Санкт–Петербургский государственный университет

Математика

Высшая геометрия

Фадеев Алексей Викторович

Обратное отслеживание для действия группы Баумслага-Солитера

Дипломная работа

Научный руководитель:

Доктор физико–математических наук, профессор

Пилюгин Сергей Юрьевич

Рецензент:

Кандидат физико–математических наук

Осипов Алексей Валерианович

Санкт–Петербург

2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Mathematics

High Geometry

Fadeev Aleksei Viktorovich

Inverse shadowing in actions of Baumslag–Solitar group

Graduation Thesis

Scientific supervisor:

Doctor of Physics and Mathematics, Professor

Pilyugin Sergey Yur‘evich

Reviewer:

Candidate of Physico-Mathematical Sciences

Osipov Aleksey Valerianovich

Saint–Petersburg

2017

Содержание

Введение

Ставшее уже классическим в теории динамических систем понятие отслеживания псевдотраекторий достаточно хорошо изучено. Пожалуй, самый известный результат на эту тему состоит в том, что для диффеоморфизма риманова многообразия свойство отслеживания всегда присутствует в некоторой окрестности гиперболического множества (т.н. *лемма о ε–траекториях*, доказанная Д.В. Аносовым, с её более общим аналогом – *теоремой о семействах ε–траекторий* [2],[6]).

Основная идея задачи отслеживания состоит в том, чтобы соотнести „теоретическую динамическую систему“ (то, с чем работает математик) и „реальную динамическую систему“, т.е. такую, которая возникает, когда исследователь начинает подставлять числовые значения в теоретическую модель. Существенное различие между этими подходами заключается в том, что исследователь не может производить вычисления абсолютно точно, учитывая все знаки после запятой, т.е. обязательно присутствует некая ошибка вычислений, пусть даже небольшая. Как раз роль этой ошибки и изучается в первую очередь в теории отслеживания.
Ставится следующий вопрос (формальная постановка задачи будет дана в основном тексте работы):

Будет ли траектории динамической системы, которую мы посчитали на компьютере, соответствовать какая-нибудь „точная“ траектория?

Параллельно с теорией отслеживания (иногда называемому „прямым“) развивалась теория *обратного* отслеживания (первые определения появились в работе С.Ю. Пилюгина в 1995). Основное различие между двумя теориями состоит в том, что в задаче отслеживания по приближённой траектории ищется достаточно близкая к ней точная, а при обратном отслеживании исследователя интересует: *можно ли точную траекторию до-*

статочно хорошо приблизить с помощью псевдотраектории (в которой допускается ошибка на каждом шаге). Разумеется, множество псевдотраекторий из задачи обратного отслеживания должно быть достаточно богатым, чтобы иметь возможность приблизить *все* точные траектории. По определению, источником этих псевдотраекторий служит некоторый численный метод.

Как известно, классические динамические системы (каскады и потоки) можно рассматривать как действие на соответствующем пространстве группы $\mathbb{Z}$ (дискретный случай) и группы $\mathbb{R}$ по сложению (непрерывный случай). Представляется естественным обобщить это обстоятельство и называть *общей динамической системой* действия произвольных групп $\Phi(g, \cdot),\ g \in G$.

Оказывается, многие классические определения без труда переносятся и на общий случай. В частности, интерес представляет задача изучения свойства прямого и обратного отслеживания для общей динамической системы.

На текущий момент в этом направлении известно не очень много результатов (по сравнению с классической теорией).

Для прямого отслеживания вводится т.н. свойство *экспансивности*, которое ограничивает равномерную близость двух траекторий (т.е. если для некоторой константы $a > 0$ известно, что $dist(\Phi(g, x), \Phi(g, y)) \leq a$, то тогда $x = y$). Наличие у динамической системы свойства отслеживания и экспансивности называется *топологическим условием Аносова.*

Известно следующее:

- (**RST – Reductive Shadowing Theorem**). Если сужение действия группы на некоторую циклическую подгруппу удовлетворяет топологическому условию Аносова, то и исходное действие им обладает (и, следовательно, имеется свойство отслеживания).

