

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИГР И СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

**Жумабаева Акмарал Елубаевна**

**Выпускная квалификационная работа бакалавра**

**«Эффективность системы обслуживания с  
отказами»**

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент  
Домановская Е. Ф.

Санкт-Петербург

2017

# Оглавление

Введение.....	3
Постановка задачи.....	5
Глава 1. Аналитическая модель рассматриваемой системы.....	6
1.1. Описание работы одного режима функционирования системы обслуживания с отказами.....	7
1.2. Описание работы системы обслуживания с отказами с $s$ режимами функционирования.....	12
1.2.1. Применение вложенной цепи Маркова для описания динамики функционирования исследуемой системы обслуживания.....	13
1.2.2. Эффективность исследуемой системы обслуживания.....	14
1.3. Пример работы системы обслуживания с тремя режимами функционирования.....	16
1.3.1. Аналитические формулы расчета.....	16
1.3.2. Численная иллюстрация.....	19
Глава 2. Оптимизация системы обслуживания.....	22
2.1. Оптимальная прибыль системы обслуживания.....	23
2.2. Расчет оптимальной прибыли для системы обслуживания с тремя режимами функционирования.....	25
Заключение.....	28
Литература.....	29

## Введение

В повседневной жизни нам часто приходится сталкиваться с системами, удовлетворяющими массовое требование на различные виды обслуживания. Такими системами могут быть магазины, больницы, аэропорты, железнодорожные сортировочные станции, билетные кассы, телефонные станции и т.п. Все они обслуживают клиентов по мере поступления заявок, которые в общем случае поступают в случайные моменты времени. Для обслуживания требований создаются обслуживающие единицы, в роли которых могут выступать люди или технические устройства. Такие единицы называют каналами связи или каналами обслуживания, т.к. первые работы по теории массового обслуживания возникли в начале XX века и были тесно связаны с развитием телефонных сетей. Основной особенностью систем массового обслуживания является вероятностный характер работы, это приводит к тому, что в одни периоды времени может накапливаться большое количество требований, так что образовывается очередь на обслуживание (системы с ожиданием), или часть заявок покидает систему необслуженной (системы с потерями). В другие периоды времени требований может быть слишком мало, и системы могут простаивать.

Целью исследования математических моделей систем массового обслуживания является разумный выбор структуры системы и процесса обслуживания, установление зависимостей результирующих характеристик или показателей эффективности работы системы обслуживания от заданных условий.

Задачи теории массового обслуживания часто включают экономический аспект для определения такой организации системы, при которой будет обеспечена максимальная производительность и эффективность работы системы обслуживания.

В данной работе рассмотрена одноканальная система массового обслуживания с потерями, т.е. заявки, поступившие в момент занятости канала, покидают систему необслуженными. Дополнительным условием рассматриваемой системы является возникновение частичных отказов обслуживаемого устройства до тех пор, пока устройство окончательно не перестанет обслуживать поступающие заявки. С помощью применения математических методов теории марковских цепей разработан метод оценки эффективности системы обслуживания с отказами и, кроме того, предложена оптимизация прибыли изучаемой системы путем изменения параметров потока обслуживания.

Подобные модели систем массового обслуживания имеют широкое практическое применение, они могут встречаться в различных сферах деятельности человека. Примерами таких моделей могут служить многоуровневые системы наведения в военно-боевых машинах (при выходе из строя уровня электроники машина становится частично недееспособна, постепенно с электро-механического уровня работа переходит на механический уровень, пока полностью не выйдет из строя), космические приборы (спутник слежения за космическими объектами, который должен обнаружить и идентифицировать космические фрагменты для предотвращения столкновений, грозящих выходом из строя дорогостоящего оборудования) или, например, некоторая однотипная ручная работа человека с болезнью Нотта (с развитием болезни способность разгибания пальца становится невозможной). Поэтому изучение таких систем остается актуальной задачей на сегодняшний день.

## Постановка задачи

Будем рассматривать один канал (линию связи), на который поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью  $a_0$ . В режиме  $E_0$  полной исправности процедура обслуживания выполняется по закону распределения времени обслуживания  $G_0(t) = 1 - e^{-\mu_0 t}$ , где  $\mu_0$  — интенсивность потока обслуживания (величина, обратная среднему времени обслуживания). При частичном отказе обслуживающего устройства с интенсивностью  $\lambda_0$  происходит смена режима  $E_0$  на режим  $E_1$ . В режиме  $E_1$  часть заявок потока становится недоступной, то есть система обслуживает подпоток заявок, который считаем пуассоновским с параметром  $a_1 < a_0$ . Время обслуживания заявки в режиме  $E_1$  распределено по закону  $G_1(t) = 1 - e^{-\mu_1 t}$ . Таким образом, каждый отказ разрезает входящий поток. После  $k$ -го частичного отказа система не восстанавливается, а переходит в другой режим работы. Параметры  $a_k, \lambda_k, \mu_k > 0, t \geq 0$ . Свяжем режим функционирования системы с номером отказа, считая число режимов  $s$  конечным. В режиме  $E_s$  после наступления последнего отказа обслуживание заявок невозможно.

Заявки, поступившие в период занятости системы, и те, обслуживание которых было прервано новым отказом в системе, т. е. сменой режима  $E_k \rightarrow E_{k+1}, k = \overline{0, s-1}$ , теряются.

На промежутке между двумя соседними отказами  $k$ -м и  $(k+1)$ -м функционирование системы описывается альтернирующим процессом восстановления с экспоненциальными распределениями циклов свободного и занятости с параметрами  $a_k$  и  $\mu_k$  соответственно. После каждого отказа система начинает функционирование в новом режиме свободным циклом.

