Санкт-Петербургский государственный университет
Механика и математическое моделирование
Теоретическая механика

Шугайло Тимофей Сергеевич

Гашение колебаний тележки с маятником

Бакалаврская работа

Научный руководитель:
профессор, доктор физ.-мат. наук Юшков М.П.

Рецензент:
доцент, к.ф.м.н. Наумова Н.В.

Санкт-Петербург
2017г.

Saint Petersburg State University
Mechanics and Mathematical modeling
Theoretical Mechanics

Shugaylo Timofey Sergeevich

Suppression of oscillation of a trolley with a pendulum

Bachelor's Thesis

Scientific supervisor:
professor, doctor of science (math) Mikhail P. Yushkov

Reviewer:
associate professor, PhD Nataliya V. Naumova

Saint Petersburg
2017г.

Содержание

1 Введение

Задача о нахождении управления для перевода системы из одного заданного фазового состояния в другое заданное фазовое состояние являет одной из важнейших задач теории управления. В представленной работе рассмотрены два подхода к решению такого класса задач. Один из них является классическим и наиболее распространенным методом теории управления и известен как принцип максимума Понтрягина. Второй, совершенно новый, опирается на методы неголономной механики и обобщенный принцип Гаусса.

2 Описание системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из тележки с подвешенным на нее маятником (Рис. 1). Тележка может двигаться только в горизонтальном направлении. Будем считать, что всякие силы трения в системе отсутствуют, как касательно горизонтального движения тележки, так и касательно колебаний подвешенного на нее маятника.

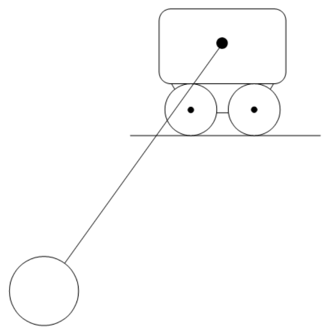

Рис. 1: Рассматриваемая механическая система

Проведем ось Ox коллинеарно оси движения тележки, а ось Oy перпендикулярно ей (Рис. 2). Для получения уравнений движения введем обобщенные Лагранжевы координаты положения рассматриваемой системы x и φ_1, где x — положение тележки на горизонтальной оси, а φ_1 соответствует углу отклонения маятника по часовой стрелке от вертикального положения в нижней точке. Массу тележки обозначим m, массу маятника m_1, а длину его подвеса — l_1.

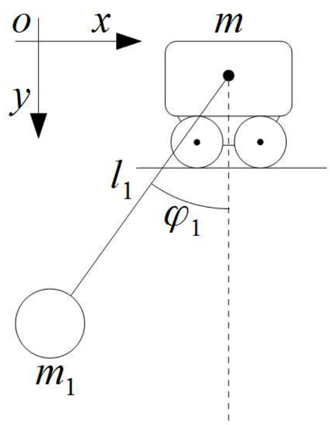

Рис. 2: Обобщенные координаты системы

3 Уравнения Лагранжа

Кинетическая энергия системы K есть сумма кинетической энергии тележки K_t и кинетической энергии маятника K_p:

$$K = K_t + K_p\,, \quad K_t = \frac{mv_t^2}{2}\,, \quad K_p = \frac{m_1 v_p^2}{2}\,.$$

где v_t — скорость тележки, v_p — скорость маятника.

Скорость тележки в рассматриваемых нами обобщенных координатах $\overrightarrow{v_t} = (\dot{x}, 0)$. Скорость маятника будем искать как сумму его относительной скорости $\overrightarrow{v_r}$ и переносной $\overrightarrow{v_e}$ в системе координат, жестко связанной с тележкой.

$$\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}\,.$$

Переносная скорость маятника равна скорости тележки $\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_t}$. Величина относительной скорости маятника равна произведению его угловой скорости на длину подвеса $v_r = l_1\dot{\varphi}_1$. Тогда, как видно на рисунке (Рис.3), $\overrightarrow{v_r} = (-l_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1, -l_1\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1)$. Таким образом, абсолютная скорость маятника:

$$\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_t} = (\dot{x} - l_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1, -l_1\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1)\,.$$

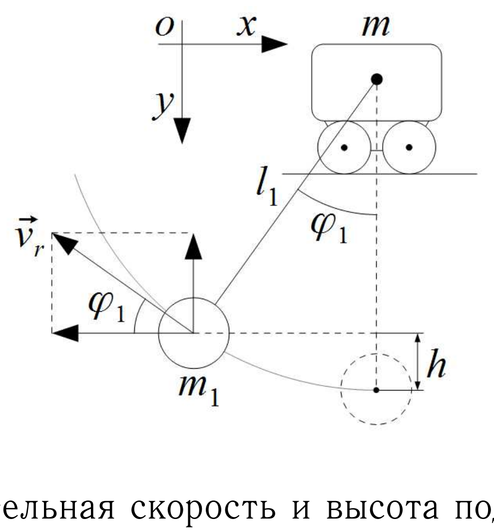

Рис. 3: Относительная скорость и высота подьема маятника

Потенциальная энергия системы целиком состоит из потенциальной энергии маятника в поле силы тяжести $U = m_1gh$, где $h = l_1(1 - \cos\varphi_1)$ — высота его подъема над крайним нижним положением (Рис. 3).

