Санкт-Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика

Исследование операций и принятие решений в задачах оптимизации, управления и экономики

Выпуская квалификационная работа

Бердникова Любовь Николаевна

Виды дюрации и их роль при оценивании инвестиционных проектов

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент Бухвалова В. В.

Рецензент:

Менеджер ПЦП Центра развития технологий ПАО Сбербанк Ковальчук А. В.

Санкт-Петербург

2017

Saint Petersburg State University
Applied Mathematics and Computer Science
Operation Research and Decision Making in Optimisation, Control and Economics Problems

Graduation Project

Lyubov Berdnikova

TYPES OF DURATION AND THEIR ROLE IN INVESTMENT PROJECT VALUATION

Scientific Supervisor:
Associate Professor, PhD Vera Bukhvalova

Reviewer:
Manager of the Center of Technology development, Sberbank Anatoly Kovalchuk

Saint Petersburg
2017

Содержание

Введение

Задача инвестирования стоит перед человечеством уже не первую сотню лет. С вопросом «Куда вложить свободные средства?» сталкиваются все, у кого эти средства появляются, на совершенно различных уровнях: и в многонациональных корпорациях, и в частном бизнесе, и у физических лиц. Фактически, потенциальный инвестор должен выбрать один (или несколько) из множества предложенных рынком вариантов, и это — одна из самых сложных задач. Подходить к ней можно по-разному, но мы остановимся на введении критериев оценивания инвестиционных проектов. Каждый критерий задает частичный порядок на множестве вариантов, который, в частности, указывает наилучший проект (проекты).

Будем для простоты считать, что инвестиционный проект (ИП) характеризуется исключительно своим денежным потоком, распределенным во времени. В экономической теории широко распространены следующие критерии оценивания денежного потока:

- Чистая приведенная ценность (Net Present Value, NPV), обобщенная чистая приведенная ценность (GNPV);
- внутренняя норма доходности (Internal Rate of Return, IRR), модифицированная внутренняя норма доходности (MIRR);
- срок окупаемости,
- норма рентабельности и индекс рентабельности,
- дюрация Маколея, модифицированная дюрация.

Приведем правила сравнения проектов по некоторым критериям:

- предпочитаем проект с большим NPV (GNPV);
- предпочитаем проект с большей IRR (MIRR). Однако надо помнить, что для инвестора представляют интерес только проекты с IRR выше минимального приемлемого показателя окупаемости инвестиций в финансовый инструмент;
- предпочитаем проект с более коротким сроком окупаемости;

- предпочитаем проект с меньшей дюрацией Маколея.

Каждый из перечисленных выше критериев имеет свои преимущества и недостатки, поэтому рационально использовать сразу несколько из них. Однако даже в предположении, что выбор осуществляется между двумя взаимоисключающими проектами, инвестор сталкивается с проблемой, на решение которой нацелена данная работа: различия в распределении денежного потока во времени могут при сравнении проектов привести к ситуации, когда ранжирование по разным критериям не совпадает. Такие случаи называют конфликтами ранжирования — критерии по-разному упорядочивают множество проектов.

Во многих реальных задачах, возникающих при оценке и сравнении инвестиционных проектов, менеджеры сталкиваются с противоречиями между NPV и IRR проектов. Для объяснения и разрешения такого противоречия в [5] был введен новый критерий оценивания денежного потока — R-дюрация. В работе приведены точные математические связи между NPV, IRR и денежным потоком, дано формальное объяснение участия дюрации в объяснении конфликтов ранжирования. Литература по использованию дюрации в составлении бюджета рассматривала ее как альтернативу сроку окупаемости и была сосредоточена на роли дюрации в определении влияния изменений ставки дисконтирования. В отличие от этого направления, данная работа исследует математические связи между NPV, IRR и дюрацией. Таким образом, последняя упомянутая группа критериев (различные виды дюрации) расширяется, возникают новые способы их использования. В связи с этим, целью, поставленной в данной работе, является исследование этой группы критериев как инструмента оценивания инвестиционных проектов.

Другая серьезная проблема при выборе ИП связана с агентскими издержками. Зачастую собственник и менеджер компании — разные лица, и иногда их цели не совпадают. Приведем пример. Пусть менеджер выбирает из двух альтернативных проектов, поддержка одного из которых принесет ему повышение по службе и премию. Выбор другого не принесет ему ощутимых перемен, однако для фирмы он более выгоден. В этом случае велика вероятность того, что менеджер захочет продвинуть первый проект, манипулируя данными. Мы опишем способ предотвращения таких ситуаций, использующий R-дюрацию.

Значительная часть инвестиционных проектов заключается в формировании пакетов ценных бумаг и управлении ими. С помощью понятия дюрации был сформулирован подход к управлению портфелями облигаций, называемый иммунизацией. Формирование портфеля ценных бумаг также является методом выбора ИП, только из непрерывного множества вариантов. Исследования [2] для портфеля ценных бумаг с фиксированным доходом также подтверждают, что дюрация представляет собой вполне адекватную меру процентного риска такого портфеля. Используя линейное программирование, мы покажем, что иммунизация применима, только если доходность облигации является линейной функцией от дюрации. Влияние ограничений дюрации на задачи максимизации прибыли портфеля практически не подвергалась строгому анализу в литературе. Более того, многие менеджеры уверены в том, что дюрация первого порядка (дюрация Маколея, то есть линейная аппроксимация) более важна, чем второй порядок. В работе доказано, что быть слепо уверенным в этом неправильно.

Обобщая все вышесказанное, мы заключаем, что существует проблема недостаточности классических критериев оценивания инвестиционных проектов для объективного выбора оптимального.

Задача исследования заключается в изучении понятий дюрация, модифицированная дюрация, R-дюрация, описании и анализе некоторых методов оценивания, связанных с ними, а также в построении схемы выбора наиболее привлекательного проекта из альтернативных.

Работа организована следующим образом: в первой главе вводятся понятия дюрации и ее модификаций, их физический и экономический смыслы, описание их как инструментов оценивания инвестиционных проектов. Вторая глава посвящена методам применения этих инструментов. Раздел 2.2 содержит информацию о возможностях разрешения конфликтов ранжирования с помощью R-дюрации, а также описание методов субъективного влияния и противодействие им. В праграфе 2.1 приведены некоторые результаты, связанные с линейной моделью «доходность-дюрация». В главе 3 описаны вычислительные эксперименты и программные решения. Приложение А содержит необходимые определения экономических понятий, встречающихся в тексте, в приложении Б приведен листинг реализованных макросов.

Глава 1

Дюрация

В этой главе приведены определения различных видов дюрации и их свойства, начиная с классической дюрации Маколея. Также рассматриваются примеры, демонстрирующие вычисление этих характеристик.

Мы предполагаем, что цена (курс) облигации $P = P(r)$ определяется дисконтированным потоком платежей, связанных с ней, по формуле:

$$P(r) = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}, \tag{1.1}$$

где r — значение ставки дисконтирования, C_t — денежный поток в момент времени t, T — срок до погашения облигации.

Далее нам понадобится производная цены облигации по r:

$$P'(r) = -\sum_{t=1}^{T} \frac{C_t \cdot t}{(1+r)^{t+1}} = -\frac{1}{1+r} \sum_{t=1}^{T} t \frac{C_t}{(1+r)^t}. \tag{1.2}$$

Если ставка дисконтирования изменится на величину Δr, то стоимость облигации станет равной

$$P(r+\Delta r) = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r+\Delta r)^t}.$$

Если Δr достаточно мало, приращение стоимости облигации $\Delta P = P(r + \Delta\, r) - P(r)$ можно записать приближенно в одном из двух видов:

$$\Delta P \approx P'(r) \cdot \Delta r$$

или

$$\Delta P \approx P'(r) \cdot \Delta r + \frac{1}{2} P''(r) \cdot (\Delta r)^2.$$

Тогда относительное изменение стоимости облигации можно записать в виде соотношений:

$$\frac{\Delta P}{P(r)} \approx \frac{\Delta P'(r)}{P(r)} \cdot \Delta r \qquad \text{или} \qquad \frac{\Delta P}{P(r)} \approx \frac{\Delta P'(r)}{P(r)} \cdot \Delta r + \frac{1}{2} \frac{P''(r)}{P(r)} \cdot (\Delta r)^2.$$

1.1. Дюрация Маколея

Дюрация — понятие, впервые введенное Маколеем [10] для описания чувствительности курса облигации P к изменению ставки дисконтирования r. Концепция дюрации привлекла внимание деловых кругов и стала широко используемым аналитическим, а также практическим инструментом. На рынках финансовых инструментов с фиксированным доходом основным фактором риска является рыночный процентный риск — возможность изменения цены облигации вследствие изменения рыночных процентных ставок. В связи с этим существует потребность в измерении реакции разных облигаций на изменения этих ставок, и в качестве меры реакции была предложена эластичность курсовой стоимости P облигации от $1+r$, взятая с противоположным знаком:

$$D = -\frac{(1+r)\partial P}{P\partial(1+r)} = -\frac{(1+r)\partial P}{P\partial r} \cong -\frac{\Delta P}{P} : \frac{\Delta r}{1+r}, \tag{1.3}$$

где r — значение ставки дисконтирования, D — дюрация, P — курс облигации, определяемый по формуле (1.1).

Обратим внимание на смысл отношения справа от знака приближенного равенства: $\Delta P/P$ — процентное изменение курса облигации, вызванное процентным изменением ставки $\Delta r/(1+r)$. Это означает, что дюрация показывает примерную величину процентного изменения курса облигации, приходящуюся на каждый процент изменения величины $(1+r)$.

Отсюда следует, что чем больше дюрация инструмента, тем значительнее изменения её рыночной стоимости при изменении процентной ставки, а значит, выше и процентный риск. Критерий приемлемости проекта можно сформулировать как $D \to min$.

Существует зависимость дюрации облигации от ее срока до погашения T. На основе рыночных наблюдений в [4] было установлено, что долгосрочные облигации по сравнению с краткосрочными почти всегда имеют более высокую дюрацию, а рассуждения, приведенные в [3], объясняют, почему на реальном рынке такая зависимость действительно встречается чаще.

Выведем теперь формулу для рассчета дюрации ИП. Приведенная ценность денежного потока проекта может быть записана с как

$$PV(r) = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}, \tag{1.4}$$

где C_t — денежный поток в момент времени t. Заметим, что мы уже вычисляли производную этого выражения в (1.2).

Введем обозначение PV_t:

$$PV_t = C_t/(1+r)^t \tag{1.5}$$

и подставим его в формулу (1.3):

$$D = -\frac{(1+r)\partial PV}{PV\partial r} = \sum_{t=1}^{T} \frac{t \cdot C_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{T} \frac{t \cdot PV_t}{PV}. \tag{1.6}$$

Выражение придает еще один смысл понятию дюрация — это средневзвешенный срок жизненного цикла инвестиционного проекта, где в качестве весов выступают текущие стоимости денежных потоков, получаемых в период t, или, другими словами, точка равновесия сроков дисконтированных платежей. Если подставить в (1.6) вместо P выражение (1.4), то, учитывая обозначение (1.5), получим наиболее распространенный вид рассчетной формулы дюрации

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{T} t \cdot PV_t}{\sum_{t=1}^{T} PV_t}. \tag{1.7}$$

Заметим, что, хотя именно эта формула в подавляющем большинстве вводных пособий указывается авторами как определение дюрации, идейно такая трактовка далека от исторической и не несет в себе глубокого физического смысла. Несмотря на это, формула позволяет привести к единому стандарту самые разнообразные по своим характеристикам проекты (по срокам, количеству платежей в периоде, методам расчета причитающегося процента), и именно она используется для вычислений.

Пример 1. *Дюрация бескупонной облигации равна числу периодов, оставшихся до момента ее погашения.*

Решение: в простейшем случае бескупонной облигации в будущем имеется только одна денежная выплата M, равная номиналу облигации, проданной с дисконтом по цене. Тогда

$$D = \frac{M \cdot T}{P(1+r)^T} = T,$$

поскольку

$$P = \frac{M}{(1+r)^T}.$$

$\square$

Пример 2. *Даны два инвестиционных проекта.*

Денежный поток проекта 1: -4000 1000 2000 4000.