Необходимо исследовать математическую модель функционирования системы массового обслуживания.

# Глава 1. Аналитическая модель рассматриваемой системы

Опишем работу системы массового обслуживания с отказами с одним обслуживающим каналом. В общем случае для  $s$  режимов функционирования системы граф состояний с интенсивностями переходов принимает следующий вид:

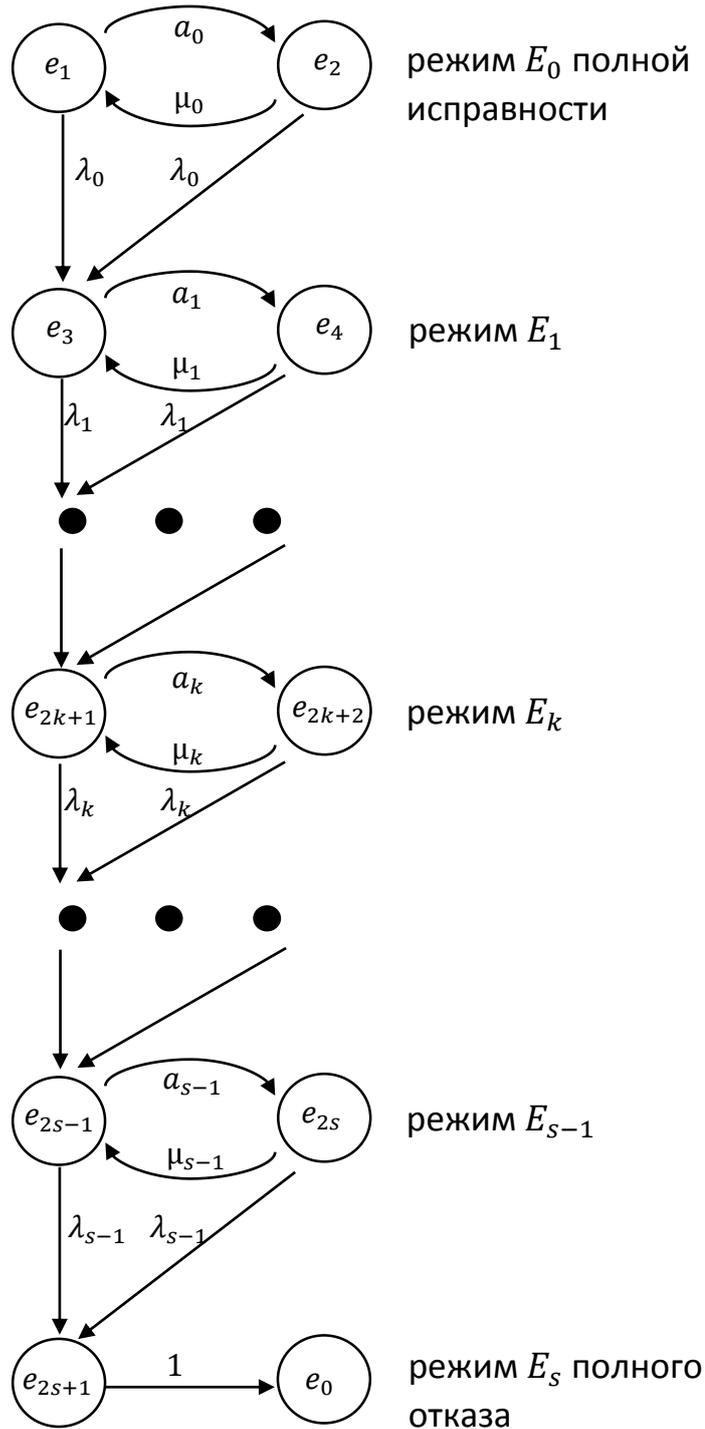


Рис. 1

Нечетные индексы состояний соответствуют свободным циклам работы системы, четные – циклам занятости,  $e_0$  – состояние отказа системы.

Вычислим вероятности  $p_{ij}$  переходов из состояния  $e_i$  в состояние  $e_j$ . Составим переходную матрицу  $P = \{p_{ij}\}$  и фундаментальную матрицу  $N = \{n_{ij}\}$  [5]. Найдем показатели эффективности исследуемой модели системы обслуживания.

### 1.1. Описание работы одного режима функционирования системы обслуживания с отказами

Рассмотрим работу одного отдельно взятого режима  $E_k$ , считая его окончание отказом системы.

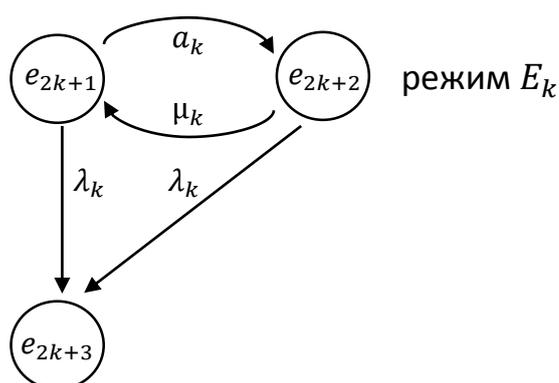


Рис. 2

Для удобства обозначим состояния следующим образом:

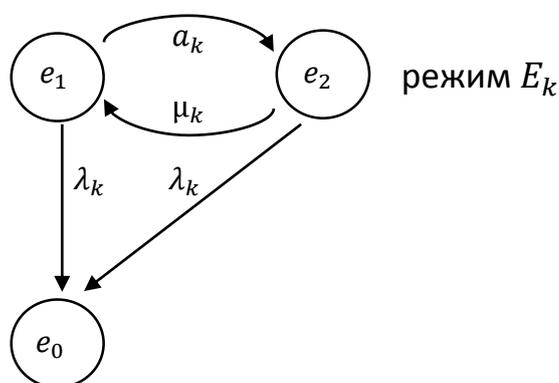


Рис. 3

Для построения переходной и фундаментальной матриц необходимо вычислить переходные вероятности  $p_{12}, p_{10}, p_{21}, p_{20}$ , где  $p_{ij}$  - вероятность перехода из состояния  $e_i$  в состояние  $e_j$ .

