

Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет
Кафедра Прикладной кибернетики

Марков Иван Всеволодович

Математические модели систем ФАПЧ

Бакалаврская работа

Научный руководитель:
д. ф.-м. н. Юлдашев М. В.

Рецензент:
д. ф.-м. н. Юлдашев Р. В.

Санкт-Петербург
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Faculty of Mathematics and Mechanics
The chair of applied cybernetics

Ivan Markov

Mathematical models of charge-pump PLLs

Bachelor's Thesis

Scientific supervisor:
assistant professor Marat Yuldashev

Reviewer:
assistant professor Renat Yuldashev

Saint-Petersburg
2017

Оглавление

Введение	4
1. Обзор	5
1.1. Простейшая система ФАПЧ	5
1.2. Разновидности фазовых и частотно-фазовых детекторов	7
1.3. ФАПЧ с системой накачки заряда	10
2. Анализ систем ФАПЧ с накачкой заряда	14
2.1. Параметры, необходимые для описания системы	14
2.2. Вывод системы разностных уравнений	17
2.3. Исследование системы разностных уравнений	20
2.4. Модернизация модели	24
2.5. Альтернативные модели систем ФАПЧ с системой накачки заряда	27
Заключение	32
Список литературы	33

Введение

Система фазовой автоподстройки частоты (далее ФАПЧ) — это электросхема с обратной связью, содержащая генератор, управляемый напряжением (далее ГУН), который постоянно подстраивает частоту своего сигнала так, чтобы она совпадала с частотой входного сигнала. На протяжении нескольких десятилетий ФАПЧ являются широко распространенными в радиоэлектронике и схемотехнике и используются для генерации, стабилизации, модуляции/демодуляции, фильтрации или восстановления сигнала с шумами, а также для сглаживания эффекта прерывания опорного сигнала. Одни из первых применений систем ФАПЧ в середине XX века включали генерацию синхронизирующих импульсов [1], например синхронизация с тактовым импульсом в телевизорах происходила за счет систем ФАПЧ, что способствовало получению картинки без помех на экране. В современном мире системы ФАПЧ используются как синтезаторы дискретных частот в FM-радиоприемниках и FM-радиопередатчиках [2], для цифровой обработки видеосигналов, а также в множестве других областей электротехники [3]. Практически ежегодно возникает большое количество новых систем ФАПЧ со все более сложными схемами и компонентами, модифицируются уже существующие системы с целью ускорения и повышения эффективности работы различной электротехники. Целью ВКР является описание различных систем ФАПЧ с акцентом на системах ФАПЧ с накачкой заряда, как наиболее распространенных и эффективных, на трех уровнях:

1. Описание общих принципов работы систем ФАПЧ.
2. Численное моделирование систем ФАПЧ.
3. Математические модели систем ФАПЧ. [4].

1. Обзор

1.1. Простейшая система ФАПЧ

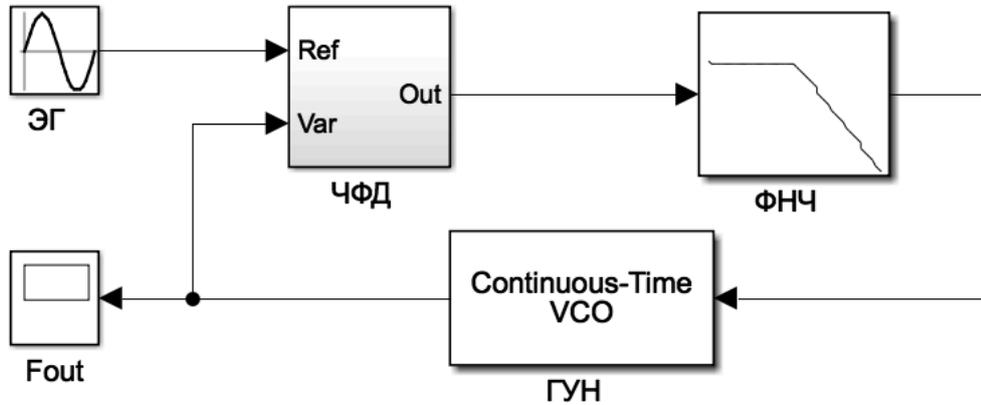


Рис. 1: Система ФАПЧ

Самая простая система ФАПЧ (рис. 1) состоит из эталонного генератора (далее ЭГ), фазового детектора (далее ФД), фильтра или фильтра низких частот (далее ФНЧ) и ГУНа.

Простейший ФД представляет из себя последовательно соединенные перемножитель, на вход которого передаются сигнал ЭГ (вход Ref) и сигнал ГУНа (вход Var), и усилитель (рис. 2), однако на практике такой ФД применяется редко. Как правило, под каждую конкретную задачу детектор подбирается индивидуально. При входном (эталонном)

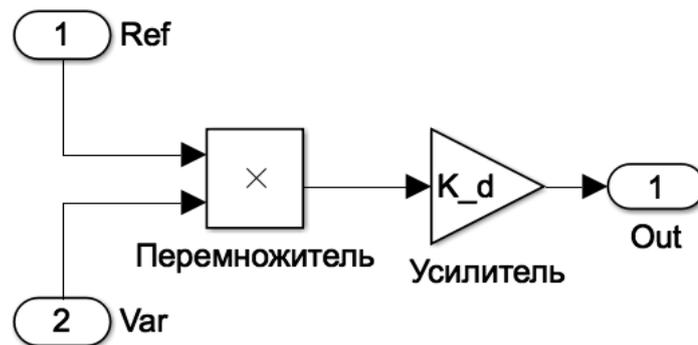


Рис. 2: ФД

сигнале $F_{ref}(t)$ и сигнале ГУНа $F_{VCO}(t)$ на выходе ФД будет сигнал $K_d f_{ref}(t) f_{VCO}(t)$, где K_d - коэффициент усиления.

Идеальный ФНЧ подавляет все частоты выше некой постоянной (частоты среза) и пропускает без изменений все сигналы меньшей частоты. Например если $F_{ref}(t) = \sin(\omega_{ref}t)$, а $F_{VCO} = \cos(\theta_{VCO})$ и $K_d = 1$, то на вход ФНЧ поступает сигнал вида

$$F_{filter\ in} = \cos(\theta_{VCO}) \sin(\omega_{ref}t) = \frac{1}{2}(\sin(\theta_{VCO} + \omega_{ref}t) + \sin(\theta_{VCO} - \omega_{ref}t)) \quad (1)$$

Идеальный ФНЧ с правильно выставленной частотой среза отфильтрует высокочастотную составляющую сигнала (синус суммы) и на выходе сигнал примет вид $F_{filter\ out} = \frac{1}{2} \sin(\theta_{VCO} - \omega_{ref}t)$. ФНЧ характеризуется своим порядком. Порядок ФНЧ отвечает за то, насколько хорошо он подавляет сигналы выше частоты среза. Например, ФНЧ первого порядка понижает амплитуду сигнала вдвое каждый раз, когда частота возрастает в два раза. ФНЧ более высоких порядков понижают амплитуду сигнала сильнее — так ФНЧ 2-го порядка может понижать ее в 4 раза [5] и т.д.

ГУН — это генератор, который, в зависимости от поступающего на него напряжения, меняет частоту испускаемого им сигнала с константой пропорциональности K_V . K_V — это чувствительность генератора (константное значение), выраженная в Hz/V , которая возникает вследствие конверсии напряжения в частоту, и добавляется к сигналу (ГУН умножает управляющее напряжение на чувствительность). Соответственно, частота выходного сигнала ГУНа меняется таким образом, чтобы она была равна частоте сигнала ЭГ после процесса подстраивания (2).

$$f_{out} = f_{ref} \quad (2)$$

Это выражение выполняется только когда ФАПЧ работает в режиме захвата, то есть система пришла в состояние равновесия, и не выполняется, когда ФАПЧ подстраивается под новую частоту [3].

Результат работы схемы 1 для частоты ЭГ $\omega_{ref} = 1.05 * 10^6$ Hz, частоты среза $\omega_{cut} = 1 * 10^6$ Hz, собственной частоты ГУНа $\omega_{VCO} = 1 * 10^6$ Hz и временном шаге $t = 10^{-6}$ представлен на рис. 3. Из графика видно, что фаза сигнала ГУНа (синяя линия) медленно подстраивается к

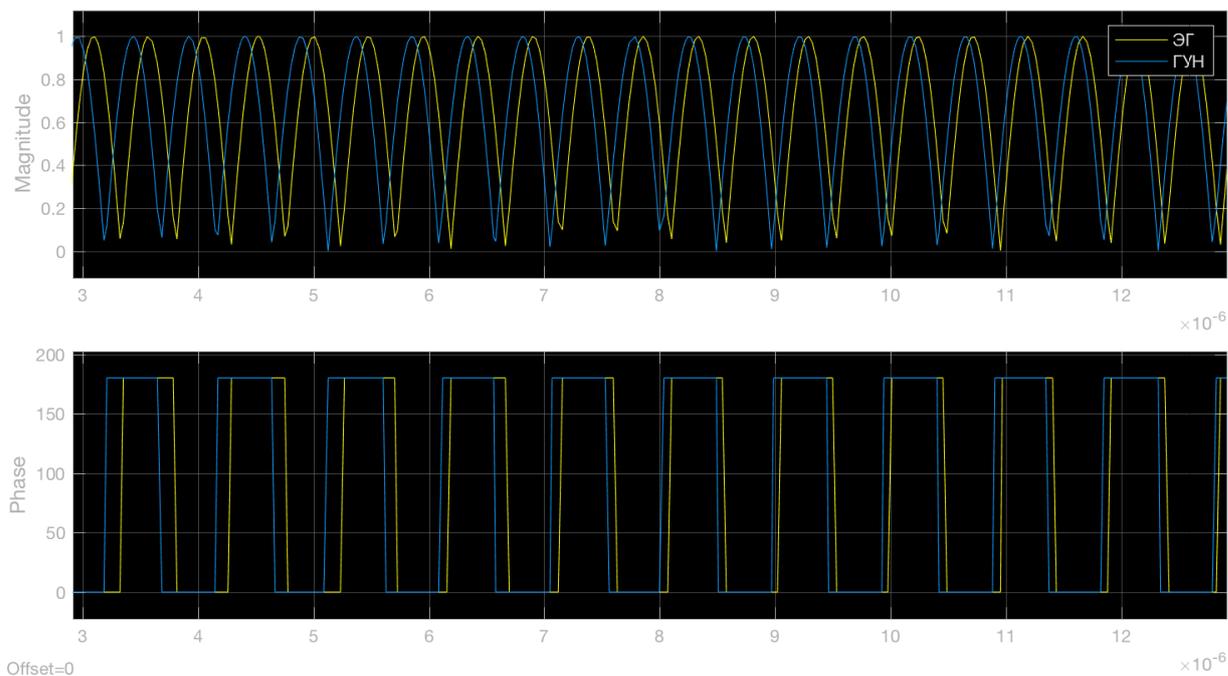


Рис. 3: Пример работы ФАПЧ

фазе сигнала ЭГ (желтая линия) даже для таких близких значений начальных частот.