Денежный поток проекта 2: -4000 3000 2000 1000.

r=10%.

Выбрать наиболее привлекательный по критерию дюрации.

Решение: С помощью функции Duration, написанной для программы MS Excel (листинг приведен в Приложении B), получены следующие результаты: $D_1 = 2.38$, $D_2 = 1.61$. Оба денежных потока имеют одинаковые начальные инвестиции (4000) и один и тот же жизненный срок (3 периода), но у них различная дюрация: $D_2 < D_1$, следовательно, первый проект более восприимчив к изменению процентной ставки. По критерию приемлемости для дюрации мы должны выбрать второй проект. □

Пример 3 (Анализ чувствительности)**.** *Размер инвестиции — 12800.*

Доходы от инвестиций в первом году: 7350.;

во втором году: 5195.;

в третьем году: 6270.

Размер ставки дисконтирования: 11%.

Рассчитать, как повлияет на значение дюрации увеличение ставки дисконтирования на 50%.

Решение: Новая ставка дисконтирования $r_{new} = 11\% * (1 + 0.5) = 16.5\%$.

Как и в примере 2, дюрация при старой и новой ставках дисконтирования была рассчитана с помощью функции Duration:

$$D_{old} = 1.868,$$

$$D_{new} = 1.834.$$

Определим изменение дюрации:

$$(D_{new} - D_{old})/D_{old} * 100\% = (1.834 - 1.868)/1.868 * 100\% = -1.86\%.$$

Это означает, что увеличение ставки дисконтирования на 50% привело к уменьшению дюрации на 1.86%. □

Заметим, что дюрация является безразмерной величиной: время t — это число периодов, которое прошло с текущего момента до момента появления денежного потока C_t. В выражении (1.6) каждый такой момент времени имеет свой весовой множитель

$PV(C_t)/P$. Поэтому ясно, что дюрация — это некоторое количество периодов, т.е. продолжительность, длительность. Рассчетный или основной период T_0 — это тот период, относительно которого задается ставка r. Время t измеряется числом таких периодов T_0, поэтому оно не имеет размерности.

Для облигации T_0 — это период между ближайшими купонными выплатами. Если рассматривать денежный поток проекта в общем виде, то выплаты могут происходить в различные моменты времени, поэтому период T_0 задают искусственно (месяц, квартал, год), а денежные потоки, поступившие в течение каждого периода C_t, дисконтируют так, как если бы они были получены в конце этого периода.

Необходимо отметить, что дюрация Маколея имеет ограничение использования: она не определяется при знакопеременных денежных потоках.

Несмотря на то, что дюрация Маколея как мера денежного потока известна почти сто лет, она все еще остается актуальной метрикой для оценки инвестиционных проектов, например, облигаций. Ни одна анкета выпуска облигации на специализированных сайтах не размещается без указания дюрации по Маколею (см. рис. 1.1).

Выпуск: ОКЕЙ-001Р-01 (в обращении) **Эмитент:** О`КЕЙ

Общие сведения | Организаторы | Купоны | Размещение | Котировки | Доходность | Календарь

ВЫПУСК	
Наименование:	"О'КЕЙ" ООО, биржевые облигации документарные на предъявителя, серии 001Р-01
Состояние выпуска:	в обращении
Данные госрегистрации:	№4В02-01-36415-R-001P от 27.04.2017, МосБиржа
ISIN код:	RU000A0JXQH8
Номинал:	1000 RUB
Объем эмиссии, шт.:	5 000 000
Объем эмиссии:	5 000 000 000 RUB
Объем в обращении, шт:	5 000 000
Объем в обращении:	5 000 000 000 RUB
Период обращения, дней:	1456
РАЗМЕЩЕНИЕ	
Дата начала размещения:	04.05.2017
Дата окончания размещения:	04.05.2017
Дата рег. отчета об итогах:	04.05.2017
ПОГАШЕНИЕ	
Дата погашения:	29.04.2021
Дней до погашения:	1442
Дюрация по Макколею, дней:	1214
КУПОН - Постоянный	
Периодичность выплат в год:	4
Текущий купон (всего):	0 (16)
НКД:	3,66 RUB
ИТОГИ ТОРГОВ И ДОХОДНОСТЬ (18.05.2017)	
Цена срвзв. чистая, % от номинала:	100,21 (+0,1100)
Доходность к погаш. эффект., % годовых:	9,828 (-0,0360)
Объем торгов за неделю:	118 283 525 RUB

Рис. 1.1. Часть анкеты выпуска облигации RU000A0JXQH8 с сайта [12]

Задача 1. *Рассчитать дюрацию Маколея облигации RU000A0JXQH8 и сравнить результат со значением, указанным на сайте [12].*

Решение: На сайте [12] дюрация по Маколею указывается на момент обращения к сайту, поэтому для того, чтобы узнать ее величину в момент времени 0 (то есть в дату выпуска облигации), необходимо к указанному значению прибавить количество дней, прошедшее с даты выпуска облигации. Расчетное значение дюрации Маколея получено с помощью функции Duration. □

ОКЕЙ-001Р-01 (в обращении)

ISIN код: RU000A0JXQH8

http://www.rusbonds.ru/ank_obl.asp?tool=132116

Дано:

t	14.05.2017	03.08.2017	02.11.2017	01.02.2018	03.05.2018	02.08.2018	01.11.2018	31.01.2019	02.05.2019	01.08.2019	31.10.2019	30.01.2020	30.04.2020	30.07.2020	29.10.2020	28.01.2021	29.04.2021
Денежный поток	-1004	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	1024

Дата обращения на сайт	18.05.2017
Дюрация по Маколею, дней	1214
Дата начала размещения:	04.05.2017
Периодичность выплат в год:	4
Дох-сть к погаш. простая, год.:	9,45%
Период, дней	91

Вычисления:

Дюрация, рассчитанная с помощью функции Duration (на дату начала размещения), дней	1228	*=duration(1;$B$13/B12;$C$7:$R$7)*B14*

Дюрация, указанная на сайте (на дату начала размещения), дней	1228	*=B10+B9-B11*

Рис. 1.2. Сравнение расчетных и официальных значений дюрации Маколея для облигации RU000A0JXQH8

1.2. Модифицированная дюрация

При малых изменениях ставок дифференциалы в (1.3) можно заменить:

$$\delta P = \Delta P/P \approx -D\Delta r/(1+r)$$

Если в приведенном выше приближенном равенстве использовать так называемую модифицированную дюрацию, равную

$$MD = -\frac{\partial \ln PV}{dr} = D/(1+r),$$

то оценка чувствительности к изменению процентной ставки упрощается:

$$\delta P \approx -MD \cdot \Delta r$$

При оценке возможного изменения текущей стоимости денежного потока с помощью (модифицированной) дюрации следует учесть приблизительный характер этой оценки. Причём кроме количественной неточности имеется также качественное различие между истинной зависимостью и линеаризированной с помощью дюрации или модифицированной дюрации: одинаковые положительные и отрицательные изменения процентной ставки одинаково по абсолютной величине влияют на изменение цены. В реальности это не так — цена асимметрично изменяется при увеличении и снижении ставок, а именно: снижение ставки приводит к большему росту цены, чем снижение цены при повышении ставки на ту же абсолютную величину.

Замена изменений логарифмов на обычные темпы прироста и сама линеаризация аккумулируют качественную неточность. Ее можно уменьшить, если использовать сами логарифмы (хотя количественная неточность все равно будет иметь место):

$$\Delta \ln PV = -D \Delta \ln(1+r)$$

Из этого соотношения выводится следующая более истинная (но менее удобная) примерная зависимость изменения текущей стоимости:

$$\delta PV \approx (1 + \Delta r/(1+r))^{-D} - 1$$

1.3. R-дюрация

R-дюрация — новая мера распределения денежного потока проекта во времени, введенная авторами в [5]. Численно довольно близкая к дюрации Маколея, R-дюрация как функция напрямую зависит от чистой приведенной ценности (NPV) и внутренней нормы доходности (IRR). Когда мы сравниваем два взаимоисключающих проекта, значения дюрации и R-дюрации будут различаться; эти различия помогут нам объяснить, почему при ранжировании по различным критериям возникает противоречие.

R-дюрация есть фактическое количество периодов, необходимое, чтобы начальные капиталовложения в проект достигли планируемой доходности, эквивалентной внутренней норме доходности проекта. Этот период вообще не обязан быть равным длительности проекта. Представим проект с начальными инвестициями 1000 сегодня, который принесет 1200 в первый год и 1 в десятый год. IRR проекта составляет 20.0194%. Пока проект генерирует денежный поток в течение 10 лет, начальные 1000 инвестиций будут приносить 20.0194% дохода только в один год. Чтобы понять это, заметим, что денежный поток первого года в размере 1200 может быть поделен на экономическую отдачу (200.19) и возврат основного долга (999.81). Непогашенные 0.19 создадут требуемый доход в 20.0194% в конце десятого года. Однако реальная отдача со второго по десятый год в сравнении с 999.81 основной выплаты в первый год зависит от внутренней нормы доходности, которую фирма может получить при реинвестировании этих фондов в конце первого года.

R-дюрация проекта капиталовложений есть функция от трех переменных, каждая из которых может быть оценена классическими средствами: цены капитала k, индекса прибыльности проекта (PV/I_0) и внутренней нормы доходности r. В простейшем случае денежный поток состоит из начальных инвестиций I_0 в текущий момент и единовременного получения дохода через τ лет. Тогда приведенная ценность денежного потока C_τ, вычисленная с использованием требуемой доходности k есть

$$PV = \frac{C_\tau}{(1+k)^\tau}. \tag{1.8}$$

По определению, внутренняя норма доходности r устанавливает приведенную ценность будущего денежного потока равной инвестициям: $C_\tau/(1+r)^\tau = I_0$, и, учитывая (1.8), PV может быть записана в виде:

$$PV = I_0 \left(\frac{1+r}{1+k}\right)^\tau. \tag{1.9}$$

Выразим τ :

$$\tau = \ln\left(\frac{PV}{I_0}\right) \Big/ \ln\left(\frac{1+r}{1+k}\right). \tag{1.10}$$

NPV проекта — это разница между приведенной ценностью и начальными инвестициями, так что (1.10) можно переписать:

$$\tau = \ln\left(\frac{NPV + I_0}{I_0}\right) \Big/ \ln\left(\frac{1+r}{1+k}\right). \tag{1.11}$$

Переменная τ и есть R-дюрация. Если у проекта всего одна выплата, его R-дюрация равна количеству периодов, пока эта выплата не будет получена, как в дюрации Маколея. Но если проект порождает более одной выплаты, R-дюрация будет меньше этого количества периодов и не обязательно равна дюрации Маколея.

Чтобы получить выражение для R-дюрации в более общем случае, предположим, что проект продуцирует доход в течение T лет. Тогда, обозначив за k цену капитала (безрисковую ставку), получим уже упоминавшуюся формулу приведенной ценности:

$$PV = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+k)^t} \tag{1.12}$$

Определим W_T как доход в конце года T, который породит проект, если все промежуточные денежные потоки могут быть вложены под безрисковый процент k:

$$W_T = \sum_{t=1}^{T} C_t (1+k)^{T-t} \tag{1.13}$$

Значение W_T может быть сформировано различными путями, к примеру, если начальный вклад I_0 принесет прибыль, равную k за $(T-\tau)$ лет. Таким образом, W_T может быть записано в виде (1.14).

$$W_T = I_0 (1+r)^{\tau} (1+k)^{T-\tau} \tag{1.14}$$

Далее приравняем (1.13) и (1.14), разделим обе части на $(1+k)^T$ и получим выражение (1.15), эквивалентное (1.9).

$$PV = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+k)^t} = I_0 \left(\frac{1+r}{1+k}\right)^{\tau}. \tag{1.15}$$

Разрешив это равенство относительно τ, получим в точности (1.10). Таким образом, вне зависимости от денежного потока ИП, формула для R-дюрации остается неизменной.

