

Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра компьютерных технологий и систем

Тагирова Рената Альбертовна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Нелинейное управление автономным
подводным аппаратом**

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Жабко Н. А.

Санкт-Петербург
2017

Содержание

Введение	3
Обзор литературы	5
1 Постановка задачи	7
2 Синтез закона управления	12
2.1. Общее описание алгоритма бэкстеппинг управления	12
2.2. Построение бэкстеппинг управления для AUV	14
2.3. Построение наблюдателя возмущений	17
3 Практическая реализация алгоритма управления	19
3.1. Выводы из эксперимента	28
Заключение	30
Список литературы	31
Приложение	34

Введение

Автономным подводным аппаратом называется подводный робот, внешне похожий на торпеду или подводную лодку. В настоящее время использование автономных подводных аппаратов становится все более и более популярным, поскольку они могут работать и исследовать на экстремальных глубинах, в то же время являются недорогой альтернативой для выполнения наблюдательных миссий, подводных поисков, осмотра трубопровода, постановок мин или же для удаленных операций ВМФ.

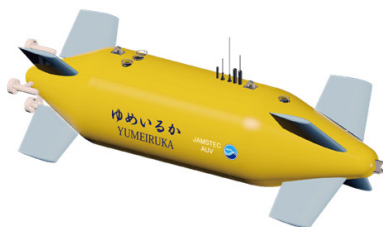


Рис. 1: Автономный подводный аппарат

Так, например, нефтяная компания Shell [5] вычислила, что при использовании автономного подводного аппарата для различных глубоководных обследований и производственных задач, за пять лет возможно сэкономить 100 миллионов долларов на прямых операционных затратах и за счет ограничения консерватизма в проектировании.

Многие университеты и компании заинтересованы в разработке методов контроля подводных аппаратов с целью улучшения динамических реакций подводного средства. Большое количество исследовательских работ по разработке и реализации различных контроллеров уже существуют. Используется несколько методов управления подводными аппаратами [1,4], которые включают в себя ПИД-регулирование, линейное квадратичное Гауссово управление, LQR-оптимизацию, нечеткую логику управления,

адаптивное управление и скользящий режим, бэкстеппинг управление.

Если же говорить о самих моделях, то для изучения, как правило, используются упрощенные линейные модели, когда в действительности чаще всего модели являются нелинейными. Необходимо учитывать эту нелинейную динамику при различных сложных движениях, в частности, при движении на заданной траектории.

Более того, не следует забывать, что на практике возможны ситуации, когда модель описана не полностью или же происходят изменения параметров модели неизвестным образом. Это связано с тем, что в большинстве случаев невозможно измерить переменные вектора состояния объекта управления из-за отсутствия измерительных устройств или же из-за специфики самого процесса (например, на систему воздействуют внешние возмущения, которые не могут быть измерены). Такие неизвестные параметры могут привести к неточности или же нестабильности системы управления. Без постоянного изменения контроллера, изначально синтезированное управление не в состоянии контролировать процесс корректно. Как следствие, при таких условиях используют робастные и адаптивные законы управления, которые обеспечивают стабильность характеристик системы при наличии неопределенностей или же неизвестных вариаций параметров объекта.

В данной работе рассматривается нелинейная модель полноприводного автономного подводного аппарата, к которому применяется *hierarchical backstepping control*. Использование техники бэкстеппинга позволяет обеспечить параметрическую робастность и учесть нелинейный вид используемой модели.

Обзор литературы

Основным источником по управлению морскими судами является [4]. В данной книге не только исследуется вопрос построения моделей морских судов, но и исследуются всевозможные возмущения, алгоритмы стабилизации движения кораблей. В частности, для подводных аппаратов рассмотрены такие методы как построение управления со скользящим режимом, линеаризация обратной связи по состоянию, когда нелинейная динамика системы линеаризируется, линеаризация обратной связи при адаптивном управлении - рассматривается случай, когда не все параметры системы известны, каскадное адаптивное управление и прочие.

[3] является основной статьей, из которой были взяты коэффициенты для построения иерархического бэкстеппинг контроля с дальнейшими модификациями.

В статье [6] представлена интеграция алгоритмов бэкстеппинга и скользящего режима для задачи трехмерной стабилизации движения необитаемого подводного аппарата по траектории. Предложенное управление сочетает в себе кинематический контроллер, использующий алгоритм бэкстеппинга, и динамический контроллер, построенный с помощью робастного скользящего режима. Несмотря на то, что алгоритм бэкстеппинга подвержен проблеме скачков скорости, при использовании биотехнической модели удалось достичь ровного и непрерывного сигнала скорости даже при больших начальных ошибках. Динамическое управление дает хорошие результаты в устойчивости и робастности.

В статье [7] исследуется проблема акустической стыковки автономного аппарата. Основанный на бэкстеппинге адаптивный контроль используется для обеспечения асимптотической устойчивости для ошибки стыковки

в док.

В работе [8] исследуется проблема отслеживания для неполноприводного корабля, использующего два контроллера в продольно-горизонтальной плоскости и соответствующий углу рыскания. Простой закон управления по состоянию обратной связи модифицирован таким образом, что ошибка отслеживания является глобально K -экспоненциально устойчивой.

В [9] подробно разобраны примеры построения бэкстеппинг контроллера для нелинейных систем.

В [10] проводится исследование неполноприводного подводного аппарата с 6 степенями свободы и 3 контроллерами для управления движением в продольно-горизонтальной плоскости, по углам тангажа и рыскания. Алгоритм бэкстеппинга адаптирован для каскадной природы динамики аппарата. Также были получены гибкость и робастность по отношению к параметрическим неопределенностям, которые часто встречаются в гидродинамическом моделировании. Несмотря на то, что в симуляции вводилась 10% ошибка в гидродинамические параметры, управление все равно давало хорошие значения для позиции, ориентации и линейных и угловых скоростей.

В статье [11] исследуется полноприводный корабль с тремя степенями свободы $[x, y, \psi]^T$, для него строится управление по алгоритму бэкстеппинга и наблюдатель внешних возмущений.

Трехмерная стабилизация по траектории для автономного подводного аппарата исследована в статье [12]. Для решения данной проблемы используется адаптивный бэкстеппинг скользящий контроль.

В работе [13] рассматривается автономный подводный аппарат с 4 степенями свободы. При построении управления используется смешанная структура бэкстеппинга в качестве вида управления и робастный точный

дифференциатор (Robust Exact Differentiator, RED). Полагают, что подводный аппарат управляется в вертикальной плоскости независимо. Чтобы скорректировать траекторию в плоскости $x - y$, угловая скорость применительно к координате z была использована в качестве виртуального управления. Контроллер был разработан для решения задачи стабилизации движения подводного аппарата по траектории. Изначально предполагалось использование всех состояний для построения замкнутой системы. Как только дифференциатор сошелся за конечное время, управление было настроено на использование информации о скоростях, хранящихся в RED. Корректность полученной действительной траектории движения оценивалась путем отслеживания двух эталонных траекторий. Приемлимая характеристика была получена с применением смешанного контроллера в терминах среднеквадратичной ошибки проблемы отслеживания. Для оценки корректности реализации решения, в симуляции были использованы различные желаемые траектории.

В [14] рассматривается проблема управления автономным подводным аппаратом вдоль заданного пути. Управление строится с помощью алгоритма бэкстеппинга и использования теорем Ляпунова об устойчивости.

Подробное изучение нелинейных систем и их устойчивости представлено в [15], а в [16] представлен широкий круг возможных управлений для нелинейных систем.

1 Постановка задачи

Целью работы является построение управления движением аппарата по заданной траектории в пространстве, учитывающем известные нелинейные составляющие модели, характеризующие динамику аппарата. В ка-

честве основного подхода, на котором основывается синтез управления в работе, выбран подход бэкстеппинг управления.

Математическая модель объекта

Общие принципы построения математических моделей морских подвижных объектов, в том числе для описания движения подводного автономного аппарата как твердого тела с шестью степенями свободы, описаны в [4]. Для построения математической модели автономного подводного аппарата, рассмотрим его динамическое нелинейное уравнение, которое можно получить из уравнения Ньютона-Эйлера для твердого тела в жидкости и оно будет выглядеть следующим образом [3, 4]:

$$M\dot{q} + C(q)q + D(q)q + g(\eta) = \tau, \quad (1)$$

где q - вектор линейных и угловых скоростей $[u, v, w, p, q, r]^T$, η - вектор положения аппарата по отношению к земле в фиксированных координатах. На рис.2 представлены системы координат, в которых движется объект. Подводный аппарат имеет 6 степеней свободы: продольно-горизонтальная (surge), поперечно-горизонтальная (sway), ветикальная (heave), бортовая (roll), килевая качка (pitch) и рыскание (yaw), поэтому ее положение в любой момент времени может быть выражено 6 координатами - x, y, z , углами крена, курса и рыскания ϕ, θ, ψ . M - матрица инерции для твердого тела и добавленной массы; $C(q)$ - Кориолисова и центробежная матрица для твердого тела и добавленной массы; $D(q)$ - гидродинамическая матрица демпфирования; $g(\eta)$ - вектор силы тяжести и плавучести; τ - входной вектор управления.

Кинематическая модель автономного подводного аппарата будет вы-

глядеть следующим образом:

$$\dot{\eta} = J(\eta)q, \quad (2)$$

где $J(\eta)$ является матрицей перехода из связанной системы координат в фиксированную.