- (Пилюгин, Тихомиров, 2003, [4]) RST выполняется для группы $\mathbb{Z}^p$.
- (Осипов, Тихомиров, 2014, [5]) RST выполняется для виртуально – нильпотентных групп.
- (Пилюгин, Тихомиров, 2003, [4]) для линейного действия группы $\mathbb{Z}^p$ на пространстве $\mathbb{C}^n$:
  $$\Phi(n,x) = A_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot A_p^{n_p} x \qquad \text{где } n = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{Z}^p.$$
  Условие наличия свойства отслеживания эквивалентно условию наличия в каждом элементе спектра Тейлора $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ матриц $A_1, \ldots, A_n$ такого λ_j, что $|\lambda_j| \neq 1$.
- (Осипов, Тихомиров, 2014, [5]) RST не выполняется для группы Баумслага – Солитара:
  $$BS(1,n) = \langle a, b | ba = a^n b \rangle .$$
- (Тихомиров, 2015, [3]) Любое линейное действие конечно порождённой свободной группы с хотя бы двумя порождающими элементами не обладает свойством отслеживания на евклидовом пространстве.

По теме свойства обратного отслеживания для общих динамических систем получено существенно меньше результатов. Известен аналог RST–теоремы, который справедлив для действия виртуально нильпотентных групп (топологическое условие Аносова заменяется на гораздо более сложно формулируемое *условие трубки псевдотраекторий* – в оригинале „*Tube condition*“ [1]), кроме того, известно, что обратное отслеживание имеет место для действия линейного гиперболического автоморфизма на $\mathbb{C}^n$.

В настоящей работе исследуется наличие свойства обратного отслеживания для линейных действий группы $BS(1,n)$. Мы начнём с изучения действия на $\mathbb{R}$:

$$\Phi(a,x) = x + 1,$$
$$\Phi(b,x) = nx.$$

и покажем, что свойства обратного отслеживания для него не будет, предъявив численный метод, псевдотраектории которого не смогут *отследить* ни одну точную траекторию. Наши рассуждения будут весьма универсальными – мы увидим, что они могут быть обобщены на действия в пространствах более высоких размерностей, например, для следующего действия в $\mathbb{R}^2$:

$$\Phi(a,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x,$$
$$\Phi(b,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} x.$$

Основные определения и ограничения

Т.к. мы будем работать с общими динамическими системами (действиями групп), дадим соответствующие общие определения. Их классические аналоги могут быть получены путем подстановки в соответствующее определения группы $\mathbb{Z}$ (тут стоит заметить, что, хотя полученное таким способом определение d–псевдотраектории на первый взгляд не вполне соответствует классическому, для гомеоморфизмов с равномерно непрерывным обратным это будет эквивалентно классическому определению с другой константой d).

Пусть Φ – действие конечно порожденной группы G на метрическом пространстве (M, ρ).
Т.е. задано отображение $\Phi : G \times M \to M$ со свойствами:

1. Для любого $g \in G$ отображение $\Phi(g, \cdot)$ – гомеоморфизм M;
2. $\Phi(e, x) = x$ для любого $x \in M$, где e – единица группы G;
3. $\Phi(g_1 g_2, x) = \Phi(g_1, \Phi(g_2, x))$ для любых $g_1, g_2 \in G,\ x \in M$.

Пусть S – конечное симметричное (т.е. с каждым элементом s также содержит s^{-1}) порождающее множество для группы G.