1.2. Разновидности фазовых и частотно-фазовых детекторов

Фазовый детектор — это устройство, которое преобразует разность фаз между выходными сигналами ЭГ и ГУНа в выходное напряжение. В зависимости от технологии выходное напряжение может быть применено непосредственно к фильтру или преобразовано в ток посредством системы накачки заряда. Существует масса различных реализаций детекторов и того, и другого вида.

К фазовым детекторам, работающим без накачки заряда, относятся, например, диодные микшеры [6], схемы с исключаящим ИЛИ [7], JK-триггеры, D-триггеры [3] (рис. 4). В реализациях всех этих детекторов существуют некоторые ограничения. Если ФНЧ является пассивным, то есть он основан на конденсаторах, резисторах и катушках индуктивности, но в его устройстве отсутствует операционный усилитель

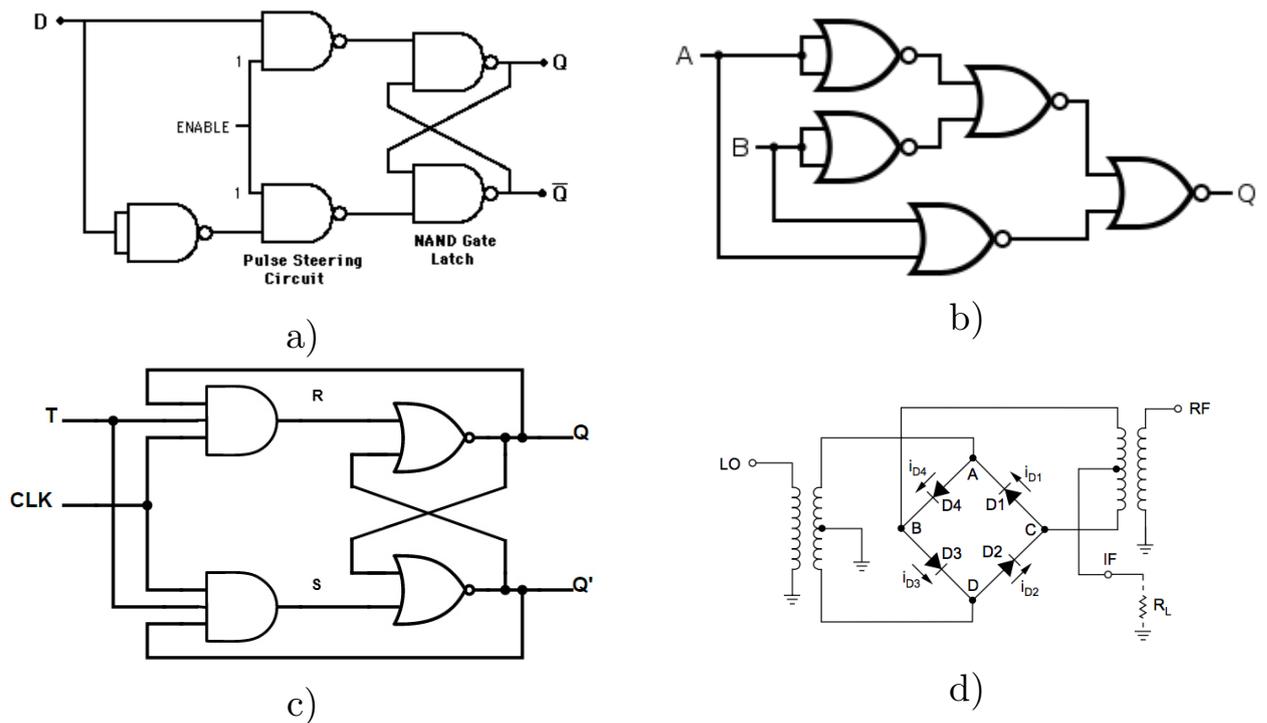


Рис. 4: Виды фазовых детекторов без накачки заряда: а) D-триггер, б) схема с исключаяющим ИЛИ, с) JK-триггер, д) 4-диодный микшер

сигнала, то ФАПЧ может не захватить нужную частоту сигнала ЭГ, если эта частота или фаза слишком отличаются от частоты или фазы ГУНа. Даже когда ФАПЧ работает в режиме захвата — может иметь место установившийся фазовый сдвиг: например микшер вносит фазовый сдвиг на 90° . Некоторые активные ФНЧ, в которых используются операционные усилители, позволяют избежать большинства из этих проблем, однако сами усилители добавляют шумы к сигналам и размер электросхем [8]. Классическая архитектура схем с активным ФНЧ и фазовым детектором, описанная в книге Ф.М. Гарднера *Phaselock Techniques* [9], представлена на рис. 5.

ЧФД лучше справляются с большими частотными сдвигами [9] и чаще всего сопровождаются системой накачки заряда. Тем самым ЧФД преобразует разность фаз и частот в напряжение, которое в свою очередь переводится в корректирующий ток системой накачки заряда. ЧФД с системой накачки заряда предоставляет ряд преимуществ по сравнению с фазовым детектором: ФАПЧ с системой накачки заряда может захватить любую частоту, а также не имеет установившегося фазового

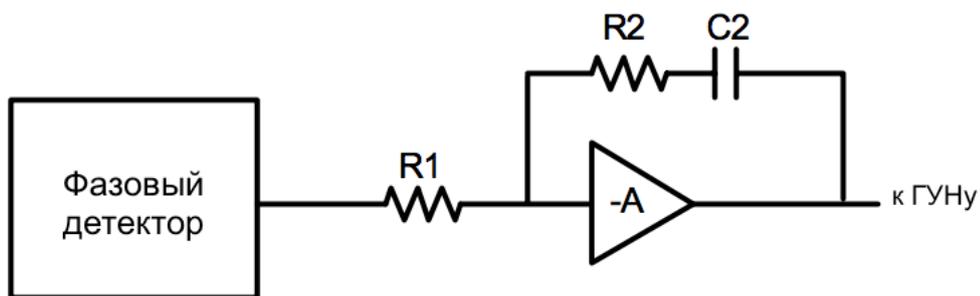


Рис. 5: Классическая архитектура фазового детектора с активным фильтром

сдвига [3].

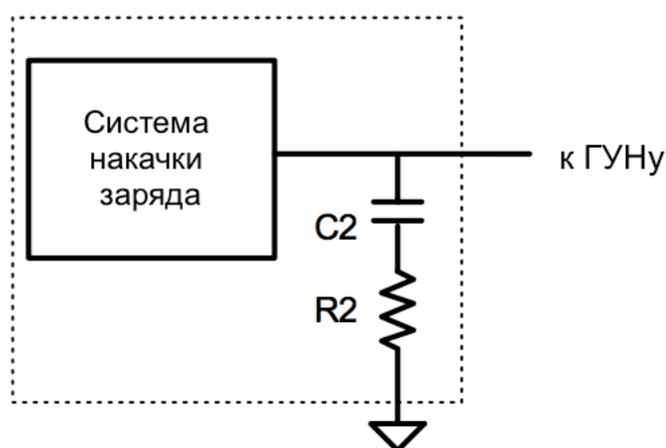


Рис. 6: Пассивный ФНЧ первого порядка с системой накачки заряда

Можно сравнить схему на рис. 6 с ее предшественницей — схемой на рис. 5. Функциональность классического фазового детектора с операционным усилителем достигается системой накачки заряда (блок с штрихованной границей). Система накачки заряда преобразует напряжение с ЧФД в корректирующий ток. Существует большое количество различных реализаций этой системы, подходящих непосредственно для конкретных задач, однако общая суть сводится к следующему: если подается напряжение с одного входа (U), то на выходе будет ток I_1 , если с другого входа (D), то I_2 (часто $I_2 = -I_1$). Пример простейшей системы подкачки заряда на рис. 7.

Системы ФАПЧ с накачкой заряда значительно лучше подходят для возложенных на них целей, чем системы ФАПЧ с фазовым детектором

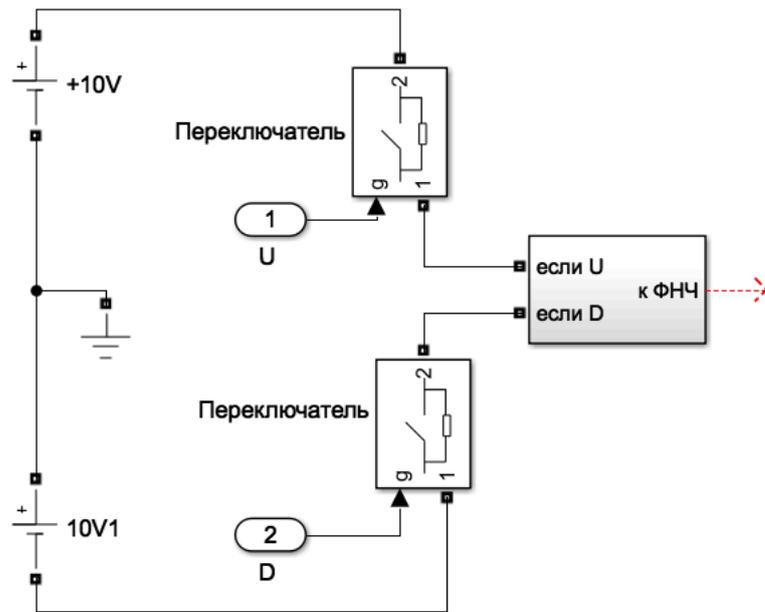


Рис. 7: Система накачки заряда

и активным фильтром, и им отдают предпочтение большинство современных инженеров. Единственный случай, когда используются операционные усилители, — это, когда напряжение, управляющее ГУНом, должно быть выше того, что может предоставить система накачки заряда. В этом случае необходим активный фильтр для корректной работы схемы.