Обозначим за  $\xi$  случайное время перехода из состояния  $e_1$  в состояние  $e_2$ , а за  $\varphi$  — время перехода из состояния  $e_1$  в состояние  $e_0$ ,  $\xi$  и  $\varphi$  независимы.

Для  $\xi$  функция распределения свободного цикла в режиме  $E_k$   $F_k(t) = 1 - e^{-a_k t}$ , плотность распределения длительностей интервалов времени между поступлением требований  $f_k(t) = a_k e^{-a_k t}$ . Для  $\varphi$  функция распределения свободного цикла в режиме  $E_k$   $G_k(t) = 1 - e^{-\lambda_k t}$ , плотность распределения длительностей интервалов времени между поступлением требований  $g_k(t) = \lambda_k e^{-\lambda_k t}$ .

$$p_{12} = P(\xi < \varphi) = P\{\varphi \in (t, t + dt); \xi < t; t \in [0, +\infty)\} = \int_0^{+\infty} F(t)g(t)dt,$$

$$p_{12} = \int_0^{\infty} (1 - e^{-a_k t})(\lambda_k e^{-\lambda_k t}) dt = \lambda_k \int_0^{\infty} e^{-\lambda_k t} dt - \lambda_k \int_0^{\infty} e^{(-\lambda_k - a_k)t} dt = \frac{\lambda_k}{\lambda_k} - \frac{\lambda_k}{\lambda_k + a_k} = \frac{a_k}{\lambda_k + a_k}.$$

Так как  $p_{10} = 1 - p_{12}$ , то  $p_{10} = 1 - \frac{a_k}{\lambda_k + a_k} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + a_k}$ .

Аналогично найдем остальные вероятности. Получим

$$p_{21} = \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}, \quad p_{20} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}.$$

Поскольку переходные вероятности  $p_{ij}$  зависят только от номеров состояний  $i$  и  $j$ , т. е. выполняется марковское свойство, процесс содержит вложенную конечную цепь Маркова.

Построим переходную матрицу  $P = \{p_{ij}\}$ , где  $p_{ij}$  — вероятности перехода из состояния  $e_i$  в состояние  $e_j$ .

$$P = \begin{matrix} & e_0 & e_1 & e_2 \\ e_0 & 1 & 0 & 0 \\ e_1 & p_{10} & 0 & p_{12} \\ e_2 & p_{20} & p_{21} & 0 \end{matrix}$$

Подставим вероятности  $p_{12}$ ,  $p_{10}$ ,  $p_{21}$ ,  $p_{20}$ .

$$P = \begin{matrix} & e_0 & e_1 & e_2 \\ e_0 & 1 & 0 & 0 \\ e_1 & \frac{\lambda_k}{\lambda_k + a_k} & 0 & \frac{a_k}{\lambda_k + a_k} \\ e_2 & \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k} & \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} & 0 \end{matrix}$$

Матрица  $P$  имеет канонический вид [5]:

$$P = \begin{pmatrix} I & O \\ R & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{\lambda + a} & 0 & \frac{a}{\lambda + a} \\ \frac{\lambda}{\lambda + \mu} & \frac{\mu}{\lambda + \mu} & 0 \end{pmatrix}_k$$

Элементы фундаментальной матрицы  $N = (I - Q)^{-1} = \{n_{ij}\}_{2 \times 2}$  есть решение системы уравнений

$$\sum_{m=1}^2 c_{im} n_{mj} = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad i, j = \overline{1, 2},$$

где  $C = \{c_{ij}\}_{2 \times 2}$  и  $C = I - Q$ , то есть  $CN = I$ . Решая систему уравнений

$$\begin{cases} n_{11} - \frac{a}{a+\lambda} n_{21} = 1 \\ -\frac{\mu}{\lambda+\mu} n_{11} + n_{21} = 0 \\ n_{12} - \frac{a}{a+\lambda} n_{22} = 0 \\ -\frac{\mu}{\lambda+\mu} n_{12} + n_{22} = 1, \end{cases}$$

получим элементы фундаментальной матрицы

$$\begin{cases} n_{11} = \frac{(a+\lambda)(\lambda+\mu)}{a\lambda+\mu\lambda+\lambda^2} \\ n_{12} = \frac{a(\lambda+\mu)}{a\lambda+\mu\lambda+\lambda^2} \\ n_{21} = \frac{\mu(a+\lambda)}{a\lambda+\mu\lambda+\lambda^2} \\ n_{22} = \frac{(a+\lambda)(\lambda+\mu)}{a\lambda+\mu\lambda+\lambda^2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N(a, \mu, \lambda)_k &= (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(a+\lambda)(\lambda+\mu)}{a\lambda+\mu\lambda+\lambda^2} & \frac{a(\lambda+\mu)}{a\lambda+\mu\lambda+\lambda^2} \\ \frac{\mu(a+\lambda)}{a\lambda+\mu\lambda+\lambda^2} & \frac{(a+\lambda)(\lambda+\mu)}{a\lambda+\mu\lambda+\lambda^2} \end{pmatrix}_k = \\ &= \frac{1}{(a\lambda+\mu\lambda+\lambda^2)_k} \begin{pmatrix} (a+\lambda)(\lambda+\mu) & a(\lambda+\mu) \\ \mu(a+\lambda) & (a+\lambda)(\lambda+\mu) \end{pmatrix}_k. \end{aligned}$$

