САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИГР И СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Иванова Вероника Аркадьевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Устойчивость вектора Шепли в многошаговой игре

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,

кандидат физ.-мат. наук,

доцент

Кузютин Д. В.

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Введение 3
Постановка задачи 4
Обзор литературы 5
Глава 1. Кооперативные многошаговый игры: устойчивость решений и процедура распределения дележа. 6
1.1. Основные обозначения 6
1.2. Динамическая устойчивость и условие Янга 8
1.3. Процедура распределения дележа и её свойства 11
Глава 2. Кооперативные многошаговые многокритериальные игры 13
2.1. Основные обозначения 13
2.2. Два способа задания характеристической функции 15
2.3. Динамическая устойчивость и другие свойства процедуры распределения дележа 17
2.4. Уточненная процедура распределения дележа 23
2.5. Условие Янга и обобщенная процедура распределения дележа 27
Выводы 33
Заключение 34
Список литературы 35
Приложение 1. Программная реализация алгоритмов. 37

Введение

Теория кооперативных динамических игр является интенсивно развивающимся разделом современной прикладной математики. Выпускная квалификационная работа посвящена исследованию динамических свойств кооперативных решений в многошаговых многокритериальных играх с полной информацией [4] .

В главе 1 проводится формализация многошаговой (однокритериальной) игры n лиц в развернутой форме с полной информацией, изложена общая схема кооперативного поведения игроков. В качестве принципа оптимальности выбран вектор Шепли [18]. Сформулированы основные динамические свойства решений, в частности, свойство динамической устойчивости (time consistency) [2] и свойство устойчивости против иррационального поведения игроков (irrational behavior proof condition) [21], или условие Янга. На примере игры трех лиц показано, что вектор Шепли в общем случае не удовлетворяет ни условию динамической устойчивости, ни условию Янга. Представлен известный метод преодоления отмеченных проблем – процедура распределения дележа (в подыграх вдоль оптимальной кооперативной траектории) [15, 14, 20] .

В главе 2 формализована многошаговая игра с векторными выигрышами игроков (многокритериальная игра). Для построения характеристической функции кооперативной игры используются как «классическая» α -характеристическая функция [7], так и ζ – характеристическая функция [9]. Формализована уточненная ПРД [22], удовлетворяющая свойствам эффективности, неравенству состоятельности во времени, неотрицательности. Данный подход применен для модельного примера – игры трех лиц с двумя критериями у каждого игрока. Кроме того, формализована обобщенная ПРД [22], дополнительно удовлетворяющая сильному условия Янга, ее применение продемонстрировано на примере. Для расчета компонент вектора Шепли в подыграх и компонент ПРД (текущих выплат игрокам) написана программа.

Постановка задачи

Приведем здесь описательную постановку основной задачи (формализованное подробное описание проводится в параграфах 1.1, 1.2, 2.1 – 2.3). Для достижения устойчивой и реализуемой на практике кооперации в многошаговой игре игрокам необходимо последовательно решить следующие задачи:

1) Согласованно выбрать набор стратегий, максимизирующий сумму выигрышей всех игроков (и соответствующую оптимальную кооперативную траекторию).
2) Выбрать правило распределения (дележа) суммарного кооперативного выигрыша между игроками (с учетом значений характеристической функции).
3) Определить процедуру пошаговых выплат совокупного выигрыша, «положенного» каждому игроку в соответствии с правилом 2) таким образом, чтобы полученная ПРД удовлетворяла ряду желательных свойств, обеспечивающих устойчивость кооперативной схемы поведения.

Основной задачей ВКР является анализ применения новых ПРД (уточненная и обобщенная ПРД) в многошаговых многокритериальных играх с использованием различных подходов к построению характеристической функции, а также написание программы для расчета текущих выплат в соответствии с уточненной и обобщенной ПРД.

Обзор литературы

В статье [2] впервые было формализовано свойство динамической устойчивости решений в дифференциальной игре n лиц, а в работе [3] предложен метод построения динамически устойчивого решения в кооперативной игре, названный «процедурой распределения дележа» (ПРД). В дальнейшем этот подход был распространен на различные классы кооперативных динамических игр (см., например, [15, 14, 20]).

Проблеме построения устойчивых (в том числе динамически устойчивых) решений в многошаговых (однокритериальных) играх n лиц в развернутой форме посвящен целый ряд работ (см., в частности, [1, 4, 10]). Начиная с пионерских работ, относящихся к играм с векторными выигрышами [8, 19], основное внимание уделялось некооперативным многокритериальным играм (см., например, [11, 12]). Проблеме кооперативного поведения в играх с векторными выигрышами посвящены статьи [16, 17], в последней статье известный вектор Шепли [18] распространен на класс многокритериальных игр.

Отметим, что в общем случае при поиске оптимальной кооперативной траектории, а также при построении характеристической функции [7, 9, 4, 5] в кооперативной многокритериальной игре необходимо дополнительное правило выбора единственного Парето-оптимального решения [6, 13] в каждой вспомогательной задаче векторной оптимизации. Однако, во всех примерах, рассмотренных в выпускной квалификационной работе, все вспомогательные задачи векторной оптимизации имеют единственное Парето-оптимальное решение.

Свойство устойчивости против иррационального поведения игроков (или условие Янга) было предложено в статье [21].

Глава 1. Кооперативные многошаговый игры: устойчивость решений и процедура распределения дележа

1.1. Основные обозначения

Рассматривается конечная игра с полной информацией [4], заданная на древовидном графе, со скалярными выигрышами в каждой вершине графа. Будем пользоваться следующими обозначениями:

- $N = \{1..n\}$ – множество игроков;
- $K -$ дерево игры с начальной узлом (корнем дерева) x_0;
- P – множество всех узлов игры;
- $S(x)$ – множество всех прямых потомков узла x на $K;$
- $S^{-1}(y)$ – предшествующий узел относительно узла y, $y \neq x_0$;
- $\omega = (x_0 \dots x_{t-1}, x_t \dots x_T)$ – траектория на дереве игры $x_{t-1} = S^{-1}(x_t)\,, 1 \leq t \leq T,\ S(x_T) = \emptyset\ \ ;$
- $P_i -$ множество всех узлов, в которых игрок i делает выбор. $P_i \cap P_j = \emptyset, i \neq j$;
- $P_{n+1} -$ множество всех конечных узлов, $\bigcup_{i=1}^{n+1} P_i = P$;
- $h_i(x) -$ векторный пошаговый выигрыш игрока i в каждом узле $x \in P$. Полагаем, что

$$h_i(x) \geq 0, \forall i \,\epsilon\, N,\ \ \forall x \,\epsilon\, P \qquad (1)$$

Будем считать, что игроки используют чистые стратегии в игре [4]. Чистая стратегия $u_i(\cdot)$ игрока i - это функция, ставящая в соответствие каждой позиции $x \,\epsilon\, P_i$, в которой игрок i делает выбор, “следующую” позицию $u_i(x) \,\epsilon\, S(x)$. Обозначим U_i – конечный набор чистых стратегий игрока i. Пусть $U = \prod_{i\,\epsilon\, N} U_i$. Набор стратегий $u = (u_1 \dots u_n) \in U$ порождает единственную траекторию игры $\omega = (x_0 \dots x_t, x_{t+1} \dots x_T)$, где $x_{t+1} = u_j(x_t) \epsilon S(x_t)$, если $x_t \epsilon P_j$.

Обозначим как

$$H_i(u) = h_i(\omega) = \sum_{t=0}^{T} h_i(x_t) \qquad (2)$$

функцию, ставящую в соответствие набору стратегий $u = (u_1 \dots u_n)$ (и, соответственно, траектории игры) накопленный выигрыш $i -$го игрока. Каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш $H_i(u)$. Если игроки согласны на кооперацию, они стремятся максимизировать общий накопленный суммарный выигрыш $\sum_{i=1}^{n} H_i(u)$.

В однокритериальных играх единственным образом в смысле значения определяется общий накопленный суммарный выигрыш. Однако траектория, которая доставляет этот выигрыш, может быть не единственна.

Будем считать, что игроки договорились использовать некоторое правило выбора единственной траектории, которая доставляет максимальный суммарный выигрыш игрокам и является *оптимальной кооперативной траекторией игры* $\bar{\omega} = (\bar{x}_0 \dots \bar{x}_t, \bar{x}_{t+1} \dots \bar{x}_T)$, $\bar{x}_0 = x_0$. Данная траектория порождается набором стратегий $\bar{u} = (\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n)$.

В кооперативной игре важно выбрать механизм распределения общего суммарного накопленного выигрыша $\sum_{i=1}^{n} H_i(\bar{u})$ между игроками. Рассматривается многошаговая кооперативная игра $\Gamma^{x_0}(N, V^{x_0})$ с трансферабельными выигрышами [17]. Строится характеристическая функция $V^{x_0}(S)$: $2^N \rightarrow R$, $V(\emptyset) = 0, V(N) = \sum_{i=1}^{n} H_i(\bar{u})$, где $S \subseteq N$ - коалиция игроков. Принцип оптимальности, рассматриваемый в работе, вектор Шепли. Вектор

Шепли предлагает единственный дележ в качестве решения любой кооперативной игры.

Определение 1: [18] Вектор Шепли в игре $\Gamma^{x_0}(N, V^{x_0})$ определяется по формуле (3)

$$\varphi_i^{x_0} = \sum_{S\subset N, i\in S} \frac{(n-|S|)!\,(|S|-1)!}{n!} (V^{x_0}(S) - V^{x_0}(S/\{i\})\,), \tag{3}$$

Поскольку вектор Шепли является дележом, он удовлетворяет свойствам дележа: индивидуальной и групповой рациональности.

$$\varphi_i^{x_0} \geq \; V^{x_0}(\{i\}),\ \forall i \in N \tag{4}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{x_0} = V^{x_0}(N) = \sum_{\tau=0}^{T} \sum_{i=1}^{n} h_i(\bar{x}_\tau) \tag{5}$$

Предположим, что игроки договорились о кооперативной игре вдоль всей траектории многошаговой игры и об использовании вектора Шепли (3), как способа распределения общего выигрыша.

Пусть $\bar{x}_t \in \bar{\omega}$, $\Gamma^{\bar{x}_t}(N, V^{\bar{x}_t})$ - игра с начальной позицией $\bar{x}_t$, которая расположена на оптимальной траектории исходной игры $\Gamma^{x_0}(N, V^{x_0})$. Данная игра является подыгрой исходной игры.