Суммируя все вышесказанное получаем выражения для кинетической и потенциальной энергии системы:

$$K = \frac{mv_t^2}{2} + \frac{m_1 v_p^2}{2} = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + m_1(\dot{x} - l_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1)^2 + (l_1\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1)^2)\,,$$

$$U = m_1 l_1 g(1 - \cos\varphi_1)\,.$$

Уравнения Лагранжа в общем случае имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\Big) = Q_\sigma\,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \quad L = K - U\,.$$

Подробнее об уравнениях Лагранжа можно почитать в любом учебнике по теоретической механике, например, [1].

В нашем случае:

$$s = 2, \quad q_1 = x, \quad q_2 = \varphi_1\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + m_1(\dot{x} - l_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1)\,, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) = m\ddot{x} + m_1\ddot{x} - l_1\ddot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + l_1\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = -m_1 l_1 \dot{x}\cos\varphi_1 + m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = m_1 l_1 \sin\varphi_1(\dot{x}\dot{\varphi}_1 - g)\,,$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\Big) = -m_1 l_1\ddot{x}\cos\varphi_1 + m_1 l_1 \dot{x}\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1 + m_1 l_1^2\ddot{\varphi}_1\,.$$

Пусть на всем промежутке времени движения на тележку действует некая выбираемая нами сила $F(t)$. Далее мы будем называть эту силу управляющим усилием. Тогда $Q_x = F$, $Q_{\varphi_1} = 0$.

Таким образом уравнения движения рассматриваемой нами системы имеют следующий вид:

$$m\ddot{x} + m_1\ddot{x} - m_1 l_1\ddot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + m_1 l_1\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1 = F\,,$$

$$-m_1 l_1\ddot{x}\cos\varphi_1 + m_1 l_1^2\ddot{\varphi}_1^2 + m_1 l_1 g\sin\varphi_1 = 0\,.$$

Предположим, что на всем промежутке движения колебания маятника достаточно малы, и далее будем рассматривать уравнения движения в линейном приближении. Отбрасывая все нелинейные члены относительно $x, \varphi_1, \dot{\varphi}_1$, получим следующую систему уравнений:

$$m\ddot{x} + m_1\ddot{x} - m_1 l_1\ddot{\varphi}_1 = F\,, \quad -m_1 l_1\ddot{x} + m_1 l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_1 l_1 g\varphi_1 = 0\,. \tag{1}$$

4 Постановка задачи

Поставим перед собой следующую задачу: найти такое управляющее усилие, которое переводит систему из одного заданного фазового состояния (назовем его начальным) в другое заданное фазовое состояние (конечное) за определенный промежуток времени $\widetilde{T}$.

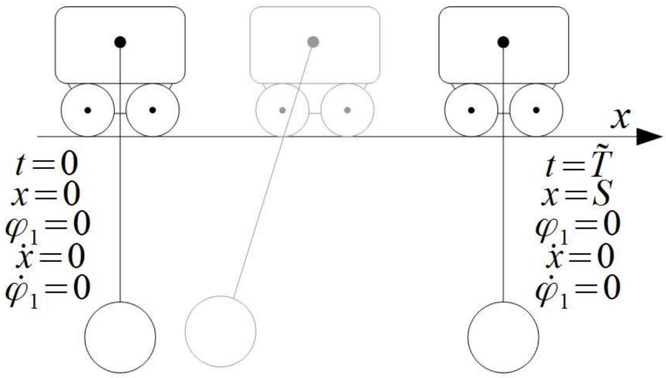

Рис. 4: Начальное, промежуточное и конечное состояния системы

Решим поставленную задачу для того случая, когда начальное и конечное состояния являются состояниями покоя системы при чем за время движения $\widetilde{T}$ тележка преодолевает расстояние S (Рис. 4). На рисунке также видно, что точку O оси Ox мы совместили с начальным положением тележки, а время отсчитывается от нуля с момента начала движения. В таком случае система уравнений (1) должна интегрироваться при условиях:

$$
\begin{gathered}
x_0(0) = 0, \quad \varphi_1(0) = 0, \quad \dot{x}_0(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \\
x_0(\widetilde{T}) = S, \quad \varphi_1(\widetilde{T}) = S\,, \quad \dot{x}_0(\widetilde{T}) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(\widetilde{T}) = 0\,.
\end{gathered} \tag{2}
$$

5 Уравнения движения в главных безразмерных координатах

Далее для удобства решения поставленной задачи нам целесообразно перейти к нормальным (главным) безразмерным координатам. Для этого выразим x в (1) из первого уравнения и подставим во второе, получим:

$$ml_1\ddot{\varphi}_1 + gM\varphi_1 = F,$$

учитывая, что $mx + m_1 x - m_1 l_1 \varphi_1 = M x_c$, где x_c — положение центра масс системы, получим систему равнений в главных координатах x_c, φ_1:

$$M\ddot{x}_c = F\,, \quad m l_1 \ddot{\varphi}_1 + gM\varphi_1 = F\,, \quad m l_1 \ddot{\varphi}_1 + gM\varphi_1 = F\,.$$

Заметим, что здесь первое уравнение не что иное, как теорема о движении центра масс механической системы, которая является одной из важнейших теорем теоретической механики и известна нам из классического курса.