Элементы первой строки матрицы  $N = (n_{ij})$  представляют количества посещений, считая начальное, состояний  $e_1$  и  $e_2$  соответственно процессом, начавшимся в состоянии  $e_1$ . Значит, сумма элементов первой строки матрицы  $N$  есть общее среднее число циклов до поглощения или, другими словами, до смены режима. В  $k$ -ом режиме процесс находится в свободном состоянии и состоянии обслуживания  $n_k = (n_{11} + n_{12})_k$  раз. Подставляя значения  $n_{11}$ ,  $n_{12}$ , получим

$$n_k = \left( \frac{(a + \lambda)(\lambda + \mu)}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2} + \frac{a(\lambda + \mu)}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2} \right)_k = \left( 1 + \frac{a(\lambda + 2\mu)}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2} \right)_k. \quad (1)$$

Числу обслуженных заявок в режиме  $E_k$  соответствует количество посещений состояния  $e_1$ , кроме первого посещения.

$$\zeta_k = n_{11} - 1 = \left( \frac{a\mu}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2} \right)_k \quad (2)$$

Общее среднее число требований, доступных к обслуживанию в режиме  $E_k$ , есть произведение интенсивности потока входящих заявок  $a_k$  на длительность режима  $\frac{1}{\lambda_k}$ .

$$\eta_k = \frac{a_k}{\lambda_k} = \left( \frac{a}{\lambda} \right)_k \quad (3)$$

Тогда число потерянных заявок в режиме  $E_k$  можно представить в виде разности общего числа поступивших заявок и обслуженных заявок.

$$\theta_k = \eta_k - \zeta_k = \left( \frac{a}{\lambda} \right)_k - \left( \frac{a\mu}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2} \right)_k = \left( \frac{a(a + \lambda)}{\lambda(a + \mu + \lambda)} \right)_k \quad (4)$$

Одной из важных характеристик рассматриваемой системы является вероятность потери заявки при смене режима. В альтернирующем процессе восстановления вероятность того, что процесс находится в состоянии  $e_1$  в момент времени  $t$  при условии, что начинается в состоянии  $e_1$  при  $t = 0$  есть коэффициент готовности  $K(t)$  [2].

$$K(t) = \frac{\mu_k}{a_k + \mu_k} + \frac{a_k}{a_k + \mu_k} e^{-(a_k + \mu_k)t}.$$

Тогда вероятность того, что процесс окажется в состоянии  $e_2$  в момент времени  $t$  при условии, что начался в состоянии  $e_1$  при  $t = 0$

$$\pi_t = 1 - \left( \frac{\mu_k}{a_k + \mu_k} + \frac{a_k}{a_k + \mu_k} e^{-(a_k + \mu_k)t} \right) = \frac{a_k}{a_k + \mu_k} (1 - e^{-(a_k + \mu_k)t}).$$

В нашем случае  $\pi_t$  это вероятность того, что в момент времени  $t$  смены режима в системе есть заявка. Вероятность потери требования при смене режима есть вероятность того, что на промежутке времени  $(u, u + du)$  наступает конец режима и в момент времени  $u$  обслуживается заявка

$$\begin{aligned} p_k^{\text{потери}} &= \int_0^{\infty} \lambda_k e^{-\lambda_k u} \pi_u du = \int_0^{\infty} \lambda_k e^{-\lambda_k u} \frac{a_k}{a_k + \mu_k} (1 - e^{-(a_k + \mu_k)u}) du \\ &= \frac{a_k}{a_k + \mu_k} \left( 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_k + a_k + \mu_k} \right) = \frac{a_k}{\lambda_k + a_k + \mu_k} = \left( \frac{a}{\lambda + a + \mu} \right)_k. \end{aligned}$$

Тогда число обслуженных заявок можно найти как разность среднего числа заявок, начавших обслуживание, и среднего числа потерь при смене режима

$$\begin{aligned} \zeta_k &= n_{12} - p_k^{\text{потери}} = \left( \frac{a(\lambda + \mu)}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2} - \frac{a}{\lambda + a + \mu} \right)_k = \\ &= \left( \frac{a}{\lambda + a + \mu} \left( 1 + \frac{\mu}{\lambda} - 1 \right) \right)_k = \left( \frac{a\mu}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2} \right)_k. \end{aligned}$$

## 1.2. Описание работы системы обслуживания с отказами с $s$ режимами функционирования

Рассмотрим работу системы обслуживания в общем случае с  $s$  режимами. Граф состояний с интенсивностями переходов изображен на рисунке 1.

Аналогичным образом, как при рассмотрении отдельно взятого режима  $E_k$ , вычислим вероятности  $p_{ij}$  переходов из состояния  $e_i$  в состояние  $e_j$  и составим матрицу переходов  $P$ .

### 1.2.1. Применение вложенной цепи Маркова для описания динамики функционирования исследуемой системы обслуживания

Как отмечалось ранее, переходные вероятности  $p_{ij}$  зависят только от номеров состояний  $i$  и  $j$  и не зависят от предыдущих состояний. Следовательно, выполняется марковское свойство, и процесс содержит вложенную конечную цепь Маркова. Построим переходную и фундаментальную матрицы системы [5].