Определение 1. Будем называть семейство $\{x_g\}_{g \in G}$ *d–псевдотраекторией* для Φ (по отношению к порождающему множеству S) если:

$$\rho\left(x_{sg}, \Phi(s, x_g)\right) < d, \qquad \forall g \in G,\ s \in S.$$

Определение 2. Действие группы G *обладает свойством отслеживания* (по отношению к порождающему множеству S), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $d > 0$, что для любой псевдотраектории $\{x_g\}_{g \in G}$ (соответствующей множеству S) найдется точка $p \in M$, такая что:

$$\rho\left(\Phi(g, p), x_g\right) < \varepsilon, \qquad \forall g \in G.$$

Будем говорить, что действие Φ *равномерно непрерывно*, если для некоторого порождающего множества S отображения $\Phi(s, \cdot)$, $s \in S$ равномерно непрерывны. Очевидно, что из наличия равномерной непрерывности для одного порождающего множества следует равномерная непрерывность для любого другого, поэтому мы можем говорить о равномерной непрерывности исходного действия Φ, не уточняя выбор порождающего множества.

Основное техническое ограничение для нас будет состоять в том, что все рассматриваемые действия мы будем предполагать равномерно непрерывными (это необходимо для того, чтобы сделать наши определения не зависящими от выбора порождающего множества). В частности, при этом ограничении наличие свойства отслеживания не зависит от выбора S (доказательство нетрудно и его можно найти в [1]). Теперь перейдём к определению обратного отслеживания.

Определение 3. Семейство непрерывных отображений

$$\Gamma = \{\gamma_g \in C(M \to M)\}_{g \in G}$$

Будем называть *d–методом* (по отношению к порождающему множеству S), если

$$\rho\left(\gamma_{sg}(x), \Phi(s, \gamma_g(x))\right) < d, \qquad \forall g \in G,\ s \in S,\ x \in M;$$

Причем, $\gamma_e(x) = x \quad \forall x \in M.$

Траектория метода Γ – это семейство

$$\{x_g = \gamma_g(x_e)\}_{g \in G}.$$

Сразу заметим, что траекториями d–метода являются d–псевдотраектории, а также, что множество d–методов непусто, т.к. всегда можно выбрать метод, определяемый самой траекторией:

$$\gamma_g(x) \equiv \Phi(g, x).$$

Определение 4. Действие Φ *обладает свойством обратного отслеживания* (по отношению к порождающему множеству S), если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists d > 0: \quad \forall p \in M, \quad \forall\, \text{d-метода}\, \Gamma \quad \exists \{x_g\}_{g \in G}:$$
$$\rho\left(\Phi(g, p), x_g\right) < \varepsilon \qquad \forall g \in G.$$

Здесь $\{x_g\}_{g \in G}$ – траектория метода Γ.

Как и в случае с прямым отслеживанием, предположение о равномерной непрерывности действия Φ оказывается достаточным, для того чтобы наличие свойства обратного отслеживания не зависело от выбора порождающего множества S (см. [1]).

Действие группы Баумслага – Солитара на $\mathbb{R}$

Рассмотрим следующую группу:

$$BS(1,n) = \{< A, B >| \ BA = A^n B\}.$$

Очевидно, что она изоморфна группе преобразований вещественной прямой, порожденной следующими отображениями:

$$f(x) = x + 1;$$
$$g(x) = nx.$$

Эту группу преобразований рассмотрим как действие $BS(1,n)$ на $\mathbb{R}$:

$$\Phi(a,x) = f(x);$$
$$\Phi(b,x) = g(x).$$

Мы будем рассматривать естественное симметричное порождающее множество

$$S = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}.$$

Для дальнейшего удобно каждое слово в данной группе представить в специальном *каноническом виде*:

Лемма 1. Каждое слово в группе $BS(1,n)$ можно представить в виде:

$$B^{m_1} A^{m_2} B^{m3}, \qquad m_1 \in \mathbb{Z}_0^-,\ m_2 \in \mathbb{Z},\ m_3 \in \mathbb{Z}_0^+. \tag{1}$$

Доказательство:

В силу группового соотношения получаем:

$$AB^{-1} = B^{-1}A^n,$$
$$A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-n}.$$

Из этих соотношений следует, что если в исходном слове встретился символ B^{-1}, то его можно перенести в самое начало слова с соответствующим изменением степеней у символов A и A^{-1}. Кроме того имеются следующие тождества:

$$BA = A^nB,$$
$$BA^{-1} = A^{-n}B.$$

Следовательно, все символы B (если они есть) можно сгруппировать в правом конце слова, как и указано в формулировке леммы.