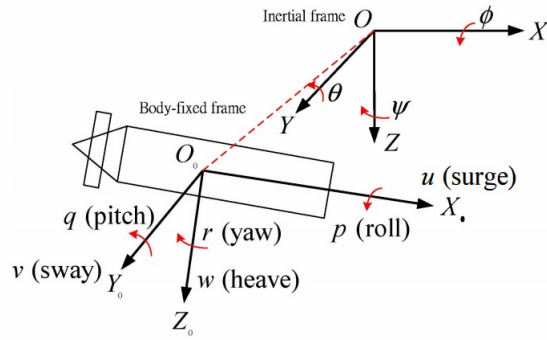


Рис. 2: Система координат для подводного аппарата

Как правило, при синтезе законов управления как для надводных судов, так и для подводных аппаратов, используются упрощенные математические модели. В частности, для подводных аппаратов при исследовании движения в горизонтальной плоскости или отдельно в продольной плоскости, часто используется упрощенное представление в виде двух или трех моделей, в которых значимым и учитываемым считается только часть переменных. Это позволяет применять более простые схемы для управления отдельными упрощенными движениями, которые в совокупности обеспечивают желаемое движение подводного аппарата. В данной работе при синтезе управления и при проведении численных экспериментов используется упрощенная модель с четырьмя степенями свободы. Предполагается, что отклонения по крену и дифференту можно считать малыми, т.е. $p = q = 0$ в соответствии с [6], тем самым мы можем упростить вид q, η, τ , которые теперь будут состоять из четырех компонент: $q = [u, v, w, r]^T$ - вектор линейных и угловой скоростей, $\eta = [x, y, z, \psi]$ задает положение

аппарата в фиксированной системе координат в любой момент времени, $\tau = [\tau_x, \tau_y, \tau_z, \tau_\psi]^T$ представляет собой вектор управляющих сил и моментов, действующих на аппарат.

Рассмотрим подробнее матрицы, используемые в формулах (1), (2). В них введены возможные отклонения параметров модели относительно некоторых номинальных, которые задаются матрицами $\overline{J}(\eta)$, \overline{M} , $\overline{C}(q)$, $\overline{D}(q)$, $\overline{g}(\eta)$. Тогда, учитывая неопределенные и номинальные части, матрицы примут вид:

$$J = \overline{J} + \Delta J; M = \overline{M} + \Delta M; C(q) = \overline{C}(q) + \Delta C(q); D(q) = \overline{D}(q) + \Delta D(q);$$

$$g(\eta) = \overline{g}(\eta) + \Delta g(\eta). \quad (3a)$$

Предполагаем, что для норм матриц выполняются условия вида: $\|\Delta J \overline{J}^{-1}\| < 1$, $\|\Delta M \overline{M}^{-1}\| < 1$, $\|\Delta C(q) \overline{C}^{-1}(q)\| < 1$, $\|\Delta D(q) \overline{D}^{-1}(q)\| < 1$, $\|\Delta g(\eta) \overline{g}^{-1}(\eta)\| < 1$. Номинальная часть имеет следующий вид:

$$\overline{J}(\eta) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \overline{M} = \begin{pmatrix} m - X_{\dot{u}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m - Y_{\dot{v}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m - Z_{\dot{w}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_z - N_{\dot{r}} \end{pmatrix},$$

$$\overline{C}(q) = \begin{pmatrix} 0 & -mr & 0 & 0 \\ -mr & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ mv & 0 & 0 & -mu \end{pmatrix}, \overline{D}(q) = \begin{pmatrix} -X_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Y_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_r \end{pmatrix},$$

$$\overline{g}(\eta) = [-X_{uu}u|u|, -Y_{vv}v|v|, -Z_{ww}w|w|, -N_{rr}r|r|]^T, \quad (3b)$$

где m - это масса подводного аппарата, I_z - момент инерции по оси z , $X_{\dot{u}}, Y_{\dot{v}}, Z_{\dot{w}}, N_{\dot{r}}$ - добавленные массы, X_u, Y_v, Z_w, N_r линейные сопротивления и $X_{uu}, Y_{vv}, Z_{ww}, N_{rr}$ квадратичные сопротивления.

Неопределенные компоненты определим следующим образом:

$$\Delta J = \begin{pmatrix} \Delta j_{11} & \Delta j_{12} & 0 & 0 \\ \Delta j_{21} & \Delta j_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta j_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta j_{44} \end{pmatrix}, \Delta M = \begin{pmatrix} \Delta m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta m_{44} \end{pmatrix},$$

$$\Delta C(q) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta c_{12} & 0 & 0 \\ \Delta c_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta c_{41} & 0 & 0 & \Delta c_{44} \end{pmatrix}, \Delta D(q) = \begin{pmatrix} \Delta d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta d_{44} \end{pmatrix},$$

$$\Delta g(\eta) = [\Delta g_{11}, \Delta g_{21}, \Delta g_{31}, \Delta g_{41}]^T, \quad (3c).$$

Математическая постановка задачи управления на заданной траектории

Зададим желаемую траекторию $\eta_d(t)$ в виде $\eta_d = [x_d, y_d, z_d, \psi_d]^T$, где первые три компоненты описывают желаемое изменение координат в трехмерном пространстве, а ψ_d - желаемое отклонение по курсу как функции времени. Введем два вектора ошибок для положения подводного аппарата и его скоростей, задаваемые в текущий момент времени t разностью:

$$e = \eta_d - \eta \quad (4)$$

$$e_q = q_c - q \quad (5)$$

Здесь $e = [e_x, e_y, e_z, e_\psi]^T$ является ошибкой по траектории, η - текущее значение вектора координат и отклонения по курсу, $e_q = [e_u, e_v, e_w, e_r]^T$ ошибка по скорости, q - вектор текущих значений линейных и угловой скоростей, q_c - фактическая эталонная скорость. Вектор q_c является вспомогательной функцией.

Требуется построить управление в виде некоторой зависимости

$$\tau = f(\eta, q, \eta_d, h)$$

задаваемой нелинейной функцией f четырех векторных переменных η, q, η_d, h , где h - вектор варьируемых параметров, который обеспечивал бы выполнение неравенства $\|e\| < \delta$, где δ - малое положительное число при $t \geq t_0$.

Более того, на основе кинематических уравнений можно получить зависимость между желаемыми скоростями и желаемыми положениями подводного аппарата в фиксированной системе координат:

$$u_d = \dot{x}_d \cos \psi_d + \dot{y}_d \sin \psi_d$$

$$v_d = -\dot{x}_d \sin \psi_d + \dot{y}_d \cos \psi_d$$

$$w_d = \dot{z}_d$$

$$r_d = \dot{\psi}_d$$

2 Синтез закона управления

2.1. Общее описание алгоритма бэкстеппинг управления

Бэкстеппинг применяется для синтеза управления нелинейной системой. Сама техника представляет собой рекурсивную процедуру, которая состоит из выбора функции Ляпунова и синтеза систем управления с обратной связью [15]. Это помогает разбить проблему вычисления управле-

ния для всей системы на последовательность вычислений для подсистем более низкого порядка или же скалярных систем. За счет использования дополнительной свободы при анализе систем малого порядка и скалярных систем, бэкстеппинг позволяет решить задачи стабилизации, слежения и робастного управления в условиях менее жестких, нежели возникающие при использовании других методов управления.

Бэкстеппинг контроль учитывает нелинейность системы и основан на использовании функции Ляпунова, которая дает нам робастную устойчивость системы. Этот метод использует рекурсивное проектирование нелинейного управления с обратной связью. В отличие от методов, использующих линеаризованную обратную связь, бэкстеппинг помогает избежать нежелательной потери точности. Также преимуществом бэкстеппинга является универсальность конструкции благодаря рекурсивному использованию функции Ляпунова.

Сам алгоритм бэкстеппинга может быть представлен в следующем виде [2]. Пусть имеется математическая модель:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)u\end{aligned}$$

Необходимо сделать каждый интегратор объекта устойчивым. Введём ошибку сигнала $z_i = x_i - x_{i,d}$, где $x_{i,d}$ является желаемым сигналом, строим функцию Ляпунова в виде:

$$V_i = \frac{1}{2}z_1^2 + \dots + \frac{1}{2}z_i^2$$

Из теорем Ляпунова известно:

1. Если $\dot{V}(x)$ отрицательно полуопределена в окрестности ζ вблизи $x = 0$,

тогда решение системы устойчиво.

2. Если $\dot{V}(x)$ отрицательна в области ζ , тогда решение системы асимптотически устойчиво.

3. Если $V(x)$ положительно определена и неограничена для всех x , и $\dot{V}(x)$ отрицательно определена для всех x , тогда решение системы глобально асимптотически устойчиво.

Повторяя операции построения функции Ляпунова, будем получать вспомогательные функции для построения закона управления, а на n -ом шаге получим сам закон.

2.2. Построение бэкстеппинг управления для AUV

Использованный в данной работе для обеспечения движения по заданной траектории алгоритм основан на способе построения бэкстеппинг управления, предложенном в статье [3]. В соответствии с указанным способом, формируемое управление гарантирует обеспечение устойчивости замкнутой системы при варьировании параметров модели в заданных пределах в соответствии с формулами (3а)-(3с).