1.3. ФАПЧ с системой накачки заряда

Базовая структура современной системы ФАПЧ представлена на рис. 8. Относительно простейшей системы (рис. 1) внесены несколько изменений: добавлен делитель частоты $\frac{1}{M}$, который делит частоту ЭГ (получается $f_{comp} = \frac{f_{ref}}{M}$ — сравнительная частота), делитель частоты $\frac{1}{N}$, который делит частоту сигнала ГУНа, и добавлена система накачки заряда. Здесь на ЧФД передаются сигналы с ЭГ и ГУНа, а выходят импульсы, замыкающие соответствующие переключатели у системы накачки заряда, по длительности равные времени между достижением переднего фронта ”опережающего” и ”догоняющего” сигналов. Корректирующий ток, возникающий при работе системы накачки заряда, пе-

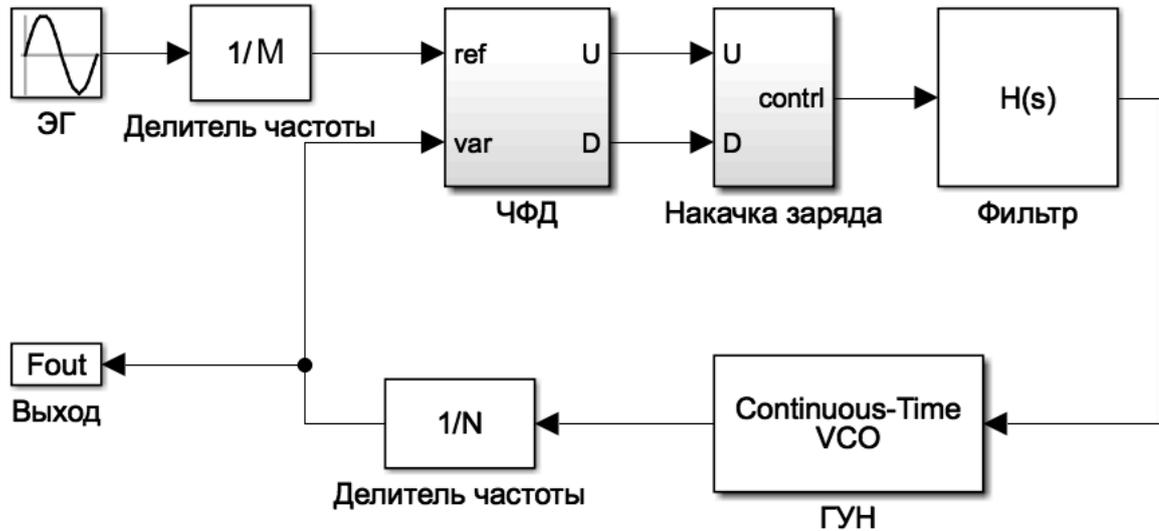


Рис. 8: Общий вид ФАПЧ с системой накачки заряда

редается через ФНЧ на ГУН, тем самым меняя сигнал, генерируемый им, в ту или иную сторону. В реальных схемах M чаще всего фиксировано, а N легко можно изменить. Тем самым, уравнение для ФАПЧ, работающей в режиме захвата, (2) принимает вид (3).

$$f_{out} = \frac{N}{M} f_{ref} \quad (3)$$

Для наглядности работы схемы в Matlab Simulink была реализована ФАПЧ с системой накачки заряда. В схеме были использованы: ЧФД, основанный на D-триггерах (рис. 9), пассивный ФНЧ/система накачки заряда идентичные тем, что на рис. 6 и 7 соответственно.

Принцип работы ЧФД основан на D-триггерах, тактируемых передним фронтом сигнала синхронизации CLK (имеется ввиду, что важны возрастающие значения фазы сигнала ЭГ и ГУНа). В случае, когда D-триггер активен, то есть значение !CLR ненулевое, выход Q равен входу D. В случае ЧФД — это просто 1. Сигнал !Q (отрицание Q) не нужен, так что он просто заглушается. Когда фазы ЭГ и ГУНа синхронизированы, то сигналы 1 приходят одновременно в блок NAND ("исключающее ИЛИ"), тем самым запирая оба D-триггера на следующем шаге (блок "Память"). Это же происходит, когда сигналов нет вовсе.

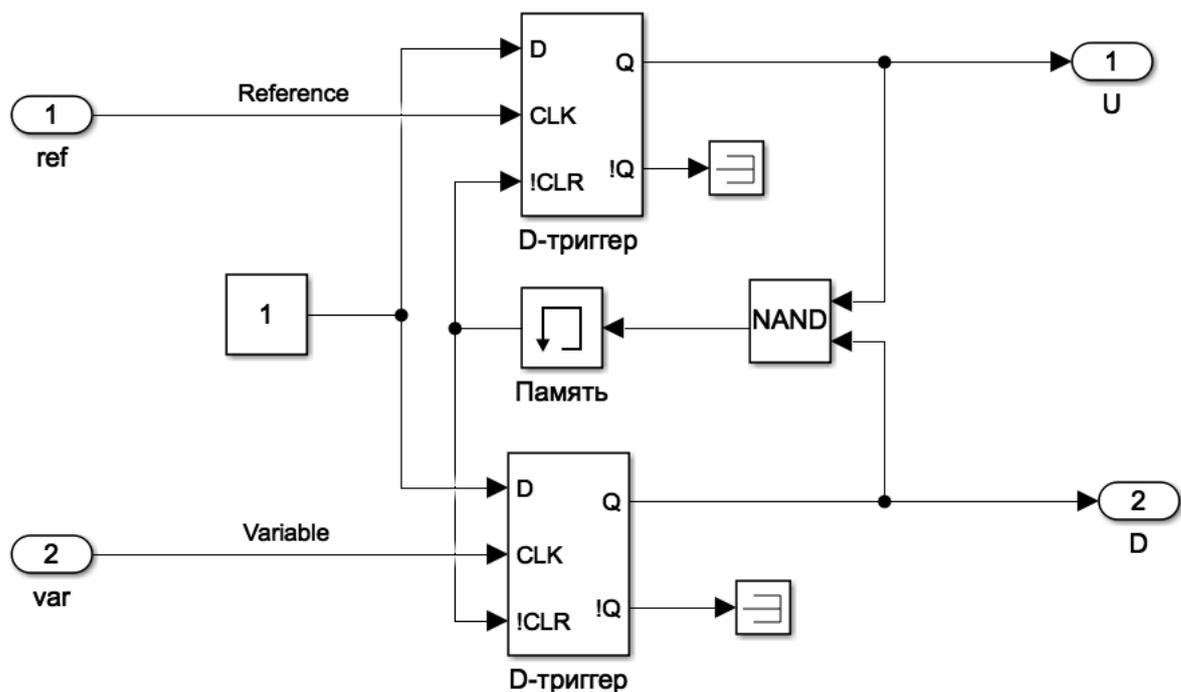
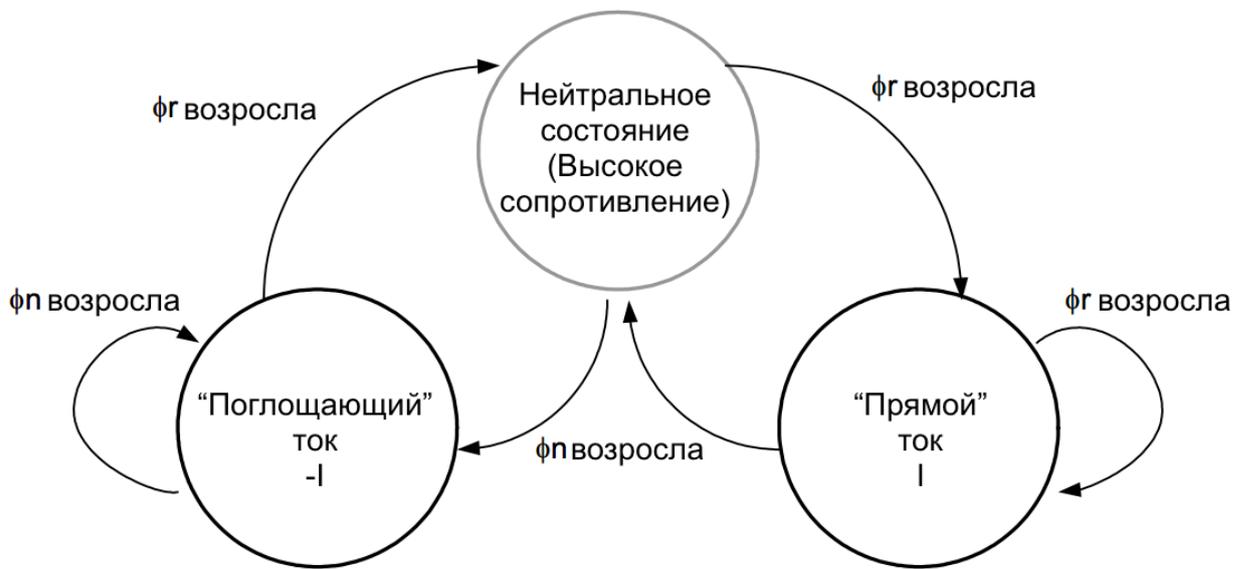


Рис. 9: ЧФД на D-триггерах

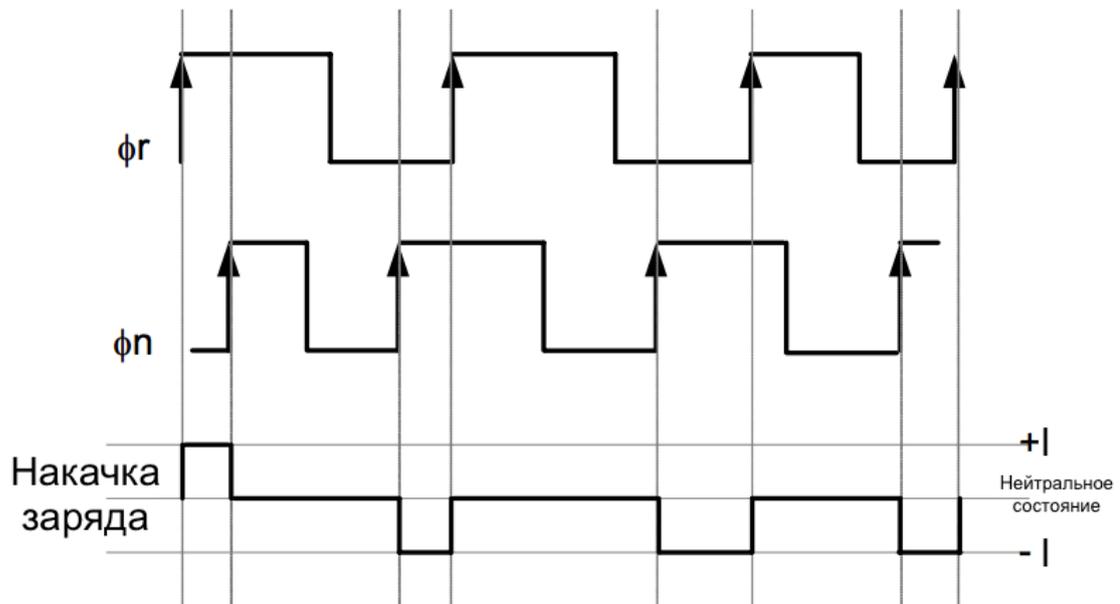
Такое состояние системы назовем нейтральным. Во всех других случаях 1 попадает лишь на один из выходов, активируя накачку заряда в нужном направлении. Принцип работы ЧФД можно продемонстрировать на диаграмме состояний и графике работы системы накачки заряда (рис. 10).[10]