Одним из недостатков R-дюрации является то, что она требует единственность IRR проекта. Действительно, внутренних норм доходности проекта (как решений нелинейного уравнения NPV(IRR)=0) может быть несколько, однако частота этой ситуации намного ниже, чем это предполагается в учебниках. В дополнение, в [9] показано, как определить наиболее подходящую ставку для капиталообразующих целей, если у проекта есть несколько IRR. Именно такую ставку мы будем использовать во всех вычислениях для проектов с несколькими внутренними нормами доходности.

Другое ограничение на использование R-дюрации связано с IRR, которая не определена при знакопеременных денежных потоках, а значит, не определена и R-дюрация. Однако эта проблема решена в [8], где показано, как вычислить R-дюрацию, если денежный поток проекта меняет знак.

Утверждение 1. *R-дюрация стремится к дюрации Маколея при стремлении цены капитала к внутренней норме доходности:*

$$\tau \xrightarrow[k \to r]{} D.$$

Доказательство:

Подставим выражение для приведенной ценности PV из (1.12) в выражение (1.10) и перейдем к пределу:

$$\tau = \lim_{k \to r} \frac{\ln\left[\sum_{t=1}^{T} C_t (1+k)^{-t} / I_0\right]}{\ln[(1+r)/(1+k)]}. \tag{1.16}$$

Обозначим числитель полученной дроби $F(k)$, а знаменатель — $G(k)$. Так как $F(k) \to 0$ и $G(k) \to 0$ при $k \to r$, будем использовать правило Лопиталя.

$$F'(k) = \left\{ I_0 \Bigg/ \left[\sum_{t=1}^{T} C_t (1+k)^{-t}\right]\right\} \left\{\left[\sum_{t=1}^{T} -tC_t (1+k)^{-1-t}\right] \Bigg/ I_0\right\} = \frac{D}{1+k}, \tag{1.17}$$

$$G'(k) = -\frac{1}{1+k}. \tag{1.18}$$

Таким образом,

$$\tau = \lim_{k \to r} \frac{F(k)}{G(k)} = \lim_{k \to r} \frac{F'(k)}{G'(k)} = D. \tag{1.19}$$

□

Покажем теперь, что при всех других ставках дисконтирования зависимость между R-дюрацией и дюрацией Маколея определяется выражением (1.20).

Утверждение 2. *Для дюрации Маколея и R-дюрации верно следующее соотношение:*

$$D = \tau - (1+k) \ln\left(\frac{1+r}{1+k}\right) \frac{d\tau}{dk} \quad \text{\textit{при} } k \neq r. \tag{1.20}$$

Доказательство: Заметим, что дюрацию Маколея можно записать в виде

$$D = -\frac{(1+k)}{PV}\frac{dPV}{dk}. \tag{1.21}$$

Используем выражение приведенной ценности из равенства (1.9), чтобы посчитать производную PV по k:

$$\frac{dPV}{dk} = \left[\ln\left(\frac{1+r}{1+k}\right)\frac{d\tau}{dk} - \frac{\tau}{1+k}\right] PV.$$

Подставляя эту дробь в (1.21), получаем в точности (1.20). □

Равенство (1.20) показывает, что R-дюрация и дюрация Маколея не всегда равны, что неудивительно, так как они измеряют разные аспекты жизненного цикла денежного потока. Как было определено ранее, R-дюрация измеряет, сколько периодов потребуется, чтобы начальные инвестиции в проект принесли совокупную годовую доходность, равную IRR проекта. Дюрация Маколея же — мера длительности проекта, и обычно используется для оценки изменения приведенной ценности в ответ на изменение ставки дисконтирования. Выражение (1.20) показывает, что дюрация Маколея денежного потока проекта при ставке дисконтирования k равна R-дюрации при той же ставке дисконтирования за вычетом срока, отражающего чувствительность R-дюрации к изменению ставки дисконтирования.

Отметим, что выражение $\ln[(1+r)/(1+k)]$ может быть как положительным, так и отрицательным, следовательно, (1.20) подчеркивает, что что R-дюрация будет иногда больше Маколиевой, а иногда меньше. Если $r < k$ (что означает отрицательность NPV проекта), то логарифм отрицателен R-дюрация будет больше Маколиевой. Если $r > k$, то NPV положителен, логарифм тоже, а R-дюрация меньше Маколейевой.

Рис. 1.3 иллюстрирует эти взаимосвязи. Ставка дисконтирования меняется от 5 до 14%, проект требует 1000 на начальном этапе и обещает ежегодный доход в размере 263.80 в течение пяти лет (IRR=10%). На графике видно, что R-дюрация меньше дюрации Маколея, когда ставка дисконтирования меньше 10% и больше, если ставка превышает 10%. График демонстрирует также еще одну взаимосвязь дюрации и R-дюрации: в ответ на увеличение ставки дисконтирования на Δr R-дюрация уменьшается на $\Delta\tau \approx \Delta D/2$. Доказательство этого факта приведено в Утверждении 3.

Из литературы, посвященной ценным бумагам с фиксированной доходностью, известно, что дюрация Маколея уменьшается при увеличении ставки дисконтирования

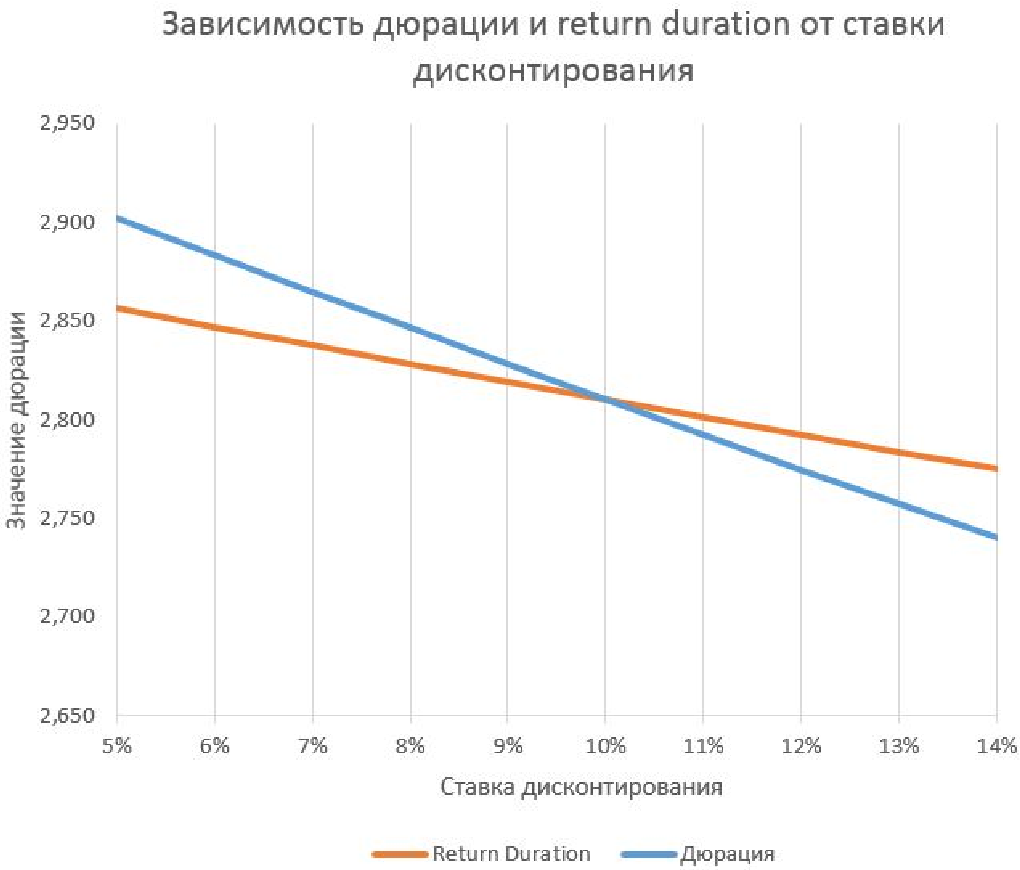

Рис. 1.3. График изображает дюрации проекта при ставке дисконтирования от 5% до 14%. Проект требует начальных инвестиций в размере 1000 и приносит годовой доход 263.80 в течение 5 лет. IRR проекта равна 10%. Несмотря на то, что R-дюрация не определена при учетной ставке 10%, R-дюрация стремится к дюрации Маколей при стремлении учетной ставки к 10%.

($dD/dk < 0$) в связи с выпуклостью функции приведенной ценности PV относительно ставки k. Продемонстрируем, что частное $d\tau/dk < 0$ и равно примерно половине величины dD/dk.

Утверждение 3. *При изменении ставки дисконтирования вблизи IRR абсолютное изменение R-дюрации приблизительно равно половине абсолютного изменения дюрации Маколея.*

Доказательство:

Перепишем выражение (1.20):

$$(1+k)\frac{d\tau}{dk} = \frac{\tau - D}{\ln\left[(1+r)/(1+k)\right]}. \tag{1.22}$$

Чувствительность R-дюрации к изменениям ставки дисконтирования вблизи IRR можно исследовать, рассмотрев предел обеих частей выражения (1.22):

$$\lim_{k\to r}(1+k)\frac{d\tau}{dk} = \lim_{k\to r}\frac{\tau - D}{\ln\left[(1+r)/(1+k)\right]}. \tag{1.23}$$

Из утверждения 1 известно, что $\tau \to D$ при $k \to r$. Поэтому числитель и знаменатель дроби правой части равенства (1.23) стремится к нулю при $k \to r$, и мы можем использовать правило Лопиталя:

$$\lim_{k\to r}(1+k)\frac{d\tau}{dk} = \lim_{k\to r}\frac{\dfrac{d\tau}{dk} - \dfrac{dD}{dk}}{\left(\dfrac{1+k}{1+r}\right)\left[-\dfrac{1+r}{(1+k)^2}\right]}. \tag{1.24}$$

Вследствие того, что $(1+k) \to (1+r)$ при $k \to r$, (1.24) можно записать в виде

$$(1+r)\lim_{k\to r}\frac{d\tau}{dk} = (1+r)\lim_{k\to r}\left(\frac{dD}{dk}\right) - (1+r)\lim_{k\to r}\left(\frac{d\tau}{dk}\right). \tag{1.25}$$

Сокращая и приводя слагаемые, получим

$$2\lim_{k\to r}\frac{d\tau}{dk} = \lim_{k\to r}\left(\frac{dD}{dk}\right) = \frac{dD}{dk}. \tag{1.26}$$

Это равенство означает, что для ставки дисконтирования, близкой к внутренней норме доходности, верно, что

$$\frac{d\tau}{dk} \approx \frac{1}{2}\frac{dD}{dk}. \tag{1.27}$$

□

Глава 2

Оценка и сравнение инвестиционных проектов

Содержание этой главы базируется на работах [5] и [11], а также на [6].

В разделе 2.1 рассматривается задача максимизации прибыли при ограничениях на дюрацию. Показано, что в этом случае технику иммунизации целесообразно использовать, только если доходность облигации есть линейная функция от дюраций. Доказаны некоторые полезные на практике результаты, в частности, опровергнуто распространенное мнение о преимуществе использования дюрации первого порядка перед дюрациями высших порядков. Приведены примеры создания портфеля облигаций на основе реальных данных.

В разделе 2.2 мы исследуем роль дюрации в объяснении конфликтов ранжирования между NPV и IRR. Приведем пример. Рассмотрим проекты A и B такие, что $I_{0A} = I_{0B}$ и $r_A = r_B$, и пусть $IRR_A > IRR_B$ и $D_A > D_B$. Следует ли из этого, что $NPV_A > NPV_B$? Нет. Однако, если неравенство $D_A > D_B$ заменить на $\tau_A > \tau_B$, такого парадокса не возникнет.