Матрица  $P$  переходных вероятностей строится по следующему правилу:

$$P = \{p_{ij}\}_{(2s+2) \times (2s+2)}, \begin{cases} p_{00} = 1, p_{2s+1,0} = 1, \\ p_{i,i+1} = \left(\frac{a}{a+\lambda}\right)_k, p_{i,i+2} = \left(\frac{\lambda}{a+\lambda}\right)_k, i = 2k + 1 \\ p_{i,i-1} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)_k, p_{i,i+1} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)_k, i = 2k + 2, \\ p_{ij} = 0, \text{ для всех остальных } i, j \\ k = 0, s-1 - \text{ номер режима} \end{cases} \quad (5)$$

Тогда матрица  $P$  для общего случая принимает вид:

$$P = \begin{matrix} & e_0 & e_1 & e_2 & \dots & e_{2k+1} & e_{2k+2} & e_{2k+3} & \dots & e_{2s} & e_{2s+1} \\ e_0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & p_{12} & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & p_{21} & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ e_{2k+1} & 0 & 0 & 0 & & 0 & p_{(2k+1)(2k+2)} & p_{(2k+1)(2k+3)} & \dots & 0 & 0 \\ e_{2k+2} & 0 & 0 & 0 & & p_{(2k+2)(2k+1)} & 0 & p_{(2k+2)(2k+3)} & \dots & 0 & 0 \\ e_{2k+3} & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ e_{2s} & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & \dots & 0 & p_{(2s)(2s+1)} \\ e_{2s+1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix} \quad (6)$$

С помощью пакета прикладных программ Matlab построим матрицу  $N$ .

$$N_{(2s+1) \times (2s+1)} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \alpha_k & \beta_k & \dots & \alpha_{s-1} & \beta_{s-1} & 1 \\ \gamma_0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \beta_1 & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \gamma_1 & \alpha_1 & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & 1 \\ & & 0 & 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & 1 \\ & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & 1 \\ & & & & & \alpha_k & \beta_k & & \vdots & \vdots & 1 \\ & & & & & \gamma_k & \alpha_k & & \vdots & \vdots & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & & \alpha_{s-1} & \beta_{s-1} & 1 \\ & & & & & \vdots & \vdots & & \gamma_{s-1} & \alpha_{s-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\alpha_k = \frac{(a_k + \lambda_k)(\lambda_k + \mu_k)}{\lambda_k(a_k + \mu_k + \lambda_k)} = \left( \frac{(a + \lambda)(\lambda + \mu)}{\lambda(a + \mu + \lambda)} \right)_k,$$

$$\beta_k = \frac{a_k(\lambda_k + \mu_k)}{\lambda_k(a_k + \mu_k + \lambda_k)} = \left( \frac{a(\lambda + \mu)}{\lambda(a + \mu + \lambda)} \right)_k,$$

$$\gamma_k = \frac{\mu_k(a_k + \lambda_k)}{\lambda_k(a_k + \mu_k + \lambda_k)} = \left( \frac{\mu(a + \lambda)}{\lambda(a + \mu + \lambda)} \right)_k,$$

$$k = \overline{0, s-1}.$$

## 1.2.2. Эффективность исследуемой системы обслуживания

Поскольку процесс функционирования начался в состоянии  $e_1$ , в фундаментальной матрице представляет интерес первая строка. Сумма элементов первой строки матрицы  $N$ , кроме последнего элемента, есть число посещений состояний процесса до полного отказа системы. Тогда среднее число посещений состояний системы до полного отказа:

$$n = \sum_{k=0}^{s-1} n_k = \sum_{k=0}^{s-1} \left( 1 + \frac{a(\lambda + 2\mu)}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2} \right)_k. \quad (8)$$

Число обслуженных заявок в системе соответствует количеству посещений нечетных состояний системы, кроме первых посещений:

$$\zeta = \sum_{k=0}^{s-1} \zeta_k = \sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{a\mu}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2} \right)_k. \quad (9)$$

Среднее число требований, пришедших на обслуживание в систему, есть сумма произведений интенсивности потока входящих заявок  $a_k$  на длительность режима  $\frac{1}{\lambda_k}$ :

$$\eta = \sum_{k=0}^{s-1} \eta_k = \sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{a}{\lambda} \right)_k. \quad (10)$$

Тогда число потерянных заявок в системе можно представить в виде разности общего числа поступивших заявок и обслуженных заявок:

$$\theta = \eta - \zeta = \sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{a}{\lambda} \right)_k - \sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{a\mu}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2} \right)_k = \sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{a(a + \lambda)}{\lambda(a + \mu + \lambda)} \right)_k. \quad (11)$$

Отношение числа обслуженных заявок к общему числу пришедших на обслуживание заявок показывает, насколько эффективно функционирование системы обслуживания:

$$e = \frac{\zeta}{\eta} = \frac{\sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{a\mu}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2} \right)_k}{\sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{a}{\lambda} \right)_k}. \quad (12)$$

### 1.3. Пример работы системы обслуживания с тремя режимами функционирования

#### 1.3.1. Аналитические формулы расчета

Пусть число режимов  $s = 3$ . Граф состояний с интенсивностями переходов изображен на рис. 4.