$\blacksquare$

Для сокращения записи, канонический вид слова (1) мы будем кратко записывать в виде тройки (m_1, m_2, m_3).

Легко видеть, что соответствие между словами и тройками чисел *неоднозначно.* Например, тождественное слово будет представлять бесконечное множество троек вида $\left\{(-k, 0, k) \mid k \in \mathbb{Z}_0^+\right\}$.

Лемма 2. Тройки (m_1, m_2, m_3) и (k_1, k_2, k_3) определяют одно и то же слово тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} m_1 + m_3 = k_1 + k_3, \\ m_2 n^{m_1} = k_2 n^{k_1}. \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство:

Воспользуемся изоморфным образом исходной группы:
слову $B^{m_1}A^{m_2}B^{m3}$ однозначно сопоставляется преобразование вещественной прямой, заданное следующим образом:

$$h(x) = n^{m_1}\left(n^{m_3}x + m_2\right).$$

Совпадение слов равносильно тождественному равенству отображений:

$$n^{m_1}\left(n^{m_3}x + m_2\right) = n^{k_1}\left(n^{k_3}x + k_2\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Приведение соответствующих коэффициентов и дает искомое соотношение.

■

Траектория произвольной точки $p \in \mathbb{R}$ имеет вид:

$$Orb(p) = \left\{n^{m_1}\left(n^{m_3}x + m_2\right) \mid m_1 \in \mathbb{Z}_0^-,\, m_2 \in \mathbb{Z},\, m_3 \in \mathbb{Z}_0^+\right\}. \qquad (3)$$

Из этого выражения, в частности, видно, что траектория *любой* точки будет всюду плотной в $\mathbb{R}$.
Действительно, если рассмотреть точки траектории с $m_3 = m_1$, получим множество

$$\left\{p + \frac{m_2}{n^{-m_1}}\right\},$$

которое, очевидно, плотно на прямой.

Полезно выяснить, как преобразуются слова в каноническом виде при умножении слева на элементы порождающего множества:

$$A^{\pm 1} \cdot (m_1, m_2, m_3) = \begin{cases} (0, m_2 \pm 1, m_3), & m_1 = 0; \\ (m_1, m_2 \pm n^{-m_1}, m_3), & m_1 \neq 0. \end{cases}$$

$$B \cdot (m_1, m_2, m_3) = \begin{cases} (0, nm_2, m_3 + 1), & m_1 = 0; \\ (m_1 + 1, m_2, m_3), & m_1 \neq 0. \end{cases}$$

$$B^{-1} \cdot (m_1, m_2, m_3) = (m_1 - 1, m_2, m_3).$$

Выпишем теперь определение d–метода $\Gamma = \{\gamma_g\}_{g \in BS(1,n)}$ с учетом введенных обозначений.

Лемма 3. Семейство непрерывных отображений $\{\gamma_{(m_1,m_2,m_3)} \mid m_1 \in \mathbb{Z}_0^-,\ m_2 \in \mathbb{Z},\ m_3 \in \mathbb{Z}_0^+\}$ является d–методом для заданного действия группы $BS(1, n)$ тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} |\gamma_{(0,m_2 \pm 1,m_3)}(x) - \gamma_{(0,m_2,m_3)}(x) \mp 1| < d, & \\ |\gamma_{(m_1,m_2 \pm n^{-m_1},m_3)}(x) - \gamma_{(m_1,m_2,m_3)}(x) \mp 1| < d, & m_1 \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} |\gamma_{(0,nm_2,m_3+1)}(x) - n\gamma_{(0,m_2,m_3)}(x)| < d, & \\ |\gamma_{(m_1+1,m_2,m_3)}(x) - n\gamma_{(m_1,m_2,m_3)}(x)| < d, & m_1 \neq 0. \end{cases} \tag{5}$$

$$\left| \gamma_{(m_1-1,m_2,m_3)}(x) - \frac{1}{n}\gamma_{(m_1,m_2,m_3)}(x) \right| < d. \tag{6}$$