В пункте 2.2.2 сформулированы условия, при которых менеджер должен обращать внимание не только на NPV, но и на другие метрики проектов. Мы привыкли, что при возникновении разногласий в ранжировании проектов нужно опираться на NPV как на более надежный критерий; тем не менее, если фирма столкнется с ограничениями капитала из-за неидеальности рынка, она может быть вынуждена профинансировать будущий проект только из внутренних резервов. В таком случае, быстро полученные будущие потоки платежей могут быть использованы для формирования положительного NPV нового проекта, реализация которого с помощью других источников финансирования невозможна. Таким образом, короткие проекты могут создать как прямой экономический эффект (например, NPV), так и косвенный (NPV будущих проектов, которые могут реализоваться лишь потому, что начальный проект быстро себя окупил). Учитывая эти обстоятельства, ранжирование проектов с использованием обобщенной чистой приведенной ценности (GNPV) может отличаться от полученного с помощью NPV, и именно GNPV будет подходящим средством для выбора проекта.

В пункте 2.2.4 описывается явление субъективного влияния менеджеров на оценку и ранжирование проектов. С помощью указанной в этом пункте методики топ-менеджеры смогут защитить фирму от потерь, создаваемых неполным анализом или неэтичным поведением ведущих менеджеров.

2.1. Линейная модель «доходность-дюрация»

Понятие дюрации привело к появлению техники иммунизации [4], то есть комплекса мер защиты от нежелательных эффектов, связанных с будущими колебаниями процентных ставок. Иммунизация достигается путем формирования портфеля облигаций на основе дюрации будущих обещанных платежей.

2.1.1. Максимизация доходности при ограничениях дюрации

Пусть x_i — доля облигации i в портфеле и Y_i — доходность облигации i, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим d_{ij} дюрацию облигации i порядка j, $j = 1, \ldots, m$:

$$d_{ij} = \left(\sum_{t=1}^{T} t^j z_{it} \right)^{1/j},$$

где $z_{it} = PV_{it}/P_i$. Как известно, поиск оптимального иммунизированного портфеля — это задача линейного программирования с m ограничениями дюрации:

Задача P: $$\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i \to \max \tag{2.1}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i d_{ij} = D_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.2}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \tag{2.3}$$

где D_j — заданные значения дюрации порядка j портфеля облигаций.

Задача P представляет собой поиск иммунизированного портфеля с максимальной годовой доходностью. Предположим, что задача P допустима, то есть существует по крайней мере один портфель, удовлетворяющий (2.2), (2.3).

Утверждение 4. *Если короткие продажи запрещены ($x_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$), целевая функция задачи P ограничена тогда и только тогда, когда существует вектор $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ такой, что*

$$\lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j d_{ij} = Y_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Доказательство: Это утверждение является очевидным следствием теоремы двойственности ЛП. □

Более того, если вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$, удовлетворяющий (2.4), существует и задан, то максимальную годовую доходность иммунизированного портфеля легко рассчитать, используя следующий факт.

Утверждение 5. *Пусть* $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ *удовлетворяет (2.4) и* $D_1, \ldots, D_m$ *— дюрации порядков* $1, \ldots, m$ *данного портфеля соответственно. Предположим, что такой портфель существует. Тогда его максимальная средняя годовая доходность равна*

$$\lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_j. \tag{2.5}$$

Доказательство: Рассмотрим следующую задачу

Задача B: $\quad \sum_{i=1}^n x_i Y_i \to \min$

$$\sum_{i=1}^n x_i d_{ij} = D_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Если мы покажем, что оптимальные значения задач B и P совпадают и равны

$$\lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_j \tag{2.6}$$

для любого вектора λ, удовлетворяющего (2.4), то утверждение будет доказано.

Воспользуемся методом «от противного»: пусть оптимальные значения задач B и P не совпадают, но вектор λ, удовлетворяющий (2.4), существует. Обозначим оптимальные значения задач B и P x^* и w соответственно. Тогда $u = x^* - w$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{n} u_i Y_i > 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i d_{ij} = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = 0.$$

Для любого числа $\alpha > 0$ вектор αu является допустимым решениемзадачи P. Увеличение α показывает, что целевая функция задачи P неограничена и, по утверждению 4, равенство (2.4) неверно. Противоречие. Следовательно, оптимальные значения целевых функций B и P совпадают.

Далее запишем двойственные задачи к P и B, обозначив их D и BD:

$$\textbf{Задача D:} \qquad \lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_j \to \min$$
$$\lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j d_{ij} = Y_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$$\textbf{Задача BD:} \qquad \lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_j \to \max$$
$$\lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j d_{ij} = Y_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Если равны оптимальные значения целевых функций прямых задач, то равны и оптимальные значения двойственных. Значит, выражение $\lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j D_j$ является константой на области определения, которая является допустимым множеством решений задач D и BD. □

Утверждение 5 показывает, что при данных

- дюрации денежного потока пассива и
- λ, удовлетворяющему (2.4)

максимальная средняя годовая доходность имунизированного портфеля — линейная функция от вектора дюраций. Однажды получив λ, удовлетворяющий (2.4), нам больше нет необходимости решать оптимизационную задачу для нахождения максимальной доходности. Этот λ позволяет нам «оценить» доходности портфеля, иммунизирующего пассив.

2.1.2. Об исключительной роли дюрации первого порядка

Обратимся к задаче P при $n = 2$. Для простоты будем рассматривать иммунизационный процесс, использующий только два первых порядка дюрации ($m = 2$).

$$\textbf{Задача P:} \quad x_1 Y_1 + x_2 Y_2 \to \max$$
$$x_1 d_{11} + x_2 d_{21} = D_1,$$
$$x_1 d_{12} + x_2 d_{22} = D_2,$$
$$x_1 + x_2 = 1,$$

Попробуем доказать, что первый порядок дюрации более важен, чем второй. Если это действительно так, тогда двойственная переменная первого ограничения в задаче P должна быть больше двойственной переменной второго ограничения.

Двойственная задача к задаче P при $m = 2$:

$$\textbf{Задача D:} \quad \lambda_0 + \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 \to \min$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 d_{11} + \lambda_2 d_{12} = Y_1,$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 d_{21} + \lambda_2 d_{22} = Y_2.$$

Тогда добавление неравенства (2.7) к ограничениям задачи D не должно повлиять на оптимальное значение целевой функции задачи D:

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2, \tag{2.7}$$

Таким образом, вместо задачи D можно рассматривать задачу MD:

$$\textbf{Задача MD:} \quad \lambda_0 + \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 \to \min$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 d_{11} + \lambda_2 d_{12} = Y_1,$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 d_{21} + \lambda_2 d_{22} = Y_2$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 \geqslant 0.$$

Утверждение 6. $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ *тогда и только тогда, когда задача MP, двойственная к MD, имеет то же оптимальное значение целевой функции, что и задача P.*

$$\textbf{\textit{Задача MP:}} \quad \sum_{i=1}^n x_i Y_i \to \max$$

$$\sum_{i=1}^n x_i d_{i1} + V = D_1,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i d_{i2} - V = D_2,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad V \geqslant 0.$$

Замечание 1. Задача MP получена из P ослаблением ограничений (добавлением переменной V). Тем самым множество планов задачи увеличивается, а значение целевой функции не ухудшается.

Замечание 2. В задаче MP ограничения могут быть удовлетворены двумя путями:

- как в задаче P, то есть заданные значения дюраций и дюрации полученного портфеля совпадают;

- дюрация первого порядка портфеля превосходит заданное значение на V, в то время как заданная дюрация второго порядка превосходит дюрацию второго порядка портфеля на V.

Доказательство (Утверждение 6): Из теоремы двойственности ЛП известно, что оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задачи совпадают. Таким образом, оптимальные значения целевых функций задач P и D равны. Если оптимальные значения целевых функций задач MD и D равны, то оптимальное значение целевой функции задачи, двойственной к MD, должно равняться значению задачи P. Следовательно, если $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$, то оптимальные значения задач MP и P совпадают. Утверждение в обратную сторону тривиально. □

Другими словами, мы доказали, что

1. если $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$, то, ослабляя ограничения, соответствующие D_1 и D_2 в задаче P, мы не улучшим оптимальное значение целевой функции;

2. если, ослабляя ограничения, соответствующие D_1 и D_2 в задаче P, мы не улучшим оптимальное значение целевой функции задачи P, то $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$.

Исследуем, можно ли, сохраняя структуру задачи MP, изменить портфель x таким образом, чтобы дюрация первого порядка портфеля возросла. Изменения в портфеле x обозначим через $s = (s_1, \ldots, s_n)$, то есть $\sum_{i=1}^{n} s_1 d_{i1} \geqslant 0$.

Утверждение 7. $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$*, если не существует вектора* $s \neq \mathbb{O}$ *такого, что*

$$\sum_{i=1}^{n} s_i Y_i \geqslant 0, \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i d_{i1} \geqslant 0, \tag{2.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i d_{i2} \geqslant 0, \tag{2.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = 0, \tag{2.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_i d_{i1} - \sum_{i=1}^{n} s_i d_{i2} = 0. \tag{2.12}$$

Доказательство: Предположим, что таких s нет, но $\lambda_1 < \lambda_2$. По утверждению 6, задачи MP и P имеют разные оптимальные значения и разные решения. Оптимальное значение MP обязано быть выше, чем у P, так как MP есть P с ослабленными ограничениями. Пусть x^* — оптимальное решение задачи P и z^* — оптимальное значение MP. Тогда $s = z^* - x^*$ удовлетворит ограничениям высказывания. Это противоречит предположению, что такого s не существует. То есть наше предположение неверно, и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$. □

Утверждение 7 может быть объяснено следующим образом. Ослабление ограничений задачи P не улучшит оптимальное решение задачи P только если максимизация (2.9) подчиняется (2.8), (2.10), (2.11) и (2.12) приводит к нулю значение (2.9). Максимизируя (2.9), мы стремимся максимизировть переменную V задачи MP и одновременно «приводим к компромиссу» дюрации первого и второго порядка (два первых ограничения задачи MP). Под «приведением к компромиссу» подразумевается, что любое уменьшение дюрации второго порядка приводит к увеличению на ту же величину дюрации первого порядка. Ограничения гарантируют, что доходность результирующего портфеля может только возрасти. Эта оптимизационная задача допустима при векторе $s = \mathbb{O}$, действительно удовлетворяющем (2.8), (2.10), (2.11) и (2.12).

В общем, соотношение $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ может не сохраняться, если s, удовлетворяющий утверждению 7, существует.

Задача 2. *Привести пример, в котором вектор s может быть найден.*

Решение: Рассмотрим задачу P при $m = n = 2$ и исследуем выражения (2.8)–(2.12). При $n = 2$ из выражения (2.11) следует, что $|s_1| = |s_2|$. Не умаляя общности, $s_1 > 0$, $s_2 < 0$ и $Y_1 > Y_2$. Тогда из выражений (2.9) и (2.10) вытекает, что $d_{11} \geqslant d_{12}$ и $d_{12} \geqslant d_{22}$. Для каждой облигации i верно, что $d_{i2} \geqslant d_{i1}$, так как среднее взвешенное последовательности $\{a_k\}$ всегда меньше или равно квадратичному взвешенному, то есть

$$\sum_{k=1}^{K} \omega_k a_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{K} \omega_k a_k^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть облигации 1 и 2 будут таковы, что $d_{11} = 3$, $d_{12} = 2$, $d_{21} = 6$, $d_{22} = 5$, $s_1 = 1$ и $s_2 = -1$. Заметим, что эти значения d удовлетворяют (2.4) и $Y_1 > Y_2$ для любого $\lambda \geqslant 0$. Легко проверить, что $s = (1, -1)$ удовлетворяет выражениям (2.8)–(2.12) и что выражение (2.8) строгое. □

Таким образом, можно заключить, что соотношение $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ не всегда верно. Пример демонстрирует, что s, удовлетворяющий утверждению 7, иногда существует. Поэтому сделать вывод, что общепринятое мнение о том, что дюрация меньшего порядка должна иметь приоритет над дюрацией большего порядка, нельзя.