Характеристическая функция подыгры: $V^{\bar{x}_t}(S)\colon 2^N \to R; S \subseteq N, V^{\bar{x}_t}(\emptyset) = 0$

$$V^{\bar{x}_t}(N) = \sum_{\tau=t}^{T} \sum_{i=1}^{n} h_i(\bar{x}_\tau) \tag{6}$$

Пусть $(\varphi_i^{\bar{x}_t})_{i=1}^n$ значение вектора Шепли в подыгре, тогда $\varphi_i^{\bar{x}_t}$ - полученный в результате кооперации выигрыш игрока i в игре с начальной позицией $\bar{x}_t$.

1.2. Динамическая устойчивость и условие Янга

Динамическая устойчивость является наиболее значимым свойством, которым могут обладать выигрыши игроков [1, 2, 3, 4, 10, 12]

Определение 2: Решение игры $h = \{h_i(\bar{x}_t)\},\ \ i = 1, \dots, n,\ \ t = \overline{0,T}$ удовлетворяет свойству динамической устойчивости (состоятельности во времени), если

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} h_i(\bar{x}_\tau) + \varphi_i^{\bar{x}_t} = \varphi_i^{x_0}\ \ ,\ \ \forall i \in N,\ \ t = \overline{1,T} \tag{7}$$

Вектор Шепли называется динамически устойчивым, если для решения игры выполняется свойство динамической устойчивости [4].

Нарушение динамической устойчивости приводит к возможности отклонения от первоначально выбранной схемы оптимального поведения в тех состояниях, в которых появляется новое локально-оптимальное решение, не укладывающееся в первоначально выбранную схему. Такая возможность приводит к нарушению устойчивости развития процесса в целом и непредсказуемости поведения участников динамического процесса.

Еще одно свойство, которым может обладать кооперативное решение динамической игры, это условие Янга (защита от иррационального поведения, IBP) [21].

Определение 3: Решение игры $h = \{h_i(\bar{x}_t)\}$ удовлетворяет условию Янга, если $\forall i \in N,\ \ \forall t = \overline{1,T}$ выполняется следующее неравенство:

$$V^{x_0}(\{i\}) \le \sum_{\tau=0}^{t-1} h_i(\bar{x}_\tau) + V^{\bar{x}_t}(\{i\}) \tag{8}$$

Если неравенство (8) выполняется, у игрока i есть стимул к сотрудничеству, даже если он предполагает, что коалиция будет расторгнута из-за иррационального поведения других игроков в какой-либо промежуточной позиции игры $\bar{x}_t$.

Рассмотрим пример однокритериальной многошаговой игры с деревом игры, изображенном на Рис. 1.1, и проверим с помощью него выполнение приведенных выше свойств.

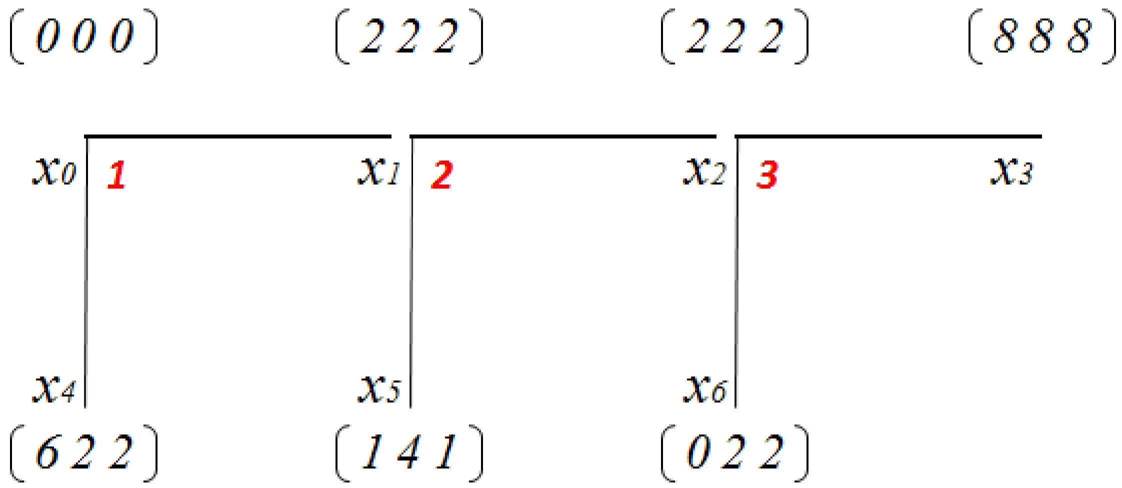


Рис. 1.1 Многошаговая однокритериальная игра трех лиц

Оптимальная кооперативная траектория игры выделена на графе и $\bar{\omega} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. Для построения характеристической функции кооперативной игры воспользуемся «классической» α-характеристической функцией (18). Её значения приведены в Табл.1.1

Табл. 1.1. Значение характеристической функции в основной игре и подыграх.

S – коал.	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$V_\alpha^{x_0}$	6	2	2	10	8	4	36
$V_\alpha^{x_1}$	3	6	3	10	6	24	36
$V_\alpha^{x_2}$	2	4	10	6	20	20	30
$V_\alpha^{x_3}$	8	8	8	16	16	16	24

Вычислим значения вектора Шепли для каждой подыгры по оптимальной траектории:

$$\varphi^{x_0} = (15 \quad 11 \quad 10) \qquad \varphi^{x_2} = (6 \quad 7 \quad 17)$$

$$\varphi^{x_1} = \left(6\frac{1}{6} \quad 16\frac{2}{3} \quad 13\frac{1}{6}\right) \qquad \varphi^{x_3} = (8 \quad 8 \quad 8)$$

Свойство динамической устойчивости (7) не выполняется ни в одной позиции ни у одного игрока на протяжении всей игры. Условие (8) не выполняется для игрока $i = 1$ при $t = 1;\ 2$.

Таким образом, можно сделать следующий ***вывод*:** для однокритериальной игры с выплатами в виде исходных пошаговых выигрышей вектор Шепли в общем случае не удовлетворяет ни условию динамической устойчивости, ни условию Янга.

1.3. Процедура распределения дележа и её свойства.

Для преодоления отмеченных проблем воспользуемся известным методом – процедурой распределения дележа (ПРД) в подыграх вдоль оптимальной кооперативной траектории [3, 4].

Пусть $\beta = \{\beta_i(\bar{x}_t)\},\ i = \overline{1,n}\,,\ t = \overline{0,T}$ - процедура распределения дележа (ПРД). Полагаем, что игроки согласны на кооперацию, и они максимизируют накопленный суммарный выигрыш $\sum_{i=1}^{n} H_i(\bar{u})$, полученный из исходных пошаговый выигрышей $h_i(\bar{x}_t)$, и затем распределяют его между игроками вдоль всей оптимальной кооперативной траектории. Тогда $\beta_i(\bar{x}_t) -$ фактическая текущая выплата, которую получит игрок i в позиции $\bar{x}_t$ согласно ПРД, вместо $h_i(\bar{x}_t)$.

Рассмотрим следующие свойства, которым может удовлетворять ПРД:

Определение 4: Процедура распределения дележа (ПРД) $\beta = \{\beta_i(\bar{x}_t)\}$, $i = \overline{1,n}\,,\ t = \overline{0,T}$ удовлетворяет условию эффективности , если

$$\sum_{t=0}^{T} \beta_i(\bar{x}_t) = \varphi_i^{x_0}\ ,\ \ i = 1, \dots, n \tag{9}$$

Определение 5: Процедура распределения дележа (ПРД) $\beta = \{\beta_i(\bar{x}_t)\}$ динамически устойчива (состоятельна во времени), если

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_i(\bar{x}_\tau) + \varphi_i^{\bar{x}_t} = \varphi_i^{x_0}\ ,\ \ \forall i \in N,\ t = \overline{1,T} \tag{10}$$

Определение 6: Процедура распределения дележа (ПРД) $\beta = \{\beta_i(\bar{x}_t)\}$ удовлетворяет свойству неотрицательности, если

$$\beta_i(\bar{x}_t) \geq 0,\ i = \overline{1,n}\ ,\ t = \overline{0,T}, . \tag{11}$$

Определение 7: Процедура распределения дележа (ПРД) $\beta = \{\beta_i(\bar{x}_t)\}$ удовлетворяет условию баланса, если $\forall t = \overline{0,T}$,

$$\sum_{\tau=0}^{t}\sum_{i=1}^{n}\beta_i(\bar{x}_\tau) \leq \sum_{\tau=0}^{t}\sum_{i=1}^{n}h_i(\bar{x}_\tau) \tag{12}$$

Определение 8: Процедура распределения дележа (ПРД) $\beta = \{\beta_i(\bar{x}_t)\}$ $i = \overline{1,n}\ ,\ t = \overline{0,T},$ удовлетворяет условию Янга, если $\forall i \in N,\quad \forall t = \overline{0,T}$ выполняется следующее неравенство:

$$V^{x_0}(\{i\}) \leq \sum_{\tau=0}^{t-1}\beta_i(\bar{x}_\tau) + V^{\bar{x}_t}(\{i\}) \tag{13}$$

Приведенные выше свойства будут подробнее рассмотрены подробнее в п. 2.3-2.4 данной работы.

Рассмотрим известную ПДР, основанную на значениях вектора Шепли основной игры и её подыграх вдоль оптимальной траектории [4] :

$$\beta_i(\bar{x}_t) = \varphi_i^{\bar{x}_t} - \varphi_i^{\bar{x}_{t+1}}, t = 0, \dots, T-1;\ \beta_i(\bar{x}_T) = \varphi_i^{\bar{x}_T} \tag{14}$$

Построим ПРД по формуле (14) для рассматриваемого ранее примера:

$$\beta_i(\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} 8\frac{5}{6} & -5\frac{2}{3} & -3\frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \beta_i(\bar{x}_2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\beta_i(\bar{x}_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 9\frac{2}{3} & -3\frac{5}{6} \end{pmatrix} \qquad \beta_i(\bar{x}_3) = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

В общем случае построенная таким способом ПРД ***не** удовлетворяет* условию неотрицательности (11) и условию Янга (13) и *удовлетворяет* динамической устойчивости (10), условию баланса (12) и условию эффективности (9) в многошаговых однокритериальных играх [4].

Глава 2. Кооперативные многошаговые многокритериальные игры.