Обозначим за ϕ_{ref} и ϕ_{VCO} фазы сигналов ЭГ и ГУНа соответственно. При каждом переднем фронте ϕ_{ref} сигнала ЭГ происходит положительный переход в работе системы накачки заряда: если имел место "поглощающий" ток $-I$, то система перейдет в нейтральное состояние, если система была в нейтральном состоянии, то потечет "прямой" ток I , если же и так тек "прямой" ток I , то ничего не изменится. Ровно обратным образом система себя ведет, когда встречается передний фронт ϕ_{VCO} , то есть будет происходить отрицательный переход в системе накачки заряда. В реальности ЧФД не может работать идеально, так что порой имеют место ошибочные сигналы, когда фазы синхронизированы, из-за слабых шумов и задержек компонент [11].

На рис. 11 приведен пример работы такой системы ФАПЧ, у которой частота сигнала ЭГ $\omega_{ref} = 1 * 10^6$ Hz, а собственная частота ГУНа



а)



б)

Рис. 10: Пример работы ЧФД: а) диаграмма состояний, б) график работы системы накачки заряда

$\omega_{VCO} = 1 * 10^3$ Hz — на три порядка меньше.

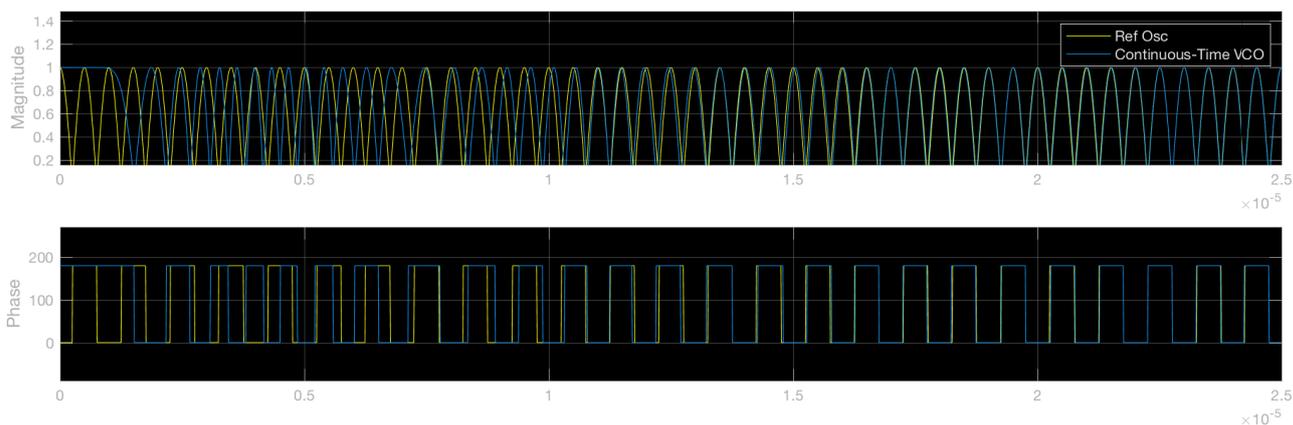


Рис. 11: Пример работы ФАПЧ с системой накачки заряда

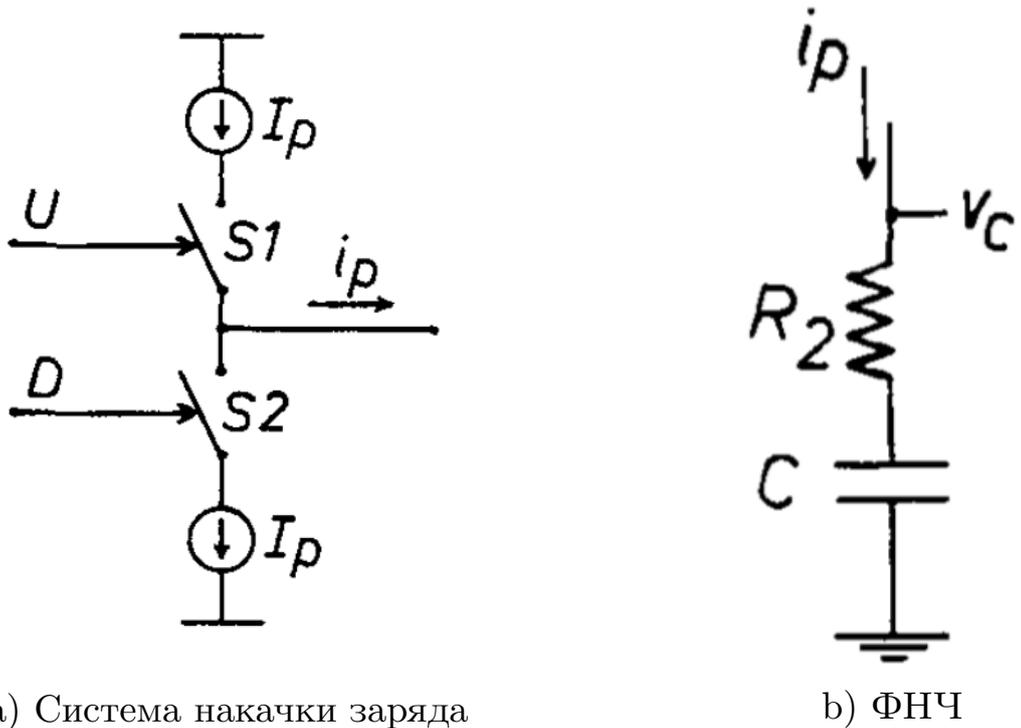
2. Анализ систем ФАПЧ с накачкой заряда

2.1. Параметры, необходимые для описания системы

Марк Ван Паэмель в своей работе "Анализ систем ФАПЧ с накачкой заряда: новая модель" [12] описал с помощью системы разностных уравнений второго порядка систему ФАПЧ с накачкой заряда, у которой система накачки заряда с переключателями S_1 и S_2 , соединенными с выходами ЧФД, и ФНЧ представлены в виде рис. 12 а) и б) соответственно.

Для введения переменных состояний требуются следующие параметры:

1. Временной интервал τ , определенный как ширина промежутка активной работы ЧФД, то есть когда сигнал подается хотя бы с одного выхода U или D. Знак τ определяется в зависимости от того, какой выход является активным. Положим τ положительным, если активен выход U (частота сигнала ГУНа ниже частоты сигнала ЭГ), и отрицательным, если активен выход D (сигнал ГУНа опережает сигнал ЭГ).
2. Фиксированное значение тока в системе накачки заряда I_p , и, как следствие работы этой системы, ток, который втекает в ФНЧ или



а) Система накачки заряда

б) ФНЧ

Рис. 12:

вытекает из ФНЧ i_p :

$$\begin{aligned}
 i_p &= I_p \operatorname{sgn} \tau, \text{ если ФНЧ активен,} \\
 i_p &= 0 \text{ в противном случае.}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

3. Значения сопротивления резистора R_2 и емкости конденсатора C , являющихся компонентами ФНЧ первого порядка. С i_p , определенным как (4), можно заметить, что напряжение на конденсаторе v_c изменяется линейно с тангенсом угла наклона $\frac{I_p}{C}$ и скачком напряжения в $+I_p R_2$ при прохождении переднего фронта и $-I_p R_2$ при прохождении заднего фронта при активной работе ЧФД и остается неизменным в противном случае (рис. 13).

4. Линейная характеристика ГУНа

$$\frac{d\phi_{VCO}}{dt} = \omega_0 + f_{VCO}
 \tag{5}$$

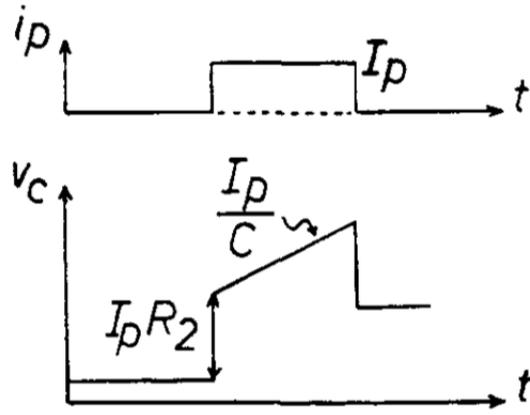


Рис. 13: Входной и выходной сигналы ФНЧ

частота которой задана

$$f_{VCO} = K_V v_c, v_c > 0 \quad (6)$$

где K_V — постоянная добавка ГУНа. В общем случае в уравнении также участвует $\omega_0 = 2\pi f_0$ — свободная угловая частота ГУНа (при $v_c = 0$). Тогда естественный способ задать сигнал ГУНа с характеристикой, описанной в (6), это

$$F_{VCO}(t) = \sin(\phi_0 + \int_0^t \omega_0 + K_V v_c(\tau) d\tau) \quad (7)$$

где ϕ_0 — это начальная фаза ГУНа. Для простоты расчетов начальная фаза и свободная угловая частота ГУНа принимаются равными 0 [13].

Для описания динамического поведения системы второго порядка необходимо выбрать две переменные состояния. Для системы ФАПЧ с накачкой заряда этими дискретно-временными переменными являются $v(k)$ и $\tau(k)$ — напряжение на конденсаторе ФНЧ и ширина импульса выходного сигнала ЧФД со знаком соответственно.