Далее, для перехода к безразмерным величинам проведем следующую замену:

$$u = \frac{F}{Mg}\,, \quad x_0 = \frac{M}{m l_1} x_c\,, \quad x_1 = \varphi_1\,,$$
$$\tau = \Omega_1 t\,, \quad T = \Omega_1 \widetilde{T}\,, \quad \Omega_1 = \sqrt{\frac{Mg}{m l_1}}\,.$$

Здесь u — безразмерное управляющее воздействие (далее просто управляющее воздействие), τ — безразмерное время, Ω_1 — собственная частота свободных колебаний системы.

В результате получим следующую систему уравнений движения в главных безразмерных Лагранжевых координатах:

$$\begin{cases} x_0'' \ = u\,, \\ x_1'' \ + \ x_1 = u\,. \end{cases} \tag{3}$$

А условия в начале и в конце движения примут вид:

$$\begin{gathered} x_0(0) = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_0'(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0\,, \\ x_0(T) = 1, \quad x_1(T) = 0, \quad x_0'(T) = 0, \quad x_1'(T) = 0\,. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $x_0(T) = 1$ в силу того, что систему уравнений можно разделить на $\dfrac{S}{l_1}$ и, совершив соответствующую замену ($\widetilde{x}_i = \dfrac{l_1 x_i}{S}, \quad \widetilde{u} = \dfrac{l_1 u}{S}$), получить систему уравнений в главных безразмерных координатах, для которой $\widetilde{x_0}(T) = 1$.

6 Применение принципа максимума Понтрягина

В системе уравнений (3) x_0, x_1, u являются неизвестными функциями времени, но самих уравнений всего два. Следовательно, система (3) является недоопределённой. Поэтому к рассматриваемой системе следует добавить еще одно условие, которое будет выражать критерий, положенный в основу выбора управляющего усилия из всех возможных вариантов, при которых система уравнений (3) имеет решение.

Критерии выбора u могут быть самыми разнообразными и чаще всего зависят от утилитарных предпочтений при решении поставленной задачи. Например, потребуем минимальность функционала:

$$J = \int_0^T u^2(\tau) d\tau \,. \tag{5}$$

Такому условию выбор управления при решении подобных задач подчиняется в монографии академика Черноусько [2]. К сожалению, ответа на вопрос о том, какой критерий привел к наложению такого условия, в его монографии нет. Однако если предположить, что расход топлива подчиняется закону $\theta = kF^2$, где k — постоянный коэффициент зависимости расхода от квадрата управляющего усилия, то требование минимальности расхода топлива за время движения привело бы как раз к этому условию.

Одним из наиболее широко распространённых и часто употребительных классических методов минимизации является принцип максимума Понтрягина. Основы этого принципа подробно изложены в [3].

Для применения принципа максимума систему уравнений (3) необходимо записать в виде $z_k' = f_k(z, t)$. Применительно к поставленной нами задаче, приняв $z_1 = x_0, \quad z_3 = x_1$, получим:

$$z_1' = z_2 \,, \quad z_2' = u \,, \quad z_3' = z_4 \,, \quad z_4' = u - z_3 \,. \tag{6}$$

Мы получили классическую задачу Лагранжа вариационного исчисления о нахождении минимума функционала (5) при условии выполнения связей (6). Для ее решения рассмотрим функционал:

$$I = \int_0^T \Big(u^2 - \sum_{k=1}^{2s} \lambda_k (z'_k - f_k)\Big) d\tau = \int_0^T \Big(H(z,u,\lambda,\tau) - \sum_{k=1}^{2s} \lambda_k z'_k\Big) d\tau\,,$$

где $\lambda_k = \lambda_k(t)$ — множители Лагранжа, $H = u^2 + \sum_{k=1}^{2s} \lambda_k f_k$.

Для того, чтобы набор z, u сообщал максимум функционалу I, необходимо и достаточно, чтобы $\delta I \geq 0$ при любых достаточно малых допустимых вариациях δz, δu, т.е.

$$\delta I = \int_0^T \Big(H(z+\delta z, u+\delta u, \lambda, \tau) - \sum_{k=1}^{2s} \lambda_k (z'_k + \delta z'_k)\Big) d\tau - \\ - \int_0^T \Big(H(z,u,\lambda,\tau) - \sum_{k=1}^{2s} \lambda_k z'_k\Big) d\tau\,.$$

Раскладывая под знаком интеграла $H(z+\delta z, u+\delta u, \lambda, \tau)$ в ряд Тейлора около z, u с точностью до величин первого порядка малости по отношению к δz, δu, приходим к следующему выражению:

$$\delta I = \int_0^T \Big(\frac{\partial H}{\partial u}\delta u + \sum_{k=1}^{2s} \frac{\partial H}{\partial z_k}\delta z_k - \sum_{k=1}^{2s} \lambda_k \delta z'_k\Big) d\tau\,.$$

Далее, "перебрасывая" производную, интегрированием по частям с δz_k на λ_k в последнем слагаемом и учитывая, что $\delta z_k(0) = \delta z_k(T) = 0$, так как начальное и конечное положения системы строго фиксированы, получаем:

$$\delta I = \int_0^T \Big(\frac{\partial H}{\partial u}\delta u + \sum_{k=1}^{2s} \Big(\frac{\partial H}{\partial z_k} + \lambda'_k\Big)\delta z_k\Big) d\tau \geq 0\,,$$

откуда в силу произвольности вариаций δz, δu вытекает:

$$\lambda'_k = -\frac{\partial H}{\partial z_k}\,, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0\,, \quad k = \overline{1, 2s}\,.$$

Подробнее процесс получения решений для классической задачи Лагранжа в более общем случае описан в [4].