2.1. Основные обозначения

Рассматривается конечная игра с полной информацией [4], заданная на древовидном графе, с векторными выигрышами размерности r в каждой из вершин графа. В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

- $N = \{1..n\}$ – множество игроков;
- $K -$ дерево игры с начальным узлом (корнем дерева) x_0;
- P – множество всех узлов игры;
- $S(x)$ – множество всех прямых потомков узла x на $K;$
- $S^{-1}(y)$ – предшествующий узел относительно узла y, $y \neq x_0$;
- $\omega = (x_0 \dots x_{t-1}, x_t \dots x_T)$ – траектория на дереве игры $x_{t-1} = S^{-1}(x_t)\,, 1 \le t \le T,\ S(x_T) = \emptyset \quad ;$
- $P_i -$ множество всех узлов, в которых игрок i делает выбор. $P_i \cap P_j = \emptyset, i \neq j$;
- $P_{n+1} -$ множество всех конечных узлов, $\bigcup_{i=1}^{n+1} P_i = P$;
- $h_i(x) = (h_{i/1}(x), \dots, h_{i/r}(x)) -$ векторный пошаговый выигрыш игрока i в каждом узле $x \in P$. Полагаем, что

$$h_{i/k}(x) \geq 0, \forall i \,\epsilon\, N, k = 1, \dots, r,\ \forall x \,\epsilon\, P \qquad (15)$$

Будем полагать, что игроки используют чистые стратегии в игре [4]. Чистая стратегия $u_i(\cdot)$ игрока i - это функция, ставящая в соответствие каждой позиции $x \,\epsilon\, P_i$, в которой игрок i делает выбор, “следующую” позицию $u_i(x) \,\epsilon\, S(x)$. Обозначим U_i – конечный набор чистых стратегий игрока i. Пусть $U = \prod_{i \in N} U_i$. Набор стратегий $u = (u_1 \dots u_n) \in U$ порождает единственную траекторию игры $\omega = (x_0 \dots x_t, x_{t+1} \dots x_T)$, где $x_{t+1} = u_j(x_t) \in S(x_t)$, если $x_t \in P_j$.

Обозначим как

$$H_i(u) = h_i(\omega) = \sum_{t=0}^{T} h_i(x_t) \tag{16}$$

функцию, ставящую в соответствие набору стратегий $u = (u_1 \dots u_n)$ (и, соответственно, траектории игры) накопленный выигрыш $i -$ го игрока.

Для сравнения векторов воспользуемся следующим правилом. Пусть $a, b \in R^m$, тогда $a \geqq b$, если $a_k \geq b_k, k = 1 \dots m$; $a > b$, если $a_k > b_k, k = 1 \dots m$; $a \geq b$, если $a \geqq b$ и $a \neq b$. Выполнение последнего неравенства означает, что каждая из компонент вектора a больше или равна соответствующей компоненте вектора b, причем хотя бы одна компонента строго больше. Это отношение называют отношением Парето и последнее неравенство обозначает, что вектор b Парето-доминируется вектором a.

Для конечного множества A и вектор-функции $f: A \to R^m$, определим $Max_{a \epsilon A} f(a)$ – множество всех Парето оптимальных (недоминируемых) элементов множества A:

$$b \in Max_{a \epsilon A} f(a), \text{ если } \nexists a \in A: f(a) \geq f(b).$$

В ходе игры каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш $H_i(u)$. Если же игроки согласны на кооперацию, они стремятся максимизировать общий накопленный суммарный выигрыш $\sum_{i=1}^{n} H_i(u)$. Обозначим множество U^c как множество наборов стратегий u^c, таких что :

$$\nexists u: \sum_{i=1}^{n} H_i(u) \geq \sum_{i=1}^{n} H_i(u^c) \qquad (17)$$

Это множество – множество Парето оптимальных наборов стратегий $u^c \epsilon\, Max_{u \epsilon U} \sum_{i=1}^{n} H_i(u)$. Если множество U конечно, то множество U^c всех Парето оптимальных решений будет непусто [6].

Существуют различные подходы при выборе единственного Парето оптимального решения [6, 12, 13]. Будем полагать, что игроки в многошаговой игре согласны следовать правилу γ - правилу выбора единственного набора стратегий $\bar{u} = \gamma(U^c)$ из всего множества U^c. Тогда оптимальный кооперативный набор стратегий $\bar{u}$ будет порождать *оптимальную кооперативную траекторию игры* $\bar{\omega} = (\bar{x}_0 \dots \bar{x}_t, \bar{x}_{t+1} \dots \bar{x}_T)$, $\bar{x}_0 = x_0$.

В кооперативной игре важен выбор механизма распределения общего суммарного накопленного выигрыша $\sum_{i=1}^{n} H_i(\bar{u})$ между игроками. Рассматривается многокритериальная кооперативная игра $\Gamma^{x_0}(N, V^{x_0})$ с трансферабельными выигрышами [17]. Определяется характеристическая функция $V^{x_0}(S): 2^N \to R^r$, $V(\emptyset) = (0, \dots, 0)$, $V(N) = \sum_{i=1}^{n} H_i(\bar{u})$, $S \subseteq N$ - коалиция игроков. Для её построения можно использовать различные подходы, например, α – характеристическая функция (18) [7], ζ – характеристическая функция (19) [9].

2.2. Два способа задания характеристической функции

Кооперативная игра в форме характеристической функции - пара $< N, V >$, где $N = 1, \dots, n$ - множество всех игроков, $V(S)$ – характеристическая функция $V: 2^N \to R^r$, $V(\emptyset) = (0, \dots, 0)$, ставящая в соответствие каждой коалиции игроков S вектор размерности r - суммарный выигрыш по каждому критерию. Также характеристическая функция может удовлетворять свойству супераддитивности: для любых непересекающихся коалиций T, S $T \cap S = \emptyset$, $T \subset N, S \subset N$ выполняется неравенство: $V(T \cup S) \geqq V(T) +$

$V(S)$. Однако в общем случае выполнение этого свойства не требуется, и в данной работе не используется.

Под решением кооперативной игры n лиц с трансферабельным выигрышем понимается способ распределения суммарного векторного выигрыша между игроками при помощи одного из принципов оптимальности.

При построении α – характеристической функции под $V(S)$ понимается наибольший гарантированный суммарный выигрыш игроков коалиции S. При вычислении характеристической функции можно считать, что игроки коалиции $S, S \subseteq N$ максимизируют суммарный выигрыш при условии, что игроки из множества N/S действуют противоположно интересам коалиции S и минимизируют её суммарный выигрыш.

$$V^{\alpha}(S) = \begin{cases} (0, \dots, 0), \; S = \{\emptyset\} \\ \sup_{u_S \in U_S} \inf_{u_{N/S} \in U_{N/S}} \sum_{i \in S} H_i\left(u_S, u_{N/S}\right), \; S \subset N \\ \sup\limits_{u_N \in U_N} \sum_{i=1}^{n} H_i(u_N), \; S = N \end{cases}$$

Или же для конечной игры:

$$V^{\alpha}(S) = \begin{cases} (0, \dots, 0), \; S = \{\emptyset\} \\ \max_{u_S \in U_S} \min_{u_{N/S} \in U_{N/S}} \sum_{i \in S} H_i\left(u_S, u_{N/S}\right), \; S \subset N \\ \max\limits_{u_N \in U_N} \sum_{i=1}^{n} H_i(u_N), \; S = N \end{cases} \tag{18}$$

Второй рассмотренный способ построения характеристической функций - ζ - характеристическая функция. Рассматривается задача максимизации суммы выигрышей игроков. Пусть $\bar{u}$ – оптимальный набор стратегий, доставляющий максимум функции $\sum_{i=1}^{n} H_i(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$. Характеристическая функция $V^{\zeta}(S)$ коалиции $S, S \subseteq N,$ может быть вычислена следующим образом: игроки из S используют стратегии $\bar{u}_S = \{\bar{u}_i\}_{i \in S}$ из оптимального $n -$ набора, в то время как игроки из множества N/S минимизируют выигрыш коалиции S.

$$V^{\zeta}(S)=\begin{cases}(0,\dots,0),\ S=\{\emptyset\}\\ \inf_{u_{N/S}\in U_{N/S}}\sum_{i\in S}H_i\left(\bar{u}_S,u_{N/S}\right),\ S\subset N\\ \sup\limits_{u_N\in U_N}\sum_{i=1}^{n}H_i(u_N),\ S=N\end{cases}$$

Или же для конечной игры:

$$V^{\zeta}(S)=\begin{cases}(0,\dots,0),\ S=\{\emptyset\}\\ \min_{u_{N/S}\in U_{N/S}}\sum_{i\in S}H_i\left(\bar{u}_S,u_{N/S}\right),\ S\subset N\\ \max\limits_{u_N\in U_N}\sum_{i=1}^{n}H_i(u_N),\ S=N\end{cases}\tag{19}$$

Стоит отметить, что процесс вычисления ζ – характеристической функции проще, чем “классической”, α –характеристической, функции [9].

2.3. Состоятельность во времени и другие свойства процедуры распределения дележа в многошаговой игре с векторными выигрышами

Определение 9: [18] Вектор Шепли в игре $\Gamma^{x_0}(N,V^{x_0})$ определяется по формуле (20)

$$\varphi_i^{x_0}=\sum_{S\subset N,i\in S}\frac{(n-|S|)!\,(|S|-1)!}{n!}\left(V^{x_0}(S)-V^{x_0}(S/\{i\})\right),\tag{20}$$

По аналогии с однокритериальным случаем выполняются свойства дележа: индивидуальная рациональность:

$$\varphi_i^{x_0}\geqq V^{x_0}(\{i\}),\ \forall i\in N\tag{21}$$

и групповая рациональность

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^{x_0}=V^{x_0}(N)=\sum_{\tau=0}^{T}\sum_{i=1}^{n}h_i(\bar{x}_\tau)\tag{22}$$

Пусть $\bar{x}_t \in \bar{\omega}$, $\Gamma^{\bar{x}_t}(N, V^{\bar{x}_t})$ - игра с начальной позицией $\bar{x}_t$, то есть подыгра исходной игры $\Gamma^{x_0}(N, V^{x_0})$. Её характеристическая функция $V^{\bar{x}_t}(S): 2^N \to R^r; S \subseteq N; V^{\bar{x}_t}(\emptyset) = (0 \dots 0)$

$$V^{\bar{x}_t}(N) = \sum_{\tau=t}^{T} \sum_{i=1}^{n} h_i(\bar{x}_\tau) \tag{23}$$

Пусть $(\varphi_i^{\bar{x}_t})_{i=1}^n$ значение вектора Шепли в подыгре, $\varphi_i^{\bar{x}_t}$ - выигрыш игрока i в игре с начальной позицией $\bar{x}_t$.

