

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика  
Динамические системы, эволюционные уравнения, экстремальные задачи  
и математическая кибернетика

Викулов Евгений Игоревич

Сверхбыстрый алгоритм акустической эхокомпенсации для  
авторегрессионной модели

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, доцент,  
профессор А. Е. Барабанов

Рецензент:  
кандидат физико-математических наук,  
разработчик ПО А. А. Мельников

Санкт-Петербург  
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY  
Applied Mathematics and Informatics  
Dynamical systems, evolution equations, extremal problems and  
mathematical cybernetics

Vikulov Evgenii

Superfast algorithm of acoustic echo cancellation for autoregression model

Graduation Project

Scientific supervisor:  
Doctor of Physics and Mathematics,  
Senior Research Worker A. E. Barabanov

Reviewer:  
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Software developer A. A. Melnikov

Saint-Petersburg  
2017

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Авторегрессионная модель далёкого эхо сигнала</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Сравнение точности оценивания до и после фильтрации</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>Последовательное оценивание передаточной функции</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>22</b>
<b>6</b>	<b>Приложение</b>	<b>23</b>
6.1	Алгоритм Левинсона-Дурбина . . . . .	23
6.2	Формула Гохберга-Семенцула . . . . .	23

# Введение

В данной работе рассматривается задача акустического эхоподавления. Акустическое эхо возникает в тех случаях, когда сигнал поступающий из динамика, например, телефона или ноутбука, поступает в близко расположенный микрофон. Это проблема широко распространена и возникает в любой системе, имеющей динамик и микрофон: телефон в режиме громкой связи, ноутбук, система громкой связи в автомобиле, конференционный телефон и так далее.

Акустическое эхо можно подразделить на далекое и близкое. Близкое эхо — это сигнал, который напрямую попадает в микрофон практически без изменений. Далекое эхо — это звук, который претерпевает изменения, вызванные окружающей средой. Оценка именно дальнего эха вызывает основные трудности в задаче акустического эхоподавления.

Рассматривается следующая постановка задачи: измеряется сигнал, поступающий из сети в динамик, и эхо сигнал, принятый микрофоном. Требуется рассчитать передаточную функцию эхоканала.

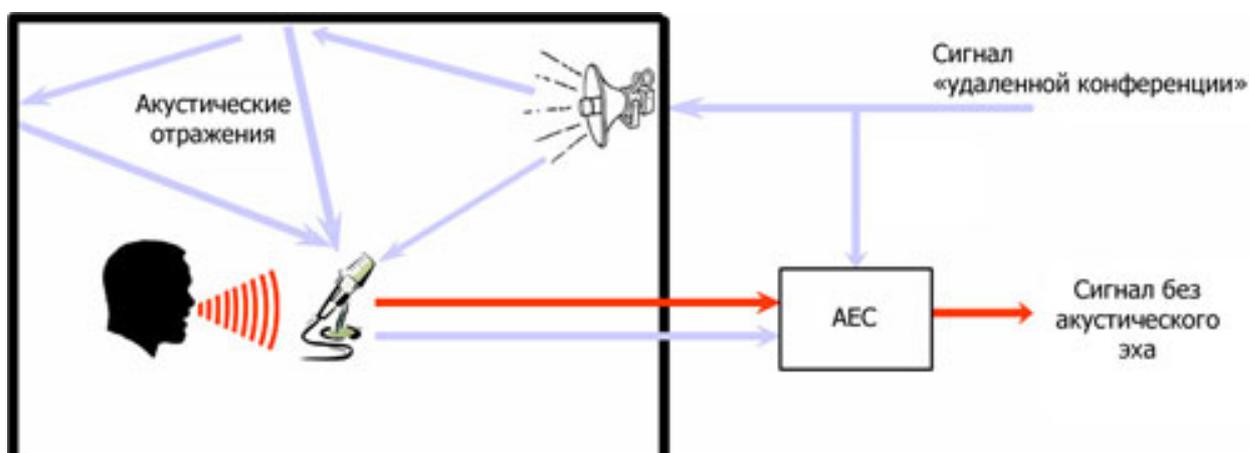


Рис. 1: Схема акустической эхокомпенсации.

Проведя большое количество экспериментов, стало понятно, что длина импульсной характеристики должна быть достаточно большой, чтобы обеспечить высокую точность компенсации эхо сигнала. Поскольку импульсная характеристика оценивается с помощью метода наименьших квадратов, требуется обращать информационную матрицу большой размерности. Сложность таких вычислений становится сравнима с обработкой видео сигнала.

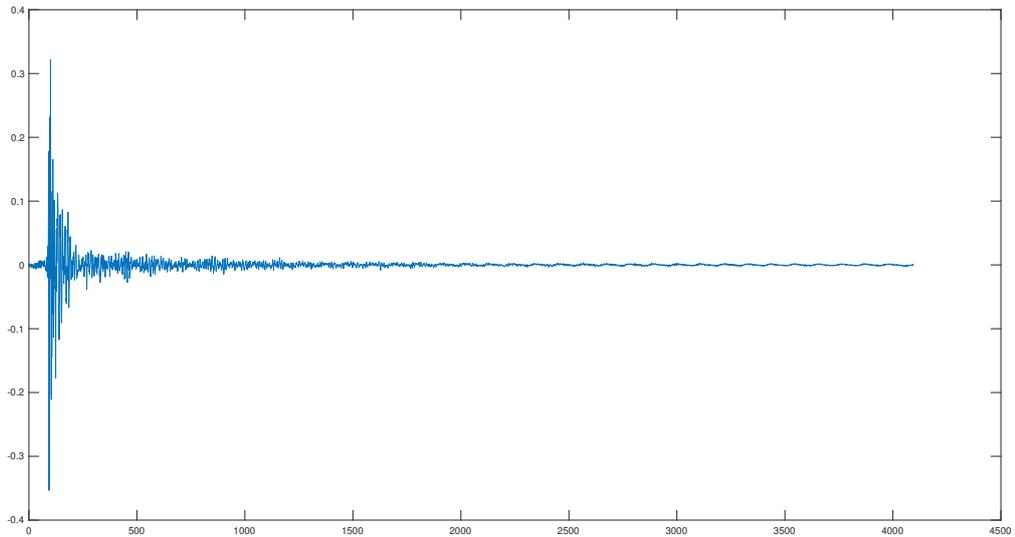


Рис. 2: Импульсная характеристика реального сигнала.

Рассматривая импульсные характеристики реальных сигналов было замечено, что начальный участок высокочастотный и нерегулярный, однако «хвост» имеет гладкую гармоническую составляющую.

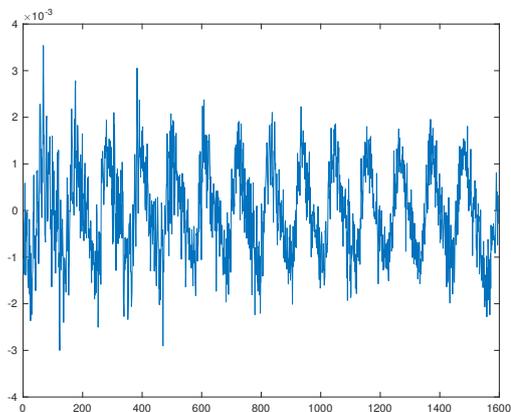


Рис. 3: «Хвост» импульсной характеристики.