2.1.3. Пример формирования портфеля по модели «доходность-дюрация»

Опираясь на описанную выше теорию, построим портфель, состоящий из трех облигаций известнных российских компаний. Вся необходимая информация о них представлена на рис. 2.1, 2.2 и 2.3. Будем учитывать только дюрацию первых трех порядков, то есть $m = 3$.

Выпуск: Газпром Нефть-001P-01R (в обращении)

14.05.2017 - дата покупки облигации

http://www.rusbonds.ru/ank_obl.asp?tool=131741

КУПОН - Постоянный

Номинал:	1000	
Период обращения, дней:	1820	
Дата начала размещения:	12.04.2017	
Дата погашения:	06.04.2022	
Периодичность выплат в год:	2	
Период, дней	182	
Дней в году	365	
Текущий купон (всего):	0 (10)	
НКД:	7,63	
Дох-сть к погаш. простая, год.:	8,48%	ставка дисконтирования для дюрации (по определению доходности к погашению)
Ставка купона,% год.	8,70%	Y1

t	14.05.2017	11.10.2017	11.04.2018	10.10.2018	10.04.2019	09.10.2019	08.04.2020	07.10.2020	07.04.2021	06.10.2021	06.04.2022
Денежный поток	-1007,63	43	43	43	43	43	43	43	43	43	1043

d11	Дюрация Маколея t=0, дней	1516
d12	Дюрация второго порядка	1602
d13	Дюрация третьего порядка	1652

Рис. 2.1. Общие сведения, денежный поток и дюрация облигации RU000A0JXNF9

Выпуск: МТС-001P-02 (в обращении)

14.05.2017 - дата покупки облигации

http://www.rusbonds.ru/ank_obl.asp?tool=131525

КУПОН - Постоянный

Номинал:	1000	
Период обращения, дней:	1456	
Дата начала размещения:	30.03.2017	
Дата погашения:	25.03.2021	
Периодичность выплат в год:	2	
Период, дней	182	
Дней в году	365	
Текущий купон (всего):	0 (8)	
НКД:	10,91	
Дох-сть к погаш. простая, год.:	8,60%	ставка дисконтирования для дюрации (по определению доходности к погашению)
Ставка купона,% год.	8,85%	Y2

t	14.05.2017	28.09.2017	29.03.2018	27.09.2018	28.03.2019	26.09.2019	26.03.2020	24.09.2020	25.03.2021
Денежный поток	-1010,91	44	44	44	44	44	44	44	1044

d21	Дюрация Маколея t=0, дней	1259
d22	Дюрация второго порядка	1315
d23	Дюрация третьего порядка	1347

Рис. 2.2. Общие сведения, денежный поток и дюрация облигации RU000A0JXMH7

ОКЕЙ-001Р-01 (в обращении)

http://www.rusbonds.ru/ank_obl.asp?tool=132116

14.05.2017 - дата покупки облигации

КУПОН - Постоянный

Номинал:	1000	
Период обращения, дней:	1456	
Дата начала размещения:	04.05.2017	
Дата погашения:	29.04.2021	
Периодичность выплат в год:	4	
Период, дней	91	
Дней в году	365	
Текущий купон (всего):	0 (16)	
НКД:	2,62	
Дох-сть к погаш. простая, год.:	9,45%	*ставка дисконтирования для дюрации (по определению доходности к погашению)*
Ставка купона,% год.	9,55%	*Y3*

t	14.05.2017	03.08.2017	02.11.2017	01.02.2018	03.05.2018	02.08.2018	01.11.2018	31.01.2019	02.05.2019	01.08.2019	31.10.2019	30.01.2020	30.04.2020	30.07.2020	29.10.2020	28.01.2021	29.04.2021
Денежный поток	-1002,62	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	1024

d31	Дюрация Маколея t=0, дней	1228
d32	Дюрация второго порядка, дней	1295
d33	Дюрация третьего порядка, дней	1332

Рис. 2.3. Общие сведения, денежный поток и дюрация облигации RU000A0JXQH8

MS Excel предлагает удобный инструмент для решения задач линейного программирования — надстройку «Поиск решения». Воспользовавшись ей, найдем вектор x долей каждой облигации в формируемом портфеле (рис. 2.4).

Переменные		
x1	x2	x3
0,377905	0,445847	0,176248
Коэфф. ц.ф.		
8,70%	8,85%	9,55%

Значение ц.ф. (доходность портфеля)
8,92%

Матрица ограничений		
1516	1259	1228
1602	1315	1295
1652	1347	1332
1	1	1

Значения ограничений	Ограничения
1350,55	1350,55
1420,04	1420,04
1459,54	1459,54
1	1

Рис. 2.4. Построение портфеля облигаций при $m = 3$

Рис. 2.4 означает, что максимальная доходность, которая может быть получена при данных ограничениях на дюрации, равна 8.92%, причем каждая облигация входит в портфель долей x_i.

2.2. Ранжирование взаимоисключающих проектов

2.2.1. Конфликты ранжирования и дюрация Маколея

Если имеется несколько альтернативных проектов с одинаковыми (близкими) значениями NPV и IRR, то при выборе варианта инвестирования учитывается длительность инвестиций. Ключевым моментом является не то, как долго каждый инвестиционный проект будет приносить доход, а то, когда он будет его приносить и каков будет размер поступлений каждый период.

Равенство, ранее приведенное в тексте, связывает параметры τ, NPV, r, k, и I_0 следующим образом:

$$\tau = \ln\left(\frac{NPV + I_0}{I_0}\right) \Bigg/ \ln\left(\frac{1+r}{1+k}\right).$$

Задав любые четыре из них, можно определить пятый параметр. Важно то, что это соотношение обеспечивает более глубокое понимание роли, которую дюрация играет в конфликтах ранжирования проектов.

В этом разделе R-дюрация используется для объяснения противоречий, возникающих при оценивании с помощью IRR и NPV проектов с одинаковыми начальными вложениями I_0. Как было сказано во вступлении к главе, сравнение проектов с использованием IRR и дюрации Маколея может не совпадать с ранжированием, полученным по NPV.

Пример 4. *Составить таблицу значений D, τ и NPV в зависимости от ставки дисконтирования k для двух альтернативных проектов. Все необходимые данные приведены в табл. 2.1.*

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4-I	-1000	100	320	425	925						
10-D	-1000	385	350	300	215	100	100	100	100	100	100

Таблица 2.1. Денежные потоки проектов 4-I и 10-D

Решение: Результаты вычислений приведены в табл. 2.3. Для получения таблицы использовались встроенные финансовые функции Excel и функции из приложения Б. Отметим, что return duraion не определена в случае, когда ставка дисконтирова-

Ставка дисконтирования ($k, \%$)	Дюрация Маколея (D)	Return duration (τ)	NPV	IRR
5.00	4-I	10-D	10-D	10-D
8.79	4-I	=	10-D	10-D
10.00	4-I	4-I	10-D	10-D
11.51	4-I	4-I	=	10-D
12.00	4-I	4-I	4-I	10-D
13.00	4-I	4-I	4-I	10-D
14.00	4-I	4-I	4-I	10-D
14.13	=	4-I	4-I	10-D
16.89	10-D	4-I	=	10-D
19.00	10-D	4-I	10-D	10-D
19.91	10-D	N/D	10-D	10-D
20.07	10-D	N/D	10-D	10-D

Таблица 2.2. Выбор проекта по различным критериям в зависимости от ставки k.

ния равна IRR, то есть при $k = r$. Выбор сетки ставки дисконтирования объясняется посредством табл. 2.2.

□

Анализ табл. 2.3 позволяет определить различия между R-дюрацией и дюрацией Маколея. Во-первых, R-дюрация меньше Маколиевой при $r > k$, больше при $r < k$, стремится к ней при $r \to k$. Чтобы проиллюстрировать, рассмотрим проект 4-I с IRR, равным 19.91%. R-дюрация не определена при такой ставке дисконтирования. Как бы то ни было, если ставка близка к IRR проекта, например, равна 20.07%, обе дюрации примерно равны 3.057.

Во-вторых, табл. 2.3 показывает, что R-дюрация менее чувствительна к изменениям процентных ставок, чем классическая дюрация. Диапазон R-дюрации – от 3.045 ($k = 23\%$) до 3.123 ($k = 5\%$) для первого проекта, и от 2.801 до 3.209 для второго проекта. Дюрация Маколея находится в пределах соответственно от 3.032 до 3.185 и от 2.749 до 3.615. Как мы показали в утверждении 3, абсолютное изменение дюрации Маколея примерно в два раза больше, чем изменение R-дюрации для каждой ставки дисконтирования. Изменение дюрации Маколея в табл. 2.3 превышает изменение R-дюрации не ровно в 2 раза, так как утверждение 3 сформулировано для близких к IRR ставок дисконтирования.

Ставка дисконтирования ($k, \%$)	Проект 4-I ($IRR = 19.9053\%$) Дюрация Маколея (D)	Return duration (τ)	NPV	Проект 10-D ($IRR = 20.0654\%$) Дюрация Маколея (D)	Return duration (τ)	NPV
5.00	3.185	3.123	513.6	3.615	3.209	537.7
8.79	3.152	3.106	352.7	3.384	3.106	358.4
10.00	3.142	3.100	306.5	3.316	3.075	309.0
11.51	3.129	3.094	251.8	3.236	3.038	251.8
12.00	3.125	3.092	234.7	3.211	3.026	234.2
13.00	3.116	3.087	201.0	3.161	3.003	199.8
14.00	3.108	3.083	168.5	3.113	2.980	167.1
14.13	3.107	3.083	164.4	3.107	2.977	162.9
16.89	3.083	3.071	81.3	2.983	2.918	81.3
19.00	3.066	3.062	23.5	2.896	2.875	26.0
19.91	3.058	N/D	0.0	2.861	2.858	3.8
20.07	3.057	3.057	-4.1	2.855	N/D	0.0
21.00	3.049	3.054	-27.4	2.820	2.837	-21.8
23.00	3.032	3.045	-74.7	2.749	2.801	-65.4

Таблица 2.3. R-дюрация, дюрация Маколея и IRR-NPV зависимость

В-третьих, табл. 2.3 показывает, что дюрация Маколея и R-дюрация могут упорядочивать два проекта по-разному. При ставке дисконтирования выше 14.13% первый проект имеет бóльшую дюрацию, чем второй, даже несмотря на то, что он порождает денежный поток только в течение четырех лет. При ставках ниже 8.79% у первого проекта R-дюрация меньше. При ставках между 8.79% и 14.13% проект 4-I имеет большую R-дюрацию, но меньшую дюрацию Маколея.

В связи с фактом противоречий при упорядочивании с помощью различных видов дюрации, эти метрики не всегда равносильно эффективны в объяснении отношений между NPV и IRR двух проектов. Можно предположить, что проект принесет больше дохода инвестору, если у проекта большие IRR и R-дюрация, что означает более длительный период положительной отдачи. Как показано в таблице 2.3, для ставок дисконтирования от 11.51% до 13.13% отношения между NPV, IRR и дюрацией Маколея для двух проектов не согласовываются между собой. Например, при ставке 12% дюрация проекта 10-D составляет 3.211, в сравнении с 3.125 для проекта 4-I, и IRR проекта 10-D выше. Но, удивительным образом, проект с высоким IRR и большой дюрацией не обладает большим NPV: 234.2 против 234.7 у 4-I при тех же условиях.

С другой стороны, связи между NPV, IRR и дюрацией можно лучше осознать, используя R-дюрацию. Обратимся к той же ставке дисконтирования 12% в таблице и заметим, что второй проект имеет меньшую R-дюрацию. Хотя у второго проекта IRR выше, чем у первого, выплаты будут производиться за промежуток времени более кроткий, что делает NPV второго проекта более низким. Таким образом, связи между NPV, IRR и R-дюрация не конфликтуют с нашим предположением.