Предположим, что игроки договорились о кооперативной игре вдоль всей траектории многошаговой игры и об использовании вектора Шепли (20), как способа распределения общего векторного выигрыша между игроками.

По аналогии однокритериальным случаем, возникает вопрос, как распределить полученный выигрыш вдоль всей траектории игры, то есть найти такую процедуру распределения дележа (ПРД) [3, 4, 15, 20], чтобы она удовлетворяла свойству динамической устойчивости (25) и другим полезным свойствам.

Пусть $\beta = \{\beta_{i/k}(\bar{x}_t)\}$, $i = \overline{1,n}$, $t = \overline{0,T}$, $k = 1, \dots r$ процедура распределения дележа (ПРД). Полагаем, что игроки согласны на кооперацию, и они максимизируют накопленный суммарный выигрыш $\sum_{i=1}^n H_i(\bar{u})$, полученный из исходных пошаговый выигрышей $h_i(\bar{x}_t)$, а затем распределяют его между игроками вдоль всей оптимальной кооперативной траектории. Тогда $\beta_{i/k}(\bar{x}_t) -$ *фактическая текущая выплата*, которую получит игрок i в позиции $\bar{x}_t$ по k −ому критерию согласно ПРД, вместо $h_{i/k}(\bar{x}_t)$.

Определение 10: Процедура распределения дележа (ПРД) $\beta = \{\beta_{i/k}(\bar{x}_t)\}$, $i = \overline{1,n}$, $t = \overline{0,T}, k = 1, \dots, r$ удовлетворяет условию эффективности , если

$$\sum_{t=0}^{T} \beta_i(\bar{x}_t) = \varphi_i^{x_0} \ , \ \ i = 1, \dots, n \qquad (24)$$

В соответствии с этим условием, сумма фактических текущих выплат $i - му$ игроку вдоль всей траектории игры должна равняться выигрышу в исходной игре, который он получит в результате кооперации. Такие образом, ПРД β может быть использована как правило пошагового распределения выигрыша игрока i. ПДР должна удовлетворять условию эффективности, и в дальнейшем мы предполагаем, что любая построенная ПРД удовлетворяет данному свойству.

Определение 11: Процедура распределения дележа (ПРД) $\beta = \{\beta_{i/k}(\bar{x}_t)\}$ динамически устойчива (состоятельна во времени), если

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_i(\bar{x}_\tau) + \varphi_i^{\bar{x}_t} = \varphi_i^{x_0} \ , \ \ \forall i \in N, \ t = \overline{1, T} \qquad (25)$$

Это условие требует, чтобы сумма всех текущих выплат $i - му$ игроку вдоль оптимальной траектории до позиции $\bar{x}_t$ и значения вектора Шепли подыгры с началом в этой позиции была равна выигрышу, который игрок получает в результате кооперативного соглашения в исходной игре. В соответствии с [1, 2, 3, 4, 15, 20] состоятельность во времени является наиболее значимым свойством, которому должна удовлетворять любая ПРД.

Определение 12: Процедура распределения дележа (ПРД) $\beta = \{\beta_{i/k}(\bar{x}_t)\}$ удовлетворяет свойству неотрицательности, если

$$\beta_{i/k}(\bar{x}_t) \geq 0, \ i = \overline{1, n}\,, \ t = \overline{0, T}, k = \overline{1, r}\,, . \qquad (26)$$

Если текущая выплата в определенной позиции будет принимать отрицательное значение, то игроку самому придется заплатить на этом шаге (а не получить какую-либо выплату) для обеспечения устойчивости кооперативного соглашения.

Определение 13: Процедура распределения дележа (ПРД) $\beta = \{\beta_{i/k}(\bar{x}_t)\}$ удовлетворяет условию баланса, если $\forall t = \overline{0,T}$, $\forall k = 1, \dots, r$

$$\sum_{\tau=0}^{t}\sum_{i=1}^{n}\beta_{i/k}(\bar{x}_\tau) \le \sum_{\tau=0}^{t}\sum_{i=1}^{n}h_{i/k}(\bar{x}_\tau) \qquad (27)$$

Таким образом, на любой промежуточной позиции $\bar{x}_t$ игроки имеют достаточный суммарный выигрыш (вдоль оптимальной траектории от x_0 до $\bar{x}_t$), чтобы реализовать ПРД.

Если условие не выполняется в какой-либо позиции $\bar{x}_t$, мы полагаем, что игроки могут заимствовать требуемую сумму в счет будущих доходов, то есть игрокам доступен “беспроцентный займ” необходимой суммы в счет последующих выплат. Заметим, что при $t = T$ условие (27) всегда выполняется из-за условий эффективности (24) и групповой рациональности дележа (22).

Один из вариантов построения ПРД, основанной на значениях вектора Шепли основной игры и подыгр вдоль оптимальной траектории выглядит следующим образом:

$$\beta_i(\bar{x}_t) = \varphi_i^{\bar{x}_t} - \varphi_i^{\bar{x}_{t+1}}, t = 0, \dots, T-1;\ \beta_i(\bar{x}_T) = \varphi_i^{\bar{x}_T} \qquad (28)$$

Данная ПРД удовлетворяет динамической устойчивости (10) и условию баланса (12), но не удовлетворяет условию неотрицательности (11) и условию Янга (13) в многошаговых однокритериальных играх [4].

Рассмотрим следующий иллюстративный пример: дана игра трех игроков с полной информацией, каждый из которых получает двумерный вектор выигрыша в каждой позиции игры, Игра задана на графе, приведенном на Рис. 2.1:

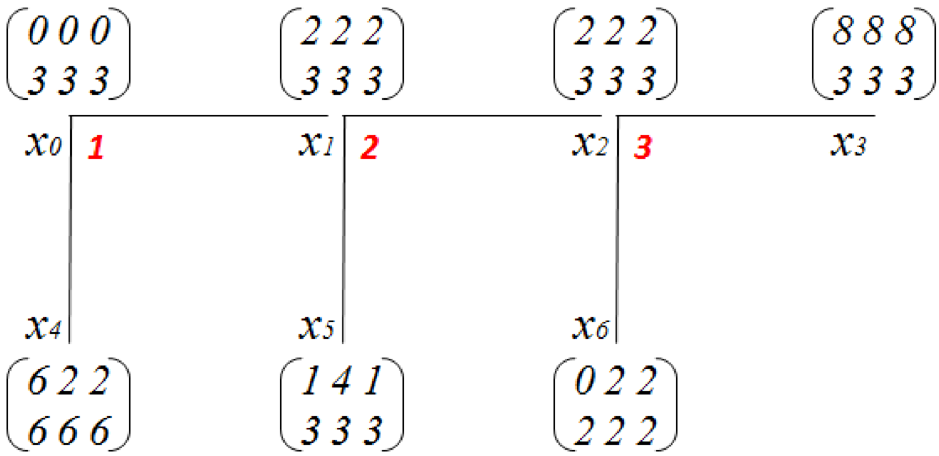


Рис. 2.1 Многошаговая игра трех лиц с двумя критериями

Оптимальный набор управлений порождает единственным образом соответствующую ему оптимальную траекторию, максимизирующую суммарный накопленный выигрыш трех игроков. Оптимальная траектория - $\bar{\omega} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

В данном примере вопрос выбора единственного вектора из множества Парето оптимальных векторов не возникает, однако в общем случае эта проблема является одной из самых основных.

Значения функции выигрыша игры и каждой подыгры вдоль оптимальной траектории основной игры, полученные с помощью α-характеристической функции, приведены на Табл 1.1.

Табл.2.1 Значения **α** -характеристической функции основной игры и подыгр.

S – коал.	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$V_\alpha^{x_0}$	6	2	2	10	8	4	36
	9	9	9	22	18	18	36
S – коал.	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$V_\alpha^{x_1}$	3	6	3	10	6	24	36
	6	8	6	16	12	18	27
S – коал.	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$V_\alpha^{x_2}$	2	4	10	6	20	20	30
	5	5	6	10	12	12	18
S – коал.	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$V_\alpha^{x_3}$	8	8	8	16	16	16	24
	3	3	3	6	6	6	9

Вычислим значение вектора Шепли для каждой подыгры вдоль оптимальной траектории:

$$\varphi^{x_0} = \begin{pmatrix} 15 & 11 & 10 \\ 12\frac{2}{3} & 12\frac{2}{3} & 10\frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \varphi^{x_2} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 17 \\ 5\frac{1}{2} & 5\frac{1}{2} & 7 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{x_1} = \begin{pmatrix} 6\frac{1}{6} & 16\frac{2}{3} & 13\frac{1}{6} \\ 7\frac{1}{3} & 11\frac{1}{3} & 8\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \varphi^{x_3} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислим ПРД по формуле (28):

$$\beta_{i/k}(x_0) = \begin{pmatrix} 8\frac{5}{6} & -5\frac{2}{3} & -3\frac{1}{6} \\ 5\frac{1}{3} & 1\frac{1}{3} & 2\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \beta_{i/k}(x_2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 9 \\ 2\frac{1}{2} & 2\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\beta_{i/k}(x_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 9\frac{2}{3} & -3\frac{5}{6} \\ 1\frac{5}{6} & 5\frac{5}{6} & 1\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \beta_{i/k}(x_3) = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Аналогично проведем расчеты для ζ - характеристической функции. Результаты представлены в Табл. 2.2.

Значения ζ - функции, отмеченные серым цветом, отличаются от значений, полученных ранее с помощью α - характеристической функции.

Табл.2.2 Значения $\boldsymbol{\zeta}$ -характеристической функции основной игры и подыгр.