Причем

$$\gamma_{(0,0,0)}(x) = x. \tag{7}$$

Все выписанные соотношения (6)–(9) должны быть верны для любого $x \in \mathbb{R}$; кроме того, для троек, удовлетворяющих соотношениям (2), соответствующие отображения $\gamma_{(m_1,m_2,m_3)}$ должны быть тождественно равны.

Теперь можно доказать основной результат.

Теорема 1. Данное действие **не** обладает свойством обратного отслеживания.

Доказательство:

Рассмотрим следующее семейство отображений:

$$\gamma_{(m_1,m_2,m_3)}(x) = n^{m_1}(n^{m_3}x + m_2 c). \tag{8}$$

Здесь c– константа, удовлетворяющая соотношению:

$$|1-c| < d. \tag{9}$$

Покажем, что данное семейство является d–методом. Т.е. проверим все условия леммы 3.

Во-первых, соотношения

$$n^{m_1}(n^{m_3}x + m_2 c) \equiv n^{k_1}(n^{k_3}x + k_2 c)$$

равносильны условиям (2).

Также очевидно, что $\gamma_{(0,0,0)}(x) \equiv x$.

Проверим справедливость условий (4)-(6) для данного метода $\gamma_{(m_1,m_2,m_3)}$:

Условие (4):

$$|n^{m_3}x + (m_2 \pm 1)c - n^{m_3}x - m_2 c \mp 1| = |1-c| < d;$$
$$\left|n^{m_1}\left(n^{m_3}x + \left(m_2 \pm n^{-m_1}\right)c\right) - n^{m_1}\left(n^{m_3}x + m_2 c\right) \mp 1\right| = |1-c| < d.$$

Условие (5):

$$\left|\left(n^{m_3+1}x + nm_2 c\right) - n\left(n^{m_3}x + m_2 c\right)\right| = 0 < d;$$
$$\left|n^{m_1+1}\left(n^{m_3}x + m_2 c\right) - n^{m_1+1}\left(n^{m_3}x + m_2 c\right)\right| = 0 < d.$$

Условие (6) выглядит аналогично предыдущему неравенству.

Таким образом, мы действительно получили d–метод.

Предположим, что система обладает свойством обратного отслеживания и пусть ε и d такие как в *определении 4*.

Выберем число c из условия (9) и рассмотрим метод, заданный соотношением (8).

По определению для каждой точки p можно так выбрать x, что неравенства

$$|n^{m_1}(n^{m_3}p + m_2) - n^{m_1}(n^{m_3}x + m_2c)| < \varepsilon \tag{10}$$

будут выполнены для каждой тройки $(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}_0^- \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0^+$.

Рассмотрим теперь тройки вида $(-1, k, 1)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Для них неравенство (10) перепишется в виде:

$$|p - x - nk(1-c)| < \varepsilon. \tag{11}$$

Которое, как легко видеть, нарушится для достаточно большого k (так как все остальные числа фиксированы).

Полученное противоречие доказывает теорему.

■

Действие группы Баумслага – Солитара на $\mathbb{R}^2$

Для упрощения выкладок будем работать со следующей метрикой:

$$\rho((x_1, x_2)^\top, (y_1, y_2)^\top) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Рассмотрим действие группы $BS(1, n)$, порождённое матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}.$$

Легко проверить следующие соотношения:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix};$$

$$B^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n^k \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{Z},$$

$$BA = A^n B.$$

Таким образом, это действительно действие исходной группы.