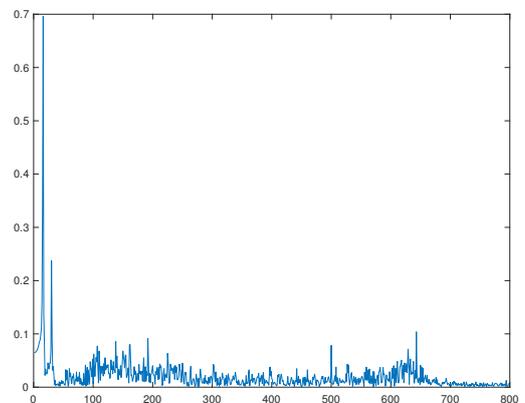


Рис. 4: Модуль преобразования Фурье «хвоста» импульсной характеристики.

Тогда рассматривая новую модель передаточной функции эхо сигнала  $W(z) = \frac{g(z)}{c(z)}$ , при правильном выборе фиксированного многочлена  $c(z)$ , можно добиться уменьшения длины импульсной характеристики. На графике 5 синим цветом изображена импульсная характеристика в рамках старой модели, а красным — новой, с фиксированным многочленом  $c(z)$ .

На графике 6 представлена исходная импульсная характеристика и разность старой и новой модели. Видно, что «хвост» уменьшился по амплитуде. Этот эффект может сильнее проявляться, если гармоническая составляющая «хвоста» имеет большую энергию.

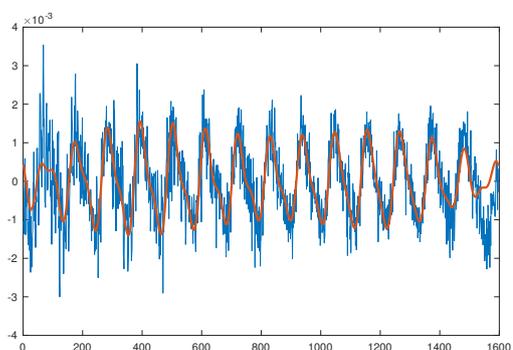


Рис. 5: Импульсные характеристики старой и новой модели.

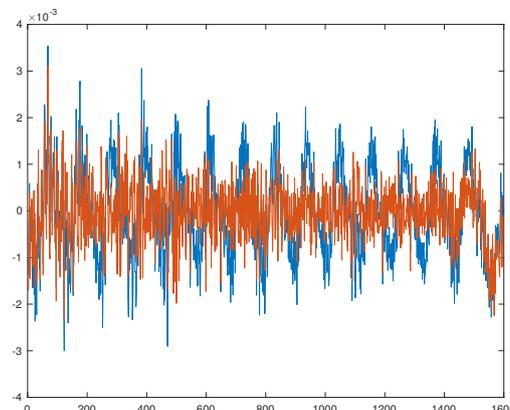


Рис. 6: Разность импульсных характеристик.

На основе представленной выше идеи возможно существенно уменьшить длину оцениваемой методом наименьших квадратов импульсной характеристики, что позволяет увеличить скорость работы алгоритма. При этом остаток, который красным цветом представлен на графике 6, в новой модели не оценивается, оценивается только гармоническая часть. Это позволяет уменьшить количество расчетов, но при этом качество ухудшается.

Также в работе приводятся оценки точности передаточной функции, сравнивается точность оценки передаточной функции до и после фильтрации сигнала, и представляется алгоритм последовательного оценивания передаточной функции с увеличением длины импульсной характеристики.

# 1 Постановка задачи

Пусть задана финитная последовательность  $(x_t)_{t=-\infty}^{\infty}$ , причём  $x_t = 0$  при  $t < 0$  и при  $t > T$ . Пусть измеряется

$$y_t = \sum_{k=0}^{L-1} \chi_k^0 x_{t-k} + v_t,$$

где  $(\chi_k^0)_{k=0}^{L-1}$  — импульсная характеристика эхо сигнала, а  $v_t$  — белый шум с дисперсией  $\sigma_v^2$ .

Требуется по этим данным оценить передаточную функцию эхо сигнала  $W_{y/x}(z)$ , а также по возможности уменьшить сложность алгоритма расчёта.

Рассмотрим задачу оценивания импульсной характеристики по методу наименьших квадратов с показателем качества

$$I(\chi) = \sum_{t=0}^{T+L} \left| y_t - \sum_{k=0}^{M-1} \chi_k x_{t-k} \right|^2.$$

Введём вектор оцениваемых параметров  $\chi^0 = (\chi_k^0)_{k=0}^{L-1}$  и векторы регрессоров

$$X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \vdots \\ x_{t-L+1} \end{pmatrix}.$$

Тогда  $y_t = X_t^* \chi^0 + v_t$ . Определим вектор настраиваемых параметров  $\chi = (\chi_k)_{k=0}^{L-1}$ . Тогда

$$I(v) = \sum_{t=0}^{T+L} \left| y_t - \sum_{k=0}^{M-1} X_t^* \chi \right|^2 = \chi^* R \chi - 2\chi^* Y + \sum_{t=0}^{T+L} y_t^2,$$

где

$$R = \sum_{t=0}^{T+L} X_t X_t^*, \quad Y = \sum_{t=0}^{T+L} X_t y_t.$$

Оптимальный вектор

$$\hat{\chi} = R^{-1} Y = (\hat{\chi}_k)_{k=0}^{L-1}.$$

Оценкой передаточной функции эхо сигнала является преобразование Фурье

$$\widehat{W}_{y/x}(z) = \sum_{k=0}^{L-1} \widehat{\chi}_k z^k.$$

Точность этой оценки определяется корреляционной функцией входного процесса регрессоров  $(x_t)_{t=-\infty}^{\infty}$ .

Рассмотрим информационную матрицу метода наименьших квадратов  $R = (R_{i,j})_{i,j=0}^{L-1}$ . По определению,

$$R_{i,j} = \sum_{t=0}^{T+L} x_{t-i} x_{t-j}, \quad 0 \leq i, j \leq L-1.$$

Поскольку  $x_t = 0$  при  $t < 0$  и при  $t > T$ , то при  $0 \leq i, j \leq L-1$

$$R_{i,j} = \sum_{t=0}^{T+L} x_{t-i} x_{t-j} = \sum_{s=-i}^{T+L-i} x_s x_{s+i-j} = \sum_{s=0}^T x_s x_{s+i-j}.$$

Таким образом,  $R_{i,j} = R_{i-j}^x$  — значение эмпирической корреляционной функции процесса регрессоров  $(x_t)_{t=-\infty}^{\infty}$ . Тёплицева матрица  $R$  определяет уравнение Юла-Уокера для этой корреляционной функции:

$$R \begin{pmatrix} 1 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Введём многочлен Сегё

$$\psi(z) = 1 + \psi_1 z + \dots + \psi_L^L z^L.$$

Следующее утверждение аналогично доказанному в [1].