S – коал.	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$V_\zeta^{x_0}$	3	2	2	10	6	4	36
	9	9	9	22	18	18	36
S – коал.	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$V_\zeta^{x_1}$	3	6	3	10	6	24	36
	6	8	6	16	12	18	27
S – коал.	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$V_\zeta^{x_2}$	2	4	10	6	20	20	30
	5	5	6	10	12	12	18
S – коал.	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$V_\zeta^{x_3}$	8	8	8	16	16	16	24
	3	3	3	6	6	6	9

Вычислим значение вектора Шепли для каждой подыгры вдоль оптимальной траектории:

$$\varphi^{x_0} = \begin{pmatrix} 13\frac{2}{3} & 12\frac{1}{6} & 10\frac{1}{6} \\ 12\frac{2}{3} & 12\frac{2}{3} & 10\frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \varphi^{x_2} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 17 \\ 5\frac{1}{2} & 5\frac{1}{2} & 7 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{x_1} = \begin{pmatrix} 6\frac{1}{6} & 16\frac{2}{3} & 13\frac{1}{6} \\ 7\frac{1}{3} & 11\frac{1}{3} & 8\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \varphi^{x_3} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислим ПРД по формуле (28):

$$\beta_{i/k}(x_0) = \begin{pmatrix} 7\frac{1}{2} & -4\frac{1}{2} & -3 \\ 5\frac{1}{3} & 1\frac{1}{3} & 2\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \beta_{i/k}(x_2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 9 \\ 2\frac{1}{2} & 2\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\beta_{i/k}(x_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 9\frac{2}{3} & -3\frac{5}{6} \\ 1\frac{5}{6} & 5\frac{5}{6} & 1\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \beta_{i/k}(x_3) = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2.4. Уточненная процедура распределения дележа

При построении ПДР (28) в общем случае возникает проблема отрицательных выплат . То есть игроку необходимо заплатить на этом шаге (а не получить какую-либо выплату) для обеспечения устойчивости кооперативного соглашения. И, скорее всего, это оттолкнет его от участия в коалиции. Чтобы избежать данной ситуации, построим уточненную ПРД, которая удовлетворяет свойству неотрицательности (26).

Построение уточненной ПРД будет проходить следующим образом: при возникновении следующей ситуации в рассматриваемой ранее ПРД (28): $\beta_{i/k}(\bar{x}_t) = \varphi_{i/k}^{\bar{x}_t} - \varphi_{i/k}^{\bar{x}_{t+1}} < 0$, необходимо осуществить нулевой текущий платеж i игроку по k критерию, $\hat{\beta}_{i/k}(\bar{x}_t) = 0$. Также дополнительно необходимо ввести целую неотрицательную переменную $a_{i/k}(\bar{x}_t)$ – переменную “задержки”. Она показывает, сколько позиций назад вдоль оптимальной траектории кооперативной игры была совершена положительная выплата игроку по этому критерию или же количество пройденных позиций, если с начала игры у игрока не было положительных выплат по рассматриваемому критерию.

Алгоритм построения уточненной ПРД:

шаг 0 (Вычисляем $\hat{\beta}_{i/k}(\bar{x}_0)$ *и* $a_{i/k}(\bar{x}_0)$):

$$\hat{\beta}_{i/k}(\bar{x}_0) = \max\left\{\varphi_{i/k}^{\bar{x}_0} - \varphi_{i/k}^{\bar{x}_1}, 0\right\}$$

- если $\hat{\beta}_{i/k}(\bar{x}_0) > 0$, то $a_{i/k}(\bar{x}_0) = 0$ (задержка платежа отсутствует)
- если $\hat{\beta}_{i/k}(\bar{x}_0) = 0$, то $a_{i/k}(\bar{x}_0) = 1$ (задержка платежа в одном шаге)

шаг 1 (Соответствует узлу $\bar{x}_1$)

$$\hat{\beta}_{i/k}(\bar{x}_1) = \max\left\{\varphi_{i/k}^{\bar{x}_1 - a_{i/k}(\bar{x}_0)} - \varphi_{i/k}^{\bar{x}_2}, 0\right\}$$

- если $\hat{\beta}_{i/k}(\bar{x}_1) > 0$, то $a_{i/k}(\bar{x}_1) = 0$ (задержка платежа отсутствует)
- если $\hat{\beta}_{i/k}(\bar{x}_1) = 0$, то $a_{i/k}(\bar{x}_1) = a_{i/k}(\bar{x}_0) + 1$ (задержка платежа в данном узле помимо возможной задержки в предыдущем)

шаг t (Соответствует узлу $\bar{x}_t$ ($t = 2, \dots, T-1$))

$$\hat{\beta}_i(\bar{x}_t) = \max\left\{\varphi_{i/k}^{\bar{x}_t - a_{i/k}(\bar{x}_{t-1})} - \varphi_{i/k}^{\bar{x}_{t+1}}, 0\right\}$$

- если $\hat{\beta}_{i/k}(\bar{x}_t) > 0$, то $a_{i/k}(\bar{x}_t) = 0$
- если $\hat{\beta}_{i/k}(\bar{x}_t) = 0$, то $a_{i/k}(\bar{x}_t) = a_{i/k}(\bar{x}_{t-1}) + 1$

*шаг T (*Вычисление выплат в узле $\bar{x}_T$*)*

$$\hat{\beta}_{i/k}(\bar{x}_T) = \max\left\{\varphi_{i/k}^{\bar{x}_0} - \sum_{\tau=0}^{T-1}\hat{\beta}_{i/k}(\bar{x}_\tau), 0\right\} = \varphi_{i/k}^{\bar{x}_{T-a_{i/k}(\bar{x}_{T-1})}}$$

Применим алгоритм к игре из рассматриваемого ранее примера. Рассмотрим случай с ζ - характеристической функцией. Некоторые игроки получают отрицательные выплаты в узлах, а ПРД не удовлетворяет свойству неотрицательности. Построим уточненную ПДР, используя алгоритм:

$\hat{\beta}_{1/1}(\bar{x}_0) = \frac{15}{2}, \quad a_{1/1}(0) = 0$ $\quad\quad \hat{\beta}_{1/2}(\bar{x}_0) = \frac{16}{3}, \quad a_{1/2}(0) = 0$

$\hat{\beta}_{2/1}(\bar{x}_0) = 0, \quad a_{2/1}(0) = 1$ $\quad\quad \hat{\beta}_{2/2}(\bar{x}_0) = \frac{4}{3}, \quad a_{2/2}(0) = 0$

$\hat{\beta}_{3/1}(\bar{x}_0) = 0, \quad a_{3/1}(0) = 1$ $\quad\quad \hat{\beta}_{3/2}(\bar{x}_0) = \frac{7}{3}, \quad a_{3/2}(0) = 0$

$\hat{\beta}_{1/1}(\bar{x}_1) = \frac{1}{6}, \quad a_{1/1}(1) = 0$ $\quad\quad \hat{\beta}_{1/2}(\bar{x}_1) = \frac{11}{6}, \quad a_{1/2}(1) = 0$

$\hat{\beta}_{2/1}(\bar{x}_1) = \frac{31}{6}, \quad a_{2/1}(1) = 0$ $\quad\quad \hat{\beta}_{2/2}(\bar{x}_1) = \frac{35}{6}, \quad a_{2/2}(1) = 0$

$\hat{\beta}_{3/1}(\bar{x}_1) = 0, \quad a_{3/1}(1) = 2$ $\quad\quad \hat{\beta}_{3/2}(\bar{x}_1) = \frac{4}{3}, \quad a_{3/2}(1) = 0$

$\hat{\beta}_{1/1}(\bar{x}_2) = 0, \quad a_{1/1}(2) = 1$ $\quad\quad \hat{\beta}_{1/2}(\bar{x}_2) = \frac{5}{2}, \quad a_{1/2}(2) = 0$

$\hat{\beta}_{2/1}(\bar{x}_2) = 0, \quad a_{2/1}(2) = 1$ $\quad\quad \hat{\beta}_{2/2}(\bar{x}_2) = \frac{5}{2}, \quad a_{2/2}(2) = 0$

$\hat{\beta}_{3/1}(\bar{x}_2) = \frac{13}{6}, \quad a_{3/1}(2) = 0$ $\quad\quad \hat{\beta}_{3/2}(\bar{x}_2) = 4, \quad a_{3/2}(2) = 0$

$\hat{\beta}_{1/1}(\bar{x}_3) = 6, \quad a_{1/1}(3) = 0$ $\quad\quad \hat{\beta}_{1/2}(\bar{x}_3) = 3, \quad a_{1/2}(3) = 0$

$\hat{\beta}_{2/1}(\bar{x}_3) = 7, \quad a_{2/1}(3) = 0$ $\quad\quad \hat{\beta}_{2/2}(\bar{x}_3) = 3, \quad a_{2/2}(3) = 0$

$\hat{\beta}_{3/1}(\bar{x}_3) = 8, \quad a_{3/1}(3) = 0$ $\quad\quad \hat{\beta}_{3/2}(\bar{x}_3) = 3, \quad a_{3/2}(3) = 0$

Уточненная ПРД будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{\beta}_{i/k}(x_0) = \begin{pmatrix} 7\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 5\frac{1}{3} & 1\frac{1}{3} & 2\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \hat{\beta}_{i/k}(x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\frac{1}{6} \\ 2\frac{1}{2} & 2\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}_{i/k}(x_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 5\frac{1}{6} & 0 \\ 1\frac{5}{6} & 5\frac{5}{6} & 1\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \hat{\beta}_{i/k}(x_3) = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Полученная уточненная ПРД подразумевает задержки выплат для игроков. Например, игрок 3 получает нулевые выплаты по первому критерию в позициях x_0 и x_1, $(\hat{\beta}_{3/1}(x_0) = \hat{\beta}_{3/1}(x_1) = 0)$, однако в x_2 он получает положительный платеж $(\hat{\beta}_{3/1}(x_2) = \varphi_3^{x_0} - \varphi_3^{x_3}$; условие динамической устойчивости (25) выполняется в x_3. Рассмотрим следующее определение:

Определение 14: Процедура распределения дележа (ПРД) $\beta = \{\beta_{i/k}(\bar{x}_t)\}$ удовлетворяет неравенству состоятельности во времени (динамической устойчивости), если $\forall i \in N$, $\forall k = 1,..,r$, $\forall t = \overline{1,T}$ выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_{i/k}(\bar{x}_\tau) + \varphi_{i/k}^{\bar{x}_t} \geq \varphi_{i/k}^{\bar{x}_0} \tag{29}$$

Заметим, что ПДР, удовлетворяющая (29), в каком-то смысле более выгодна для игрока, чем ПДР, удовлетворяющая (25), поскольку в первом случае выигрыши, полученные до начала подыгры $\Gamma^{\bar{x}_t}$, больше. В этом смысле неравенство состоятельности во времени (29) обеспечивает больший стимул игроку i к кооперации, чем (25).

Утверждение: уточненная ПДР удовлетворяет условию эффективности (24), неравенству состоятельности во времени (29), и неотрицательности (26). Если $\hat{\beta}_{i/k}(\bar{x}_{t-1}) > 0$, то динамическая устойчивость (25) выполняется в позиции $\bar{x}_t$ для игрока i по критерию k.