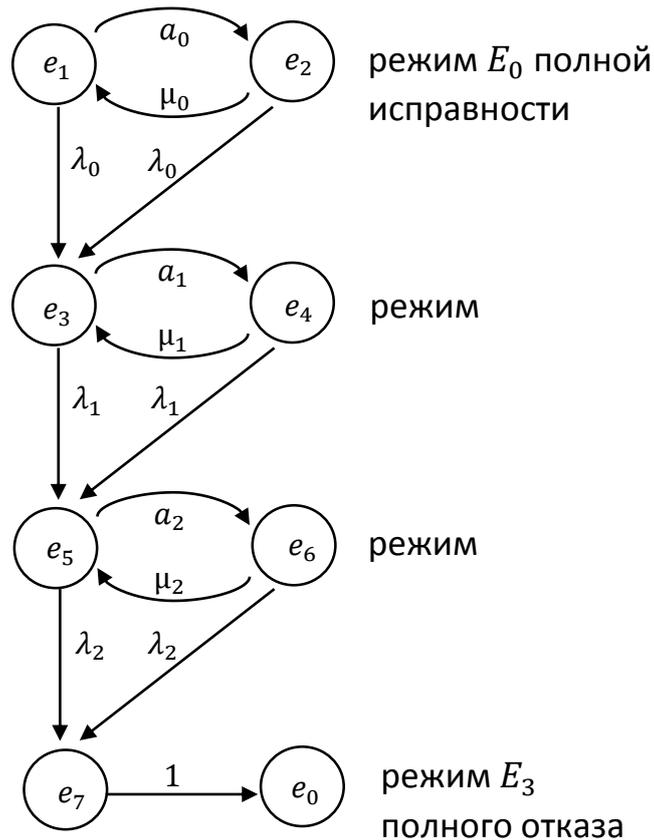


Рис. 4

Вычислим переходные вероятности  $p_{ij}$  по формулам (5):

$$p_{12} = \frac{a_0}{\lambda_0 + a_0}, \quad p_{13} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + a_0}$$

$$p_{21} = \frac{\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0}, \quad p_{23} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \mu_0},$$

$$p_{34} = \frac{a_1}{\lambda_1 + a_1}, \quad p_{35} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + a_1},$$

$$p_{43} = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}, \quad p_{45} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1},$$

$$p_{56} = \frac{a_2}{\lambda_2 + a_2}, \quad p_{57} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + a_2},$$

$$p_{65} = \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}, \quad p_{67} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2}.$$

Из состояния  $e_7$  можно попасть только в состояние  $e_0$ , поэтому

$$p_{70} = 1.$$

Матрица переходов  $P$  имеет вид (6):

$$P = \{p_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{21} & 0 & p_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{34} & p_{35} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{43} & 0 & p_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{56} & p_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{65} & 0 & p_{67} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_0}{\lambda_0 + a_0} & \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + a_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0} & 0 & \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \mu_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_1}{\lambda_1 + a_1} & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + a_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2}{\lambda_2 + a_2} & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + a_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} & 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная матрица  $N = \{n_{ij}\}$  имеет вид (7):

$$N = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \alpha_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_k = \frac{(a_k + \lambda_k)(\lambda_k + \mu_k)}{\lambda_k(a_k + \mu_k + \lambda_k)} = \left( \frac{(a + \lambda)(\lambda + \mu)}{\lambda(a + \mu + \lambda)} \right)_k$$

$$\beta_k = \frac{a_k(\lambda_k + \mu_k)}{\lambda_k(a_k + \mu_k + \lambda_k)} = \left( \frac{a(\lambda + \mu)}{\lambda(a + \mu + \lambda)} \right)_k$$

$$\gamma_k = \frac{\mu_k(a_k + \lambda_k)}{\lambda_k(a_k + \mu_k + \lambda_k)} = \left( \frac{\mu(a + \lambda)}{\lambda(a + \mu + \lambda)} \right)_k$$

$$k = \{0, 1, 2\}.$$

Среднее число посещений состояний системы до полного отказа найдем по формуле (8):

$$n = \sum_{k=0}^2 \left( 1 + \frac{a(\lambda + 2\mu)}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2} \right)_k. \quad (8')$$

Найдем число обслуженных заявок в системе по формуле (9):

$$\zeta = \sum_{k=0}^2 \zeta_k = \sum_{k=0}^2 \left( \frac{a\mu}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2} \right)_k. \quad (9')$$

Среднее число всех требований, пришедших на обслуживание в систему, найдем по формуле (10):

$$\eta = \sum_{k=0}^2 \eta_k = \sum_{k=0}^2 \left( \frac{a}{\lambda} \right)_k. \quad (10')$$

Число потерянных заявок в системе найдем по формуле (11):

$$\theta = \sum_{k=0}^2 \theta_k = \sum_{k=0}^2 \left( \frac{a(a + \lambda)}{\lambda(a + \mu + \lambda)} \right)_k. \quad (11')$$

Показатель эффективности функционирования системы обслуживания вычислим по формуле (12):

$$e = \frac{\zeta}{\eta} = \frac{\sum_{k=0}^2 \left( \frac{a\mu}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2} \right)_k}{\sum_{k=0}^2 \left( \frac{a}{\lambda} \right)_k}. \quad (12')$$

### 1.3.2. Численная иллюстрация

Естественно положить, что интенсивность потока отказов  $\lambda$  будет увеличиваться с ростом  $k$ , т.е. с переходом на новый режим функционирования, так как время между поломками устройства сокращается, а интенсивность потока входящих заявок  $a$  и интенсивность обслуживания  $\mu$  могут уменьшаться по  $k$ . Найдем показатели эффективности для системы со следующими данными:

	Режим 0	Режим 1	Режим 2
$a_k$	50 заявок/ед.вр.	30 заявок/ ед.вр.	20 заявок/ ед.вр.
$\mu_k$	60 заявок/ ед.вр.	45 заявок/ ед.вр.	30 заявок/ ед.вр.
$\lambda_k$	0.05 отказов/ ед.вр.	0.1 отказов/ ед.вр.	0.2 отказов/ ед.вр.