Рассматривая кинематику уравнения (2) для подводного аппарата, можно сделать вывод, что вектор q является фактическим входным сигналом управления и фактической желаемой скоростью следующего цикла, и может быть обозначен как q_c , построенный следующим образом:

$$q_c = \bar{J}^{-1}(\dot{\eta}_d + Ke), \quad (6)$$

где K положительная и диагональная матрица размерности 4×4 .

В соответствии со статьей [3] функция Ляпунова вводится следующим образом:

$$V_1 = \frac{e^T e}{2} \quad (7)$$

Дифференцируя (7) по времени и используя систему (2), подставим (6) и получим:

$$\dot{V}_1 \leq -\alpha \|e\| \left(\|e\| - \frac{\beta}{\alpha} \right), \quad (8)$$

здесь $\alpha = \lambda_{\min}(K + \Delta J \bar{J}^{-1} K) > 0$, $\beta = \max(\|\Delta J \bar{J}^{-1} \dot{\eta}_d\|)$.

Следовательно, в силу (8) выполняется, что $\|e\| \geq \frac{\beta}{\alpha}$, $\dot{V}_1 \leq 0$ при $t \rightarrow \infty$, что гарантирует нам ограниченность функции V_1 . Также можно считать, что e равномерно предельно ограничена. Следовательно, вектор q_c может использоваться в качестве фактических желаемых данных на входе в следующем блоке нашей замкнутой системы.

В исследуемой модели τ является вектором управляющих сил и моментов [6] и представляет собой произведение некоторых коэффициентов на отклонения пропеллеров. Вектор в рассматриваемой структуре управления τ предназначен для стабилизации фактического заданного значения скорости

$$\tau = \bar{M}(\dot{q}_c + K_1 e_q) + \bar{C}q + \bar{D}q + \bar{g}, \quad (9)$$

где K_1 - положительная диагональная матрица размерности 4×4 .

В данном случае вектор производных \dot{q}_c может быть получен разными способами, в частности в численном виде:

$$\dot{q}_c = \frac{q_c(kT_s) - q_c((k-1)T_s)}{T_s}$$

T_s в момент $\tau(T_s)$, где T_s интервал дискретизации.

Пользуясь алгоритмом бэкстепинг управления, теперь можно определить новую функцию Ляпунова как

$$V_2 = V_1 + \frac{e_q^T e_q}{2} \quad (10)$$

Возьмем производную по времени от (10) в силу системы (1) и под-

ставим (9):

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + e_q^T (\dot{q}_c - \dot{q}) \leq -\alpha \|e\| \left(\|e\| - \frac{\beta}{\alpha} \right) - \Gamma_1 \|e_q\| \left(\|e_q\| - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)$$

Введем вспомогательную функцию $X = -(1 + \bar{M}^{-1} \Delta M)^{-1} \bar{M}^{-1} \Delta M \bar{M}^{-1}$.

Тогда $\Gamma_1 = \lambda_{\min}(K_1 + X \bar{M} K_1) > 0$,

$\Gamma_2 = \max \left(\left\| -X \bar{M} \dot{q}_c + (\bar{M}^{-1} + X)(\Delta C q + \Delta D q + \Delta g) \right\| \right)$. Так как выполняется $\|e\| \geq \frac{\beta}{\alpha}$ и $\|e_q\| \geq \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$, $\dot{V}_2 \leq 0$ при $t \rightarrow \infty$, получаем, что V_2 ограничена, а e и e_q являются равномерно предельно ограниченными.

В формулах (6) и (9) коэффициенты положительно определенных диагональных матрицы K и K_1 не заданы изначально, и их выбор позволяет влиять на качество переходного процесса при выходе на заданную траекторию. Задавая большие значения коэффициентов можно получить более быстрый переход в заданную окрестность значений, лежащих на траектории. Однако при этом необходимо учитывать, что интенсивность управляющих воздействий ограничена:

$$|\tau_x| \leq \tau_{x_0}, |\tau_y| \leq \tau_{y_0}, |\tau_z| \leq \tau_{z_0}, |\tau_\psi| \leq \tau_{\psi_0}$$

Это означает, что, если объединить в вектор параметров h n варьируемых коэффициентов в матрицах K и K_1 , они могут выбираться как решение некоторой оптимизационной задачи

$$J(h) \rightarrow \min_{h \in E_p}$$

где $J(h)$ - некоторый функционал, характеризующий переходный процесс при выходе на заданную траекторию, учитывающий требуемое ограничение на время такого перехода в соответствии с условием $\eta - \eta_d \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Поиск минимума функционала $J(h)$ производится с помощью какой-либо численной процедуры при проведении имитационного моделирования

для некоторого заданного тестового режима при учете заданных ограничений на управляющие силы и моменты, а также, возможно, на скорости их изменения.

2.3. Построение наблюдателя возмущений

С целью обеспечения подавления внешних возмущений в ситуации, когда интенсивность управляющих сил и моментов достаточна для их компенсации, модифицируем представленный закон управления (9). Для этого введем в правую часть модели объекта (1) составляющую, которая моделирует воздействие от возможных внешних возмущений от ветра, волнения, течения, в результате перейдем к системе:

$$M\dot{q} + C(q)q + D(q)q + g(\eta) = \tau + b, \quad (11)$$

Для модификации алгоритма управления сформируем наблюдатель для оценивания вектора возмущений. Такой наблюдатель сформируем аналогично тому, как это проводилось в статье [11] в задаче управления движением судна по заданной траектории $[x_d, y_d, \psi_d]^T$ в горизонтальной плоскости

Причем будем считать, что матрицы в соотношениях (2), (11) $M, C(q), D(q), g$ состоят только из номинальных частей, т.е. выполняются равенства $M = \bar{M}, C(q) = \bar{C}(q), D(q) = \bar{D}(q), g(\eta) = \bar{g}(\eta), J(\eta) = \bar{J}(\eta)$.

Тогда для вектора возмущений b наблюдатель будем строить в виде:

$$\hat{b} = \xi + K_0 M q \quad (12)$$

$$\dot{\xi} = -K_0 \xi - K_0 (-C(q)q - D(q)q - g(\eta) + \tau + K_0 M q) \quad (13)$$

где K_0 - положительно-определенная симметричная матрица, ξ - промежуточный вспомогательный вектор, являющийся вектором состояния (13).

Введем в рассмотрение ошибку наблюдения как:

$$\tilde{b} = b - \hat{b}, \quad (14)$$

Продифференцируем (12):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{b}} &= \dot{\xi} + K_0 M q = -K_0 \xi - K_0 (-Cq - Dq - g + \tau + K_0 M q) + K_0 M M^{-1} (-Cq - Dq - \\ &- g + \tau + b) = -K_0 (\xi + K_0 M q - b) = K_0 (b - (\xi + K_0 M q)) = K_0 (b - \hat{b}) \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда, дифференцируя (14), получим:

$$\dot{\tilde{b}} = \dot{b} - K_0 \tilde{b}$$

Теперь рассмотрим функцию Ляпунова

$$V_{obs} = \frac{\tilde{b}^T \tilde{b}}{2}$$

Продифференцируем ее вдоль решения (15):

$$\dot{V}_{obs} \leq -2(\lambda_{min}(K_0) - \epsilon)V_{obs} + \frac{1}{4\epsilon}C_d^2 \quad (16)$$

где $\lambda_{min}(K_0)$ является минимальным собственным числом матрицы K_0 , ϵ это положительная константа, которая удовлетворяет условию:

$\lambda_{min}(K_0) - \epsilon > 0$. Также мы использовали оценку $\tilde{b}^T \dot{\tilde{b}} \leq \epsilon \tilde{b}^T \tilde{b} + \frac{1}{4\epsilon} \dot{\tilde{b}}^T \dot{\tilde{b}}$. В

соответствие с [11], из (16) можно сделать вывод, что V_{obs} экспоненциально сходится в шаре с центром в начале координат и радиусом $\frac{C_d^2}{8\epsilon(\lambda_{min}(K_0) - \epsilon)}$.

Более того, из определения V_{obs} можем сделать вывод, что ошибка наблюдателя возмущений экспоненциально сходится в шаре с центром в начале координат и радиусом $\frac{C_d}{2\sqrt{\epsilon(\lambda_{min}(K_0) - \epsilon)}}$.

Заметим, что настройка матрицы K_0 позволяет влиять на точность оценивания возмущений.

Полученные с помощью наблюдателя (12) оценки вектора возмущений учтем при формировании управления, тогда в новом варианте закон управления представляется формулой:

$$\tau = \overline{M}(q_c + K_1 e_q) + \overline{C}(q)q + \overline{D}(q)q + \overline{g}(\eta) - \hat{b} \quad (17)$$

Таким образом, использование наблюдателя (13) позволяет оценить возмущающие воздействия в соответствии с формулой (12) и использовать эту оценку напрямую в управлении для компенсации их воздействия на объект, тем самым улучшив качество следования объекта вдоль желаемой траектории.

Однако следует отметить, что подобное использование оценки вектора возмущений, равно как и в целом использование представленной структуры закона управления, возможно в связи со способом введения в модели рассматриваемого типа управляющих сил и момента, и, в том числе, с тем, что количество управляющих переменных, которые могут задаваться независимо друг от друга, совпадает с количеством управляемых переменных.