2.2. Вывод системы разностных уравнений

Марк Ван Паэмель рассмотрел следующую схему получения разностных уравнений: каждый период T сигнала ЭГ значения переменных состояния пересчитываются, тем самым вводится естественная дискретизация. Тогда разностное уравнение для расчета $v(k+1)$ принимает вид (8), поскольку напряжение меняется относительно того, которое уже содержится на конденсаторе в зависимости от знака $\tau(k+1)$.

$$v(k+1) = v(k) + \frac{I_p}{C}\tau(k+1) \quad (8)$$

Разностное уравнение для расчета $\tau(k+1)$ определяется из того, что временной интервал $[T + \tau(k+1) - \tau(k)]$ должен соответствовать одному периоду сигнала ГУНа, что эквивалентно следующему уравнению

$$\int_0^{T+\tau(k+1)-\tau(k)} f_{VCO}(t)dt = 1 \quad (9)$$

С учетом равенства (6) это уравнение можно переписать в виде

$$\int_0^{T+\tau(k+1)-\tau(k)} v_c(t)dt = \frac{1}{K_V} \quad (10)$$

Поскольку интеграл (10) равен площади подграфика v_c , форма области, заключенной между 0 и $T + \tau(k+1) - \tau(k)$ полностью зависит от знаков $\tau(k+1)$ и $\tau(k)$. Таким образом можно выделить 4 различных комбинации знаков (случай, когда $\tau(k) = 0$ и $\tau(k+1) = 0$, можно считать достижением системы ФАПЧ режима захвата, то есть подстройка завершена).

1. $\tau(k) \geq 0$ тогда уравнение для $\tau(k+1)$ принимает вид

$$\tau(k+1) = \frac{-I_p R_2 - v(k) + \sqrt{[I_p R_2 + v(k)]^2 - 2\frac{I_p}{C}[v(k)[T - \tau(k)] - \frac{1}{K_V}]}}{\frac{I_p}{C}} \quad (11)$$

Если значение $\tau(k+1)$ неотрицательное, то продолжается алгоритм для следующего шага, однако может возникнуть случай, ко-

гда значение $\tau(k + 1)$, рассчитанное по формуле (11), является отрицательным. В таком случае оно пересчитывается по следующему пункту 2.

2. $\tau(k) \geq 0, \tau(k + 1) < 0$. В этом случае

$$\tau(k + 1) = \frac{1}{K_V v(k)} - T + \tau(k) \quad (12)$$

3. $\tau(k) < 0$, тогда

$$\tau(k + 1) = \frac{\frac{1}{K_V} - I_p R_2 \tau(k) - \frac{I_p \tau(k)^2}{2C}}{v(k)} - T + \tau(k) \quad (13)$$

Однако возможна ситуация, когда возникает перегрузка ГУНа, то есть значение v_c становится отрицательным, что невозможно по определению, но возможно по формуле (8). Это не означает, что система ФАПЧ вдруг станет нестабильной, однако стоит внести поправки в формулу (14) в случае, когда $v(k) < I_p R_2$. Это означает, что небольшая часть площади подграфика находится ниже нуля по оси напряжения, а значит не участвует в вычислениях. Эта поправка рассчитывается следующим образом: $t_x = \tau(k) - \frac{v(k) - I_p R_2}{\frac{I_p}{C}}$. Если $t_x > 0$, то $t_x = 0$. И наконец

$$\tau(k + 1) = \frac{\frac{1}{K_V} - I_p R_2 t_x - \frac{I_p t_x (\tau(k) - \frac{t_x}{2})}{C}}{v(k)} - T + t_x \quad (14)$$

Аналогично пункту 1, может возникнуть случай, когда τ меняет знак, тогда $\tau(k + 1)$ пересчитывается по следующему пункту 4.

4. $\tau(k) < 0, \tau(k + 1) \geq 0$. Здесь

$$\tau(k + 1) = \frac{-I_p R_2 - v(k) + \sqrt{[I_p R_2 + v(k)]^2 + 2\frac{I_p}{C}v(k)\tau(k + 1)_{\text{пункт 3}}}}{\frac{I_p}{C}} \quad (15)$$

На рис. 14 приведены зависимости параметров состояния для всех четырех случаев в соответствующем порядке.

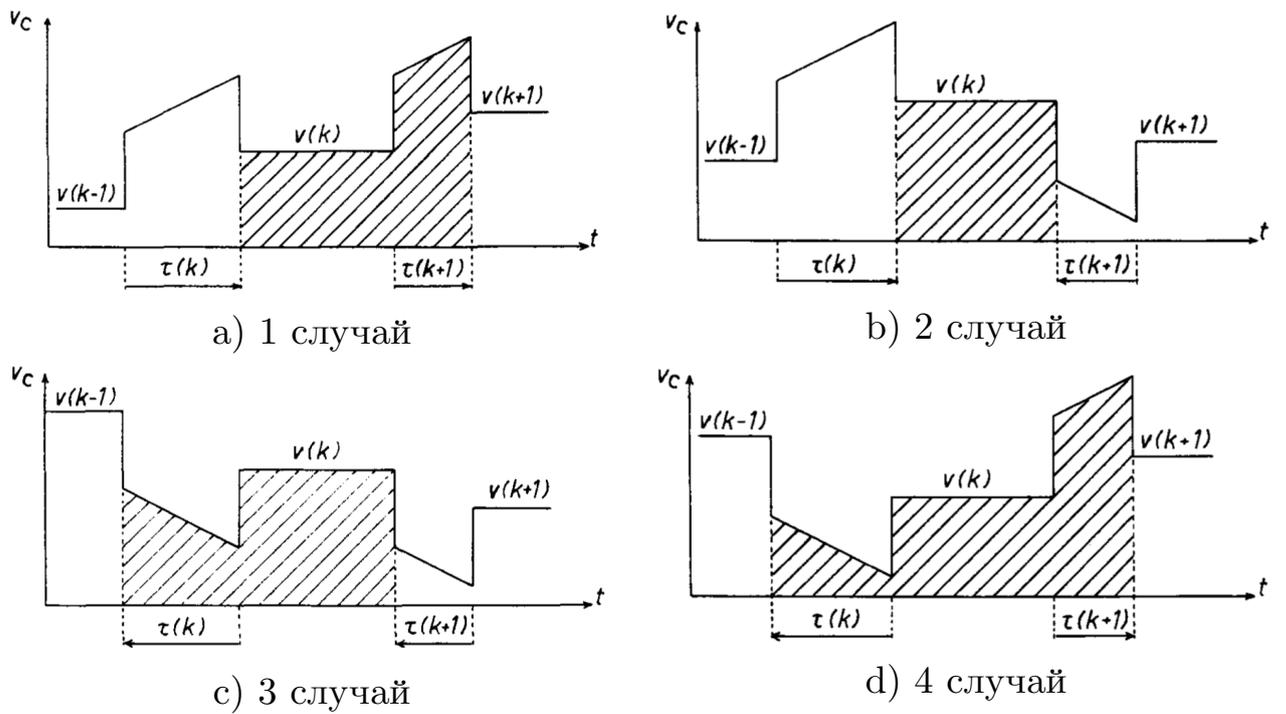


Рис. 14: Графики зависимости напряжения на конденсаторе ФНЧ от времени

Однако возможны еще два случая, которые не входят в уже перечисленные 4. Это случаи, когда $|\tau(k+1)| > T$. В этих случаях промежуток активной работы системы накачки заряда делится на n промежутков длины T и последний длины $T_H - nT$.

5. $\tau(k+1) > T$. Этот случай почти идентичен случаю 1 с той лишь разницей, что промежуток активной работы системы накачки заряда длиннее периода сигнала ЭГ. Тем самым все, что надо посчитать — это количество пропущенных циклов. Формула для расчета напряжения на каждом из этапов остается все той же (8).
6. $\tau(k+1) < -T$. В этом случае главной задачей является расчет количества полностью пропущенных циклов сигнала ГУНа, а также ширину последнего, задний фронт которого выходит за передний фронт сигнала ЭГ. Поскольку они варьируются, каждый цикл надо рассчитывать отдельно по формуле

$$t_n = \frac{v_{n-1} - I_p R_2 - \sqrt{(v_{n-1} - I_p R_2)^2 - 2 \frac{I_p}{C K_V}}}{\frac{I_p}{C}} \quad (16)$$

Где

$$v_n = v_{n-1} - \frac{I_p}{C} t_n \quad (17)$$

с $v_0 = v(k-1)$. Когда $\sum_{k=1}^n t_k > |\tau(k)|$, t_n делится на 2: период t_a , пока действует система накачки заряда, и период t_b , когда она выключилась до следующего включения.

$$\begin{aligned} t_a &= -\tau(k) - t_1 - t_2 \\ t_b &= \frac{\frac{1}{KV} - t_a(v_n - I_p R_2) + \frac{I_p t_a^2}{2C}}{v(k)} \end{aligned} \quad (18)$$

Наконец, вычисляется значение $\tau(k+1)$

$$\tau(k+1) = t_b - T \quad (19)$$

Графики зависимости напряжения на конденсаторе от времени для случаев 5 и 6 представлены на рис. 15.

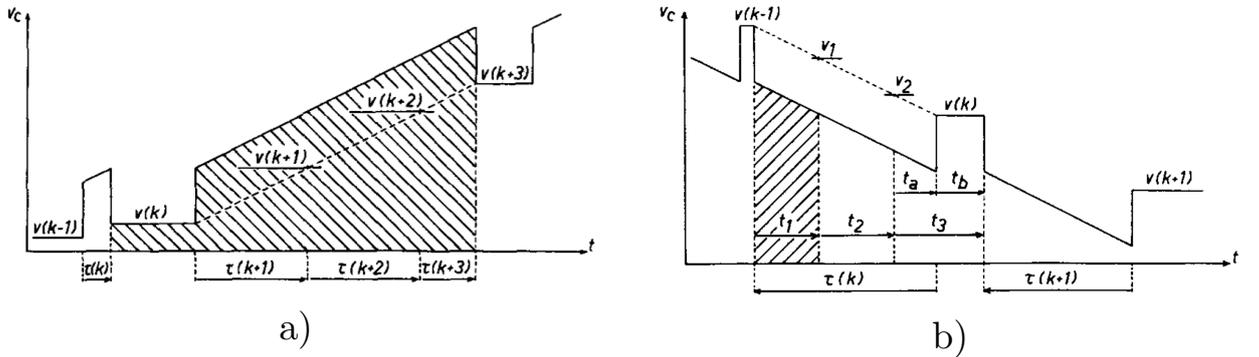


Рис. 15: Случаи а)5, б)6

2.3. Исследование системы разностных уравнений

Марк Ван Паэмель в своей работе сделал акцент на линеаризацию и получил условия устойчивости состояния равновесия с помощью одно-стороннего Z-преобразования, однако без вывода формул. Состоянию равновесия системы разностных уравнений соответствуют равенства

$$\begin{aligned} \tau(k) &= \tau(k+1) \\ v(k) &= v(k+1) \end{aligned} \quad (20)$$

Из уравнения (8) следует, что равенство напряжений приводит к равенству 0 периодов работы системы накачки заряда. При подстановке $\tau(k) = \tau(k + 1) = 0$ в любое из выражений для $\tau(k + 1)$ случаев 1-6 получается, что $v(k) = \frac{1}{K_V T}$. Это означает, что единственное состояние равновесия системы соответствует критерию работы ФАПЧ в режиме захвата, поскольку система накачки заряда бездействует.