Конкретно в нашем случае согласно (6) имеем:

$$H = u^2 + \lambda_1 z_2 + \lambda_2 u + \lambda_3 z_4 + \lambda_4 (u - z_3)\,.$$

откуда получаем систему дифференциальных уравнений для нахождения вида управляющего воздействия:

$$\lambda_1' = 0\,, \quad \lambda_2' = -\lambda_1\,, \quad \lambda_3' = \lambda_4\,, \quad \lambda_4' = -\lambda_3\,, \quad 2u + \lambda_2 + \lambda_4 = 0\,,$$

что равносильно:

$$\lambda_2'' = 0\,, \quad \lambda_4'' + \lambda_4 = 0\,, \quad 2u = \lambda_2 + \lambda_4\,. \tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что $\lambda_2 = -2C_1 - 2C_2\tau$, $\lambda_4 = -2C_3 \sin\tau - 2C_4 \cos\tau$ является решением рассматриваемой системы. Следовательно, управляющее воздействие имеет вид:

$$u(\tau) = C_1 + C_2\tau + C_3 \sin\tau + C_4 \cos\tau\,, \tag{8}$$

Именно такой вид управляющего воздействия и сообщает минимум функционалу (5) при любом действительном движении рассматриваемой нами системы в условиях поставленной задачи.

7 Интегралы Дюамеля

Для получения решения поставленной задачи осталось проинтегрировать систему (3), предварительно подставив в ее правую часть выражение (7). Помимо неизвестных коэффициентов C_i, $i = \overline{1,4}$ из управляющего воздействия вследствие интегрирования возникнут еще четыре неизвестных постоянных D_i, $i = \overline{1,4}$. Далее полученные в общем виде выражения для x_0 и x_1, содержащие восемь неизвестных C_i, D_i, $i = \overline{1,4}$, подставим в условия на концах движения (4) и получим систему из восьми линейных алгебраических уравнений относительно восьми неизвестных. Разрешив полученную систему, найдем наконец неизвестные постоянные C_i, D_i, $i = \overline{1,4}$, что и будет являться решением поставленной нами задачи. Однако такой подход является весьма громоздким, гораздо более изящный и лаконичный вариант решения подобных дифференциальных уравнений при нулевых начальных условиях предложил Дюамель [5], а именно:

$$x_0(\tau) = \int_0^\tau u(\tau_1)(\tau - \tau_1)d\tau_1\,, \tag{9}$$

$$x_1(\tau) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^\tau u(\tau_1) \sin(\omega_1(\tau - \tau_1)) d\tau_1 \,, \quad \omega_1 = 1 \,.$$

Нетрудно видеть, что нулевым начальным условиям такие решения удовлетворяют автоматически. Следовательно, осталось подставить их в условия на конце и разрешить систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных C_i, $i = \overline{1,4}$, что и будет являться решением поставленной задачи.

8 Связь полученного решения с неголономной механикой

Вид управляющего воздействия (8) является общим решением системы дифференциальных уравнений (7). Эквивалентными преобразованиями эта система сводится к одному уравнений относительно управляющего воздействия u. Сделать это можно так: сначала дважды продифференцируем $2u + \lambda_2 + \lambda_4 = 0$. Затем в полученное после дифференцирования уравнение $2u'' - \lambda_4 = 0$ подставим $-\lambda_4 = 2u + \lambda_2$ и продифференцируем еще дважды. В результате после сокращения на 2 получим:

$$u'''' + u'' = 0 \,,$$

что эквивалентно записи в операторном виде:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Big(\frac{d^2}{d\tau^2} + {\omega_1}^2\Big) u = 0 \,, \quad {\omega_1}^2 = 1 \,. \tag{10}$$

Действительно, вид управляющего воздействия (8) является не чем иным, как общим решением дифференциального уравнения (10). Вернувшись в этом уравнении к размерной величине управляющего усилия $u = \dfrac{F}{Mg}$, а затем, подставив выражение для F из (1), получим:

$$M \frac{d^6 x}{dt^6} - m_1 l_1 \frac{d^6 \varphi_1}{dt^6} + M \Omega_1^2 \frac{d^4 x}{dt^4} - m_1 l_1 \Omega_1^2 \frac{d^4 \varphi_1}{dt^4} = 0 \,.$$

Отсюда можно видеть, что управляющее усилие, найденное по методу Понтрягина, равносильно выполнению на всем промежутке движения идеальной линейной неголономной связи шестого порядка, причем само управление является реакцией этой связи. Таким образом, решение, найденное методом Понтрягина, равносильно решению некоторой неголономной задачи с наложением связей шестого порядка.

Решим теперь поставленную задачу методами неголономной механики, подробно описанными в монографии [6].