3 Практическая реализация алгоритма управления

Для проведения имитационного моделирования нелинейной модели автономного подводного аппарата были использованы пакеты прикладных программ Matlab и Simulink. На рис.5 представлена модифицированная модель, в которую введены наблюдатель возмущений и ограничения на скорость.

На рис.3 представлена Simulink модель подводного аппарата с управлением τ , на рис.4 представлен блок, в котором строится управление. Стоит

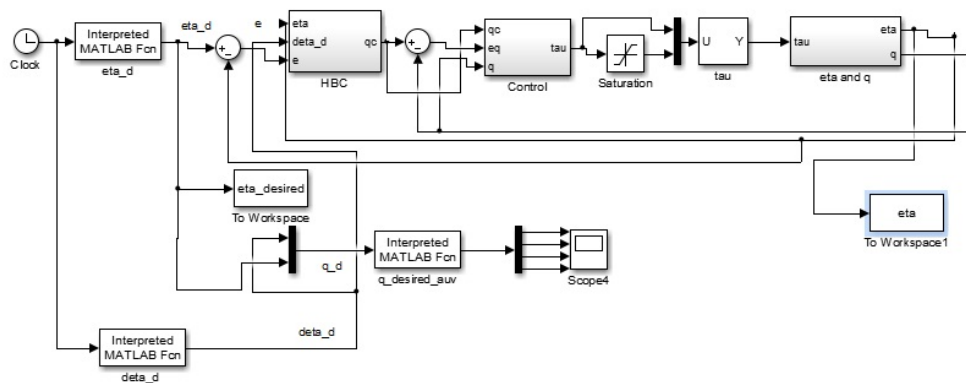


Рис. 3: Построенная модель с использованием бэкстепинга

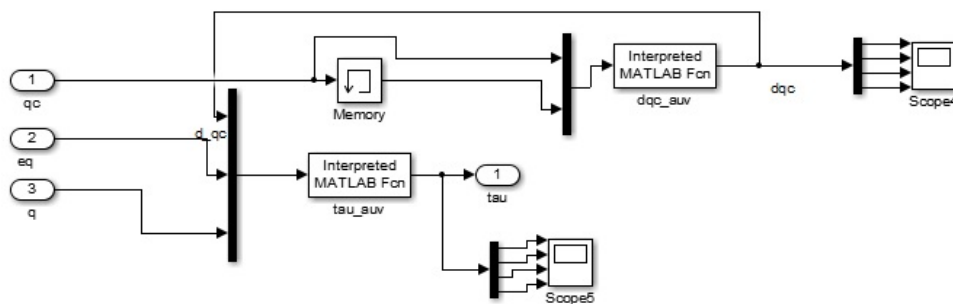


Рис. 4: Управление

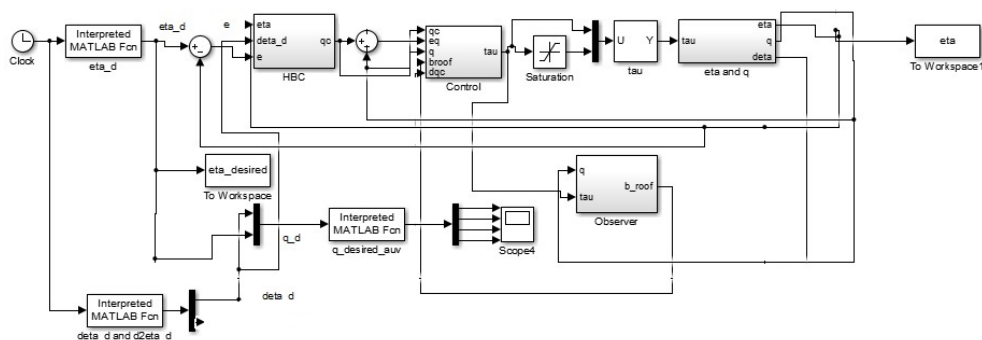


Рис. 5: Модель подводного автономного аппарата

отметить, что на рис.3 и рис.4 в τ не введен вектор оценки внешних возмущений, а на рис.5 построен наблюдатель и управление τ представлено в виде (17) В модели использованы следующие значения, взятые из [3]:

$m = 10$ кг, $I_z = 30$ кг*м², $X_{\dot{u}} = 34$, $Y_{\dot{v}} = 75$, $Z_{\dot{w}} = 33$, $N_{\dot{r}} = 62$, $X_u = 6$, $Y_v = 10$, $Z_w = 7$, $N_r = 14$, $X_{uu} = 18$, $Y_{vv} = 4$, $Z_{ww} = 4$, $N_{rr} = 14$. Как упоминалось ранее, для проверки робастности предложенного закона управления, введены неопределенности. Выбранные возмущения добавочных неопределенностей изменяются от малых значений к большим. Также, они могут подавать определенные возмущения входных сигналов немоделируемой динамики.

$$\Delta j_{11} = \cos(\psi)(0.02\cos(10t) - 0.3\sin(100tx)),$$

$$\Delta j_{12} = -\sin(\psi)(0.02\cos(10t) - 0.3\sin(100tx)),$$

$$\Delta j_{21} = \sin(\psi)(-0.03\sin(2t) + 0.4\cos(200t)),$$

$$\Delta j_{22} = \cos(\psi)(-0.03\sin(2t) + 0.4\cos(200t)),$$

$$\Delta j_{33} = -0.5\sin(300t), \Delta j_{44} = -0.04\cos(0.1t),$$

$$\Delta m_{11} = (m - X_{du})(-0.4\cos(5t) + 0.2\sin(50tu)),$$

$$\Delta m_{22} = (m - Y_{dv})(0.4\sin(t) - 0.3\cos(40t)),$$

$$\Delta m_{33} = (m - Z_{dw})(0.03\cos(0.1t) - 0.4\cos(60w)),$$

$$\Delta m_{44} = (I_z - N_{dr})(-0.4\sin(0.5tr)) + 0.3\cos(80t),$$

$$\Delta c_{12} = (-mr)(-0.4\cos(5t) + 0.2\sin(50tu)),$$

$$\Delta c_{21} = (-mr)(0.4\sin(t) - 0.3\cos(40t)),$$

$$\Delta c_{41} = (mv)(0.03\cos(0.1t) - 0.4\cos(60w)),$$

$$\Delta c_{44} = (-mu)(-0.4\sin(0.5tr) + 0.3\cos(80t)),$$

$$\Delta d_{11} = -X_u(-0.4\cos(5t) + 0.2\sin(50tu)),$$

$$\Delta d_{22} = -Y_v(0.4\sin(t) - 0.3\cos(40t)),$$

$$\Delta d_{33} = -Zw(0.03\cos(0.1t) - 0.4\cos(60w)),$$

$$\begin{aligned}
\Delta d_{44} &= -Nr(-0.4\sin(0.5tr) + 0.3\cos(80t)), \\
\Delta g_{11} &= (-X_{uu}u|u|)(-0.02\cos(5t) + 0.2\sin(50tu)), \\
\Delta g_{21} &= (-Y_{vv}v|v|)(0.02\sin(t) - 0.3\cos(40t)), \\
\Delta g_{31} &= (-Z_{ww}w|w|)(0.03\cos(0.1t) - 0.4\cos(60w)), \\
\Delta g_{41} &= -N_{rr}r|r|(-0.02\sin(0.5tr) + 0.3\cos(80t)). \tag{18}
\end{aligned}$$

Также введен вектор внешних возмущений:

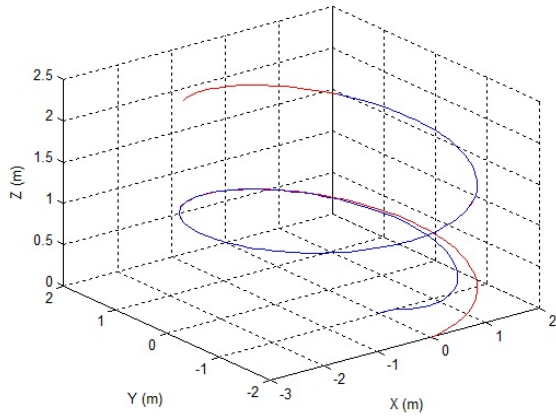
$$b = 20 \begin{pmatrix} 1.3 + 2\sin(0.02t) + 1.5\sin(0.1t) \\ -0.9 + 2\sin(0.02t - \frac{\pi}{6}) + 1.5\sin(0.3t) \\ 0.6\sin(0.3t) + 0.2\sin(0.02t) \\ -\sin(0.09t + \frac{\pi}{3}) - 3\sin(0.01t) - \sin(0.01t) \end{pmatrix} \tag{19}$$

Зададим желаемую траектория движения автономного подводного аппарата и его ориентация как: $\eta_d = [2\sin(0.5t), -2\cos(0.5t), 0.1t, 0.5t]^T$, начальная позиция и ориентация подводного аппарата $[0, -1, 0, 0]^T$, пусть значения $K = \text{diag}(1, 3, 2, 3.5)$, $K_1 = \text{diag}(5, 3, 1, 3)$. Рассмотрим нашу модель при $t = 20$ и с шагом дискретизации $T_s = 0.1$. Также, чтобы приблизить управление к более реальному, наложим ограничение на

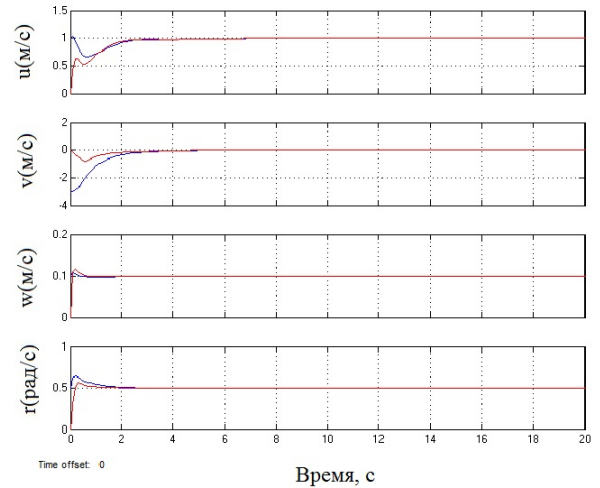
$$\tau = \begin{cases} 100 & \text{if } \tau > 100 \\ \tau & \text{if } -100 \leq \tau \leq 100 \\ -100 & \text{if } -100 > \tau \end{cases}$$

На всех приведенных ниже графиках красной линией обозначается желаемые траектория/скорость, а синией линией - фактические траектория/скорость.