Запишем неравенство состоятельности во времени (29) для рассматриваемого примера при $t=1,\ i=1,\ k=1$ и условие баланса (27) для $t=0, k=1$

$$\begin{cases} \hat{\beta}_{1/1}(\bar{x}_0) \geq 7\dfrac{1}{6} \\ \hat{\beta}_{1/1}(\bar{x}_0)+\hat{\beta}_{2/1}(\bar{x}_0)+\hat{\beta}_{3/1}(\bar{x}_0) \leq \sum_{i=1}^{3} h_{i/1}(x_0), \qquad \sum_{i=1}^{3} h_{i/1}(x_0)=0 \end{cases}$$

Таким образом, для обеспечения неравенства состоятельности во времени ПРД (29) необходимо пожертвовать либо свойством неотрицательности (26), как было сделано в исходной ПРД (28), либо условием баланса (27), как в уточненной ПРД.

Замечание: в общем случае невозможно построить график выплат, удовлетворяющий всем трем свойствам.

2.5. Условие Янга и обобщенная процедура распределения дележа

Еще одно свойство, которым может обладать кооперативное решение в динамической игре, это условие Янга (защита от иррационального поведения или IBP) [21]. Это свойство можно расширить на класс многошаговых многокритериальных игр двумя способами.

Определение 15: Процедура распределения дележа (ПРД) $\beta=\{\beta_{i/k}(\bar{x}_t)\}$ $i=\overline{1,n},\ t=\overline{0,T}, k=\overline{1,r}$ удовлетворяет сильному (покомпонентному) условию Янга, если $\forall i\in N, \forall k=1,..,r, \forall t=\overline{1,T}$ выполняется следующее неравенство:

$$V_k^{x_0}(\{i\}) \leq \sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_{i/k}(\bar{x}_\tau) + V_k^{\bar{x}_t}(\{i\}) \tag{30}$$

Если неравенство (30) выполняется, то у игрока i есть стимул к кооперации, даже если он предполагает, что коалиция будет расторгнута из-за иррационального поведения игроков в промежуточной позиции $\bar{x}_t$

Определение 16: Процедура распределения дележа (ПРД) $\beta = \{\beta_i(\bar{x}_t)\}$ $i = \overline{1,n}$, $t = \overline{0,T}, k = \overline{1,r}$ удовлетворяет слабому условию Янга, если $\forall i \in N$, $\forall k = 1,\ldots,r, \forall t = \overline{1,T}$ следующее векторное неравенство ***не*** выполняется:

$$V^{x_0}(\{i\}) \geq \sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_i(\bar{x}_\tau) + V^{\bar{x}_t}(\{i\}) \tag{31}$$

Неравенство (31) означает, что векторный выигрыш i-го игрока, полученный без кооперации, Парето-доминирует выигрыш, полученный в результате частичной кооперации.

Проверим, выполняются ли для полученной уточненной ПРД неравенства (30), (31):

t=1

i	$V^{x_0}(\{i\})$	$\hat{\beta}_i(x_0)$	$V^{x_1}(\{i\})$	$strong\ IBP\ ?$
1	$\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{15}{2}\\\frac{16}{3}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$	$<$ $<$
2	$\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$	$<$ $<$
3	$\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\\frac{7}{3}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$	$<$ $>$

t=2

i	$V^{x_0}(\{i\})$	$\hat{\beta}_i(x_0) + \hat{\beta}_i(x_1)$	$V^{x_2}(\{i\})$	$strong\ IBP\ ?$
1	$\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{23}{3}\\\frac{43}{6}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$	$<$ $<$
2	$\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{31}{6}\\\frac{43}{6}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$	$<$ $<$
3	$\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\\frac{11}{3}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}$	$<$ $<$

t=3

i	$V^{x_0}(\{i\})$	$\sum_{\tau=0}^{t-1}\hat{\beta}_i(\bar{x}_\tau)$	$V^{x_3}(\{i\})$	*strong IBP ?*
1	$\binom{3}{9}$	$\begin{pmatrix}\frac{23}{3}\\ \frac{29}{3}\end{pmatrix}$	$\binom{8}{3}$	$<$ $<$
2	$\binom{2}{9}$	$\begin{pmatrix}\frac{31}{6}\\ \frac{29}{3}\end{pmatrix}$	$\binom{8}{3}$	$<$ $<$
3	$\binom{2}{9}$	$\begin{pmatrix}\frac{13}{6}\\ \frac{23}{3}\end{pmatrix}$	$\binom{8}{3}$	$<$ $<$

Таким образом, единственное нарушение сильного условия Янга (*strong IBP*) происходит в позиции x_1 для игрока 3 по второму критерию:

$$V_1^{x_0}(\{3\}) < \hat{\beta}_{3/1}(x_0) + V_1^{x_1}(\{3\})$$

$$V_2^{x_0}(\{3\}) > \hat{\beta}_{3/2}(x_0) + V_2^{x_1}(\{3\})$$

Слабое условие Янга (30) выполняется, в отличие от сильного условия Янга (31).

Построим *обобщенную* ПРД, которая будет удовлетворять условию эффективности (24), неравенству состоятельности во времени (29), неотрицательности (26) и сильному условию Янга (30).

Утверждение: В общем случае для любой многокритериальной многошаговой игры такая ПРД существует.

В качестве ***доказательства*** утверждения, рассмотрим следующий алгоритм, который позволяет построить обобщенную ПРД:

Шаг 0: Вычисляем текущие выплаты по ПРД в позиции x_0, используя условия неравенства состоятельности во времени (29) и сильное условие Янга (30), для $t = 1$:

$$\tilde{\beta}_{i/k}(x_0) = \max\{\varphi_{i/k}^{x_o} - \varphi_{i/k}^{\bar{x}_1}, \quad V_k^{x_o}(\{i\}) - V_k^{\bar{x}_1}(\{i\}), \quad 0\}$$

Шаг $(t-1) = 1, \dots, T-1$: Вычисляем текущие выплаты по ПРД в соответствующих позициях $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{T-1}$, используя условия неравенства состоятельности во времени (29) и сильного условия Янга (30) , для $t = 2, \dots, T$:

$$\tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_{t-1}) = \max\{\varphi_{i/k}^{x_o} - \varphi_{i/k}^{\bar{x}_t} - \sum\nolimits_{\tau=0}^{t-2} \tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_\tau)\,,\, V_k^{x_o}(\{i\}) - V_k^{\bar{x}_t}(\{i\}) - \sum\nolimits_{\tau=0}^{t-2} \tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_\tau)\,, 0\}$$

Шаг T: Выплата в позиции $\bar{x}_T$:

$$\tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_T) = \varphi_{i/k}^{x_o} - \sum\nolimits_{\tau=0}^{T-1} \tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_\tau)$$

Полученная ПРД $\tilde{\beta}$ удовлетворяет условию эффективности (24), неравенству состоятельности во времени (29) и сильному условию Янга (30). Кроме того, в позициях $\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{T-1}$ выполняется свойство неотрицательности (26).

Поскольку вектор Шепли $\varphi^{\bar{x}_t}$ каждой подыгры $\Gamma^{\bar{x}_t}(N, V^{\bar{x}_t})$ это дележ, а также (15) - обязательное условие рассматриваемых игр, то следующее неравенство (аналогичное индивидуальной рациональности (21)) выполняется:

$$\varphi_i^{\bar{x}_t} \geq V^{\bar{x}_t}(\{i\}) \geq 0,\ \forall i \in N\ \forall \bar{x}_t \in \overline{\omega} \tag{32}$$

Докажем по индукции, что обобщенная ПРД $\tilde{\beta}$ удовлетворяет:

$$\sum\nolimits_{\tau=0}^{t-1} \tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_\tau) \leq \varphi_{i/k}^{\bar{x}_0},\ \forall t = 1, \dots, T \tag{33}$$

При применении алгоритма в шаге 0 (при $t = 1$) есть три возможных варианта:

- $\tilde{\beta}_{i/k}(x_0) = \varphi_{i/k}^{x_o} - \varphi_{i/k}^{\bar{x}_1}$. Тогда $\tilde{\beta}_{i/k}(x_0) \leq \varphi_{i/k}^{x_o}$ в связи с (32).
- $\tilde{\beta}_{i/k}(x_0) = V_k^{x_o}(\{i\}) - V_k^{\bar{x}_1}(\{i\})$.Тогда снова $\tilde{\beta}_{i/k}(x_0) \leq \varphi_{i/k}^{x_o} - V_k^{\bar{x}_1}(\{i\}) \leq \varphi_{i/k}^{x_o}$ в связи с (32).
- $\tilde{\beta}_{i/k}(x_0) = 0$. Тогда (33),очевидно, выполняется для $t = 1$.

Предположим, что неравенство (33) выполняется для $(t-1)$, $t > 2$:

$$\sum_{\tau=0}^{t-2} \tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_\tau) \leq \varphi_{i/k}^{\bar{x}_0} \quad (34)$$

При применении алгоритма в $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{T-1}$ для $t = 2, \dots, T$ возможны также три варианта:

- $\tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_{t-1}) = \varphi_{i/k}^{x_o} - \varphi_{i/k}^{\bar{x}_t} - \sum_{\tau=0}^{t-2} \tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_\tau)$. Тогда $\sum_{\tau=0}^{t-1} \tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_\tau) \leq \varphi_{i/k}^{x_o}$ в связи с (32).
- $\tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_{t-1}) = V_k^{x_o}(\{i\}) - V_k^{\bar{x}_t}(\{i\}) - \sum_{\tau=0}^{t-2} \tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_\tau)$.Тогда снова $\sum_{\tau=0}^{t-1} \tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_\tau) \leq \varphi_{i/k}^{x_o} - V_k^{\bar{x}_t}(\{i\}) \leq \varphi_{i/k}^{x_o}$ в связи с (32).
- $\tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_{t-1}) = 0$. Тогда по предположению индукции (34) выполняется соотношение $\sum_{\tau=0}^{t-1} \tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_\tau) \leq \varphi_{i/k}^{x_o}$

Таким образом, доказано неравенство (33) для $t = 1, \dots, T$. При подстановке $t = T$ в (33) получаем, что последняя выплата $\tilde{\beta}_{i/k}(\bar{x}_T) \geq 0$, и, следовательно, обобщенная ПРД удовлетворяет свойству неотрицательности для $\forall \bar{x}_t \in \bar{\omega}$.