**Теорема 1.** *Представим комплексное значение  $\psi(z)$  в показательной форме:  $\psi(e^{i\phi}) = \rho(\phi) e^{i\alpha(\phi)}$ , причём функция  $\alpha(\phi)$  непрерывна на  $[0, \pi]$ .*

Тогда для любого  $\phi \in [0, \pi]$

$$\frac{1}{L} \mathbf{E} |W^0(e^{i\phi}) - \widehat{W}(e^{i\phi})|^2 = \frac{\sigma_v^2 |\psi(e^{i\phi})|^2}{d} \left( 1 - \frac{2\alpha'(\phi)}{L} \right).$$

*Доказательство.* Пусть  $\Delta\chi = \widehat{\chi} - \chi^0$  — погрешность оценки импульсной характеристики. Матрица ковариаций оценок импульсной характеристики есть

$$\mathbf{E}(\Delta\chi)(\Delta\chi)^* = \sigma_v^2 R^{-1},$$

где  $R$  — тёплицева информационная матрица МНК с первым столбцом  $r = (r_k)_{k=0}^{L-1}$ .

Для любого комплексного числа  $z$  определим строку  $q(z) = (1, z^{-1}, \dots, z^{-L+1})$ . Тогда передаточная функция и её оценка есть  $W^0(z) = q(z)\chi$ ,  $\widehat{W}(z) = q(z)\widehat{\chi}$ . Поэтому

$$\frac{1}{N} \mathbf{E} |W^0(e^{i\phi}) - \widehat{W}(e^{i\phi})|^2 = \frac{\sigma_v^2}{L} q(e^{i\phi}) R^{-1} q(e^{i\phi})^*.$$

Здесь и далее символ  $*$  обозначает транспонирование и комплексное сопряжение.

По формуле Сегё [4] тёплицева матрица  $R$  и соответствующий многочлен Сегё  $\psi(z)$  связаны следующим условием: для любых комплексных чисел  $\lambda$  и  $\mu$  на единичной окружности

$$q(\lambda) R^{-1} q(\mu)^* = \frac{1}{d(1 - \lambda^{-1}\mu)} \left[ \psi(\lambda^{-1})\psi(\mu) - (\lambda^{-1}\mu)^L \psi(\lambda)\psi(\mu)^{-1} \right].$$

Рассмотрим предельный случай. Пусть  $\mu = z$  и  $\lambda \rightarrow z$ . По правилу Лопиталья

$$\begin{aligned} q(z) R^{-1} q(z)^* &= \lim_{\lambda \rightarrow z} \frac{\lambda \psi(\lambda^{-1})\psi(z) - (\lambda^{-1}z)^L \psi(\lambda)\psi(z)^*}{\lambda - z} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow z} \frac{\lambda}{d} \left[ \psi(\lambda^{-1})\psi(z) - (\lambda^{-1}z)^L \psi(\lambda)\psi(z)^* \right]' \Big|_{\lambda=z} \\ &= \frac{1}{d} \left[ -2 \operatorname{Re}[z\psi'(z)\psi(z)^*] + L|\psi(z)|^2 \right] \\ &= \frac{L}{d} |\psi(z)|^2 \left[ 1 - \frac{2}{L} \operatorname{Re} \left( \frac{z\psi'(z)}{\psi(z)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Пусть  $z = e^{i\phi}$  и  $\psi(z) = \rho(\phi)e^{i\alpha(\phi)}$ . Тогда

$$\psi(e^{i\phi})'_\phi = iz\psi'(z), \quad \log(\psi(e^{i\phi}))'_\phi = i \frac{z\psi'(z)}{\psi(z)},$$

и поэтому

$$\operatorname{Re} \left( \frac{z\psi'(z)}{\psi(z)} \right) = \operatorname{Im} (\log(\psi(e^{i\phi}))'_\phi) = \operatorname{Im} ((\log(\rho(\phi)))'_\phi + i\alpha'(\phi)) = \alpha'(\phi),$$

что завершает доказательство. □

Сложность расчётов определяется вычислением коэффициентов многочлена Сегё  $\psi(z)$  степени  $L - 1$ . Это можно сделать при помощи сверхбыстрого алгоритма Шура за порядка  $L \log_2^2 L$  операций умножения и сложения.

Рассчитаем левую и правую часть утверждения теоремы 1 и выведем на график их значения для различных значений  $\phi \in [0; \pi]$ . Рассмотрим случайный сигнал  $(x)_{m=0}^{4351}$  (Рис. 7) и импульсную характеристику  $(\chi_k^0)_{k=0}^{127}$  (Рис. 9). Сигнал  $y$  определяющийся следующим образом  $y_t = \sum_{k=0}^{4351} \chi_k^0 x_{t-k} + v_t$ , где  $v$  нормально распределенная последовательность с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, представлен на Рис. 8.

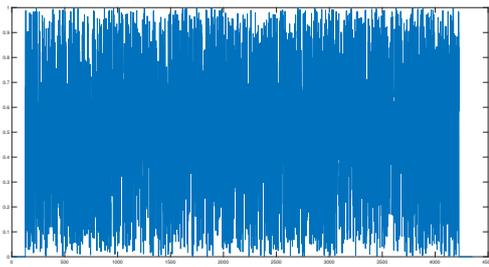


Рис. 7: Сигнал  $x$ .

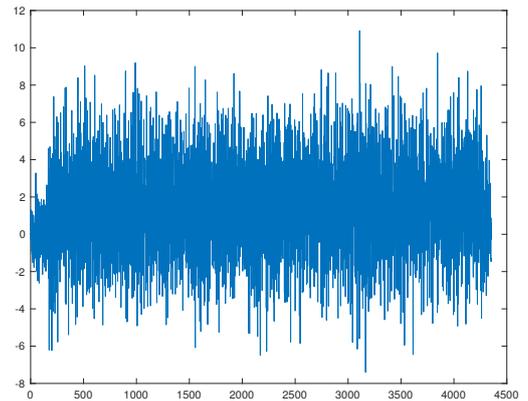


Рис. 8: Сигнал  $y$ .

Генерируя различные последовательности  $v$ , можно получить выборку сигналов  $y$ . Для каждой такой последовательности оценивается импульсная характеристика, на основе которой строится передаточная функция.

Вычисляя среднеквадратичную ошибку для каждой оцененной передаточной функции, можно рассчитать левую часть равенства из утверждения теоремы 1. На графике 10 синим цветом обозначена реальная импульсная характеристика, а красным ее оценка.

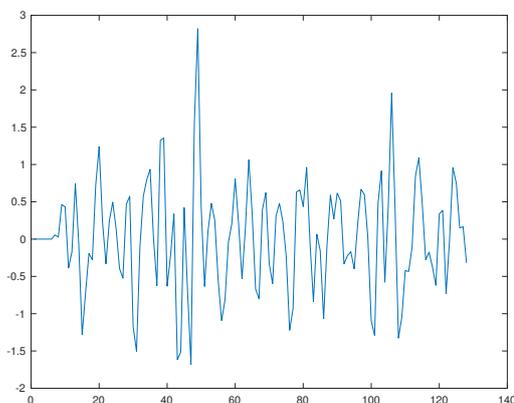


Рис. 9: Импульсная характеристика.