На рис. 6а) приведены графики желаемой траектории и фактической, на рис. 6б) желаемые и фактические скорости. В данном случае в систему не введены возмущения коэффициентов и внешние возмущения. Видно,

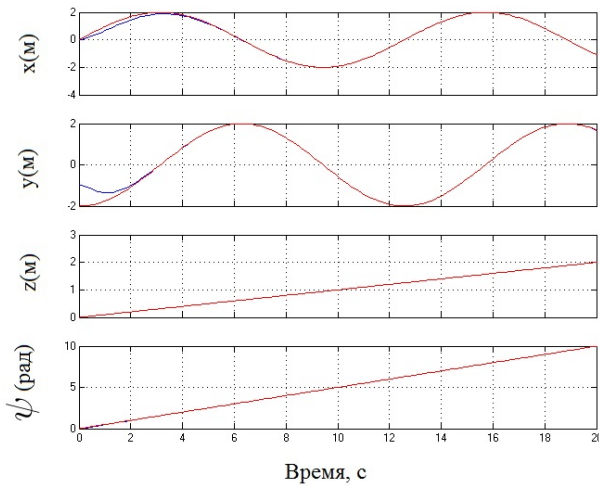


а) Траектории

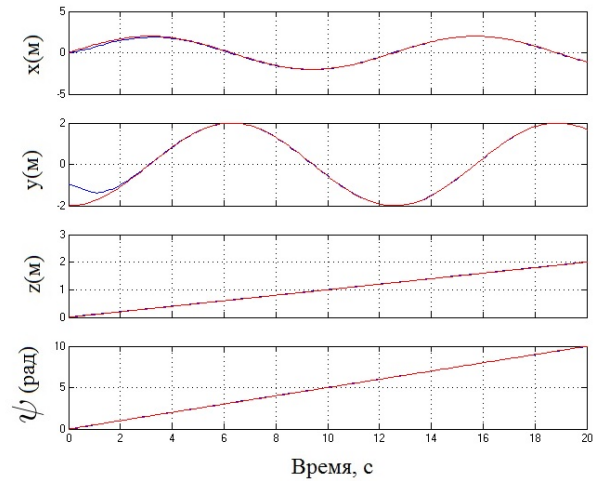


б) Скорости

Рис. 6: Графики траекторий и скоростей без учета возмущений



а) Без возмущений



б) С учетом возмущений параметров

Рис. 7: Графики фактических и желаемых координат

что управление в этом случае срабатывает достаточно быстро и уже за два такта фактические скорости сходятся к желаемым, схождение к желаемой траектории происходит тоже быстро.

На рис. 8а) и 8б) приведены графики желаемых траектории и скоростей и фактических траектории и скоростей. В качестве возмущений выбраны возмущения коэффициентов из формулы (18). Видно, что управление в этом случае достаточно хорошо обеспечивает подавление возмуще-

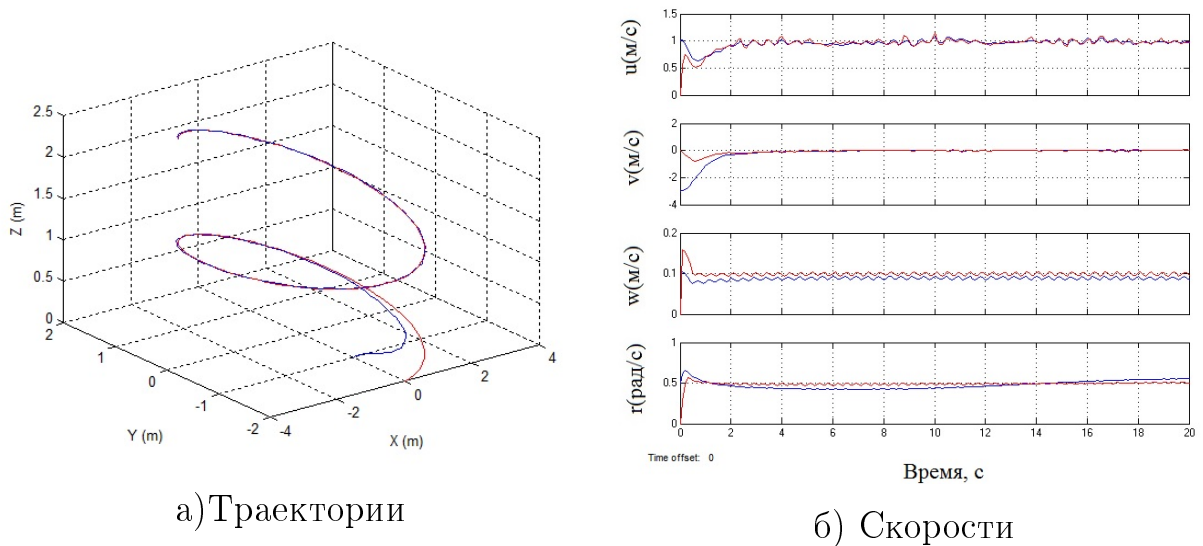
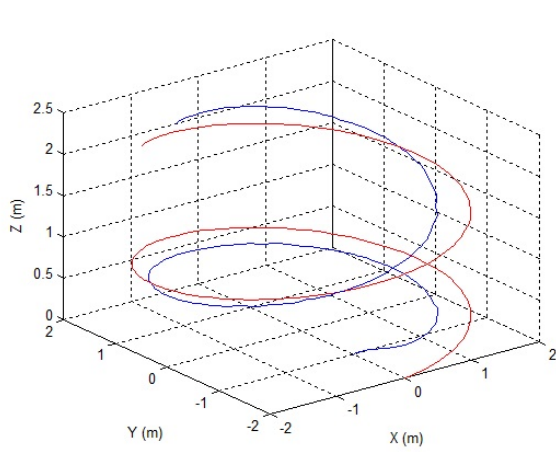


Рис. 8: Графики траекторий и скоростей с учетом возмущений коэффициентов

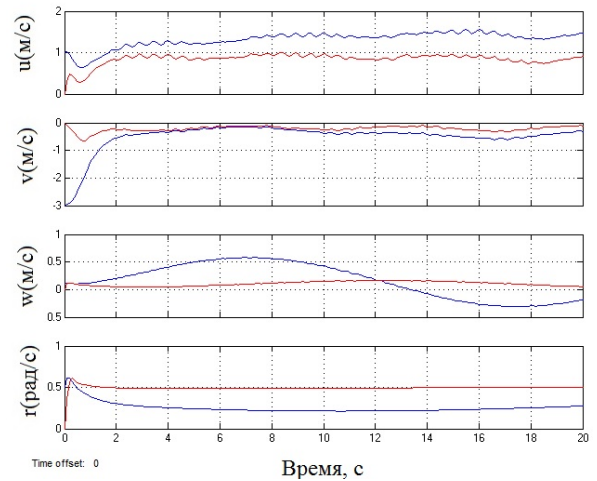
ний и расхождение с желаемой траекторией происходит лишь на начальных этапах моделирования, затем обе траектории практически сливаются в одну. При этом для скоростей ситуация не столь благоприятна. Если линейные скорости по x , y u , u_d и v , v_d сходятся за два такта и в дальнейшем отличаются друг от друга незначительно, то линейные скорости в плоскости z w и w_d не сходятся, фактическая скорость несколько меньше желаемой. У угловой скорости r и r_d происходят два длительных пересечения, но фактическая скорость так и не достигает желаемой.

При сравнении рис. 7а) и 7)б видно, что по координате x модель с введенными возмущениями параметров сходится лучше, откуда можно сделать вывод, что τ_{au} работает интенсивнее, нежели чем для случая, когда возмущений в системе нет.

Анализ рис. 9а)и 9б). В качестве возмущений выбраны возмущения коэффициентов из формулы (19). Видно, что управление в этом случае не справляется с внешними возмущениями: желаемая и фактическая траектории не сходятся, среди скоростей лучше всех сходятся v и v_d , по остальным же координатам происходят сильные расхождения.