Вблизи состояния равновесия система разностных уравнений может быть линеаризована при допущениях, что значение $\tau(k)$ стремится к 0, и можно опустить значение второго порядка $\tau(k)^2$ как незначительно малое, а также, что

$$v(k) = \frac{1}{K_V T}(1 + a(k)), \quad (21)$$

где $a(k) \ll 1$. Тогда формула (14) для случая 3 с учетом разложения в ряд Тейлора в окрестности 0 ($\frac{1}{1+a(k)} = 1 - a(k) + O(a(k)^2)$) принимает вид

$$\tau(k + 1) = -T a(k) + \tau(k)(1 - I_p R_2 K_V T(1 - a(k))) \quad (22)$$

Формулы для $\tau(k + 1)$ и $\tau(k)$ через $a(k + 1)$, $a(k)$ и $a(k - 1)$ можно получить из двух итераций k и $k + 1$ уравнения для напряжения (8) после подстановки в них (21)

$$\begin{aligned} a(k) &= a(k - 1) + \frac{I_p K_V T}{C} \tau(k) \\ a(k + 1) &= a(k) + \frac{I_p K_V T}{C} \tau(k + 1) \end{aligned} \quad (23)$$

Выразив и подставив значения $\tau(k)$ и $\tau(k + 1)$ в (22), получаем линеаризованную формулу, полностью описывающую систему ФАПЧ вблизи состояния равновесия

$$a(k + 1) + \left(\frac{I_p K_V T^2}{C} + I_p R_2 K_V T - 2\right)a(k) + (1 - I_p R_2 K_V T)a(k - 1) = 0 \quad (24)$$

Для упрощения записи, сдвинем итерации на 1 вперед, чтобы не осталось члена $a(k - 1)$, и выпишем характеристическое уравнение для

(24)

$$X(z) = z^2 + \left[\frac{I_p R_2 K_V T^2}{R_2 C} + I_p R_2 K_V T \right] z + 1 - I_p R_2 K_V T \quad (25)$$

Для устойчивости состояния равновесия системы необходимо, чтобы корни характеристического уравнения лежали в единичном комплексном круге. В случае (25) это означает, что условия устойчивости состояния равновесия выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} 0 < I_p R_2 K_V T < 2 \\ C > -\frac{I_p K_V T^2}{2(I_p R_2 K_V T - 2)} \end{aligned} \quad (26)$$

Данные значения были рассчитаны в программном пакете Mathematica и в точности соответствуют условиям в работах [8] и [12].

Вопросу периодических точек системы Марк Ван Паэмель в своей работе внимания не уделял, поэтому следующие расчеты были проведены автором ВКР. Периодические состояния системы с периодом $l = 2$ определяются системой равенств

$$\begin{aligned} \tau(k-1) &= \tau(k+1) \\ v(k-1) &= v(k+1). \end{aligned} \quad (27)$$

Подставив эти значения в несколько итераций вычисления напряжения на конденсаторе

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + \frac{I_p}{C} \tau(k+1) \\ v(k) &= v(k-1) + \frac{I_p}{C} \tau(k) \\ v(k-1) &= v(k-2) + \frac{I_p}{C} \tau(k-1) \end{aligned} \quad (28)$$

и проведя простые арифметические операции, можно получить следующие условия периодичности с периодом $l = 2$ для системы ФАПЧ

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k-1) \\ v(k) &= v(k-2) \\ \tau(k+1) &= -\tau(k) = \tau(k-1). \end{aligned} \quad (29)$$

Из (29) следует, что периодичность возможна только если импульс сигнала системы накачки заряда меняет знак на последовательных итерациях, но его ширина остается неизменной, что соответствует последовательным случаям 2 и 4 или 4 и 2.

С точки зрения вычислений значений $v(k-1) = f(v(k))$ последовательность не важна, так что рассматриваться будут случаи 2 и 4. Здесь $\tau(k-1) = \tau(k+1) > 0$, $t(k) < 0$. График периодической работы системы приведен на рис. 16.

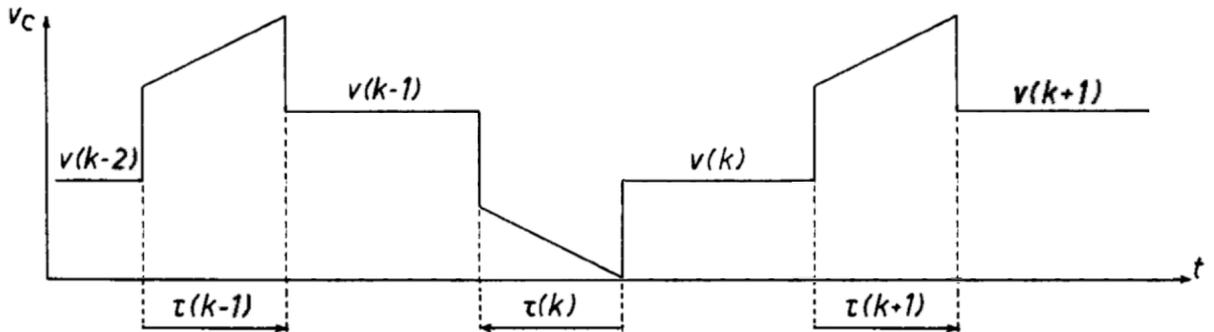


Рис. 16: Пример периодической работы системы ($l = 2$)

После подстановки в уравнение (12) условий периодичности (29), значение $\tau(k+1)$ можно вычислить по формуле

$$\tau(k+1) = -\frac{1}{2K_V v(k-1)} + \frac{T}{2} \quad (30)$$

Случай 4, полной формулой для расчета которого является (31), после подстановки условия периодичности (29) и несложных преобразований, принимает вид (32)

$$\tau(k+1) = \frac{-I_p R_2 - v(k) + \sqrt{(I_p R_2 + v(k))^2 + \frac{2I_p}{C} v(k) \left[\frac{\frac{1}{K_V} - I_p R_2 \tau(k) - \frac{I_p \tau(k)^2}{2C}}{v(k)} - T + \tau(k) \right]}}{\frac{I_p}{C}} \quad (31)$$

$$\tau(k+1) = \frac{-v(k) + \sqrt{v(k)^2 - \frac{I_p}{C} (T v(k) - \frac{1}{K_V})}}{\frac{I_p}{C}} \quad (32)$$

Приравняв значения $\tau(k+1)$ в уравнениях (32) и (30), можно получить искомую зависимость $v(k-1) = v(k+1) = f(v(k))$ для периодичной работы системы с периодом $l = 2$

$$v(k-1) = v(k+1) = \frac{\frac{I_p}{C}(1 + K_V T)}{2K_V \left(\frac{-v(k) + \sqrt{v(k)^2 - \frac{I_p}{C} \left(T v(k) - \frac{1}{K_V} \right)}}{\frac{I_p}{C}} \right)} \quad (33)$$

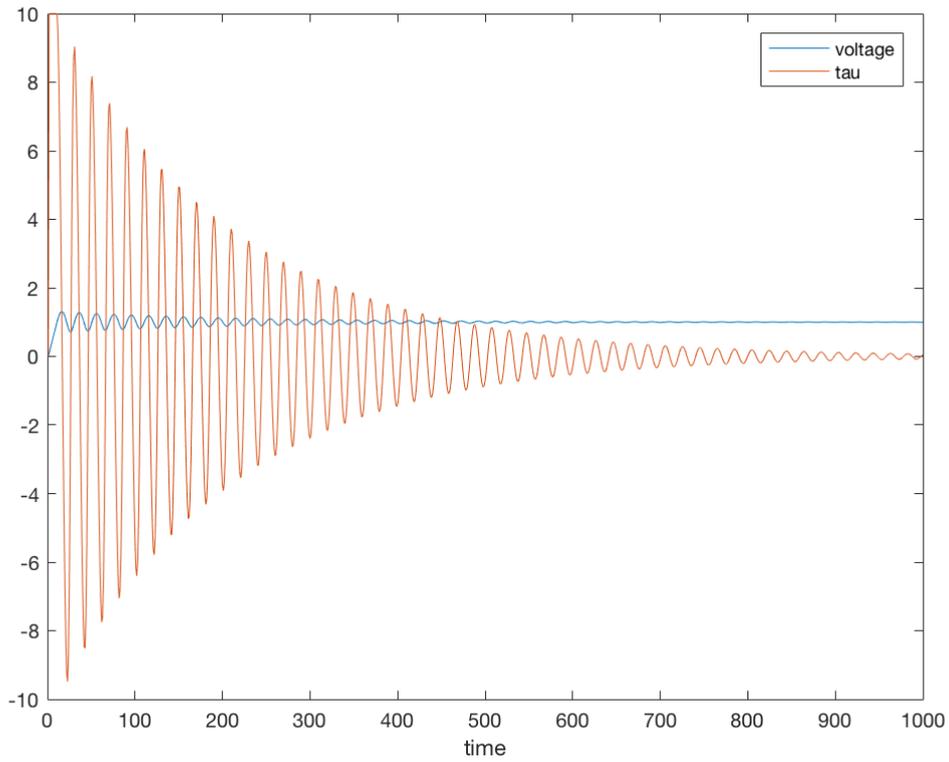
Для больших значений периодов $l > 2$ комбинаций случаев может быть большое количество, и вывод аналитических формул для значений напряжений $v(k)$ и временных промежутков $\tau(k)$ для большинства комбинаций будет отличаться и полный анализ для больших периодов представляется обосновательным.

В Matlab была реализована схема, описанная Марком Ван Паэзелем, на уровне разностных уравнений (8) и (10) со следующими начальными параметрами: значение тока в системе накачки заряда I_p , емкость конденсатора C , сопротивление резистора R , добавка к ГУНу K_V , период сигнала ЭГ T и количество итераций, равное количеству циклов сигнала ЭГ.