(13)

Определим число обслуженных заявок в режиме  $E_k$  по формуле (2):

$$\zeta_k = \left( \frac{a\mu}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2} \right)_k,$$

$$\zeta_0 = 545.2, \quad \zeta_1 = 179.76, \quad \zeta_2 = 59.76. \quad (14)$$

Число заявок, обслуженных системой, найдем по формуле (9'):

$$\zeta = \sum_{k=0}^2 \zeta_k = 784.72 \approx 785. \quad (15)$$

Число допустимых требований, пришедших на обслуживание в режим  $E_k$ , найдем по формуле (3):

$$\eta_k = \frac{a_k}{\lambda_k} = \left(\frac{a}{\lambda}\right)_k,$$

$$\eta_0 = 1000, \quad \eta_1 = 300, \quad \eta_2 = 100.$$

Всего допустимых к обслуживанию требований в системе вычислим по формуле (10'):

$$\eta = \sum_{k=0}^2 \eta_k = 1400.$$

Тогда число потерянных заявок в режиме  $E_k$  из формулы (4):

$$\theta_k = \left(\frac{a(a + \lambda)}{\lambda(a + \mu + \lambda)}\right)_k,$$

$$\theta_0 = 458.8, \quad \theta_1 = 120.2, \quad \theta_2 = 40.2. \quad (16)$$

Всего в системе потерянных заявок найдем по формуле (11'):

$$\theta = \sum_{k=0}^2 \theta_k = 615. \quad (17)$$

Определим показатель эффективности по формуле (12'):

$$e = \frac{\zeta}{\eta}$$

$$e = 0.56.$$

Эффективность данной системы составляет 56%.

## Глава 2. Оптимизация системы обслуживания

Рассмотрим вопрос о выборе оптимальной с точки зрения экономической эффективности интенсивности обслуживания.

Одним из основных экономических показателей функционирования системы являются издержки, связанные с использованием системы обслуживания. Они включают затраты  $S'_k$ , связанные с эксплуатацией системы, и штрафы  $S''_k$  за необслуженные допустимые заявки из потока  $a_k$  в режиме  $E_k$ .

Пусть  $z_k$  – удельные эксплуатационные затраты,  $v_k$  – стоимость одной потерянной заявки,  $\theta_k$  – число потерянных заявок в режиме  $E_k$ . Тогда

$$S'_k = \frac{z_k}{\lambda_k} = \left(\frac{z}{\lambda}\right)_k \quad (18)$$

$$S''_k = v_k \theta_k = (v\theta)_k \quad (19)$$

$$\theta_k = \eta_k - \zeta_k = \left(\frac{a}{\lambda}\right)_k - \zeta_k \quad (4)$$

Вместе с тем существует показатель дохода  $D_k$ , получаемого от обслуживания всех заявок в режиме  $E_k$ ,

$$D_k = u_k \zeta_k = (u\zeta)_k, \quad (20)$$

где  $u_k$  – доход от обслуживания одной заявки,  $\zeta_k$  – число обслуженных заявок в режиме  $E_k$

$$\zeta_k = \left(\frac{a\mu}{a\lambda + \mu\lambda + \lambda^2}\right)_k. \quad (2)$$

При попытке улучшить одни экономические показатели можно ухудшить другие; так, например, увеличение числа обслуженных заявок и,

соответственно, дохода ведет к увеличению затрат на их обслуживание. В связи с этим справедливо стремление построить такую модель системы обслуживания, чтобы был установлен некий компромисс между показателями.

Введем функции прибыли  $\Pi_k$  и общей прибыли  $\Pi$ :

$$\Pi_k = D_k - S'_k - S''_k, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Pi_k &= u_k \zeta_k - \frac{z_k}{\lambda_k} - v_k \frac{a_k}{\lambda_k} + v_k \zeta_k = (u_k + v_k) \zeta_k - \frac{1}{\lambda_k} (z_k + v_k a_k) = \\ &= \left( (u + v) \zeta - \frac{1}{\lambda} (z + v a) \right)_k. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\Pi = \sum_{k=0}^{s-1} \Pi_k \quad (23)$$

Будем рассматривать общую прибыль  $\Pi$  в качестве целевой функции.

## 2.1. Оптимальная прибыль системы обслуживания

Пусть  $l_k$  максимально возможный запрашиваемый доход за обслуживание одной заявки в режиме  $E_k$ , и пусть назначаемый доход  $u_k$  зависит от интенсивности обслуживаемого потока линейно:

$$u_k = l_k - c_k \mu_k, \quad c_k \leq \left( \frac{l}{\mu} \right)_k, \quad k = \overline{0, s-1}, \quad l_k, c_k - const. \quad (24)$$

Считая  $\mu_k$  управляемыми параметрами системы, найдем их оптимальные значения, максимизирующие прибыль

$$\Pi = \sum_{k=0}^{s-1} \Pi_k,$$

$$\text{где } \Pi_k = \left( (u(\mu) + v)\zeta(\mu) - \frac{1}{\lambda}(z + va) \right)_k, \quad u, z, v - \text{const.} \quad (22')$$

От  $\mu$  зависит только первое слагаемое, поэтому достаточно найти его максимум. Для каждого режима

$$\Delta(\mu) = (u(\mu) + v)\zeta(\mu),$$

$$\begin{aligned} \Delta'(\mu) &= u'\zeta + (u + v)\zeta' = -c \frac{a\mu}{\lambda(a + \lambda + \mu)} + (l + v - c\mu) \frac{a(a + \lambda)}{\lambda(a + \lambda + a + \lambda)^2} = \\ &= \frac{a}{\lambda(a + \lambda + \mu)^2} [-c\mu(a + \lambda + \mu) + (l + v - c\mu)(a + \lambda)]. \end{aligned}$$

Для уравнения  $\Delta' = 0$ , или

$$c\mu^2 + 2c(a + \lambda)\mu - (l + v)(a + \lambda) = 0,$$

существует единственный положительный корень

$$\mu = \frac{-c(a + \lambda) + \sqrt{c^2(a + \lambda)^2 + c(l + v)(a + \lambda)}}{c},$$

который и дает оптимальную интенсивность обслуживания в режиме  $E_k$

$$\mu^* = \left( (a + \lambda) \left( \sqrt{1 + \frac{l + v}{c(a + \lambda)}} - 1 \right) \right)_k. \quad (25)$$

Поскольку в точке  $\mu^*$  вторая производная  $\Delta''_{\mu}$  отрицательна

$$\Delta''_{\mu} = \frac{-2ac}{\lambda(a + \lambda + \mu^*)} < 0,$$

точка  $\mu^*$  является точкой максимума  $\Delta(\mu)$ .