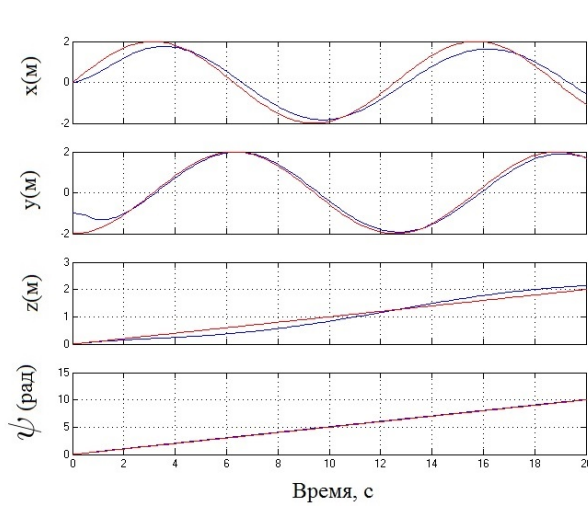


а) Траектории

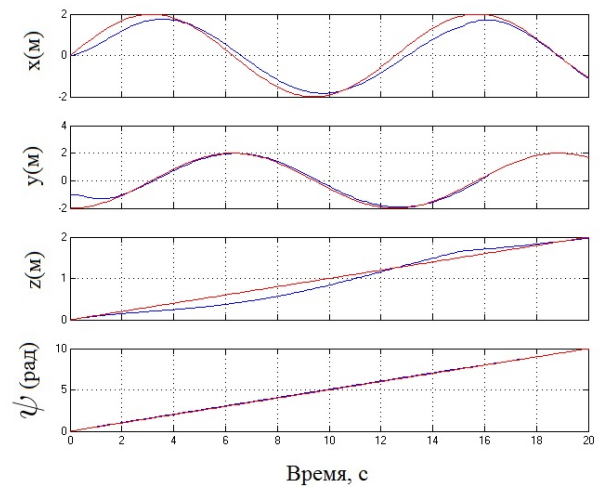


б) Скорости

Рис. 9: Графики траекторий и скоростей с учетом внешних возмущений



а) С учетом внешних возмущений



б) С учетом вектора оценки внешних возмущений

Рис. 10: Графики фактических и желаемых координат

На рис. 11 красной линией построена оценка вектора возмущений, синей - сам вектор возмущений. В качестве K_0 была взята матрица $K_0 = \text{diag}[2, 3, 1, 7]$. Как видно из графика, построенный вектор оценки хорошо приближается к вектору возмущений b , поэтому имеет смысл поменять вид управления на (17). Дополнительно введем ограничения по времени: пусть после 5 такта управление вида (9) принимает вид (17).

На рис.12а) и 12б) видно, что первые такты скорости и траектории

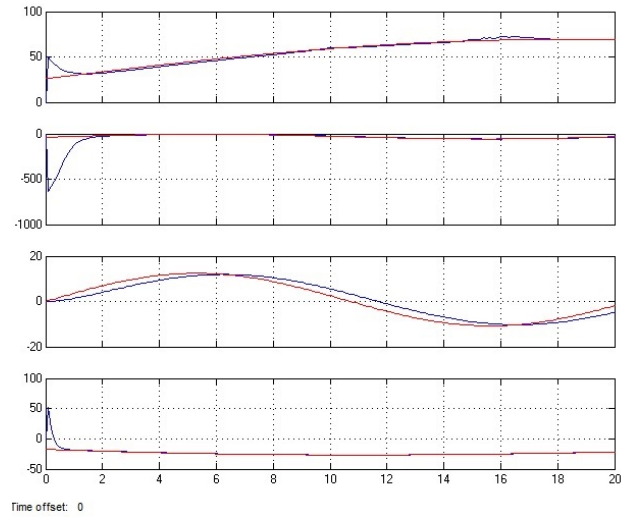
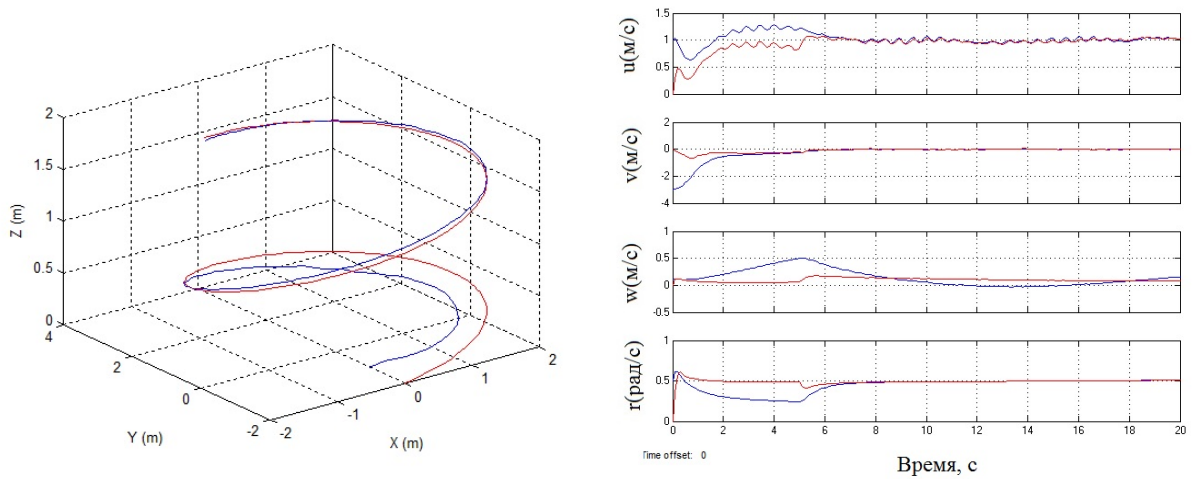


Рис. 11: Построение наблюдателя для внешних возмущений



а) Траектории

б) Скорости

Рис. 12: Графики траекторий и скоростей с учетом внешних возмущений и использованием вектора оценки внешних возмущений

достаточно сильно отличаются друг от друга, но, начиная с 5 такта скорости желаемые и фактические хорошо сходятся друг к другу, а расхождения между значениями траекторий становятся минимальными. Более того, сравнивая рис. 10а) и 10б) видно, что по координатам x, y модель с использованием вектора оценки внешних возмущений сходится лучше для x с 16 такта, а для y с 6 такта. Из этого можно сделать вывод, что наблюдатель внешних возмущений работает стабильно и выполняет свою задачу.

Для проверки робастности системы, проведем эксперименты и на другой траектории. Пусть желаемая траектория движения автономного подводного аппарата и его ориентация принимают вид: $\eta_d = [4\sin(0.02t), 2.5(1 - \cos(0.02t)), 0.02, 0.02t]^T$, начальная позиция и ориентация подводного аппарата $[1, 1, 0, \frac{\pi}{4}]^T$. Рассмотрим модель при $t = 300$ и с шагом дискретизации $T_s = 0.1$.

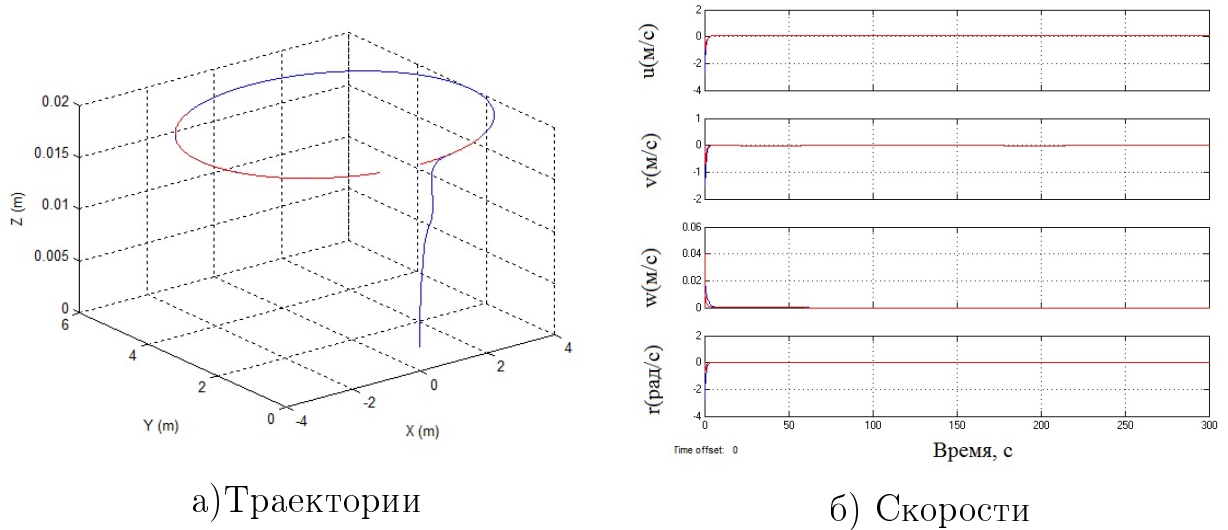
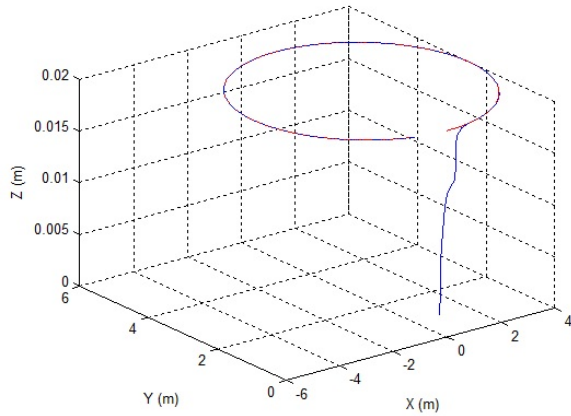


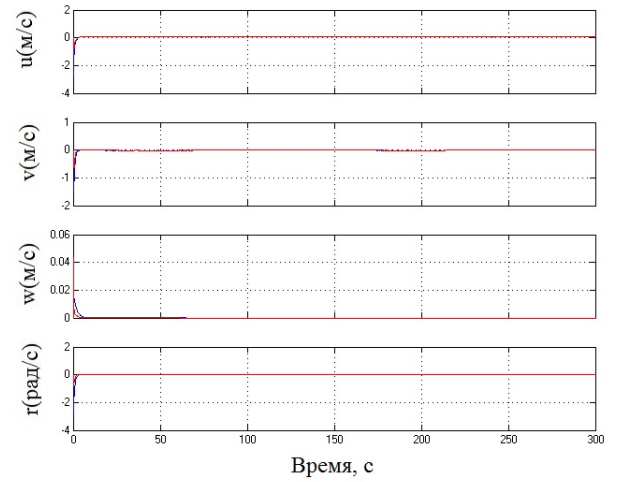
Рис. 13: Графики траекторий и скоростей без возмущений

На рис. 13а) и 13б) видно, что и траектории, и скорости сходятся хорошо и быстро.