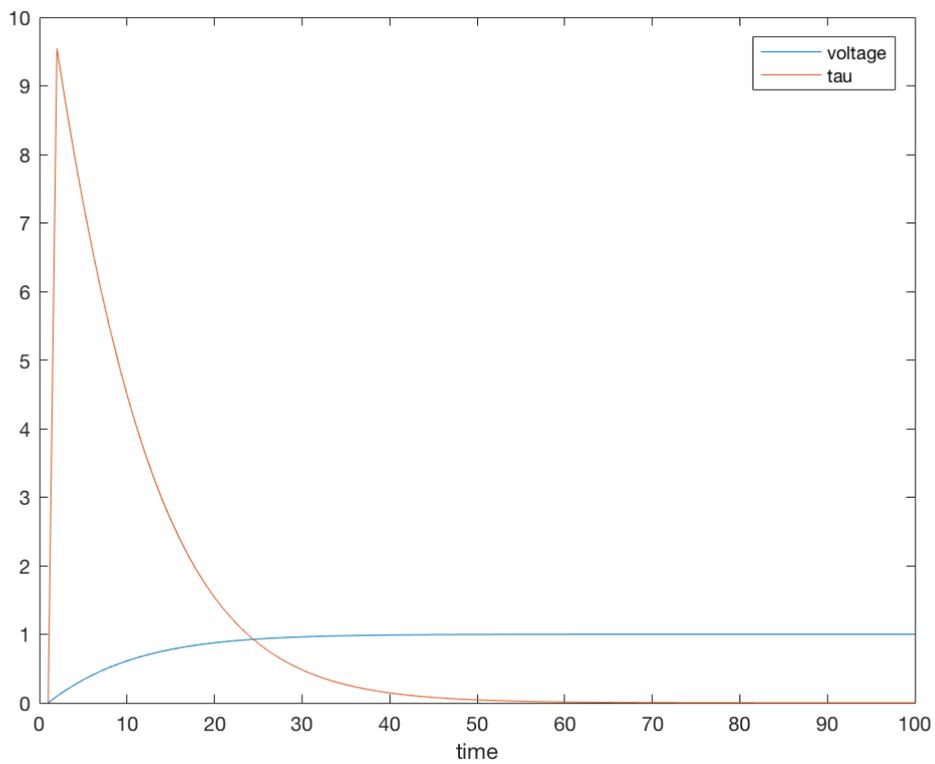
Начальные значения напряжения и времени работы системы накачки заряда задаются нулевыми $\tau_0 = 0, v_0 = 0$. На рис. 17 приведены примеры работы программы. Видно, что, аналогично реализации ФАПЧ на электросхеме, система синхронизируется при любых параметрах и достигает режима захвата.

2.4. Модернизация модели

С точки зрения программной реализации, случай 5 можно считать избыточным, поскольку формулы (11) и (12) для случаев 1 и 2 соответственно рассчитывают верное значение для напряжения на конденсаторе (это естественным образом вытекает из формулы для случая 5, поскольку скорость непрерывного роста напряжения на конденсаторе $\frac{I_p}{C}$ никак не меняется от длины отрезка $\tau(k+1)$). Следовательно, все, на что влияет случай 5, это значение последней, рассчитанной в нем $\tau(k+i)$, где $i-1$ — число пропущенных циклов длины T . Последнее



a) $I_p = 0.001, C = 0.1, R = 10, K_V = 0.1, T = 10$



b) $I_p = 0.001, C = 0.1, R = 1000, K_V = 0.1, T = 10$

Рис. 17: Примеры работы ФАПЧ с накачкой заряда через систему ДУ

значение вычисляется как

$$\tau(k+i) = \tau(k+1) - \lfloor \frac{\tau(k+1)}{T} \rfloor T \quad (34)$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть от деления, следовательно случай 5 можно полностью убрать, добавив по одной формуле (34) к случаям 2 и 3, и если значение $\tau(k+1) < T$, то целая часть от деления будет равна нулю. Если же $\tau(k+1) \geq T$, то подобная добавка позволит избежать лишних шагов и для обоих случаев с рис. 17 схема придет в режим захвата быстрее с точки зрения количества шагов, хотя N уже не будет в точности равно количеству циклов сигнала ЭГ. На примере случая а), как более показательного, приведен пример работы модернизированной программы (рис. 18).

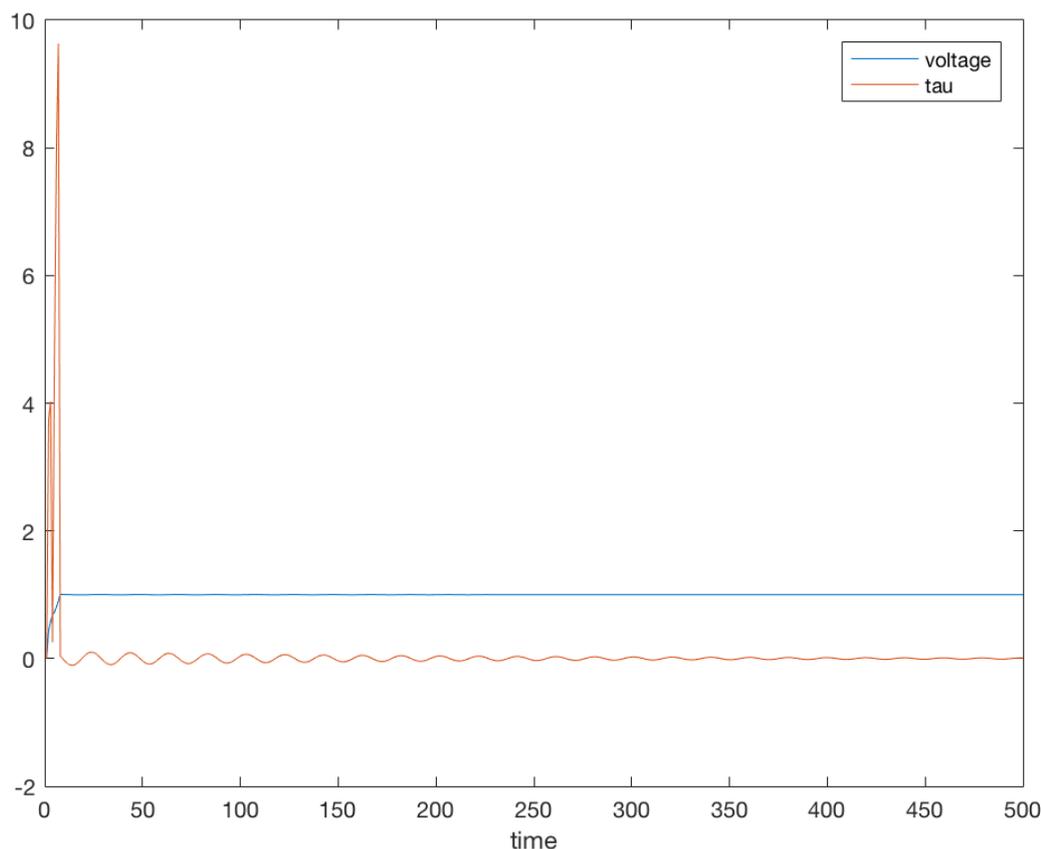


Рис. 18: Исключен случай 5

Видно, что число итераций можно эффективно снизить с 1000 до

450 — тем самым скорость расчета работы системы ФАПЧ, эквивалентной исходной, можно значительно ускорить.

Что касается случая 6 — можно поступить аналогично, однако значения периода сигнала ГУНа каждый раз меняются, и вычислять их для каждого встречающегося случая 2 и 3 было бы нецелесообразно, так как число итераций не уменьшится, а количество вычисляемых уравнений увеличится.

2.5. Альтернативные модели систем ФАПЧ с системой накачки заряда

Схема Марка Ван Паэмеля, описанная выше, является лишь одним из вариантов описания системы ФАПЧ второго порядка с системой накачки заряда. Существуют другие модели, описывающие системы ФАПЧ с накачкой заряда относительно других переменных.

Так, например, в работе [14] автор рассматривает систему ФАПЧ относительно "перенормированных" фаз сигналов ЭГ и ГУНа ($\Phi_i(t)$ и $\Phi(t)$ соответственно), определенных следующим образом: если первым на ЧФД в момент, когда система накачки заряда неактивна, приходит сигнал ЭГ, то ожидается первый передний фронт волны сигнала ГУНа. Когда появляется сигнал ГУНа, задается $\Phi = 0$, а значение Φ_i задается величиной, равной тому, насколько изменилась фаза сигнала ЭГ с момента последнего переднего фронта сигнала ЭГ, так что $0 \leq \Phi_i < 2\pi$, и в точности наоборот, если первым на ЧФД пришел сигнал ГУНа. Затем отслеживается траектория в пространстве (Φ_i, Φ) : если фаза Φ_i достигает 2π до того, как Φ достигает 2π , то активируется система накачки заряда со знаком плюс, тем самым увеличивая напряжение, подающееся на ГУН, а следовательно ускоряя рост реальной фазы сигнала. Затем ожидается, когда фаза Φ тоже станет равной 2π , после этого происходит обнуление фазы ГУНа, а значение фазы сигнала ЭГ Φ_i определяется как изменение фазы с момента достижения тем значения 2π . При продолжении процесса перерасчета фаз, получается зависимость работы

системы накачки заряда от значений фаз

$$I_p = \begin{cases} 0, & (0 \leq \Phi_i, \Phi < 2\pi) \\ -I, & (0 \leq \Phi_i < 2\pi \leq \Phi) \\ I, & (0 \leq \Phi < 2\pi \leq \Phi_i) \end{cases} \quad (35)$$

Здесь критерий работы системы в режиме захвата — это $\Phi(t) = \Phi_i(t)$. Далее автор вводит несколько безразмерных величин

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\Phi}{2\pi} \\ q &= \frac{(Q - Cv_c^*)}{IT} \\ \tau &= \frac{t}{T} \end{aligned} \quad (36)$$

где $Q = \int_0^t I_p(\tau) d\tau$ — весь ток, переданный на конденсатор, а v_c^* — значение напряжения, при котором частота сигнала ГУНа $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Переменными состояниями здесь являются q и ϕ , которые, с учетом (35), для фильтра первого порядка рассчитываются как

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \tau - \tau_0 + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(I_p) k (\tau - \tau_0)^2 + k (q_0 + \operatorname{sgn}(I_p) \omega_z^{-1}) (\tau - \tau_0) \\ q &= q_0 + \operatorname{sgn}(I_p) (\tau - \tau_0) \end{aligned} \quad (37)$$

где $\omega_z = \frac{T}{R_2 C}$ — нуль ФНЧ (числитель передаточной функции ФНЧ равняется нулю в этой точке), а $k = \frac{K_V IT}{2\pi C}$ — петлевое усиление, а ϕ_0, q_0 — значения ϕ, q в момент времени τ_0 .