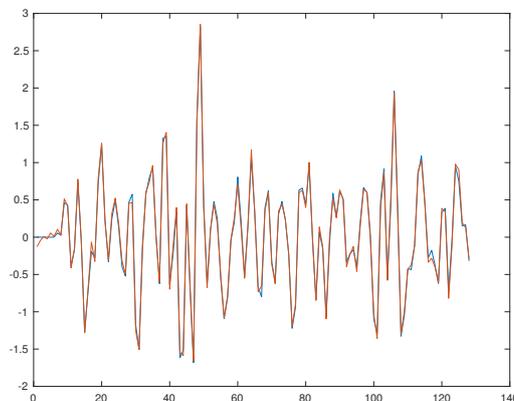


Рис. 10: Импульсная характеристика и ее оценка.

Для расчета правой части было решено уравнение Юла-Уокера, на основе которого строится многочлен Сеге  $\psi(z)$ . На графике 11 представлены значения левой и правой части утверждения теоремы для  $\phi \in [0; \pi]$ .

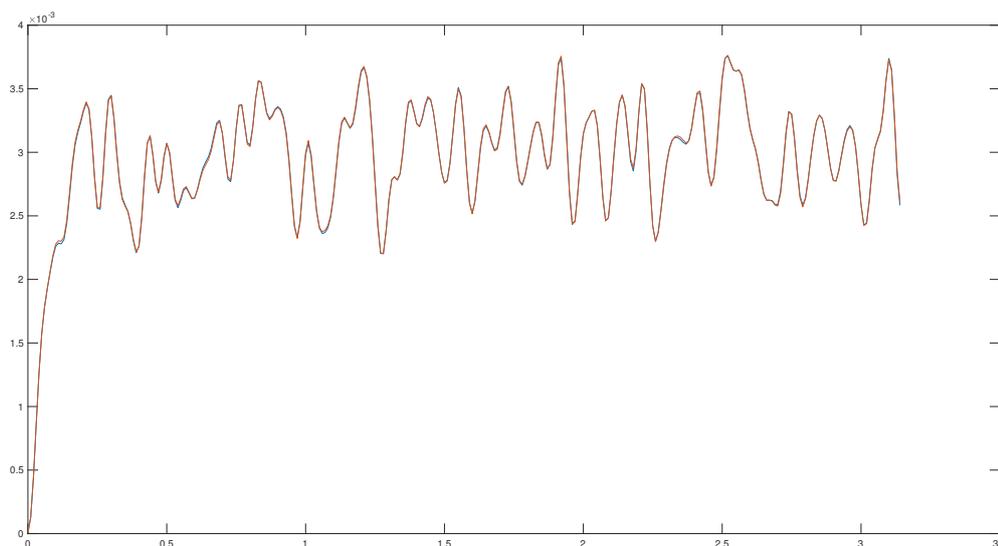


Рис. 11: Правая и левая части утверждения теоремы 1.

## 2 Авторегрессионная модель далёкого эхо сигнала

Количество настраиваемых параметров является важнейшей характеристикой системы акустической эхокомпенсации, так как влияет на критические ограничения по памяти и быстродействию. Экспериментально установлено, что длинные пути распространения эхо сигнала описываются суммами геометрических прогрессий, набор знаменателей которых можно заранее определить. Это позволяет существенно сократить количество настраиваемых параметров, но при этом подход к решению задачи должен быть изменён.

Пусть передаточная функция эхо сигнала имеет вид

$$W_{y/x}(z) = \frac{g(z) + \tilde{g}(z)z^L}{c(z)},$$

где  $c(z)$  — устойчивый многочлен степени  $n$ ,  $\tilde{g}(z)$  — многочлен степени не выше  $n - 1$ ,  $g(z)$  — многочлен степени  $M - 1 \leq L$ . Определим последовательность  $(u_t)_{t=0}^{\infty}$  равенством

$$c(q^{-1})u_t = x_t, \quad t \geq 0,$$

где  $q^{-1}$  — оператор сдвига назад, и условием  $u_t = 0$  при  $t < 0$ . В дальнейшем для простоты будем предполагать, что последовательность  $(x_t)_{t=-\infty}^{\infty}$  такая, что  $u_t = 0$  при  $t > T$ .

Уравнение измерений можно записать в виде

$$y_t = \sum_{k=0}^{M-1} g_k u_{t-k} + \tilde{g}(q^{-1})u_{t-L} + v_t,$$

В нём количество неизвестных параметров равно  $M + n - 1$ . При  $M \ll L$  количество оцениваемых параметров существенно уменьшается.

Пусть  $(g_k)_{k=0}^{M-1}$  — коэффициенты многочлена  $g(z)$ . Дополним этот набор нулями до размерности  $L - 1$  и определим  $g_{L+j} = \tilde{g}_j$  — коэффициенты

многочлена  $\tilde{g}(z)$ ,  $0 \leq j \leq n - 1$ . Тогда

$$c(q^{-1})\chi_k^0 = g_k, \quad 0 \leq k \leq L + n - 1.$$

Отсюда видно, что импульсная характеристика  $\chi_k^0$  удовлетворяет устойчивому однородному уравнению на промежутке  $[M, L]$ . Условие  $M \ll L$  означает, что «хвосты» импульсной характеристики эха экспоненциально убывают. Показатели этих экспонент, определяющие корни многочлена  $c(z)$ , могут быть оценены в практических экспериментах при помощи исследования спектров нескольких точно рассчитанных импульсных характеристик.

Пусть  $M \ll L$ . Тогда  $\chi_k^0$  является суммой убывающих геометрических прогрессий на промежутке  $[M, L]$ . Поэтому величины

$$\tilde{g}_j = c(q^{-1})\chi_{L+j}^0, \quad 0 \leq n - 1,$$

относительно малы.

Уравнение измерений можно записать в виде

$$y_t = \sum_{k=0}^{M-1} g_k^0 u_{t-k} + \tilde{y}_t + v_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где

$$\tilde{y}_t = \tilde{g}(q^{-1})u_{t-L}.$$

Далее малые величины  $\tilde{g}_j$  будем игнорировать и оценивать только коэффициенты  $g_k^0$ . Введём вектор неизвестных величин и векторы регрессоров

$$g^0 = \begin{pmatrix} g_0^0 \\ \vdots \\ g_{M-1}^0 \end{pmatrix}, \quad U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ \vdots \\ u_{t-M+1} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Для оценки  $g^0$  по методу наименьших квадратов введём информационную матрицу  $R^u$  и вектор правых частей  $Y^u$ :

$$R^u = \sum_{t=0}^T U_t U_t^*, \quad Y^u = \sum_{t=0}^T U_t y_t.$$

Оценка метода наименьших квадратов для импульсной характеристики имеет вид

$$\widehat{g} = (R^u)^{-1}Y^u = (\widehat{g}_k)_{k=0}^{M-1}.$$

Введём вспомогательный вектор, характеризующий малость величин  $\widetilde{g}_j$ , по которым была обрезана убывающая импульсная характеристика эха:

$$S = \sum_{t=0}^T U_t \widetilde{y}_t.$$

Оценкой передаточной функции  $W_{y/x}^0(z)$  является

$$\widehat{W}_{y/x}(z) = \frac{1}{c(z)} \sum_{k=0}^{M-1} \widehat{g}_k z^k, \quad |z| = 1.$$

**Теорема 2.** Пусть  $(\psi(z), d)$  – решение уравнение Юла–Уокера для тепловой матрицы  $R^u$ . Тогда при  $|z| = 1$

$$\mathbb{E} |\widehat{W}_{y/x}(z) - W_{y/x}^0(z)|^2 \leq \frac{1}{|c(z)|^2} \left[ |\widetilde{g}(z)|^2 + \left(1 + |(R^u)^{-1/2} S|^2\right) \frac{d}{|\psi(z)|^2} (M - \alpha'(\phi)) \right],$$

где  $\alpha(\phi)$  – непрерывная ветвь комплексного аргумента функции  $\psi(z)$  в точке  $z = e^{i\phi}$ .