На рис. 14а) и 14б) приведены графики для той же траектории, но с учетом возмущений коэффициентов. Хотя четыре графика с рис. 12 и 13 выглядят одинаково, при приближении можно увидеть, как возмущения влияют на скорости, рис. 16. Если же обратиться к рис. 15, то существенной разницы для координат с учетом и без учета возмущений не видно, что свидетельствует о том, что τ работает более интенсивно и сводит влияние возмущений вида (18) к минимуму.

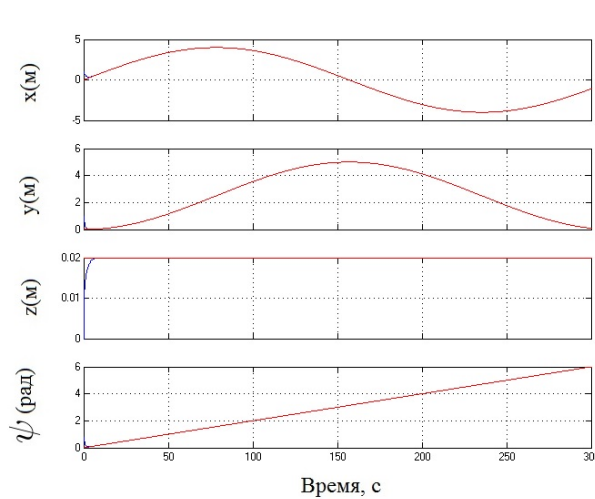


а) Траектории

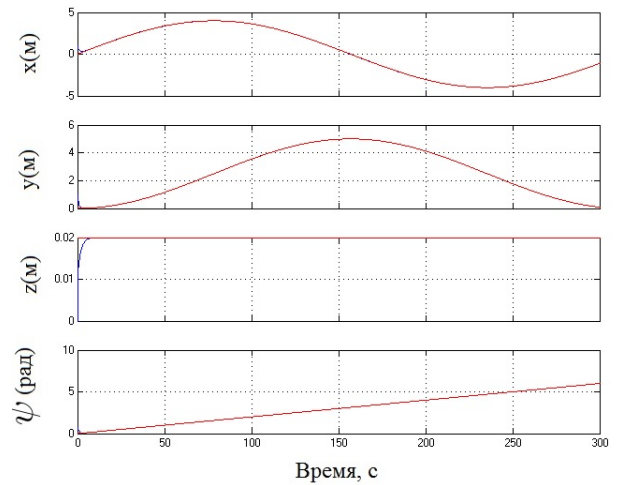


б) Скорости

Рис. 14: Графики траекторий и скоростей с учетом возмущений вида (18)



а) Без возмущений

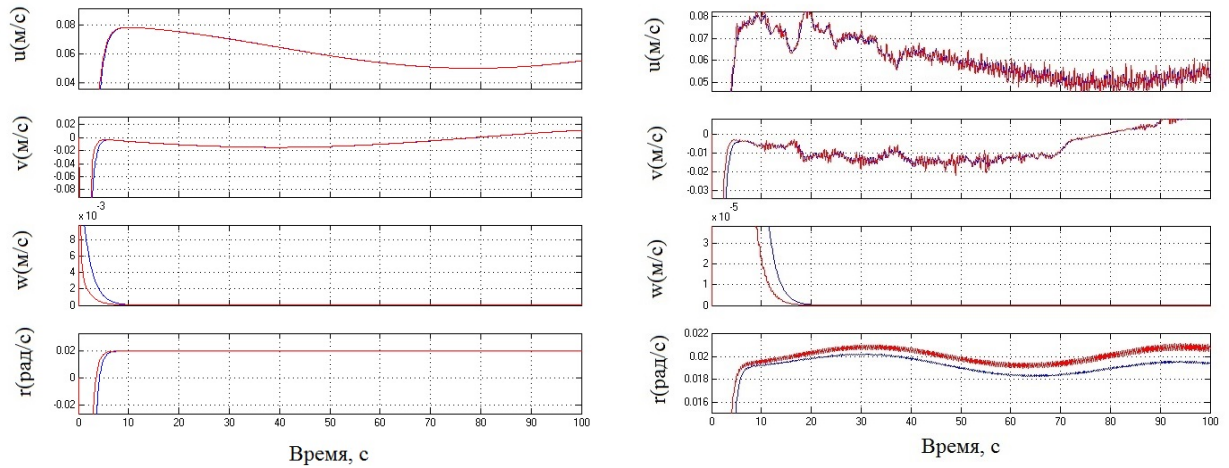


б) С учетом возмущений параметров

Рис. 15: Графики фактических и желаемых координат

3.1. Выводы из эксперимента

Результаты экспериментов позволили сделать следующие выводы. Построение модели с использованием бэкстеппинга помогает получить близкие к желаемым значения скорости и траектории, вне зависимости от того, включены ли в модель возмущения коэффициентов. Бэкстеппинг контроллер позволяет сохранить робастность системы, но, в зависимости от



а) Без возмущений

б) С учетом возмущений

Рис. 16: Сравнение графиков скоростей

используемых коэффициентов K, K_0 будет меняться интенсивность управления. В реальных же условиях не всегда возможно достичь необходимого значения τ , что означает, что существуют траектории, стабилизировать движение по которым не удастся.

При построении же наблюдателя внешних возмущений в зависимости от выбранного коэффициента K_1 зависит интенсивность самой оценки, чем больше K , тем более близкой будет полученная оценка к вектору внешних возмущений. Также наблюдатель сохраняет робастность системы.

Заключение

В работе была поставлена задача построения модели автономного подводного аппарата и иерархического бэкстепинг контроля. Эта задача актуальна в связи с тем, что, во-первых, вопрос построения управления для нелинейной системы изучен не так хорошо, как для линейной, во-вторых, многие университеты и компании занимаются исследованием и синтезом управления для автономных подводных аппаратов в связи с широким спектром задач, которые могут быть решены при использовании данного объекта.

Таким образом, в работе получены следующие результаты:

1. Изучены вопросы применимости известного алгоритма бэкстепинг управления для управления на траектории подводного автономного аппарата.

2. Предложена модификация алгоритма управления с целью возможности компенсации внешних возмущений на основе их оценок, получаемых с помощью наблюдателя.

3. Сформирована Simulink-модель для проведения имитационного моделирования движения конкретного автономного подводного аппарата по заданной траектории при рассмотренных вариантах управления, результаты которого иллюстрируют их успешность.

Список литературы

- [1] Ferial El-Hawary. The Ocean Engineering Handbook, The Electrical Engineering Handbook Series, Boca Raton, FL : CRC Press, 2001.
- [2] Aerospace Students. Home for future Aerospace Engineers [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://aerostudents.com/files/advancedFlightControl/backstepping.pdf> (дата обращения 27.03.2017)
- [3] Hsiu-Ming Wu and Mansour Karkoub. Hierarchical Backstepping Control for Trajectory-Tracking of Autonomous Underwater Vehicles Subject to Uncertainties, 2014 14th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2014), Gyeonggi-do, Korea
- [4] T.I. Fossen. Guidance and Control of Ocean Vehicles. Book: John Wiley and Sons Ltd. 1994
- [5] Агеев М. Д., Киселев Л. В., Матвиенко Ю. В. Автономные подводные роботы: системы и технологии / отв. ред. Киселев Л. В. — М.: Наука, 2005.
- [6] Bing Sun, Daqi Zhu, Weichong Li An. Integrated Backstepping and Sliding Mode Tracking Control Algorithm for Unmanned Underwater Vehicles, UKACC International Conference on Control 2012, Cardiff, UK, 3-5 September 2012
- [7] Jian Gao, Changxin Liu, Yingxiang Wang. Backstepping Adaptive Docking Control for a Full-Actuated Autonomous Underwater Vehicle with Onboard USBL System, Ocean - St. John's, 2014