■

Для рассматриваемого ранее примера воспользуемся алгоритмом по построению обощенной ПРД.:

Шаг 0: $t = 1, \tilde{\beta}_{i/k}(x_{t-1}) = \tilde{\beta}_{i/k}(x_0)$

$$\tilde{\beta}_{1/1}(x_0) = \max\left\{\frac{15}{2}, 0, 0\right\} = \frac{15}{2}$$

$$\tilde{\beta}_{1/2}(x_0) = \max\left\{\frac{16}{3}, 3, 0\right\} = \frac{16}{3}$$

$$\tilde{\beta}_{2/1}(x_0) = \max\left\{-\frac{9}{2}, -4, 0\right\} = 0$$

$$\tilde{\beta}_{2/2}(x_0) = \max\left\{\frac{4}{3}, 1, 0\right\} = \frac{4}{3}$$

$$\tilde{\beta}_{3/1}(x_0) = \max\{-3, -1, 0\} = 0$$

$$\tilde{\beta}_{3/2}(x_0) = \max\left\{\frac{7}{3}, 3, 0\right\} = 3$$

Шаг 1: $t = 2$

$$\tilde{\beta}_{1/1}(x_1) = \max\left\{\frac{1}{6}, -\frac{13}{2}, 0\right\} = \frac{1}{6}$$

$$\tilde{\beta}_{1/2}(x_1) = \max\left\{\frac{11}{6}, -\frac{4}{3}, 0\right\} = \frac{11}{6}$$

$$\tilde{\beta}_{2/1}(x_1) = \max\left\{\frac{31}{6}, -2, 0\right\} = \frac{31}{6}$$

$$\tilde{\beta}_{2/2}(x_1) = \max\left\{\frac{35}{6}, \frac{8}{3}, 0\right\} = \frac{35}{6}$$

$$\tilde{\beta}_{3/1}(x_1) = \max\left\{-\frac{41}{6}, -8, 0\right\} = 0$$

$$\tilde{\beta}_{3/2}(x_1) = \max\left\{\frac{2}{3}, 0, 0\right\} = \frac{2}{3}$$

Шаг 2: $t = 3$

$$\tilde{\beta}_{1/1}(x_2) = \max\left\{-2, -\frac{38}{3}, 0\right\} = 0$$

$$\tilde{\beta}_{1/2}(x_2) = \max\left\{\frac{5}{2}, -\frac{7}{6}, 0\right\} = \frac{5}{2}$$

$$\tilde{\beta}_{2/1}(x_2) = \max\left\{-1, -\frac{67}{6}, 0\right\} = 0$$

$$\tilde{\beta}_{2/2}(x_2) = \max\left\{\frac{5}{2}, -\frac{7}{6}, 0\right\} = \frac{5}{2}$$

$$\tilde{\beta}_{3/1}(x_2) = \max\left\{\frac{13}{6}, -6, 0\right\} = \frac{13}{6}$$

$$\tilde{\beta}_{3/2}(x_2) = \max\left\{4, \frac{7}{3}, 0\right\} = 4$$

Шаг 3: $t = 4$

$$\tilde{\beta}_{1/1}(x_3) = 6$$

$$\tilde{\beta}_{1/2}(x_3) = 3$$

$$\tilde{\beta}_{2/1}(x_3) = 7$$

$$\tilde{\beta}_{2/2}(x_3) = 3$$

$$\tilde{\beta}_{3/1}(x_3) = 8$$

$$\tilde{\beta}_{3/2}(x_3) = 3$$

Выводы

В выпускной квалификационной работе был выполнен анализ применения двух новых ПРД (уточненной и обобщенной ПРД) в многошаговых многокритериальных играх с использованием двух подходов к построению характеристической функции. Стоит отметить, что процесс вычисления ζ – характеристической функции несколько проще, чем “классической”, α –характеристической, функции. В качестве принципа оптимальности был выбран вектор Шепли.

Для примера многошаговой игры трех лиц с двумя критериями были построены уточненная ПРД, удовлетворяющая свойствам эффективности, неравенству состоятельности во времени, неотрицательности, и обобщенная ПРД, дополнительно удовлетворяющая сильному условию Янга. В работе было показано, что в общем случае невозможно построить график выплат, одновременно удовлетворяющий неравенству состоятельности во времени, свойству неотрицательности и свойству баланса. Для обеспечения выполнения неравенства состоятельности во времени ПРД необходимо “пожертвовать” либо свойством неотрицательности, либо условием баланса.

Рассмотренный пример позволяет отметить тот факт, что текущие выплаты обобщенной ПРД идут “с опережением” относительно выплат уточненной ПРД, а результат действия программы иллюстрирует разницу в выплатах ПРД при двух различных подходах к построению характеристической функции.

Заключение

В выпускной квалификационной работе формализованы основные динамические свойства кооперативных решений в многошаговых многокритериальных играх n лиц с полной информацией. Продемонстрировано применение двух новых процедур распределения дележей (уточненная и обобщенная ПРД) в модельных примерах игр трех лиц с двумя критериями у каждого игрока (с использованием различных подходов к построению характеристической функции в подыграх). Написана программа для расчета текущих выплат в соответствии с уточненной и обобщенной ПРД, приведены результаты её работы.

Список литературы

1. Кузютин Д.В. К проблеме устойчивости решений позиционных игр, Вестник СПбГУ. Сер.1, 1995. Вып.4 (N 22). с.18-23.
2. Петросян Л.А. Устойчивость решений дифференциальных игр со многими участниками , Вестник Ленинградского университета. Сер. 1, 1977. Вып. № 19, с. 46–52.
3. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. Устойчивость решений неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами, Вестник Ленинградского университета. Сер.1, 1979. Вып. № 1 , с. 52–59.
4. Петросян Л.А., Кузютин Д.В. Устойчивые решения позиционных игр. СПб: Издательский дом СПбГУ, 2008, 326 с.
5. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр, СПб.: БХВ-Петербург, 2012 , 432 с.
6. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач . М. : Наука, 1982.
7. R. Aumann, The Core of a cooperative game without side payments, Transactions of the American Mathematical Society 98(1961) 539-552.
8. D. Blackwell, An analog of the minimax theorem for vector payoffs, Pacific J. Math. 6 (1956) 1-8.
9. E. Gromova, L. Petrosyan, On an approach to the construction of characteristic function for cooperative differential games, Mat.Teor. Igr Pril. 7(4) (2015) 19-39.
10. D. Kuzyutin, Properties of solutions of positional games with incomplete information, Journal of Computer and Systems Sciences International 34(1) (1996) 157-162.
11. D. Kuzyutin, M. Nikitina, Y. Pankratova, On the properties of equilibriums in multicriteria extensive n-person games, Mat. Teor.Igr Pril. 6 (1) (2014) 19-40.

12. D. Kuzyutin , M. Nikitina , L. Razgulyaeva, On the A-equilibria properties in multicriteria extensive games, Applied Mathematical Sciences 9(92) (2015) 4565-4573.
13. V. Noghin, Relative importance of criteria: a quantitative approach, J. Multicriteria decision analysis 6 (1997) 355-363.
14. E. Parilina , G. Zaccour, Approximated cooperative equilibria for games played over event trees, Operations Research Letters 43(5) 2015 507-513.
15. L. Petrosyan, G. Zaccour, Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction, Journal of Economic Dynamics and Control 27(3) (2003) 381-398.
16. G. Pieri, L. Pusillo, Interval values for multicriteria cooperative games, AUCO Czech Economic Review 4 (2010) 144-155.
17. G. Pieri, L. Pusillo, Multicriteria partial cooperative games, Applied Mathematics 6 (2015) 2125-2131.
18. L. Shapley, A value for n-person games, Contributions to the Theory of Games, II, H. Kuhn and A. W. Tucker, eds., Princeton: Princeton University Press, (1953) 307-317.
19. L. Shapley, Equilibrium points in games with vector payoffs, Naval Research Logistics Quarterly 6 (1959) 57-61.
20. P. Reddy, E. Shevkoplyas, G. Zaccour, Time-consistent Shapley value for games played over event trees, Automatica 49 (6) (2013) 1521-1527.
21. D. Yeung, An irrational-behavior-proof condition in cooperative differential games, International Game Theory Review 8 (4) (2006) 739-744.
22. D. Kuzyutin, M. Nikitina, Time consistent cooperative solutions for multistage games with vector payoffs, Operations Research Letters 2017, http://dx.doi.org/10.1016/j.orl.2017.04.004