Используя представление для слов, полученное *в лемме 1*, получаем, что орбита произвольной точки $x = (x_1, x_2)^\top$ имеет вид:

$$Orb(x) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ n^{m_1}\left(m_2 x_1 + n^{m_3} x_2\right) \end{pmatrix} \middle| m_1 \in \mathbb{Z}_0^-,\ m_2 \in \mathbb{Z},\ m_3 \in \mathbb{Z}_0^+ \right\}. \tag{12}$$

Лемма 4. Следующее семейство определяет d–метод для *любых* значений d:

$$\gamma_{m_1,m_2,m_3}((x_1,x_2)^\top) := \begin{pmatrix} x_1 \\ n^{m_1}\left(m_2 c(x_1) x_1 + n^{m_3} x_2\right) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Здесь $c(\cdot)$ – любая непрерывная функция, удовлетворяющая соотношению:

$$|xc(x) - x| < d. \tag{14}$$

Доказательство. Сразу заметим, что соотношения (2) выполняются. Нужно проверить лишь соответствующие определению d–метода неравенства, аналогичные (4)-(6). Будем работать только со второй компонентой векторов, т.к. первая остаётся без изменений.

Неравенства, аналогичные (4):

$$|(m_2+1)c(x_1)x_1 + n^{m_3}x_2 - x_1 - m_2 c(x_1)x_1 - n^{m_3}x_2| = |x_1 c(x_1) - x_1| < d,$$

$$\left|n^{m_1}\left(m_2 \pm n^{-m_1}\right)c(x_1)x_1 + n^{m_3}x_2 - \left(\pm x_1 + n^{m_1}\left(m_2 c(x_1)x_1 + n^{m_3}x_2\right)\right)\right| =$$

$$= |x_1 c(x_1) - x_1| < d.$$

Легко видеть, что, как и в одномерном случае, неравенства (5) и (6) приводят к очевидному неравенству

$$d > 0.$$

Следовательно, мы действительно получили d–метод.

■

Полностью повторяя доказательство *теоремы 1*, мы можем показать, что и это действие не обладает свойством обратного отслеживания. Последнее неравенство доказательства теоремы (11) будет иметь вид:

$$\left| \frac{k}{n}(p_1 - c(x_1)x_1) + p_2 - x_2 \right| < \varepsilon. \tag{15}$$

Но т.к. надлежащим выбором функции $c(\cdot)$ можно обеспечить:

$$p_1 - c(x_1)x_1 \neq 0,$$

то значение в правой части неравенства (15) неограниченно возрастает с увеличением k, что приводит к противоречию, и, следовательно, доказывает утверждение *теоремы 1* в двумерном случае.

Заключение

В данной работе мы продемонстрировали подход к работе с таким малоизученным свойством как обратное отслеживание для действия групп. Мы с успехом использовали его для изучения действия той же группы в более высокой размерности. Автор уверен, что похожая схема рассуждений может быть применена для более широкого класса общих динамических систем.

Теория обратного отслеживания ещё только начинает развиваться, но уже видно, что получаемые результаты во многом сходны с результатами теории прямого отслеживания. По мнению автора настоящей работы исследователям в данной области стоит сосредоточиться как раз на проведении чёткой границы между этими двумя теориями.

Список литературы

[1] Pilyugin S.Yu., *Inverse shadowing in some group actions.* Dyn Syst. 2016

[2] Pilyugin S.Yu., *Shadowing in dynamical systems.* Springer; 1999

[3] Тихомиров С.Б., *Динамические системы с различными свойствами отслеживания*, 2015

[4] Pilyugin S.Yu., Tikhomirov S.B., *Shadowing in actions of some abelian groups.*, Fund Math. 2003

[5] Osipov A.V., Tikhomirov S.B., *Shadowing for actions of some finitely generated groups.*, Dyn Syst. 2014

[6] Каток А.Б., Хассельблат Б., *Введение в современную теорию динамических систем, «Факториал»*, Москва, 1999