После некоторых преобразований автор переходит к системе дифференциальных уравнений относительно переменных q и $y = \phi_0 - (1 + kq_0)\phi_i$, отмечает, что критерий работы системы в режиме захвата является состоянием равновесия, которому соответствуют равенства $q = 0, y = 0$, а затем рассматривает Якобиан системы в с целью нахождения

его собственных чисел, которые равны

$$\begin{aligned}\lambda^- &= 1 - \frac{k}{2}(1 + \omega_z^{-1}) \pm \sqrt{\frac{k^2}{4}(1 + \omega_z^{-1})^2 - k} \\ \lambda^+ &= 1 - \frac{k}{2} \frac{1 + \omega_z^{-1}}{1 + k\omega_z^{-1}} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} \left(\frac{1 + \omega_z^{-1}}{1 + k\omega_z^{-1}} \right)^2 - \frac{k}{1 + k\omega_z^{-1}}}\end{aligned}\quad (38)$$

Состояние равновесия является устойчивым, если собственные числа по модулю меньше 1, таким образом автор получает аналогичные условия для устойчивости, что и (26) с точностью до нормировки ϕ на 2π , то есть

$$k < \frac{4\omega_z}{2 + \omega_z} \quad (39)$$

Описанные Марком Ван Паэмелем [12] и Вангом [14] схемы ФАПЧ с фильтром первого порядка и системой накачки заряда являются идеальными, и реализации подобных схем с помощью систем разностных или дифференциальных уравнений являются лишь некоторыми приближениями схем из реального мира.

Так ГУН, описанный одним постоянным параметром — добавкой, является идеальным подобием схемы, описанной в [15], где присутствует симуляция шумов, а также динамически меняющаяся добавка в зависимости от напряжения на конденсаторе ФНЧ. Система уравнений, описывающая наиболее реальный ГУН, выглядит следующим образом

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \kappa_0(\rho_0 - \rho + K_\rho v_c + \eta_\rho) \\ \frac{d\Phi_{VCO}}{dt} = \omega_0[1 + \alpha v_c K_{VCO}(v_c) + (1 - \alpha)K_{ap}(\rho - \rho_{ap}) + \eta_\phi] \\ K_{VCO}(v_c) = K_{VCO}^a + K_{VCO}^b v_c + K_{VCO}^c v_c^2 \end{cases} \quad (40)$$

где $\omega_0 = 2\pi f_0$ свободная угловая частота ГУНа, $\rho_0 \in R^+$ амплитуда стационарного колебательного сигнала (для $v_c = 0$), $\rho_{ap} \in R^+$ постоянный сдвиг, K_ρ определяет зависимость между амплитудой ρ стационарного сигнала и v_c , κ_0 является "скоростью изменения" амплитуды ρ , K_{VCO}^a , K_{VCO}^b , $K_{VCO}^c \in R$ связывают через полином третьего порядка рабочую угловую частоту ГУНа с управляющим напряжением v_c , $K_{VCO}^a \in R^+$

определяет, какое значение амплитуды переводится в частоту.

η_ρ и η_ϕ представляют некоррелирующие стохастические процессы, моделирующие шум в ГУНе. η_ρ — амплитудный шум, поскольку он действует на радиальную составляющую сигнала, генерируемого ГУНом. η_ϕ , соответственно, является фазовым шумом, поскольку действует на угловую составляющую сигнала. Эти параметры могут быть как случайно сгенерированы, так и получены эмпирическим путем при симулировании схемы ГУНа на транзисторном уровне.

Коэффициент $\alpha \in [0, 1]$ позволяет смещать зависимость между v_c и рабочей частотой ГУНа от строго интегральной ($\alpha = 0$), к строго алгебраической ($\alpha = 1$, что в точности будет являться уравнением (7)). Зависимость от параметра α является предметом современных исследований на уровне реализаций микросхем, что частично описывается в [13].

Система накачки заряда также не может быть идеальной. Как уже упоминалось, в реальных схемах часто ”поглощающий” и ”прямой” токи — I_1 и I_2 различаются. Подобный дисбаланс в выходном сигнале становится все более важной неидеальностью в системах ФАПЧ, потому что он приводит к генерации сигнала ГУНа даже когда ФАПЧ работает в режиме захвата и, как следствие, последующих ложных сигналов системы накачки заряда. Это означает, что если в период, когда сигнала не должно быть, разность токов все равно даст некоторый ток. Как следствие возникает непродолжительный пик $-I_2$ с целью компенсации этой ненулевой разности. В оставшееся же время, которое является задержкой работы блока ”исключающее ИЛИ”, будет действовать ток $\Delta I = I_1 - I_2$ (для случая, когда $I_1 > I_2$). На рис. 19 представлен именно такой случай, где задержка блока ”исключающее ИЛИ” в ЧФД равна Δt_{on} .

Также очевидно, что даже фильтр, представленный на рис. 12 б), в реальном мире не является идеальным, не говоря о более сложных фильтрах. Это следует из того, что резистор нагревается, создавая тем самым тепловой шум. Конденсатор обладает индуктивностью, а его обкладки не могут обладать бесконечным сопротивлением, что также вно-

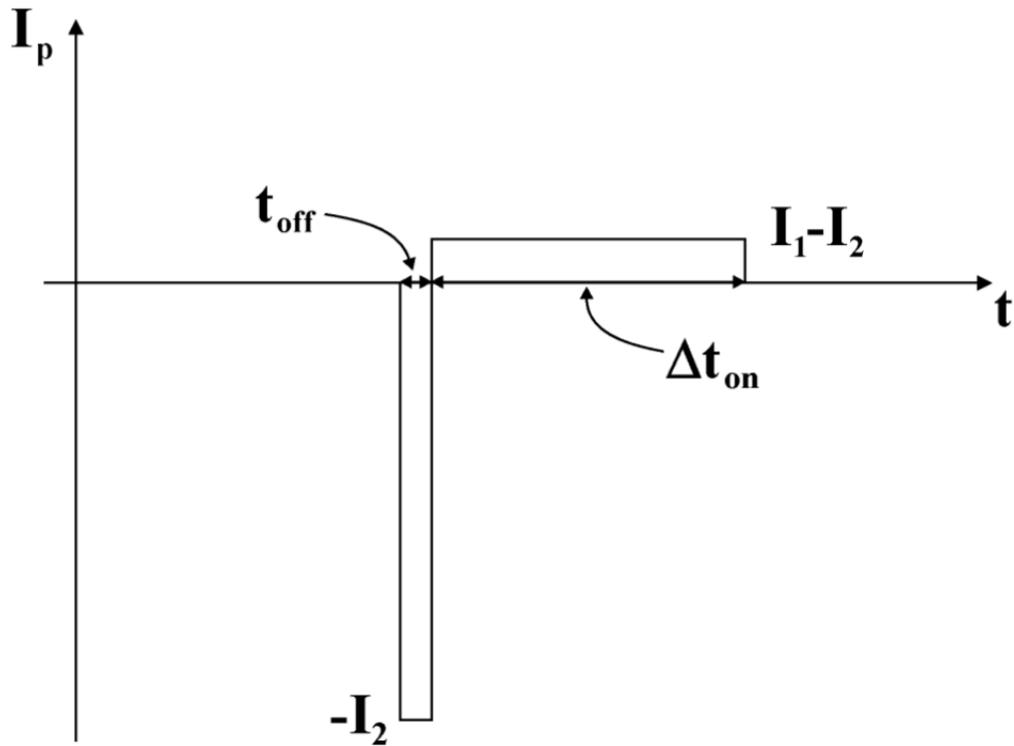


Рис. 19: Дисбаланс переключателей реальной системы накачки заряда

сит изменения (хоть и небольшие) в выходной сигнал ФНЧ. Поэтому фильтр, особенно при долгой работе, может неидеально фильтровать все высокочастотные сигналы.

Из всего вышесказанного следует, что даже самые современные аналитические поведенческие модели не идеально описывают реальные ФАПЧ, хотя лучшие из них уже представляют из себя сложные системы ДУ высоких порядков. Безусловно, численные решения таких систем довольно точно описывают реальные системы ФАПЧ, однако инженерные симуляции оставляют за собой решающее слово в анализе реальных схем.

Заключение

В рамках выполнения работы были получены следующие результаты:

- Проведен подробный разбор современных систем ФАПЧ с системой накачки заряда.
- В виртуальной среде Simulink реализованы несколько схем ФАПЧ и приведены примеры работы.
- Реализована, исследована и модифицирована система разностных уравнений, описывающих систему ФАПЧ из работы Марка Ван Паэмеля.
- Рассмотрены некоторые альтернативные модели систем ФАПЧ с системой накачки заряда.

Список литературы

- [1] Keng L. Wong Ian A. Young, Jeffrey K. Greason. A pll clock generator with 5 to 110 mhz of lock range for microprocessors. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 27, 1992.
- [2] Han van Nieuwenburg Aad Sempel. A fully-integrated hifi pll fm-demodulator. *Digest of Technical Papers*, 37, 1990.
- [3] Dean Banerjee. *PLL Perfomance, Simulation and design*. 4 edition, 2006.
- [4] Seledzhi S. Kuznetsov N., Leonov G. Phase locked loops design and analysis. pages 114–118, 2008.
- [5] Electronictutorials, 2014.
- [6] Stephan R. Kurtz. Mixers as phase detectors. *The Communications Edge, Tech-note*, 5, 1978.
- [7] Daniel Abramovitch. Phaselocked loops: A control centric tutorial. *Proceedings of the American Control Conference*, 2002.
- [8] F.M. Gardner. Charge pump phase-lock loops. *IEEE Transactions on Communications*, COM-28:1849–1858, 1980.
- [9] F.M. Gardner. *Phaselock Techniques*. Wiley, 3 edition, 2005.
- [10] Matlab documentation, 2017.
- [11] William F. Egan. *Frequency Synthesis by Phase Lock*. 2 edition, 2000.
- [12] Mark Van Paemel. Analysis of a charge-pump pll: A new model. *IEEE Transactions on Communications*, 42(7):2490–2498, 1994.
- [13] Marco Storace Angelo Brambilla, Daniele Linaro. Nonlinear behavioural model of charge pump plls. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 2012.

- [14] Zuoding Wang. An analysis of charge-pump phase-locked loops. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Regular Papers*, 52, 2005.
- [15] Peter Thurner Roberto Nonis Pierpaolo Palestri Luca Selmi Luca Bizjak, Nicola Da Dalt. Comprehensive behavioral modeling of conventional and dual-tuning plls. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Regular Papers*, 55, 2008.