*Доказательство.* По определению,

$$\widehat{g} = (R^u)^{-1} \sum_{t=0}^T U_t (U_t^* g^0 + \widetilde{y}_t + v_t) = g^0 + (R^u)^{-1} S + (R^u)^{-1} \sum_{t=0}^T U_t v_t.$$

Введём столбец  $v_M(z) = (1, z, \dots, z^{M-1})^T$ . Тогда  $g^0(z) = v_M(z) g^0$ . Поскольку

$$W_{y/x}^0(z) = \frac{1}{c(z)} (g^0(z) + z^M \widetilde{g}(z)),$$

то

$$\widehat{W}_{y/x}(z) - W_{y/x}^0(z) = \frac{1}{c(z)} \left[ v_M(z) [(R^u)^{-1} S + (R^u)^{-1} \sum_{t=0}^T U_t v_t] - z^M \widetilde{g}(z) \right].$$

Отсюда при  $|z| = 1$

$$\mathbf{E}|\widehat{W}_{y/x}(z) - W_{y/x}^0(z)|^2 \leq \frac{1}{|c(z)|^2} \left[ |v_M(z)(R^u)^{-1}S|^2 + |\tilde{g}(z)|^2 + \mathbf{E}|(R^u)^{-1} \sum_{t=0}^T U_t v_t|^2 \right].$$

Последнее слагаемое вычисляется по теореме 1. Оценим первое слагаемое.

$$|v_M(z)(R^u)^{-1}S|^2 \leq |v_M(z)(R^u)^{-1/2}|^2 |(R^u)^{-1/2}S|^2.$$

Величина

$$|v_M(z)(R^u)^{-1/2}|^2 = v_M(z)(R^u)^{-1}v_M(z)^*$$

вычисляется по теореме 1. Подстановка завершает доказательство.  $\square$

### 3 Сравнение точности оценивания до и после фильтрации

Фильтрация входного сигнала, перед применением метода наименьших квадратов для оценивания импульсной характеристики эхо сигнала, влияет на точность этой оценки. Рассмотрим следующий случай: передаточная функция от входного сигнала к выходному есть многочлен степени  $L - 1$

$$W_{y/x}(z) = h^0(z) = \frac{g^0(z)}{c(z)},$$

где  $g^0(z)$  — многочлен степени  $L + n - 1$ .

Определим последовательность  $(u_t)_{t=0}^{\infty}$  равенством

$$c(q^{-1})u_t = x_t, \quad t \geq 0,$$

где  $q^{-1}$  — оператор сдвига назад, и условием  $u_t = 0$  при  $t < 0$ . В дальнейшем для простоты будем предполагать, что последовательность  $(x_t)_{t=-\infty}^{\infty}$  такая, что  $u_t = 0$  при  $t > T$ .

Уравнение измерений можно записать в виде

$$y_t = \sum_{k=0}^{L-1} h_k^0 x_{t-k} + v_t = \sum_{k=0}^{L+n-1} g_k^0 u_{t-k} + v_t.$$

Для оценки  $h^0$  и  $g^0$  по методу наименьших квадратов введём векторы регрессоров

$$X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \vdots \\ x_{t-L+1} \end{pmatrix}, \quad U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ \vdots \\ u_{t-L-n+1} \end{pmatrix}.$$

По ним строятся информационные матрицы  $R^x$  и  $R^u$  и векторы правых частей  $Y^x$  и  $Y^u$ :

$$R^x = \sum_{t=0}^{T+L} X_t X_t^*, \quad R^u = \sum_{t=0}^{T+L+n} U_t U_t^*, \quad Y^x = \sum_{t=0}^{T+L} X_t y_t, \quad Y^u = \sum_{t=0}^{T+L+n} U_t y_t.$$

Оценки метода наименьших квадратов для импульсных характеристик

имеют вид

$$\widehat{h} = (R^x)^{-1}Y^x = (\widehat{h}_k)_{k=0}^{L-1}, \quad \widehat{g} = (R^u)^{-1}Y^u = (\widehat{g}_k)_{k=0}^{L+n-1}.$$

При расчёте оценки искомой передаточной функции от  $x$  к  $y$ , нужно учесть, что  $W_{x/u}(z) = c(z)$ . Поэтому получаются две оценки по методу наименьших квадратов: прямая и с дополнительной фильтрацией:

$$\widehat{h}^x(z) = \sum_{k=0}^{L-1} \widehat{h}_k z^k, \quad \widehat{h}^u(z) = \frac{1}{c(z)} \sum_{k=0}^{L+n-1} \widehat{g}_k z^k.$$

Обе матрицы  $R^x$  и  $R^u$  тёплицевы. Поэтому прямым следствием теоремы 1 является следующее утверждение о точности этих оценок.

**Теорема 3.** Пусть  $(\psi_x(z), d_x)$  и  $(\psi_u(z), d_u)$  — решения уравнения Юла-Уокера для матриц  $R^x$  и  $R^u$ , соответственно. Выделим функцию комплексного аргумента:  $\psi_x(e^{i\phi}) = r_x(\phi)e^{\alpha_x(\phi)}$ ,  $\psi_u(e^{i\phi}) = r_u(\phi)e^{\alpha_u(\phi)}$ .

Тогда для любого  $\phi \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \mathbb{E} |h^0(e^{i\phi}) - \widehat{h}^x(e^{i\phi})|^2 &= \frac{\sigma_v^2 |\psi_x(e^{i\phi})|^2}{d_x} \left( 1 - \frac{2\alpha'_x(\phi)}{L} \right), \\ \frac{1}{L+n} \mathbb{E} |h^0(e^{i\phi}) - \widehat{h}^u(e^{i\phi})|^2 &= \frac{\sigma_v^2 |\psi_u(e^{i\phi})|^2}{d_u |c(e^{i\phi})|^2} \left( 1 - \frac{2\alpha'_u(\phi)}{L+n} \right). \end{aligned}$$

Главную часть в оценках составляют множители

$$C_x = \frac{|\psi_x(e^{i\phi})|^2}{d_x}, \quad C_u = \frac{|\psi_u(e^{i\phi})|^2}{d_u |c(e^{i\phi})|^2}.$$

В общем случае они не равны и не сравнимы равномерно по  $\phi$ . Это говорит о том, что фильтрация входного сигнала может помочь улучшить оценку передаточной функции эхо сигнала на определённых частотах, и эти точности и частоты предсказуемы. Однако в некоторых случаях точности примерно одинаковы.