Тогда доход от обслуживания одной заявки, составленный согласно формуле (24),

$$u^* = u(\mu^*) = (l - c\mu^*)_k \quad (26)$$

доставит максимальную прибыль  $\Pi_k$  в режиме  $E_k$ . Вектора  $(\mu_0^*, \dots, \mu_{s-1}^*)$  и  $(u_0^*, \dots, u_{s-1}^*)$  обеспечат общую максимальную прибыль  $\Pi^*$  системы обслуживания, работающей до полного отказа:

$$\Pi^* = \sum_{k=0}^{s-1} \Pi_k^* \quad (23')$$

$$\Pi_k^* = \left( (u(\mu^*) + v)\zeta(\mu^*) - \frac{1}{\lambda}(z + va) \right)_k \quad (22'')$$

## 2.2. Расчет оптимальной прибыли для системы обслуживания с тремя режимами функционирования

а) Определим прибыль  $\Pi$  для системы из примера 1.3.2. с данными (13):

	Режим 0	Режим 1	Режим 2	
$a_k$	50 заявок/ед.вр.	30 заявок/ ед.вр.	20 заявок/ ед.вр.	
$\mu_k$	60 заявок/ ед.вр.	45 заявок/ ед.вр.	30 заявок/ ед.вр.	(13)
$\lambda_k$	0.05 отказов/ ед.вр.	0.1 отказов/ ед.вр.	0.2 отказов/ ед.вр.	

Заданы размер дохода  $u_k$  за обслуживание одной заявки, коэффициент  $c_k$ , удельная эксплуатационная затрата  $z_k$ , штраф за потерянную заявку  $v_k$  в режиме  $E_k$ :

	Режим 0	Режим 1	Режим 2
$u_k$	160	140	120
$c_k$	0.7	0.5	0.4
$z_k$	10	15	20
$v_k$	100	80	65

Найдем по этим данным размер прибыли. Зная число  $\zeta_k$  (14) обслуженных и число  $\theta_k$  (16) потерянных заявок из потока  $a_k$  на каждом режиме и всего обслуженных и потерянных заявок в системе (15), (17):

	Режим 0	Режим 1	Режим 2	В системе
$\zeta_k$	545.2	179.76	59.76	785
$\theta_k$	454.8	120.2	40.2	615

найдем для каждого режима доход  $D_k$  (20) от обслуженных заявок, затраты  $S'_k$  (18) на эксплуатацию системы, затраты  $S''_k$  (19) на необслуженные заявки и прибыль  $\Pi_k$  по формуле (21) :

	Режим 0	Режим 1	Режим 2	$\Sigma$
$D_k = (u\zeta)_k$	87 233	25 166	7 171	
$S'_k = \left(\frac{z}{\lambda}\right)_k$	200	150	100	
$S''_k = (v\theta)_k$	45 479	9 619	2 616	
$\Pi_k = D_k - S'_k - S''_k$	41 554	15 397	4 456	61 407

Общая прибыль  $\Pi = \sum_{k=0}^2 \Pi_k$  составляет 61 407 денежных единиц.

б) Оптимизируем прибыль системы. Зная максимально возможный испрашиваемый доход  $l_k$  за обслуживание одной заявки в режиме  $E_k$  и считая доход  $u_k$  от обслуживания одной заявки линейно зависимым от интенсивности обслуживания  $\mu_k$  (24), найдем оптимальную интенсивность обслуживания  $\mu_k^*$  (25), количество обслуженных заявок  $\zeta_k^* = \zeta_k(\mu_k^*)$  (9), доход  $u_k^* = u_k(\mu_k^*)$  (26) и прибыль  $\Pi_k^* = \Pi_k(\mu_k^*)$  (22'') для каждого режима, а также величину общей прибыли  $\Pi^*$  по формуле (23'):

	Режим 0	Режим 1	Режим 2	$\Sigma$
$l_k$	200	160	130	
$\mu_k^*$	104.7	93.8	81	
$\zeta_k^*$	676.6	227.1	80	
$u_k^*$	126.7	113	97.6	
$\Pi_k^*$	53 186	19 707	6 414	79307

Тогда величина общей прибыли составит 79 307 денежных единиц. Таким образом, выбор оптимальных значений интенсивности обслуживания по режимам  $(\mu_0^*, \mu_1^*, \mu_2^*) = (104.7, 93.8, 81)$  приводит к максимальному размеру общей прибыли.

## **Заключение**

В работе исследована одноканальная система массового обслуживания с частичными отказами.

На основе математической модели марковских цепей рассчитана эффективность системы как доля обслуженных заявок в общем потоке входящих заявок на обслуживание.

Для исследуемой системы предложен алгоритм расчета прибыли и метод оптимизации системы, обеспечивающий максимальную прибыль.

Алгоритмы иллюстрированы численными примерами.

## Литература

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. 6-е изд. М.: ЛКИ, 2012. 400 с.
2. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ. М: Либроком, 2013. 584 с.
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. 11-е изд. М.: Ленанд, 2015. 448 с.
4. Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания. М.: Либроком, 2015. 306 с.
5. Кемени Д. Дж., Снелл Дж. Л. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970. 271 с.
6. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. 4-е изд. М: Либроком, 2010. 240 с.