9 Принцип Гаусса

Для системы с произвольным числом степеней свободы и свободной от любых связей справедлив второй закон Ньютона:

$$M\overrightarrow{W} = \overrightarrow{Y}\,,$$

где $\overrightarrow{W}$ — ускорение изображающей точки системы, а $\overrightarrow{Y}$ — вектор активных сил:

$$\overrightarrow{W} = \frac{1}{M}\Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\Big)\overrightarrow{e^\sigma}\,, \quad \overrightarrow{Y} = Q_\sigma \overrightarrow{e^\sigma}\,.$$

При наложении на систему линейных идеальных неголономных связей второго порядка:

$$f_2^\varkappa = a_{2,\sigma}^\varkappa(t,q,\dot q)\ddot q^{\,\sigma} + a_{2,0}^\varkappa(t,q,\dot q) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \tag{11}$$

второй закон Ньютона принимает вид:

$$M\overrightarrow{W} = \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{R}\,, \quad \overrightarrow{R} = \Lambda_\varkappa \overrightarrow{\varepsilon}^{\,l+\varkappa}\,, \quad \overrightarrow{\varepsilon}^{\,l+\varkappa} = a_{2,\sigma}^\varkappa \overrightarrow{e^\sigma}\,, \quad l = s-k\,.$$

В этом случае справедлив принцип Гаусса утверждающий, что

$$\delta'' Z = 0\,, \quad Z = \frac{M}{2}\Big(\overrightarrow{W} - \frac{\overrightarrow{Y}}{2}\Big)^2. \tag{12}$$

Здесь δ'' означает, что варьируются лишь ускорения обобщённых координат, считая при этом $t, q, \dot q$ фиксированными. Уравнение (12) означает, что вектор реакции $\overrightarrow{R} = M\overrightarrow{W} - \overrightarrow{Y}$ принимает своё минимально возможное значение при удовлетворении связей (11).

Отметим также, что к неголономным связям второго порядка легко сводятся голономные удерживающие связи ($f_0(q,t) = 0$) и неголономные связи первого порядка ($f_1(\dot q, q, t) = 0$). Здесь число в индексе f означает порядок неголономности.

10 Обобщенный принцип Гаусса

Принцип Гаусса может быть обобщен на случай наложения на систему неголономных связей высокого порядка:

$$f^{\varkappa}_{n+2} = a^{\varkappa}_{n+2,\sigma}(t, q, \dot{q}, ..., q^{(n+1)})q^{(n+2)} + a^{\varkappa}_{n+2,0}(t, q, \dot{q}, ..., q^{(n+1)}) = 0\,, \qquad (13)$$

В этом случае можно сформулировать обобщённый принцип Гаусса в следующем виде:

$$\delta^{(n+2)} Z_{(n)} = 0\,, \quad Z_{(n)} = \frac{M}{2}\Big(\overrightarrow{W}^{(n)} - \frac{\overrightarrow{Y}^{(n)}}{M}\Big)^2\,. \qquad (14)$$

Здесь $\delta^{(n+2)}$ означает аналогично, что варьируется лишь $q^{(n+2)}$, при этом $t, q, \dot{q}, ..., q^{(n+1)}$ считая фиксированными. Формула (14) подразумевает, что минимальным из всех возможных при удовлетворении связей (13) является уже не сам вектор реакции $\overrightarrow{R}$, а его n-я производная по времени:

$$\overrightarrow{\mathfrak{R}} \equiv \overrightarrow{R}_{(n)} = M\frac{d^n\overrightarrow{W}}{dt^n} - \frac{d^n\overrightarrow{Y}}{dt^n}\,. \qquad (15)$$

11 Применение обобщенного принципа Гаусса к рассматриваемой задаче

Как уже говорилось ранее, решение поставленной задачи методом Понтрягина является реакцией неголономной связи шестого порядка. Согласно этому утверждению будем искать управляющее воздействие как реакцию некоторой идеальной неголономной связи шестого порядка, наложенной на систему.

$$\overrightarrow{R} = u(t)\,\overrightarrow{b}\,, \quad \overrightarrow{b} = \sum_{\sigma=1}^{2} b_\sigma \overrightarrow{e}^{\,\sigma}\,. \qquad (16)$$

Тогда согласно обобщённому принципу Гаусса $\delta^{(6)}(\overrightarrow{R}_4)^2 = 0$. Из всех возможных неголономной связей шестого порядка выберем то подмножество, для которого $\overrightarrow{R}_4 = 0$, т.е.:

$$\frac{d^4u}{dt^4} = 0\,,$$

что наконец дает нам управляющее воздействие в виде:

$$u(\tau) = C_1 + C_2\tau + C_3\tau^2 + C_4\tau^3\,. \tag{17}$$

Подставляя теперь u в интегралы Дюамеля (9), а затем в условия на конце движения из (4), получим систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных $C_i,\ i = \overline{1,4}$. Затем, разрешив систему относительно C_i, найдем окончательно искомое управление аналогично тому, как мы поступали при решении задачи методом Понтрягина.