Приложение 1. Программная реализация алгоритмов.

```
#include "math.h"
#include "conio.h"
#include <iostream>
using namespace std;
 int main()
 {
	int n=3; //кол-во игроков n=3
	int r; //кол-во критериев
	int T; //кол-во узлов по оптимальной траектории (от 0 до T, T>=1)
	int t,k,i=0;
	float* arrayAll;
	float* vectorS;
	 float* beta0;
	  float* beta1;
	  int* koefA;
	   float* beta2;
		float* V;
		float Zero=0, sum[3];
	cin>>r;
	cin>>T;
	int sizexf=(pow(2,n)-1)*(T+1)*r;
	int sizevS=n*(T+1)*r;
	arrayAll=new float[sizexf];
	vectorS=new float[sizevS];

	for (k=0; k<sizexf;k++)
	{
				cin>>arrayAll[k];  //Значения х.ф основной игры и подыгр по порядку для
коалиций 1 2 3 12 13 23 123.
	}								//Сначала по 1 критерию по всем
подыграм, потом 2-му и т д...
	for (k=0; k<sizexf;k=k+pow(2,n)-1)
	{
		t=k;
		vectorS[i]=(arrayAll[t+6]-arrayAll[t+5]+arrayAll[t])/3+(arrayAll[t+3]-
arrayAll[t+1]+arrayAll[t+4]-arrayAll[t+2])/6;
		i++;
		vectorS[i]=(arrayAll[t+6]-arrayAll[t+4]+arrayAll[t+1])/3+(arrayAll[t+3]-
arrayAll[t+0]+arrayAll[t+5]-arrayAll[t+2])/6;
		i++;
		vectorS[i]=(arrayAll[t+6]-arrayAll[t+3]+arrayAll[t+2])/3+(arrayAll[t+4]-
arrayAll[t+0]+arrayAll[t+5]-arrayAll[t+1])/6;
		i++;
	}
	cout<<"Shapley value"<<endl;
	for (k=0; k<(sizevS/r);k=k+n)
	{
		for(t=0;t<r;t++)
			{
				cout<<vectorS[k+(sizevS/r)*t]<<" "<<vectorS[k+(sizevS/r)*t+1]<<"
"<<vectorS[k+(sizevS/r)*t+2]<<endl<<endl;
		   }
		cout<<endl;

	}
```

```
	beta0 = new float[sizevS];
	for (k=0; k<(sizevS/r);k=k+n)
	{
		for(t=0;t<r;t++)
			{
				for (i=0;i<n;i++)
				{
					if (k==(sizevS/r-n))
						beta0[k+(sizevS/r)*t+i]=vectorS[k+(sizevS/r)*t+i];
					else
						beta0[k+(sizevS/r)*t+i]=vectorS[k+(sizevS/r)*t+i]-
vectorS[k+(sizevS/r)*t+n+i];
				}
			}
	}
	cout<<"Incremental PS"<<endl;
	for (k=0; k<(sizevS/r);k=k+n)
	{
		for(t=0;t<r;t++)
			{
				cout<<beta0[k+(sizevS/r)*t]<<" "<<beta0[k+(sizevS/r)*t+1]<<"
"<<beta0[k+(sizevS/r)*t+2]<<endl<<endl;
			}
		cout<<endl;

	}
	beta1 = new float[sizevS];
	koefA = new int[sizevS];
	for (i=0;i<sizevS;i++)
		koefA[i]=0;
	for (k=0; k<(sizevS/r);k++)
	{
		for(t=0;t<r;t++)
		{
			if (k<n)
			{
				if ((vectorS[k+(sizevS/r)*t]-vectorS[k+n+(sizevS/r)*t])>0)
				{
					beta1[k+(sizevS/r)*t]=vectorS[k+(sizevS/r)*t]-
vectorS[k+n+(sizevS/r)*t];
				}
				else
				{
					beta1[k+(sizevS/r)*t]=0;
					koefA[k+(sizevS/r)*t]= koefA[k+(sizevS/r)*t]+1;
				}
			}
			else if (k>=((sizevS/r)-n))
			{
				beta1[k+(sizevS/r)*t]=vectorS[k-(koefA[k-
n+(sizevS/r)*t])*n+(sizevS/r)*t];
			}
			else
				if ((vectorS[k-koefA[k-n +(sizevS/r)*t]*n+(sizevS/r)*t]-
vectorS[k+n+(sizevS/r)*t])>0)
				{
```

```
                                        beta1[k+(sizevS/r)*t]=vectorS[k-koefA[k-
n+(sizevS/r)*t]*n+(sizevS/r)*t]-vectorS[k+n+(sizevS/r)*t];
                                        koefA[k+(sizevS/r)*t]=0;
                              }
                              else
                              {
                                        beta1[k+(sizevS/r)*t]=0;
                                        koefA[k+(sizevS/r)*t]= koefA[k-n+(sizevS/r)*t]+1;
                              }
                    }
          }

          cout<<"Refined PS"<<endl;
          for (k=0; k<(sizevS/r);k=k+n)
          {
                    for(t=0;t<r;t++)
                              {
                                        cout<<beta1[k+(sizevS/r)*t]<<" "<<beta1[k+(sizevS/r)*t+1]<<"
"<<beta1[k+(sizevS/r)*t+2]<<endl<<endl;
                       }
                    cout<<endl;

          }
          i=0;
          beta2 = new float[sizevS];
          V = new float[sizevS];
          for (k=0; k<sizevS;k++)
          {
                    V[k]=arrayAll[i];
                    if (((i+2+n)%7)==0)
                              i=i+5;
                    else
                              i++;
          }

         for(t=0;t<r;t++)
         {
                   sum[0]=0;sum[1]=0;sum[2]=0;
                    for (k=0; k<(sizevS/r);k++)
                    {
                              if (k<(sizevS/r-n))
                              {
                                        beta2[k+(sizevS/r)*t]=max((vectorS[(k%n+(sizevS/r)*t)]-
vectorS[k+(sizevS/r)*t+n]-sum[(k+(sizevS/r)*t)%n]),max(Zero,(V[(k%n+(sizevS/r)*t)]-
V[k+(sizevS/r)*t+n]-sum[(k+(sizevS/r)*t)%n])));
sum[(k+(sizevS/r)*t)%n]=sum[(k+(sizevS/r)*t)%n]+beta2[k+(sizevS/r)*t];
                              }
                              else
                                        beta2[k+(sizevS/r)*t]=vectorS[(k%n+(sizevS/r)*t)]-
sum[(k+(sizevS/r)*t)%n];

                    }
         }
          cout<<"Generalized PS"<<endl;
          for (k=0; k<(sizevS/r);k=k+n)
          {
                    for(t=0;t<r;t++)
```

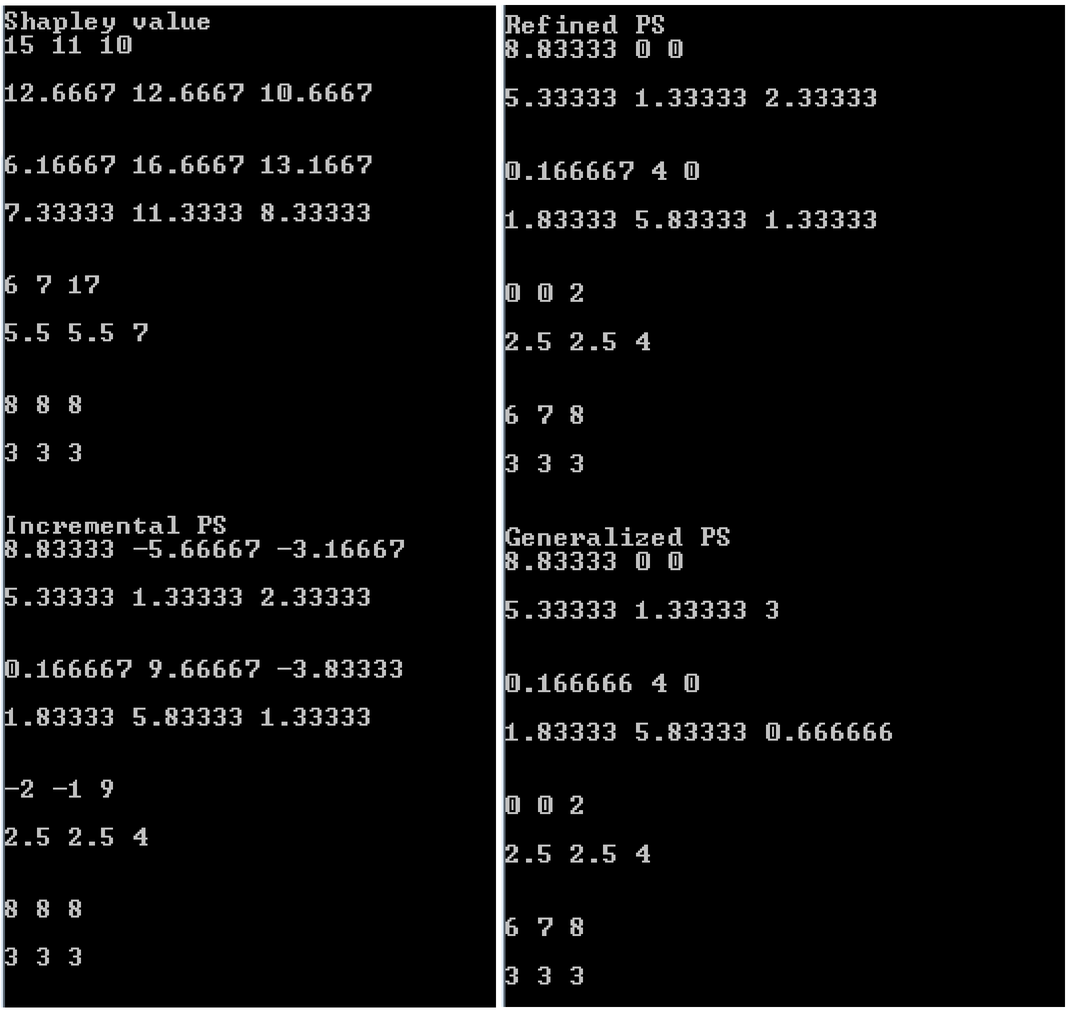
```
                        {
                                        cout<<beta2[k+(sizevS/r)*t]<<" "<<beta2[k+(sizevS/r)*t+1]<<"
"<<beta2[k+(sizevS/r)*t+2]<<endl<<endl;
                        }
                cout<<endl;

        }
        delete[] arrayAll;
        delete[] vectorS;

        delete[] beta0;
        delete[] beta1;
        delete[] koefA;

        delete[] beta2;
        delete[] V;
        getch();
        return 0;
}
```

Результат работы программы продемонстрирован на примере, изображенном на Рис. 2.1. При использовании α -характеристической функции:



```
Shapley value
15 11 10

12.6667 12.6667 10.6667


6.16667 16.6667 13.1667

7.33333 11.3333 8.33333


6 7 17

5.5 5.5 7


8 8 8

3 3 3


Incremental PS
8.83333 -5.66667 -3.16667

5.33333 1.33333 2.33333


0.166667 9.66667 -3.83333

1.83333 5.83333 1.33333


-2 -1 9

2.5 2.5 4


8 8 8

3 3 3
```

```
Refined PS
8.83333 0 0

5.33333 1.33333 2.33333


0.166667 4 0

1.83333 5.83333 1.33333


0 0 2

2.5 2.5 4


6 7 8

3 3 3


Generalized PS
8.83333 0 0

5.33333 1.33333 3


0.166666 4 0

1.83333 5.83333 0.666666


0 0 2

2.5 2.5 4


6 7 8

3 3 3
```

При использовании ζ -характеристической функции:

```
Shapley value
13.6667 12.1667 10.1667

12.6667 12.6667 10.6667


6.16667 16.6667 13.1667

7.33333 11.3333 8.33333


6 7 17

5.5 5.5 7


8 8 8

3 3 3


Incremental PS
7.5 -4.5 -3

5.33333 1.33333 2.33333


0.166667 9.66667 -3.83333

1.83333 5.83333 1.33333


-2 -1 9

2.5 2.5 4


8 8 8

3 3 3
```

```
Refined PS
7.5 0 0

5.33333 1.33333 2.33333


0.166667 5.16667 0

1.83333 5.83333 1.33333


0 0 2.16667

2.5 2.5 4


6 7 8

3 3 3


Generalized PS
7.5 0 0

5.33333 1.33333 3


0.166667 5.16667 0

1.83333 5.83333 0.666666


0 0 2.16667

2.5 2.5 4


6 7 8

3 3 3
```