**Лемма 1.** Пусть  $(r_k)_{k=0}^N$  — первый столбец тёплицевой симметричной положительно определённой матрицы  $T$ . Тогда существует единственный устойчивый многочлен  $\psi(z)$  степени не выше  $N$  и число  $d$  такие,

что  $\psi(0) = 1$ , и в разложении Лорана функции

$$\frac{d}{\psi(z)\psi(z^{-1})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

выполнено  $c_k = r_k$  при  $0 \leq k \leq N$ . Пара  $(\psi, d)$  является решением уравнения Юла-Уокера для матрицы  $T$ .

*Доказательство.* Одна из формулировок уравнения Юла-Уокера состоит в следующем: пусть стационарный процесс  $y_t$  авторегрессионный и удовлетворяет уравнению

$$\psi(q^{-1})y_t = e_t,$$

где  $e_t$  — белый шум с дисперсией  $d$ , а степень  $\psi$  не больше  $N$ . Требуется по начальному отрезку  $(r_k)_{k=0}^N$  корреляционной функции процесса  $y$  найти коэффициенты многочлена  $\psi$  и число  $d$ . Это приводит к системе уравнений Юла-Уокера с матрицей  $T$ . Спектральная плотность процесса  $y$  равна

$$S_y(z) = \frac{d}{\psi(z)\psi(z^{-1})},$$

откуда следует заключение леммы. Единственность следует из невырожденности матрицы  $T$ .  $\square$

Введём обозначение для разности между спектральной плотностью и фиксированной частью ряда Лорана для последовательностей  $x_t$  и  $u_t$ :

$$\alpha^x(z) = \frac{d_x}{\psi_x(z)\psi_x(z^{-1})} - \sum_{k=-L+1}^{L-1} R_k^x z^k,$$

$$\alpha^u(z) = \frac{d_u}{\psi_u(z)\psi_u(z^{-1})} - \sum_{k=-L-n+1}^{L+n-1} R_k^u z^k.$$

Эти величины малы, если корни многочленов  $\psi_x(z)$  и  $\psi_u(z)$  далеки от области неустойчивости — единичной окружности.

Введём также функции, которые малы, если корреляционная функция  $R_k^u$  процесса  $u_t$  мала на границе вычисления — около длины импульсной

характеристики:

$$\beta(z) = \sum_{i,j=0}^n \sum_{k=L}^{L+n+1-i+j} R_{k+i-j}^u z^k c_i c_j.$$

Рассогласование коэффициентов главных частей в оценке погрешностей показывает следующее утверждение.

**Теорема 4.** При  $|z| = 1$

$$|C_x(z)^{-1} - C_u(z)^{-1}| \leq |\alpha_x(z) - |c(z)|^2 \alpha_u(z)| + 2|\operatorname{Re} \beta(z)|.$$

*Доказательство.* По определению, при  $|z| = 1$

$$C_u^{-1} = \frac{d_u |c(z)|^2}{|\psi_u(z)|^2} = |c(z)|^2 \left[ \sum_{k=-L-n+1}^{L+n-1} R_k^u z^k + \alpha_u(z) \right].$$

Кроме того, из условия  $R_{-k}^u = R_k^u$  следует, что при  $|z| = 1$

$$2 \operatorname{Re} \beta(z) = \sum_{i,j=0}^n \sum_{k=-L-n+1-i+j}^{-L} R_{k+i-j}^u z^k c_i c_j + \sum_{i,j=0}^n \sum_{k=-L-n+1-i+j}^{-L} R_{k+i-j}^u z^{-k} c_i c_j.$$

Введём строку  $\bar{c} = (c_0, \dots, c_n)$  и матрицу размерности  $L \times (L+n)$ :

$$C = \begin{pmatrix} \bar{c} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{c} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{c} \end{pmatrix}.$$

В этой записи нули имеют разную размерность и не выравнены по вертикали. Матрица  $C$  построена так, что  $X_t = C U_t$  при всех  $t$ , и поэтому  $R^x = C R^u C^*$ . Покомпонентно для элементов первого столбца:

$$R_k^x = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i c_j R_{k+i-j}^u, \quad 0 \leq k \leq L-1.$$

Поскольку для корреляционной функции  $R_k^x = R_{-k}^x$  и  $R_k^u = R_{-k}^u$ , то это свойство выполнено и при  $-L+1 \leq k \leq -1$ . Выполним тождественные

преобразования:

$$\begin{aligned}
& c(z)c(z^{-1}) \sum_{k=-L-n+1}^{L+n-1} R_k^u z^k = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=-L-n+1}^{L+n-1} R_k^u z^{k-i+j} c_i c_j \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{m=-L-n+1-i+j}^{L+n-1-i+j} R_{m+i-j}^u z^m c_i c_j \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i c_j \left[ \sum_{m=-L+1}^{L-1} R_{m+i-j}^u z^m + \sum_{m=-L-n+1-i+j}^{-L} R_{m+i-j}^u z^m \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=L}^{L+n-1-i+j} R_{m+i-j}^u z^m \right] \\
&= \sum_{m=-L+1}^{L-1} R_{m+i-j}^x z^m + 2 \operatorname{Re} \beta(z),
\end{aligned}$$

где в последнем действии выполнена подстановка выражения для  $R_k^x$  и для  $2 \operatorname{Re} \beta(z)$ . Остаётся подставить

$$\sum_{m=-L+1}^{L-1} R_{m+i-j}^x z^m = C_x(z)^{-1} - \alpha^x(z).$$

Из равенства

$$C_u(z)^{-1} = |c(z)|^2 \alpha_u(z) + C_x(z)^{-1} - \alpha^x(z) + 2 \operatorname{Re} \beta(z)$$

следует заключение теоремы. □

## 4 Последовательное оценивание передаточной функции

Рассмотрим исходную задачу оценивания по входному сигналу  $x_t$ . Надставим нулями вектор оцениваемых параметров. Определим расширенный вектор оцениваемых параметров и векторы регрессоров

$$\chi^m = \begin{pmatrix} \chi_0^0 \\ \vdots \\ \chi_{L-1}^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_t^m = \begin{pmatrix} x_t \\ \vdots \\ x_{t-L-m+1} \end{pmatrix},$$

так что  $y_t = (X_t^m)^* \chi^m + v_t$ . Определим вектор настраиваемых параметров  $\chi^m = (\chi_k^m)_{k=0}^{L+m-1}$  размерности  $L+m-1$ . Тогда оценка метода наименьших квадратов с показателем качества

$$I(\chi^m) = \sum_{t=0}^{T+L} |y_t - (X_t^m)^* \chi^m|^2$$

имеет вид

$$\hat{\chi} = R_m^{-1} Y_m,$$

где матрица  $R_m$  — тёплица со значениями корреляционной функции  $x_t$  в первом столбце:

$$(R_m)_{k,1} = \sum_{t=0}^{T+L} x_t x_{t-k} = R_k^x, \quad 0 \leq k \leq L+m,$$

а вектор правых частей имеет компоненты  $Y_m = (Y_{m,k})_{k=0}^{L+m}$ ,

$$Y_{m,k} = \sum_{t=0}^{T+L} x_{t-k} y_t, \quad 0 \leq k \leq L+m.$$

Очевидно, что при  $m_1 > m_2$  вектор  $Y_{m_2}$  является верхним подвек-

тором  $Y_{m_1}$ , а матрица  $R_{m_2}$  — левой верхней угловой подматрицей  $R_{m_1}$ . Многочлены Сегё для таких подматриц вычисляются пр помощи рекурсии Левинсона–Дурбина.