12 Численные расчеты

В качестве примера приведем некоторые численные расчеты для различных безразмерных промежутков движения T. Рассчитаем движение системы при:

$$T = 2\pi,\ T = 8\pi,\ T = 16\pi,\ T = 32\pi.$$

Применяя алгоритм решения к виду управляющего воздействия (8), найденного с помощью принципа максимума Понтрягина, получаем следующие значения произвольных постоянных:

$$T = 2\pi:\ C_1 = 0.387637\,,\ C_2 = -0.123389\,,\ C_3 = 0\,,\ C_4 = -0.246777\,.$$

$$T = 8\pi:\ C_1 = 0.009874\,,\ C_2 = -0.000785\,,\ C_3 = 0\,,\ C_4 = -0.001571\,.$$

$$T = 16\pi:\ C_1 = 0.002397\,,\ C_2 = -0.000095\,,\ C_3 = 0\,,\ C_4 = 0.00019\,.$$

$$T = 32\pi:\ C_1 = 0.000595\,,\ C_2 = -0.000011\,,\ C_3 = 0\,,\ C_4 = -0.000023\,.$$

Для вида управления (17), найденного при помощи обобщенного принципа Гаусса, произвольные постоянные принимают следующие значения:

$$T = 2\pi:\ C_1 = 0.444357,\ C_2 = -0.606773,\ C_3 = 0.222178,\ C_4 = -0.023573.$$

$$T = 8\pi:\ C_1 = -0.000997,\ C_2 = 0.004255,\ C_3 = -0.000498,\ C_4 = 0.000013.$$

$$T = 16\pi:\ C_1 = -0.000058,\ C_2 = 0.000486,\ C_3 = -0.000029,\ C_4 = 0.0000004.$$

$T = 32\pi:\ C_1 = -0.000003,\ C_2 = -0.00005,\ C_3 = -0.000001,\ C_4 = 0.00000001.$

Проиллюстрируем полученные результаты с помощью графиков и проведем их небольшой анализ.

