-351 (1990)

[3] Лионс Ж.-Л., Э.Madженес - Неоднородные граничные задачи и их приложения. (1971).

[4] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — Изд. 3-е, перераб., М.: «Наука», 1970. — 400 с

[5] Михлин С.Г - Линейные уравнения в частных производных. Москва (1971).

[6] S.Shimorin Complete Nevanlinna-Pick property of Dirichlet-type spaces. J.Functional Analisys 276-296. (2002).

[7] P.Quiggin For which reproducing kernel Hilbert spaces is Pick theorem true? Integral Equations and Operator Theory 16 (1993) no. 2, 244-266

[8] G.Pick Uber die Beschrankungen analytischer Funktionen, weiche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden, Math. Ann 77 (1916), 7-23

[9] R.Nevanlinna, Uber beschrankte Funktionen Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 32 (1929), no. 7.

[10] K.Seip Interpolation and Sampling in Spaces of Analytic Functions. Amer.Math.Soc. (2004)

[11] D. E. Marshall, C. Sundberg, Interpolating sequences for the multipliers of the Dirichlet space, preprint, (1993).

[12] P.Quiggin Generalisations of Pick's theorem to reproducing kernel Hilbert spaces, Ph.D thesis, Lancaster University, (1994).

[13] Shapiro, H. S.; Shields, A. L. On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces, Math. Z. 80 (1962) 217-229.