**Теорема 5.** Пусть  $(\psi_k(z), d_k)_{k=0}^{L+M}$  — набор решений уравнения Юла-Уокера по корреляционной последовательности  $(R_k^x)_{k=0}^{L+M}$ . Для каждого  $m = L, \dots, L+M$  при помощи формулы Гохберга–Семенцула определяется оценка расширенной импульсной характеристики

$$\widehat{\chi}_m = R_m^{-1} Y_m = (\widehat{\chi}_{m,k})_{k=0}^{L+m}$$

и далее оценка передаточной функции

$$\widehat{W}_m(z) = \sum_{k=0}^{L+m} \widehat{\chi}_{m,k} z^k.$$

Тогда при  $|z| = 1$

$$\mathbb{E}|W^0(z) - W_m(z)|^2 = \frac{\sigma_v^2 |\psi_m(z)|^2}{d_m} (L + m - 2\alpha'_m(z)),$$

где  $\alpha_m(z)$  — непрерывная ветвь комплексного аргумента многочлена  $\psi_m(z)$  и производная берётся вдоль единичной окружности.

Сложность расчёта при помощи рекурсии Левинсона–Дурбина квадратична относительно  $L + M$ . Однако можно рассчитывать не все оценки  $W_m(z)$  подряд, а выборочно. Сверхбыстрый алгоритм Шура позволяет довести сложность последовательных расчётов до порядка  $(L + M) \log_2^2(L + M)$  и при этом вычислить  $\log_2(L + M)$  разных оценок. Поскольку точности на разных частотах, определяемых точкой  $z = e^{i\phi}$  на единичной окружности, зависят от  $m$ , то в качестве результата оценивания для каждого  $\phi$  можно подобрать значение подходящей оценки  $W_m(e^{i\phi})$ .

Проведем последовательное оценивание передаточной функции. Рассмотрим пример из первого раздела, где был взят случайный сигнал  $(x)_{m=0}^{4351}$  и импульсная характеристика  $(\chi_k^0)_{k=0}^{127}$ . Сигнал  $y$  определялся, как  $y_t = \sum_{k=0}^{4351} \chi_k^0 x_{t-k} + v_t$ , где  $v$  — белый шум. Последовательно рассчитаем ошибки оценки передаточной функции, добавляя на каждом шаге нуль к вектору

оцениваемых параметров. Длина вектора оцениваемых параметров меняется на каждом шаге на единицу, от 128 до 1000. Для каждой длины вычисляется набор погрешностей оценок передаточной функции для разных частот. На графике 12 можно увидеть изменение ошибок оценок передаточных функций на разных частотах.

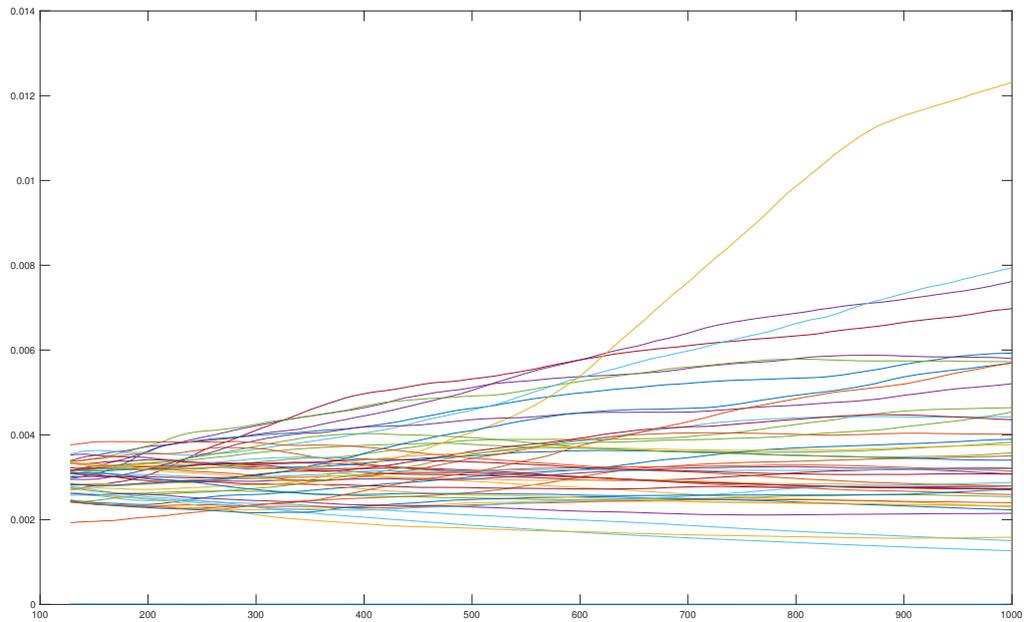


Рис. 12: Ошибки оценок передаточных функций для разных длин импульсных характеристик.

## 5 Заключение

В работе получены явные формулы для точности оценок передаточной функции эхо сигнала, рассчитанной на основе линейной модели и метода наименьших квадратов, а также сложности расчёта этих оценок. Сформулирован новый алгоритм последовательного оценивания и сокращённый способ оценивания за счёт дополнительной фильтрации входного сигнала. Работа выполнена при поддержке гранта СПбГУ 6.37.349.2015.

## 6 Приложение

### 6.1 Алгоритм Левинсона-Дурбина

Рассмотрим уравнение Юла-Уокера в виде

$$R\tilde{a} = \varkappa,$$

где

$$\begin{pmatrix} r_0 & \bar{r}_1 & \dots & \bar{r}_n \\ r_1 & r_0 & \dots & \bar{r}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n & r_{n-1} & \dots & r_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \varkappa = \begin{pmatrix} \sigma_v^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальный многочлен, рассчитанный по уравнению Юла-Уокера произвольного порядка  $n$ , обозначим  $a_{(n)}$ . Тогда рекуррентная система уравнений относительно коэффициентов  $K_n$ , дисперсий  $d_n$  и коэффициентов многочленов  $a_{(n)} = 1 + a_{n,1}z + \dots + a_{n,n}z^n$  является алгоритмом Левинсона-Дурбина:

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= d_n^{-1} \sum_{k=0}^n a_{n,k} r_{n+1-k}, \\ d_{n+1} &= (1 - |K_{n+1}|^2) d_n, \\ a_{(n+1)}(z) &= a_{(n)}(z) - K_{n+1} z a_{(n)}^*(z), \end{aligned}$$

с начальными данными  $d_0 = r_0$  и  $a_{(0)}(z) = 1$ .

Сложность алгоритма составляет  $O(n^2)$ .

### 6.2 Формула Гохберга-Семенцула

**Теорема 6.** По коэффициентам многочлена Сеге  $\psi_n$  определим две тензорные матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{\psi}_{n,n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{\psi}_{n,n-1} & \bar{\psi}_{n,n} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \bar{\psi}_{n,1} & \bar{\psi}_{n,2} & \bar{\psi}_{n,3} & \dots & \bar{\psi}_{n,n} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \psi_{n,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \psi_{n,2} & \psi_{n,1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{n,n} & \psi_{n,n-1} & \psi_{n,n-1} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$T^{-1} = \frac{1}{d_n}(M_1 M_1^* - M_0 M_0^*).$$

Решение уравнения  $Tx = b$  при заданном векторе  $b = (b_k)_{k=0}^n$  можно получить при помощи быстрого преобразования Фурье. Будем предполагать, что число  $n + 1$  есть степень 2, в противном случае вектор можно дополнить нулями.