С точки зрения принципов финансов рассмотренный выше пример не является корректным, так как проводится сравнение проектов, длительности которых различаются более чем в 2 раза. Поэтому модифицируем этот пример.

Пример 4 (продолжение). *Вместо проекта 10-D рассмотрим проект 5-D, полученный из 10-D путем прибавления к каждому денежному потоку с первого по 5 года дисконтированной (ставка 12%) стоимости денежных потоков 100, 100, 200, 200, 200. Получим следующий денежный поток (с округлением до сотых): -1000 435.66 395.23 380.78 287.12 164.39.*

Решение: Результаты вычислений приведены в табл. 2.4. На этом примере так же можно проследить выполнение утверждений 1–3, однако здесь ситуация проще: если NPV при какой-то ставке дисконтирования близки, мы выбираем проект 5-D, так как у него довольно высокий IRR. □

Внимательное изучение уже упоминавшегося в Главе 1 выражения

$$PV = I_0 \left(\frac{1+r}{1+k} \right)^{\tau}$$

показывает, что проект с высоким IRR и большой R-дюрацией обязан иметь большую приведенную стоимость (и больший NPV), если проекты включают в себя равные инвестиции. Сравним проекты A и B при условиях, что они требуют одних и тех же начальных вложений I_0, $r_A > r_B > k$ и $\tau_A > \tau_B$. Тогда должно быть верно, что

$$PV_A = I_0 \left(\frac{1+r_A}{1+k} \right)^{\tau_A} > I_0 \left(\frac{1+r_B}{1+k} \right)^{\tau_B} = PV_B, \qquad (2.13)$$

Это означает, что у проекта A NPV больше. Если $r_A > r_B > k$, но $\tau_A < \tau_B$, то проект A (с большим IRR) может иметь NPV больше или меньше NPV проекта B в зависимости от различий в длительности проектов. Как бы то ни было, если $r_A > r_B > k$, то для NPV и IRR ранжировать проекты в разном порядке равносильно тому, что $\tau_A < \tau_B$. Поэтому, если NPV и IRR ранжируют два проекта с положительным NPV по-разному, то проект с большей IRR обязан иметь меньшую (R-)дюрацию.

	Проект 4-I ($IRR = 19.9053\%$)			Проект 5-D ($IRR = 23.2107\%$)		
Ставка дисконтирования ($k, \%$)	Дюрация Маколея (D)	Return duration (τ)	NPV	Дюрация Маколея (D)	Return duration (τ)	NPV
5.00	3.185	3.123	513.6	2.527	2.398	467.4
9.94	3.143	3.101	308.7	2.451	2.361	308.7
10.00	3.142	3.100	306.5	2.450	2.360	307.0
11.51	3.129	3.094	251.8	2.428	2.350	264.2
12.00	3.125	3.092	234.7	2.421	2.346	250.8
13.00	3.116	3.087	201.0	2.407	2.339	224.3
14.00	3.108	3.083	168.5	2.393	2.332	198.7
19.00	3.066	3.062	23.5	2.326	2.299	83.2
19.91	3.058	N/D	0.0	2.314	2.293	64.4
21.00	3.049	3.054	-27.4	2.300	2.287	42.3
23.00	3.032	3.045	-74.7	2.275	2.274	3.9
23.21	3.031	3.044	-79.5	2.273	N/D	0.0

Таблица 2.4. R-дюрация, дюрация Маколея и IRR-NPV зависимость

Подводя итоги изложенного в этом пункте, констатируем, что одновременное использование R-дюрации и IRR позволяет понять то, как формируется NPV проекта. Целесообразность оценивания с помощью R-дюрации и IRR зависит от силы конкурентных преимуществ фирмы и интенсивности конкуренции на рынке, так как эти факторы будут сдерживать значение внутренней нормы доходности, которую может получить компания.

2.2.2. Использование дюрации при принятии решений

Если фирма должна выбрать один из двух взаимоисключающих проектов — один с более высоким NPV, а второй с более высоким IRR и меньшей дюрацией, то фирма (главным образом) выбирает между проектами, предлагающими различные экономические эффекты. Первый проект создаст большую экономическую ценность, измеряемую с помощью NPV, а второй вернет вложения быстрее. Выбор происходит в зависимости от того, какие ограничения в отношении капитала имеет фирма.

На совершенном рынке капитала фирма может привлекать достаточное внешнее финансирование, чтобы инвестировать в любой проект с будущим положительным NPV. Следовательно, если фирма обязана выбрать между двумя проектами, требующими одинаковых начальных инвестиций, ее выбор падет на проект, имеющий максимальный высокий NPV — невзирая на IRR и дюрации обоих проектов.

В противоположность этому, несовершенный рынок может ограничить объем денежных средств, поступающих в распоряжение фирмы, или повысить стоимость этих средств. В худшем случае эта несовершенность может даже сделать невозможным привлечение любых дополнительных инвестиций. Например, рационирование кредита может помешать малым фирмам получить новую банковскую ссуду даже под высокий процент. Для других фирм несовершенство рынка, заключающееся в информационных или операционных издержках, может сделать ресурсы внешних источников (например, займы) более дорогими, чем нераспределенная прибыль. Если присутствуют ограничения капитала, внутренние денежные потоки могут быть основным источником финансирования для будущих инвестиций фирмы, и проекты, возвращающие вложения быстро, могут обеспечить финансирование NPV-положительных будущих проектов.

Если фирма встречается с мультипериодными ограничениями капитала, она должна выбрать последовательность проектов, которые дадут наибольшую прибыль. Это решение требует рассмотрения будущей траектории выбора начала проекта. Общая стоимость последовательности проектов зависит от:

1. полного NPV проекта;
2. распределения денежного потока во времени;
3. ожидаемого дохода от будущих проектов.

Эти факторы учитываются в обобщенной чистой приведенной ценности проекта (generalized net present value, GNPV) [7].

Чтобы вывести GNPV проекта за временной горизонт длины T, сначала необходимо оценить полный доход проекта, который он породит к концу горизонта. Обозначим денежный эквивалент этого дохода W_T. Чтобы оценить W_T, предположим, что доходность всех новых капиталовложений эквивалентна z. Отметим, что, $z > k$, если одновременно выполняются два условия:

- фирма имеет (или может иметь) некоторые проекты с положительным NPV, доступные в будущем;
- фирма ожидает, что в будущем она будет подвержена ограничениям капитала, что вынудит ее финансировать будущие проекты за счет собственных средств.

Как показывает практика, на реальном рынке для некоторых фирм оба эти условия могут быть верны. Общая прибыль временного отрезка T вычисляется следующим образом:

$$W_T = \sum_{t=1}^{T} C_t(1+z)^{T-t} \tag{2.14}$$

GNPV проекта — это приведенная ценность выражения (2.14) за вычетом начальных инвестиций I_0 :

$$GNPV = \left[\sum_{t=1}^{T} \frac{C_t(1+z)^{T-t}}{(1+k)^T}\right] - I_0 \tag{2.15}$$

GNPV проекта тесно связана с модифицированной внутренней нормой доходности (MIRR). MIRR может быть определена как ставка дисконтирования, обращающая обобщенную чистую приведенную стоимость в ноль, если ценность всех реинвестированных денежных потоков будет равна цене капитала k. Чтобы найти MIRR проекта, используя выражение (2.15), надо, чтобы $z = k$ в числителе, а процентная ставка в знаменателе должна удовлетворять равенству $GNPV = 0$. Эта процентная ставка и будет MIRR проекта.

До обсуждения роли дюрации при сравнении проектов будет полезным сначала определить ставку реинвестирования z, которая бы приравнивала GNPV двух проектов. Пусть проект A продуцирует денежный поток $C_{A,t}$, проект B — $C_{B,t}$, оба проекта имеют равные I_0, горизонт планирования T и цену капитала k. Если $GNPV_A = GNPV_B$, то

$$\left[\sum_{t=1}^{T} \frac{C_{A,t}(1+z)^{T-t}}{(1+k)^T}\right] - I_0 = \left[\sum_{t=1}^{T} \frac{C_{B,t}(1+z)^{T-t}}{(1+k)^T}\right] - I_0 \tag{2.16}$$

Преобразуем данную формулу к виду:

$$\left[\sum_{t=1}^{T} \frac{C_{A,t}}{(1+z)^t}\right] - I_0 = \left[\sum_{t=1}^{T} \frac{C_{B,t}}{(1+z)^t}\right] - I_0 \tag{2.17}$$

Это выражение означает, что ставка реинвестирования дохода, уравнивающая GNPV двух проектов, также является ставкой дисконтирования, уравнивающей NPV проектов. Такую ставку называют перекрестной ставкой дисконтирования.

Интуитивно, высокая ставка реинвестирования (большая, чем z) склоняет нас выбрать проект, возвращающий вложения быстрее, тем самым способствуя реинвестированию внутренних средств фирмы в привлекательные будущие проекты. Если прибыльность реинвестированных стредств больше, чем процент безубыточности, проект с малой дюрацией будет иметь более высокий GNPV, а если прибыльность реинвестирован-

Ставка дисконтирования ($k, \%$)	Проект A ($IRR = 20.709\%$) Дюрация Маколея (D)	Return duration (τ)	NPV	Проект B ($IRR = 21.751\%$) Дюрация Маколея (D)	Return duration (τ)	NPV
10.00	2.578	2.514	26.3	2.230	2.165	24.6
14.00	2.529	2.490	15.3	2.184	2.143	15.1
14.47	2.523	2.487	14.1	2.179	2.140	14.1
15.00	2.517	2.484	12.8	2.173	2.137	13.0
20.00	2.459	2.455	1.5	2.120	2.111	3.1
20.71	2.451	N/D	0.0	2.112	2.107	1.8
21.00	2.447	2.449	-0.6	2.109	2.106	1.3
21.75	2.439	2.445	-2.1	2.102	N/D	0.0
22.00	2.436	2.443	-2.6	2.099	2.101	-0.4
25.00	2.403	2.427	-8.1	2.070	2.086	-5.3

Таблица 2.5. R-дюрация, дюрация Маколея и IRR-NPV зависимость

ных стредств меньше процента безубыточности, то проект с большой дюрацией будет иметь более высокий GNPV.

Чтобы проиллюстрировать, как знание безубыточной ставки рефинансирования может быть применено при выборе проекта, рассмотрим следующий пример. Даны проекты A и B (табл. 2.5). Проект A требует начальных инвестиции в размере 100 и продуцирует денежные потоки 35, 35, 35 и 57.5 с первого по четвертый года соответственно. Проект B требует таких же начальных инвестиций и продуцирует денежные потоки в размере 50, 35, 35, 35. Табл. 2.5 содержит NPV, R-дюрацию и дюрацию Маколея обоих проектов при ставках дисконтирования в диапазоне от 10% до 25%. Проекты имеют один и тот же NPV 14.1 при ставке дисконтирования 14.47. Для проекта R-дюрация не определена (N/D) при $k = IRR$.

GNPV двух объектов зависят от прогнозируемого размера IRR реинвестированных средств. Если эта IRR выше, чем перекрестная ставка, то проект B — с более высоким IRR, но короткой дюрацией (Маколея или return), будет иметь большую GNPV. Например, если доходность реинвестирования равна 15%, проект A будет иметь аккумулированный (реинвестированный) доход 197.27 после последней выплаты в четвертом году, а проект B — 197.58 в тот же момент времени. Оба числа вычислены с помощью (2.14) при $z = 15\%$ и времени действия проекта $T = 4$ года. Так как у проекта B больший аккумулированный доход, то у него GNPV больше до момента, пока ставки дисконтирования проектов равны. Если они равны, к примеру, 10%, то проект B будет иметь большую GNPV (34.95 против 34.74 для проекта A — оба числа сосчитаны с помощью (2.15), $z = 15\%$, $T = 4$), несмотря на то, что у него NPV меньше при данной ставке дисконтирования k. Этот пример показывает, что ставка реинвестирования, требующая от инвестора выбора проекта с низкими дюрацией и NPV, но более высоким IRR, не должна быть такой же высокой. В этом примере ставка реинвестирования, приравнивающая GNPV проектов, была намного меньше, чем IRR обоих проектов.