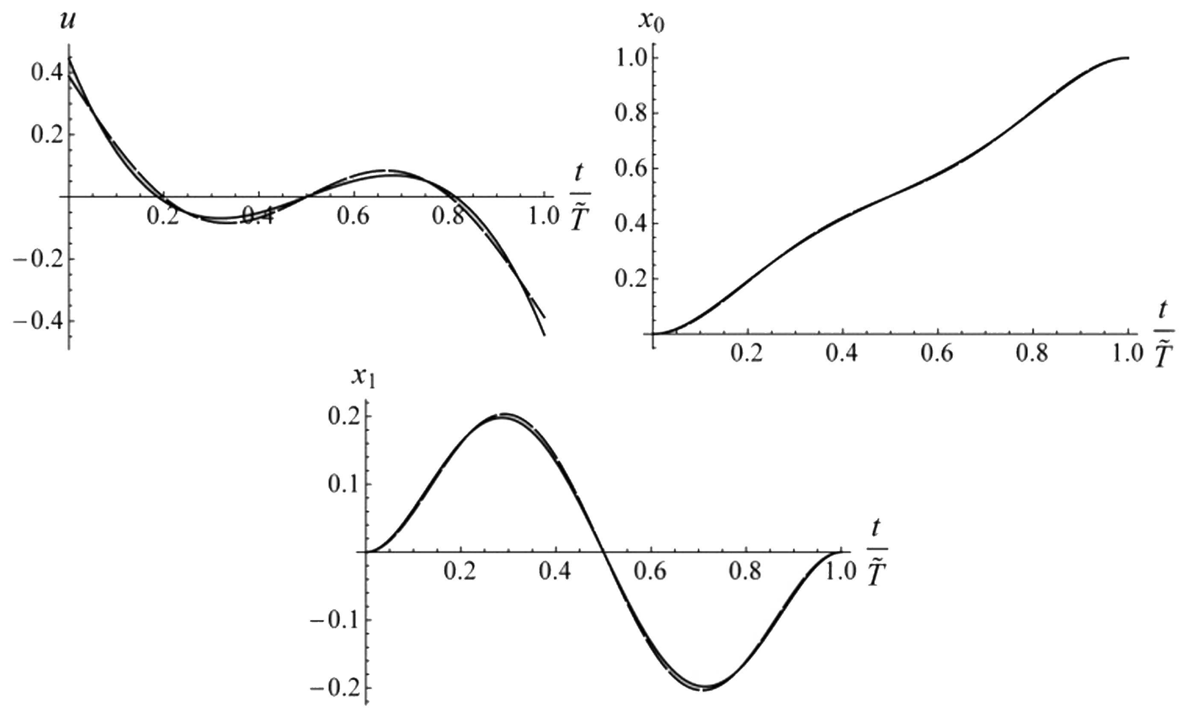

Рис. 5: Движение системы при $T = 2\pi$

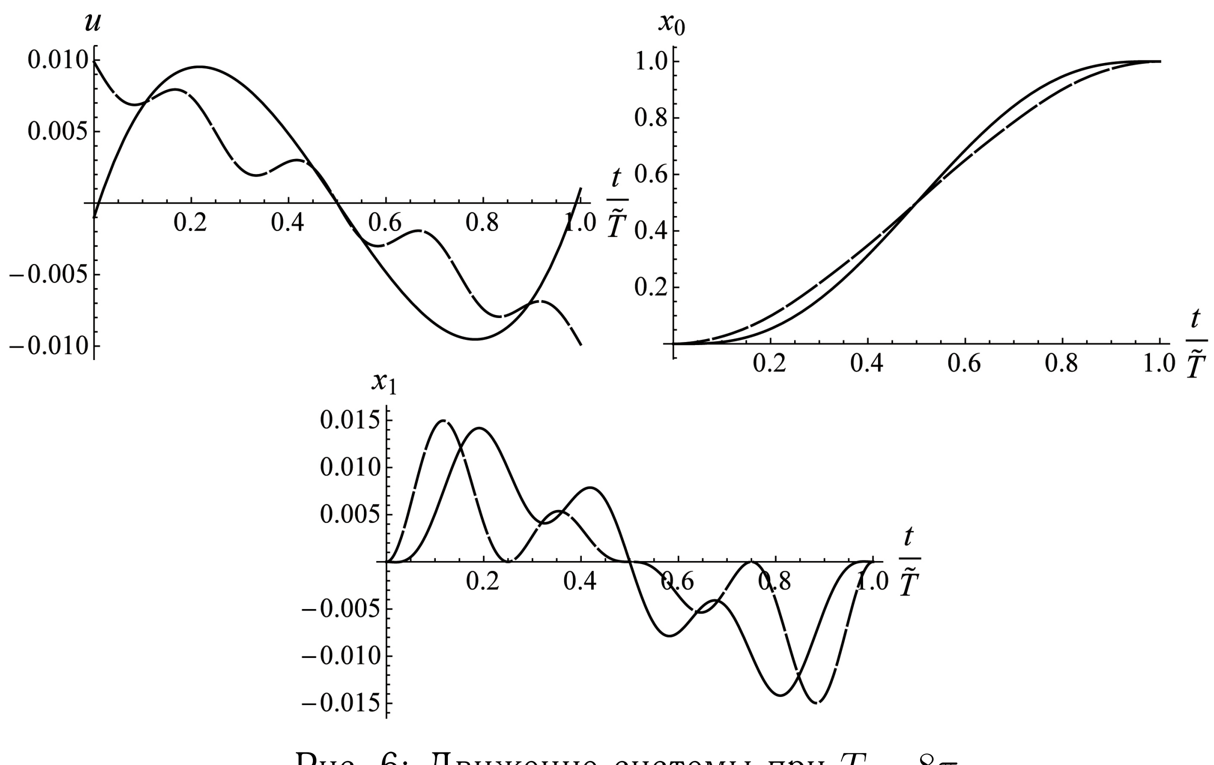

Рис. 6: Движение системы при $T = 8\pi$

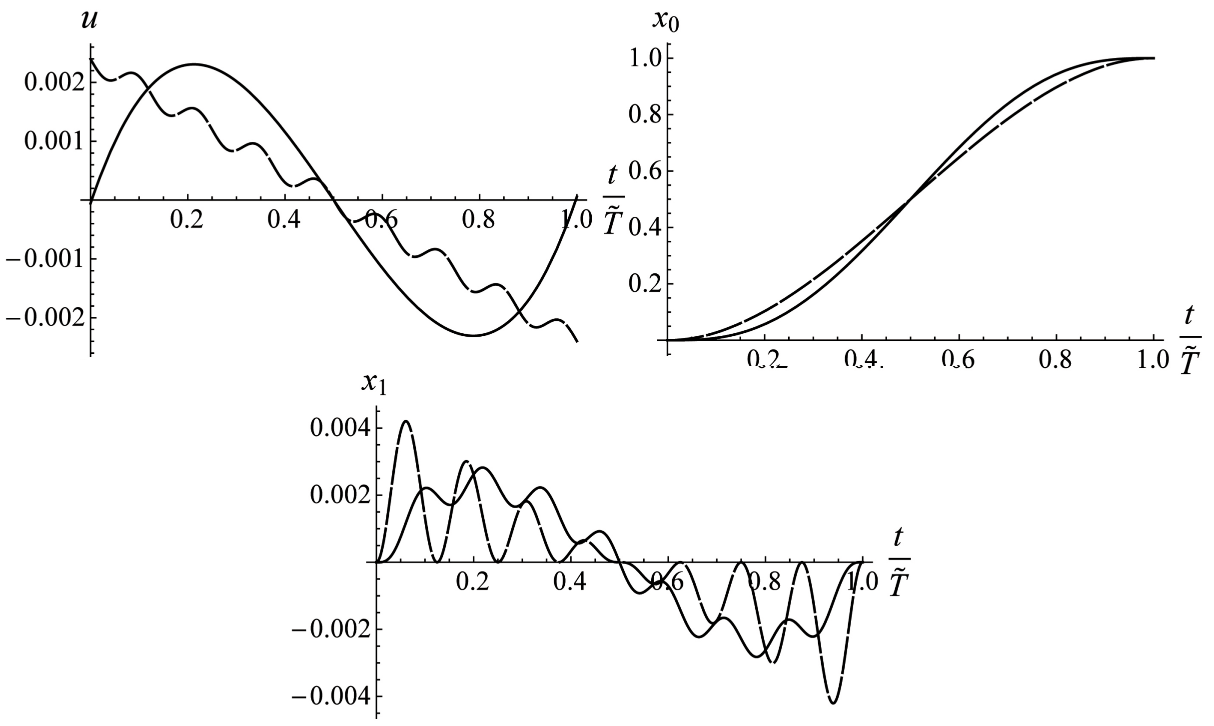

Рис. 7: Движение системы при $T = 16\pi$

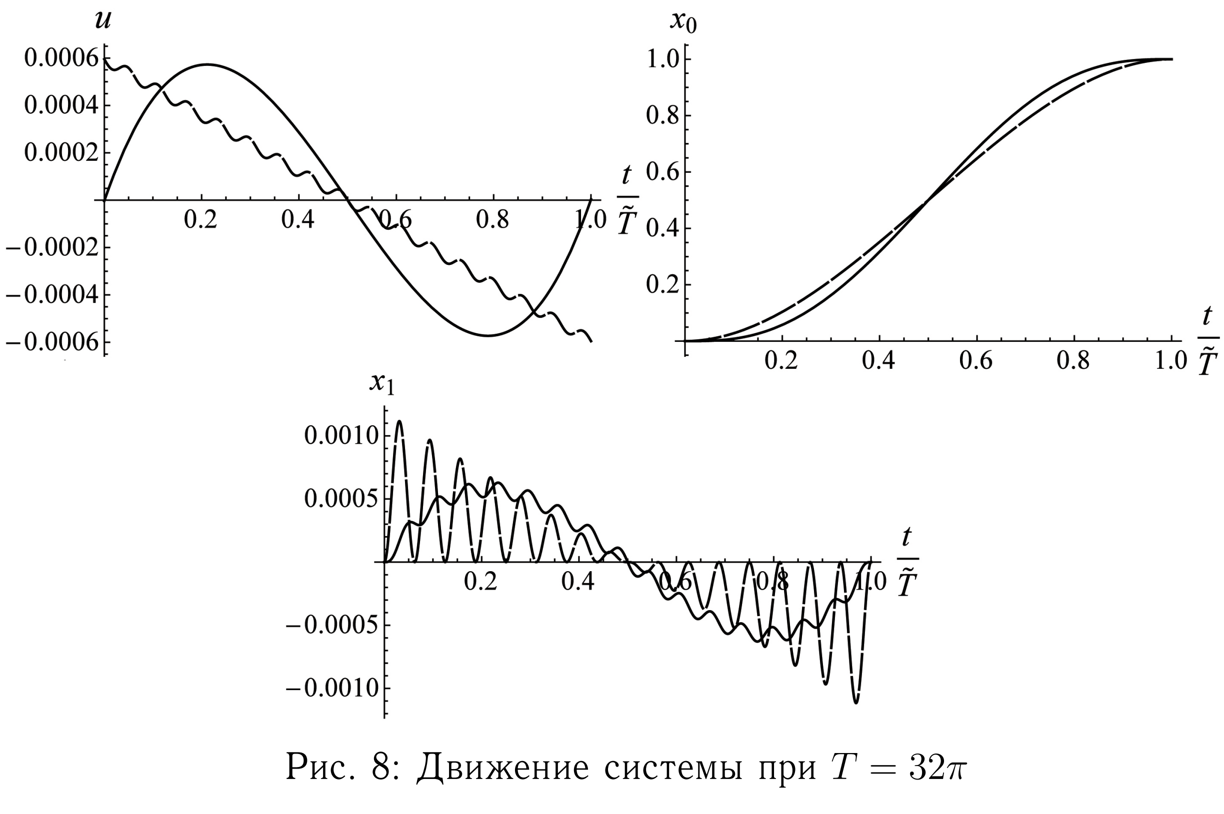

Рис. 8: Движение системы при $T = 32\pi$

Как видно на графиках, при коротком безразмерном времени движения решения, найденные как первым, так и вторым методом, практически совпадают. С ростом промежутка движения растет и разница в полученных решениях. Кроме того, на графиках можно наблюдать как движение системы, найденное первым методом, сопровождается интенсивными колебаниями маятника, что объясняется наличием в управляющем воздействии гармоник, содержащих собственную частоту рассматриваемой системы. Решение, найденное вторым методом, имеет полиномиальный вид и лишено этого недостатка, в чем его безусловное преимущество. К этому можно также добавить, что управление, найденное первым методом, имеет сильный скачок в начале и в конце движения, тогда как в решении по второму методу с ростом времени движения такой скачок стремится к нулю.

13 Заключение

В представленной работе получено решение задачи теории управления о переводе механической системы, состоящей из тележки с подвешенным на нее маятником, из состояния покоя в другое состояние покоя, находящееся на расстоянии S от начального положения за заданный промежуток времени $\widetilde{T}$.