Умножение на матрицу  $M_1$  можно рассматривать как круговую свертку с последовательностью  $b$ , дополненной нулями до порядка  $2(n + 1)$ , из которой выбираются только первые  $n + 1$  элементов.

Введем преобразование Фурье порядка  $N = 2(n + 1)$  от коэффициентов последнего многочлена Сеге:

$$C_m = FFT(\psi) = \sum_{k=0}^{N-1} \psi_{n,k} e^{-\frac{2\pi i}{N} km}, \quad 0 \leq m \leq N - 1,$$

причем  $\psi_{n,k} = 0$  при  $k > N/2 = n + 1$ . По определению  $(C_m)_{m=0}^{N-1}$  есть БПФ от первого столбца матрицы  $M_1$ , дополненного нулями до размерности  $N$ .

Пусть  $Y = (Y_m)_{m=0}^{N-1}$  — БПФ от вектора  $y$  размерности  $N/2$ , дополненного нулями до размерности  $N$ . Тогда произведение  $M_1 y$  совпадает с первым  $n + 1$  элементом обратного БПФ от произведения  $(C_m Y_m)_{m=0}^{N-1}$ .  $M_1^* y$  получается аналогичным способом, где вместо  $C_m$  нужно подставлять комплексно сопряженные числа  $\bar{C}_m$ . В результате получается следующий алгоритм расчета уравнения  $Tx = b$ :

1. Вектор  $M_1^* b$  является первыми  $N/2$  компонентами в обратном БПФ от произведения  $(\bar{C}_m B_m)_{m=0}^{N-1}$ .
2. Пусть  $Y_1 = (Y_{1,m})_{m=0}^{N-1}$  — БПФ от вектора  $M_1^* b$  дополненного нулями

до размерности  $N$ . Тогда вектор  $M_1 M_1^* b$  совпадает с первыми  $N/2$  компонентами в обратном БПФ от произведения  $(C_m Y_{1,m})_{m=0}^{N-1}$ .

3. Вектор  $M_0^*$  является первыми  $N/2$  компонентами в обратном БПФ от произведения  $((-1)^m (C_m - 1) B_m)_{m=0}^{N-1}$ .
4. Пусть  $Y_0 = (Y_{0,m})_{m=0}^{N-1}$  есть БПФ от вектора  $M_0^* b$ , дополненного нулями до размерности  $N$ . Тогда вектор  $M_0 M_0^* b$  совпадает с первыми  $N/2$  компонентами в обратном БПФ от произведения  $((-1)^m (\overline{C}_m - 1) Y_{0,m})_{m=0}^{N-1}$ .

Таким образом, для решения уравнения  $Tx = b$  с треугольной самосопряженной матрицей  $T$  порядка  $n+1$  требуется хранить в памяти  $N = 2(n+1)$  комплексных чисел  $C = (C_m)_{m=0}^{N-1}$  и число  $d = d_n$ . Основная часть вычислений состоит в применении БПФ на  $N$  точек семь раз. В итоге сложность алгоритма составляет  $O(N \log_2 N)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Ю. Груша, "Точность оценивания передаточной функции линейного фильтра," *Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59)*. 2014. Вып. 1
2. Durbin J. The fitting of time series models // *Review of International Statistical Institute*. 1960. Vol. 28, N 3. P. 233–244.
3. Ammar G., Gragg W. Superfast solution of real positive definite Toeplitz systems // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 1988. Vol. 9. P. 61–76.
4. Szego G. Orthogonal polynomials. American Mathematical Society. Providence, RI. 1939
5. S. S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 2002.
6. Paleologu, C.; Benesty, J.; Grant, S.L.; Osterwise, C.; "Variable step-size NLMS algorithms for echo cancellation" *2009 Conference Record of the forty-third Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers.*, pp. 633-637, Nov 2009.
7. Makino, S., Kaneda, Y.: Acoustic Echo Canceller Algorithm Based On the Variation Characteristics of a Room Impulse Response. In: *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-1990*, vol. 2, pp. 1133–1136 (1990)
8. S. Gollamudi, S. Nagaraj, S. Kapoor, and Y.-F. Huang, "Set-membership filtering and a set-membership normalized LMS algorithm with an adaptive step size," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 5, no. 5, pp. 111–114, May 1998.
9. H. Yasukawa, S. Shimada, and I. Furukawa, "Acoustic echo canceller with high speech quality," in *Proc. IEEE ICASSP'87 (Dallas, TX)*, pp. 2125-2128.
10. W. Kellermann, "Analysis and design of multirate systems for cancellation of acoustical echoes," in *Proc. IEEE ICASSP'88 (New York, NY)*, pp. 2570-2573.

11. A. Gilloire and M. Vetterli, "Adaptive filtering in subbands," in Proc. IEEE ICASSP'88 (New York, NY), pp. 1572-1575.
12. A. Gilloire and M. Vetterli, "Adaptive filtering in subbands with critical sampling: Analysis, experiments, and application to acoustic echo cancellation," IEEE Trans. Signal Process., vol. 40, no. 8, pp. 1862–1875, Aug. 1992.
13. K. A. Lee and W. S. Gan, "Improving convergence of the NLMS algorithm using constrained subband updates," IEEE Signal Process. Lett., vol. 11, no. 9, pp. 736–739, Sep. 2004.
14. S. Gollamudi, S. Nagaraj, S. Kapoor, and Y.-F. Huang, "Set-membership filtering and a set-membership normalized LMS algorithm with an adaptive step size," IEEE Signal Process. Lett., vol. 5, no. 5, pp. 111–114, May 1998.
15. Z. Zheng; Z. Liu; H. Zhao; Y. Yu; L. Lu, "Robust Set-Membership Normalized Subband Adaptive Filtering Algorithms and Their Application to Acoustic Echo Cancellation," IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol.PP, no.99, pp.1-14, April 2017
16. Contan, C., Topa, M., Kirei, B., Homana, I.: Nonlinear Acoustic System Identification using a Combination of Volterra and Power Filters. In: IEEE 10th International Symposium on Signals, Circuits and Systems (ISSCS), pp. 1–4 (2011)
17. Contan, C., Zeller, M., Kellermann, W., Topa, M.: Excitation-Dependent Stepsize Control of Adaptive Volterra Filters For Acoustic Echo Cancellation. In: 20th European Signal Processing Conference-EUSIPCO (2012)
18. Yang, F., Wu, M., Yang, J.: Stereophonic Acoustic Echo Suppression Based on Wiener Filter in the Short-Time Fourier Transform Domain. IEEE Signal Processing Letters 19(4), 227–230 (2012)
19. Ehtiati, N., Champagne, B.: A General Framework for Mixed-Domain Echo Cancellation in Discrete Multitone Systems. IEEE Transactions on Communications 61(2), 769–780 (2013)