Обобщая вышесказанное, когда бюджетирование капитала имеет место в идеальном рынке капитала, при выборе между двумя взаимоисключающими проектами менеджер должен учитывать только NPV. Когда же присутствуют ограничения капитала и фирма имеет возможность получить инвестиционные внутренние ставки доходности выше цены капитала, GNPV проекта может быть важным при принятии решения. В таких случаях NPV и GNPV, возможно, будут ранжировать проекты неодинаково. Вычислив ставку безубыточности, фирма получает метод проверки ранжирования проектов. Если фирма ожидает, что норма доходности реинвестированных фондов превысит процент безубыточности, то проект с короткой дюрацией будет иметь более высокий GNPV, и именно этот проект необходимо выбрать. Если ставка безубыточности так высока, что достичь ее при реинвестировании не представляется возможным, то проект с большой дюрацией будет иметь более высокий GNPV.

2.2.3. Субъективное влияние на ранжирование проектов

Теория бюджетирования капитала дает менеджерам простое правило для оценки проектов: проект принимается, если приведенная стоимость его будущего денежного потока больше или равна требующимся инвестициям. Отсюда следует, что проект должен быть принят, если его чистая приведенная стоимость (NPV) больше или равна нулю. Такой подход называют NPV-анализом.

Хотя NPV-анализ имеет строгое теоретическое обоснование, он довольно сложен практически: фирма должна оценить будущие денежные потоки и соответствующую ставку дисконтирования с поправкой на риск еще до вычисления NPV. Если эти данные не имеют приемлемой аппроксимации, NPV-оценка, несмотря на математическую точность алгоритма, не приведет к правильному бизнес-решению.

NPV-оценка применима, если одновременно выполнены условия:

- у фирмы есть конкурентное преимущество, дающее возможность получить требуемую избыточную доходность;
- фирма может ограничивать вход новых фирм на рынок.

Однако большинство фирм на реальных рынках не удовлетворяет этим условиям. Этот факт подтверждает, что один из наиболее важных шагов в бюджетировании капитала — критический анализ оценки NPV проекта до принятия фирмой окончательного решения.

Оценка будущего денежного потока зависит от прогноза на объемы продаж, цены и затраты, которые предоставляются менеджерами, распределенными по отделам внутри организации. Во многих случаях незначительные изменения в ставках роста проекта или в размере прибыли сильно влияют на NPV-оценку. Если менеджер хочет создать видимость положительного NPV какого-либо проекта, он может модифицировать оценку денежного потока (особенно в далеком будущем).

Пожалуй, самый легкий путь завысить NPV проекта — предположить, что проект будет приносить доход несколько дополнительных лет.

Пример 5. *Проект требует инвестицию 1000 в момент времени 0 и порождает годовой доход в размере 200 в течение шести лет. Ставка дисконтирования 8%.*

Легко посчитать, что NPV=-75.42, то есть фирма должна отклонить проект. Однако, если корыстный менеджер сделает предположение, что проект будет приносить доход 200 еще один год, NPV станет равным 41.27, и фирма инвестирует в данный проект. В этом и заключается проблема NPV-оценки: в момент, когда инвестиционное решение должно быть принято, никто достоверно не знает, как долго проект будет приносить прибыль.

Второй способ манипуляции NPV заключается в раздувании оценки денежного потока, особенно в конце жизни проекта. Проиллюстрируем этот подход на примере проектов, описанных в табл. 2.6

Пример 6. *Табл. 2.6 содержит денежный поток двух версий проектов A и B. В каждом случае одна версия проекта приносит большую часть денежного потока в начале жизни проекта («ранний»), другая продуцирует высокий доход ближе к концу («поздний»).*

t	Проект А (ранний)	Проект А (поздний)	Проект В (ранний)	Проект В (поздний)
0	-1000.00	-1000.00	-1000.00	-1000.00
1	387.01	51.06	563.61	123.05
2	290.26	85.10	422.70	164.07
3	217.69	141.83	317.03	218.76
4	163.27	236.38	237.77	291.68
5	122.45	393.96	178.33	388.90
6	91.84	656.60	133.75	518.54
7	68.88	58.46	100.31	691.38
IRR	11.25%	10.70%	30.17%	20.18%
NPV (k=10%)	30	30	500	500
Дисконтированный срок окупаемости	7	6	3	6
Дюрация Маколея	2.6	4.7	2.6	4.7

Таблица 2.6. Денежные потоки и метрики проектов А и В

Правило NPV не делает различий между ранней и поздней версиями проекта, но рыночная конкуренция влечет непредсказуемые изменения, поэтому оценки денежного потока для первых двух-трех лет более точные, чем для последующих. К тому же, менеджер может манипулировать процессом выбора проекта посредством увеличения значения денежного потока в конце жизни проекта, что обнаружится только через несколько лет. Все это доказывает, что NPV-оценка не учитывает некоторые важные свойства проектов.

Для проекта В (ранний) доля дохода в течение первых трех лет более 2/3, в то время как для В (поздний) она составляет всего 1/5. Таким образом, NPV этих двух проектов на самом деле не эквивалентны, хотя они оба и равны 500. Поздний вариант более рискованный не только за счет сложного измерения будущего денежного потока, но и за счет того, что это увеличивает поле субъективного воздействия.

Чтобы учесть различия между ранней и поздней версиями двух проектов, можно обратить внимание на дисконтированный срок окупаемости: проекты с коротким дисконтированным сроком окупаемости менее рискованны. Действительно, для проекта В дисконтированный срок окупаемости правильно идентифицирует «раннюю» и «позднюю» версии, однако для проекта А это не так (предпоследняя строка табл. 2.6). Более удачной метрикой является дюрация Маколея: она ранжирует каждое множество проектов правильно (последняя строка табл. 2.6). Мы же обратимся к R-дюрации. Высокая конкуренция на рынке влечет близость внутренней нормы доходности проекта r и цены капитала k, что, согласно утв. 1 означает близость R-дюрации и дюрации Маколея.

Покажем, как менеджеры могут оценить проект без использования NPV напрямую. Идея заключается в разложении индекса прибыльности проекта на две составляющие: избыточную доходность и R-дюрацию проекта. Эти метрики хороши тем, что, в отличае от NPV, могут быть довольно точно оценены в условиях конкуренции.

Строго говоря, менеджер обязан знать NPV проекта до того, как вычислить R-дюрацию, однако при заданном индексе прибыльности PI в этом нет необходимости. По определению

$$PI = \frac{PV}{I_0}, \tag{2.18}$$

и, несложными преобразованиями выражения (1.10), получим

$$\tau = \frac{\ln(PI)}{\ln\left(1 + \frac{IRR-k}{1+k}\right)}. \tag{2.19}$$

На рис. 2.5 изображена зависимость избыточной доходности и R-дюрации при различных индексах прибыльности PI, $k = 10\%$. Графики показывают, что каждый индекс прибыльности ассоциирован с бесконечным множеством комбинаций R-дюрации и избыточной доходности. Если фирма может получить достаточно большую IRR, R-дюрация, необходимая для поддержки любого заданного PI, будет малой. Однако при сужении разрыва между IRR и ценой капитала дюрация проекта может стать слишком большой.

В этом контексте рассмотрим проекты, описанные в 2.6. Проект A имеет PI = 1.03, который может быть сгенерирован для ранней версии при $IRR = 11.25\%$ за $\tau = 2.6$ периодов и при $IRR = 10.70\%$ за $\tau = 4.7$ для поздней. В любом случае, требуемая избыточная доходность на 2% выше, чем предполагаемая ставка дисконтирования 10%. Таким образом, проект A требует поддержания умеренного конкурентного преимущества следующие несколько лет.

В противоположность этому, у проекта B PI=1.5, который можно получить либо посредством поддержания $IRR = 30.17\%$ и $\tau = 2.4$ для раннего проекта, либо $IRR = 20.18\%$ и $\tau = 4.6$ для позднего проекта. Требуемая избыточная доходность более 10%, а это значит, что проект (и его будущая производительность) должны быть оценены с большой долей скептицизма. Проект, обещающий такой потенциальный доход,

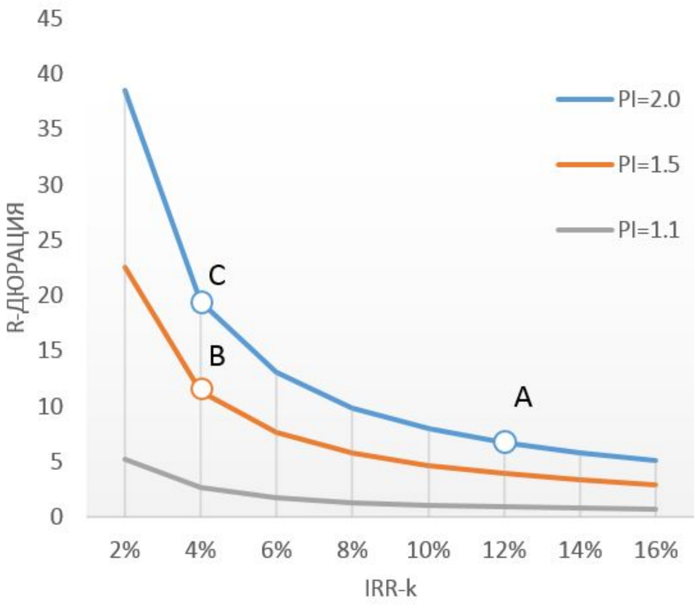

Рис. 2.5. Комбинации избыточной доходности IRR-k и R-дюрации для различных индексов прибыльности.

почти наверное привлечет внимание конкурентов, поэтому оцениваемый NPV проекта B корректен, только если фирма сможет сохранять конкурентное преимущество в течение долгого периода времени.

В заключение скажем несколько слов об IRR, который мы использовали. Так как NPV нам заранее неизвестен, то мы рассматриваем лишь наиболее правдоподобнубю оценку IRR. Чтобы определить, когда такая IRR корректна, менеджер должен сравнить ее с реальными IRR прошлых проектов фирмы. Конечно, IRR меняется от проекта к проекту, но если она оценивается на порядок больше предыдущих, менеджер должен определить специфические свойства товара и состояние рынка, которые (предположительно) приведут к такой отдаче.

Подобным образом, если оценка R-дюрации больше, чем длится конкуреноспособность фирмы, если она больше периода технологических изменений в индустрии или превышает период, в который фирма может строить достоверные модели развития рынка, то менеджеры не должны пользоваться правилом NPV.

2.2.4. Схема выбора проекта

На основании информации, ранее приведенной в данном разделе, составим схему выбора одного из двух взаимоисключающих проектов, имеющих сопоставимые начальные инвестиции.