Задача решена двумя принципиально отличающимися методами, один из которых принадлежит к теории управления (принцип максимума Понтрягина), а другой к неголономной механике (обобщенный принцип Гаусса).

Проведен сравнительный анализ этих двух подходов, показавший, что при коротком времени движения оба метода дают практически одинаковый результат, а при длительном движении новый метод имеет явные преимущества перед классическим.

Список литературы

[1] Теоретическая механика [Текст] : [учебное пособие для механико-математических специальных университетов] / Н.Н.Поляхов, С.А.Зегжда, М.П.Юшков; под ред. Н.Н. Поляхова. — Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1985. — 536 с.

[2] Управление колебаниями / Ф.Л.Черноусько, Л.Д.Акуленко, Б.Н.Соколов. — М.: Наука, 1980. — 383 с.

[3] Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. — 4-е изд., стер. — М.: Наука, 1983. — 392 с.

[4] Вариационные задачи механики и управления. Численные методы / Ф.Л.Черноусько, Н.В.Баничук, — М.: Наука, 1971. — 168 с.

[5] Неголономная механика: теория и приложения / С.А.Зегжда, Ш.Х.Солтаханов, М.П.Юшков. — М.: Физматлит, 2009. — 343 с.

[6] Уравнение движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления / С.А. Зегжда, Ш.Х.Солтаханов, М.П.Юшков ; под ред. П.Е.Товстика. — М.: Физматлит, 2005. — 268 с.