- [8] Erjen Lefeber, Kristin Ytterstad Pettersen, and Henk Nijmeijer. Tracking Control of an Underactuated Ship, IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY, VOL. 11, NO. 1, JANUARY 2003
- [9] Thor I. Fossen and Jan P. Strand. Tutorial on nonlinear backstepping: Applications to ship control, Modeling, identification and control, 1999, vol. 20, no. 2, 83-134
- [10] Filoktimon Repoulas and Evangelos Papadopoulos. Three Dimensional Trajectory Control of Underactuated AUV's, Proceedings of the European Control Conference 2007, Kos, Greece, July 2-5, 2007
- [11] Yang Yang, Jialu Du, Chen Guo, Guangqiang Li. Trajectory Tracking Control of Nonlinear Full Actuated Ship with Disturbances, International Conference of Soft Computing and Pattern Recognition (SoCPaR), 2011
- [12] Zhenzhong Chu and Daqi Zhu. 3D Path-following Control for Autonomous Underwater Vehicle Based on Adaptive Backstepping Sliding Mode, Proceeding of the 2015 IEEE International Conference on Information and Automation, Lijiang, China, August 2015
- [13] Jorge Cervantes, Wen Yu, Sergio Salazar, Isaac Chairez, Rogelio Lozano. Output Based Backstepping Control for Trajectory Tracking of an Autonomous Underwater Vehicle, 2016 American Control Conference (ACC), Boston Marriott Copley Place, July 6-8, 2016
- [14] Li Juan, Qingyan Zhang, Xinghua Cheng, Naeim Farouk Mohammed. Path Following Backstepping Control of Underactuated Unmanned Underwater Vehicle, Proceedings of 2015 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, August 2 - 5, Beijing, China

- [15] Hassan K. Khalil. Nonlinear Systems (3rd Edition), New Jersey: Prentice Hall, 2001
- [16] Jean-Jacques E. Slotine and Li. Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall 1991

Приложение

Функция для вычисления производной q

```
function [ dq ] = q_auv( vect )
%UNTITLED4 Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
eta=vect(1:4);
q=vect(5:8);
tau=vect(9:12);
t=vect(13);

m=10;
Iz=30;
Xdu=34;
Ydv=75;
Zdw=33;
Ndr=62;
Xu=6;
Yv=10;
Zw=7;
Nr=14;
Xuu=18;
Yvv=4;
Zww=4;
Nrr=14;

M_=[m-Xdu 0 0 0;
     0 m-Ydv 0 0;
     0 0 m-Zdw 0;
     0 0 0 Iz-Ndr];
C_=[0 -m*q(4) 0 0;
     -m*q(4) 0 0 0;
     0 0 0 0;
     m*q(2) 0 0 -m*q(1)];
```

```

D_=[-Xu 0 0 0;
     0 -Yv 0 0;
     0 0 -Zw 0;
     0 0 0 -Nr];
g_=[-Xuu*q(1)*abs(q(1));
     -Yvv*q(2)*abs(q(2));
     -Zww*q(3)*abs(q(3));
     -Nrr*q(4)*abs(q(4))];

dm11 = (m-Xdu)*(-0.4*cos(5*t) + 0.2*sin(50*t*q(1))) ;
dm22 = (m-Ydv)*(0.4*sin(t) - 0.3*cos(40*t));
dm33 = (m-Zdw)*(0.03*cos(0.1*t) - 0.4*cos(60*q(3)));
dm44 = (Iz-Ndr)*(-0.4*sin(0.5*t*q(4)) + 0.3*cos(80*t));
dc12 =(-m*q(4))* (-0.4*cos(5*t) +0.2*sin(50*t*q(1)));
dc21 = (-m*q(4))*(0.4*sin(t)-0.3*cos(40*t));
dc41 = (m*q(2))*(0.03*cos(0.1*t) - 0.4*cos(60*q(3)));
dc44 = (-m*q(1))*(-0.4*sin(0.5*t*q(4)) + 0.3*cos(80*t));
dd11 =-Xu*(-0.4*cos(5*t)+ 0.2*sin(50*t*q(1)));
dd22 =-Yv*(0.4*sin(t) -0.3*cos(40*t));
dd33 =-Zw*(0.03*cos(0.1*t)-0.4*cos(60*q(3)));
dd44 = -Nr*(-0.4*sin(0.5*t*q(4)) +0.3*cos(80*t));
dg11 = (-Xuu*q(1)*abs(q(1)))* (-0.02*cos(5*t) + 0.2*sin(50*t*q(1)));
dg21 =(-Yvv*q(2)*abs(q(2)))*(0.02*sin(t)-0.3*cos(40*t));
dg31 =(-Zww*q(3)*abs(q(3)))*(0.03*cos(0.1*t) - 0.4*cos(60*q(3)));
dg41 = (-Nrr*q(4)*abs(q(4)))* (-0.02*sin(0.5*t*q(4)) +0.3*cos(80*t));

% dM=[dm11 0 0 0; 0 dm22 0 0; 0 0 dm33 0; 0 0 0 dm44];
% dC=10*[0 dc12 0 0; dc21 0 0 0; 0 0 0 0; dc41 0 0 dc44];
% dD=13*[dd11 0 0 0; 0 dd22 0 0; 0 0 dd33 0; 0 0 0 dd44];
% dg=15*[dg11;dg21;dg31;dg41];

dM=[dm11 0 0 0; 0 dm22 0 0; 0 0 dm33 0; 0 0 0 dm44];
dC=[0 dc12 0 0; dc21 0 0 0; 0 0 0 0; dc41 0 0 dc44];
dD=[dd11 0 0 0; 0 dd22 0 0; 0 0 dd33 0; 0 0 0 dd44];

```

```

dg=[dg11;dg21;dg31;dg41];
% dM=zeros(4);
% dC=zeros(4);
% dD=zeros(4);
% dg=zeros(4,1);

M=M_+dM;
C=C_+dC;
D=D_+dD;
g=g_+dg;
% b=20*[1.3+2*sin(0.02*t)+1.5*sin(0.1*t);
%      -0.9+2*sin(0.02*t-pi/6)+1.5*sin(0.3*t);
%      0.6*sin(0.3*t)+0.2*sin(0.02*t);
%      -sin(0.09*t+pi/3)-3*sin(0.01*t)-sin(0.01*t)];
b=zeros(4,1);
% dq=M^(-1)*tau-M^(-1)*C*q-M^(-1)*D*q-M^(-1)*g;
% dq=M^(-1)*tau-M^(-1)*C*q-M^(-1)*D*q-M^(-1)*g+M^(-1)*b;
dq=M^(-1)*tau-M^(-1)*C*q-M^(-1)*D*q-M^(-1)*g+M^(-1)*b;
end

```

Код для вычисления производной η

```

function [ eta] = eta_auv( eta1 )
%UNTITLED3 Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
t=eta1(9);
q=eta1(5:8);
J_=[cos(eta1(4)) -sin(eta1(4)) 0 0;
    sin(eta1(4)) cos(eta1(4)) 0 0;
    0 0 1 0;
    0 0 0 1];
dj11=cos(eta1(4))*(0.02*cos(10*t)-0.3*sin(100*t*eta1(1)));
dj41=-sin(eta1(4))*(0.02*cos(10*t)-0.3*sin(100*t*eta1(1)));
dj21=sin(eta1(4))*(-0.03*sin(2*t)+0.4*cos(200*t));
dj22=cos(eta1(4))*(-0.03*sin(2*t)+0.4*cos(200*t));

```

```

dj33=(-0.5*sin(300*t)); dj44=0.04*cos(0.1*t);
deltaJ=[dj11 dj41 0 0;
        dj21 dj22 0 0;
        0 0 dj33 0;
        0 0 0 dj44];
% deltaJ=zeros(4,4);
eta=(J_+deltaJ)*q;

end

```

Код для вычисления τ

```

function [ tau] = tau_auv( A )
%UNTITLED8 Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
qc=A(1:4);
eq=A(5:8);
q=A(9:12);

t=A(17);
% if t>15
%     b_roof=A(13:16);
% else
%     b_roof=zeros(4,1);
% end
b_roof=zeros(4,1);
m=10;
Iz=30;
Xdu=34;
Ydv=75;
Zdw=33;
Ndr=62;
Xu=6;
Yv=10;
Zw=7;

```

```

Nr=14;
Xuu=18;
Yvv=4;
Zww=4;
Nrr=14;
% K1=diag([7,5,7,10]);
% K1=0.001*diag([2,1,2,1]);
K1=diag([5,3,1,3]);

M_=[m-Xdu 0 0 0;
     0 m-Ydv 0 0;
     0 0 m-Zdw 0;
     0 0 0 Iz-Ndr];
C_=[0 -m*q(4) 0 0;
     -m*q(4) 0 0 0;
     0 0 0 0;
     m*q(2) 0 0 -m*q(1)];
D_=[-Xu 0 0 0;
     0 -Yv 0 0;
     0 0 -Zw 0;
     0 0 0 -Nr];
g_=[-Xuu*q(1)*abs(q(1)); -Yvv*q(2)*abs(q(2)); -Zww*q(3)*abs(q(3)); -Nr];
% b=[1.3+2*sin(0.02*t)+1.5*sin(0.1*t);
%    -0.9+2*sin(0.02*t-pi/6)+1.5*sin(0.3*t);
%    0.6*sin(0.3*t)+0.2*sin(0.02*t);
%    -sin(0.09*t+pi/3)-3*sin(0.01*t)-sin(0.01*t)];

tau=M_*(qc+K1*eq)+C_*q+D_*q+g_-1*b_roof;

end

```