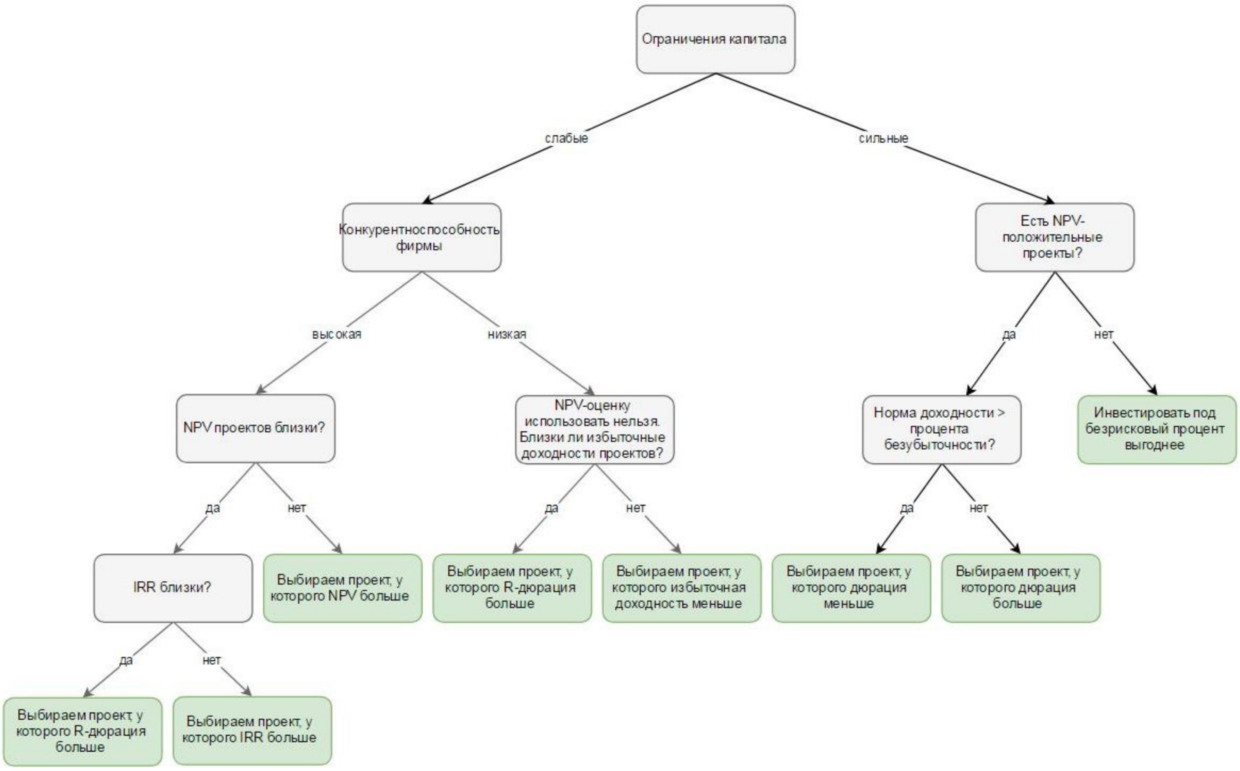

Рис. 2.6. Схема выбора проекта

Глава 3

Программная реализация и вычислительный эксперимент

В этой главе описаны некоторые средства, с помощью которых решены приведенные в тексте задачи и примеры. Стандартного набора функций Microsoft Office Excel 2007 не хватает для элегантного решения поставленных задач. В связи с этим понадобилось реализовать два макроса, описание которых приведено в 3.1. В разделе 3.2 описаны вычислительные эксперименты, реализованные с помощью собственных функций.

В простейшем случае постоянной купонной ставки и единовременного погашения номинала в конце срока для расчета дюрации Маколея можно использовать встроенную в Microsoft Office Excel 2007 функцию ДЛИТ, для модифицированной дюрации — МДЛИТ.

Для более общей ситуации — постоянной процентной ставки и знакопостоянного денежного потока для расчета дюрации любого порядка нами написана функция Duration, для рассчета R-дюрации — ReturnDuration.

3.1. Разработка макросов, документация

Необходимые для расчетов функции были написаны на языке Visual Basic for Applications (VBA). Выбор данного языка программирования связан с широким распространением среды MS Excel для решения финансовых задач. Любой, кто скопирует написанный нами модуль в собственную рабочую книгу, сможет пользоваться функциями Duration и ReturnDuration так же, как и встроенными функциями Excel.

3.1.1. Функция Duration

Описание

Возвращает дюрацию заданного порядка для знакопостоянного денежного потока.

Синтаксис

Duration(порядок; ставка_диск; ден_поток)

- **порядок** — обязательный аргумент. Порядок дюрации, натуральное число.

- **ставка_диск** — обязательный аргумент. Ставка дисконтирования за период (год, квартал и т.д.).

- **ден_поток** — обязательный аргумент, может задаваться как несколько отдельных диапазонов через «;». Денежный поток, генерируемый проектом в каждый период, начиная с первого.

3.1.2. Функция ReturnDuration

Описание

Возвращает R-дюрацию для знакопостоянного денежного потока.

Синтаксис

ReturnDuration(нач_инвест,ставка_диск; ден_поток)

- **нач_инвест** — обязательный аргумент. Начальные инвестиции в проект, I_0.

- **ставка_диск** — обязательный аргумент. Ставка дисконтирования за период (год, квартал и т.д.).

- **ден_поток** — обязательный аргумент, может задаваться как несколько отдельных диапазонов через «;». Денежный поток, генерируемый проектом в каждый период, начиная с первого.

3.2. Вычислительные эксперименты

Вычислительный эксперимент 1 состоит в проверке вычислений, приведенных авторами в статье [5]. Результаты (значения) по всем таблицам совпали с максимальной точностью, что говорит об отсутствии ошибки в статье и макросах. В качестве примера приведем таблицу из статьи [5] (рис. 3.1) и результаты собственных расчетов, выполненных в Excel (рис. 3.2).

Вычислительный эксперимент 2. В ходе поиска показательного примера для пункта 2.1.3 было замечено, что при $m > 1$ условия ограничений задачи P слишком жесткие.

Задача P: $$\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i \to \max \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i d_{ij} = D_j, \quad j = 1, \dots, m, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \tag{3.3}$$

TABLE 1. Return Duration, Macaulay Duration, and the IRR-NPV Relation

	Project 4-I (IRR = 19.9053%)			Project 10-D (IRR = 20.0654%)		
Discount Rate (k, %)	Macaulay Duration (D)	Return Duration (τ)	NPV	Macaulay Duration (D)	Return Duration (τ)	NPV
5.00	3.185	3.123	513.6	3.615	3.209	537.7
8.79	3.152	3.106	352.7	3.384	3.106	358.4
10.00	3.142	3.100	306.5	3.316	3.075	309.0
11.51	3.129	3.094	251.8	3.236	3.038	251.8
12.00	3.125	3.092	234.7	3.211	3.026	234.2
13.00	3.116	3.087	201.0	3.161	3.003	199.8
14.00	3.108	3.083	168.5	3.113	2.980	167.1
14.13	3.107	3.083	164.4	3.107	2.977	162.9
16.89	3.083	3.071	81.4	2.983	2.918	81.4
19.00	3.066	3.062	23.5	2.896	2.875	26.0
19.91	3.058	N/D	0.0	2.861	2.858	3.8
20.07	3.057	3.057	−4.1	2.855	N/D	0.0
21.00	3.049	3.054	−27.4	2.820	2.837	−21.8
23.00	3.032	3.045	−74.7	2.749	2.801	−65.4

Рис. 3.1. Таблица значений, приведенная в [5]

Return duration, дюрация Маколея и IRR-NPV зависимость.

4-I	-1000	100	320	425	925						
10-D	-1000	385	350	300	215	100	100	100	100	100	100
IRR 4-I	19,9053%										
IRR 10-D	20,0654%										

	Проект 4-I			Проект 10-D		
Ставка дисконтирования (k)	Дюрация Маколея	Return duration	NPV	Дюрация Маколея	Return duration	NPV
5,00%	3,185	3,123	513,6	3,615	3,209	537,7
8,79%	3,152	3,106	352,7	3,384	3,106	358,4
10,00%	3,142	3,100	306,5	3,316	3,075	309,0
11,51%	3,129	3,094	251,8	3,236	3,038	251,8
12,00%	3,125	3,092	234,7	3,211	3,026	234,2
13,00%	3,116	3,087	201,0	3,161	3,003	199,8
14,00%	3,108	3,083	168,5	3,113	2,980	167,1
14,13%	3,107	3,083	164,4	3,107	2,977	162,9
16,89%	3,083	3,071	81,3	2,983	2,918	81,3
19,00%	3,066	3,062	23,5	2,896	2,875	26,0
19,91%	3,058		0,0	2,861	2,858	3,8
20,07%	3,057	3,057	-4,1	2,855		0,0
21,00%	3,049	3,054	-27,4	2,820	2,837	-21,8
23,00%	3,032	3,045	-74,7	2,749	2,801	-65,4

Рис. 3.2. Фрагмент рабочего листа с вычислениями (данные из [5]
)

Было решено 100 задач для трех описанных в пункте 2.1.3 облигаций со случайными векторами ограничений D в пределах допустимых значений при $m = 2$, $m = 3$. Задача не имела решения в 100% случаев по причине пустоты области допустимости. Это связано с тем, что каждое ограничение задачи представляет собой плоскость в трехмерном пространстве (причем плоскости, соответствующие дюрациям, близки к тому, чтобы быть параллельными), а вероятность пересечения 3 (4) плоскостей очень мала. В пространствах больших размерностей эта проблема только усугубляется. Однако в 15% случаев найденное решение было лучше заданных ограничений, то есть удовлетворяло ограничениям

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i d_{ij} \leqslant D_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{3.4}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \tag{3.5}$$

Таким образом, практической ценности модели «доходность-дюрация» установить не удалось, однако интересна для исследования модель с ослабленными условиями (3.4)–(3.5).

3.3. Выводы

Эксперимент 1 показал, что в вычислениях авторов статьи [5] нет ошибок или опечаток.

Эксперимент 2 показал несостоятельность линейной модели «доходность-дюрация» в качестве инструмента формирования портфеля облигаций.

Заключение

Дюрация — одно из важнейших понятий теории финансовых инвестиций. Работа формализует свойства этого показателя и его модификаций, что может способствовать принятию более обоснованного решения задач портфельного и долгосрочного инвестирования.

В работе освещается новая мера денежного потока — R-дюрация, иллюстрируются математические связи этой меры с дюрацией Маколея. Также пояснена роль дюрации в принятии решений бюджетирования в условиях неидеального рынка. При сравнении взаимоисключающих проектов фирма обычно пытается максимизировать свой доход путем инвестирования в проекты с высоким NPV, в то время как норма доходности и дюрация проекта остаются на втором плане. Однако, если фирма столкнется с ограничениями капитала в будущем, при принятии инвестиционных решений она должна учитывать дюрацию, IRR и потенциальную IRR будущих проектов наряду с NPV. Описание того, когда и как можно применить дюрацию в бюджетировании, помогает примирить теорию бюджетирования капитала с практикой.

Исследование линейной модели «доходность-дюрация» из статьи [11] дало неоднозначные результаты относительно ее применения. Проведенные вычислительный эксперимент показал нерациональность применения данной модели для формирования портфеля облигаций. Анализ задачи с ослабленными ограничениями выходит за рамки работы и будет проделан в будущем.

Как итог анализа проведенного исследования автором работы была предложена схема для выбора инвестиционного проекта из двух данных в условиях неидеального рынка.

Таким образом, в работе были получены следующие результаты:

- показано, что линейная модель «доходность-дюрация» имеет малую практическую ценность;
- продемонстрировано явление конфликта ранжирования ИП и способы его разрешения;
- сформулирован алгоритм выбора одного из двух взаимосиключающих проектов с учетом неидеальности рынка.

Полученные результаты, во-первых, дают представление о дюрации как инструменте оценивания проектов (в каких-то случаях удачном, в каких-то — нет), во-вторых, позволяют сделать более глубокий анализ проектов.

В дальнейшем планируется проанализировать модифицированную модель «доходность-дюрация» (с ослабленными ограничениями), а также предложить иные методы оценки ИП, тем самым расширив алгоритм выбора из альтернативных проектов для его большей универсальности.

Литература

1. Барбаумов В.Е., Гладких И.М., Чуйко А.С. Финансовые инвестиции с фиксированным доходом (количественный анализ). — М : ГОУ ВПО «РЭУ им. Г.В. Плеханова», 2014.

2. Мельников Р. Сценарный анализ процентного риска портфелей ГКО/ОФЗ // Рынок ценных бумаг. — 2000. — № 21. — С. 64–68.

3. Попова Н.В. О некоторых свойствах дюрации Маколея // Вестник Финансового университета. — 2011. — № 1. — С. 42–46.

4. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бэйли Дж.В. Инвестиции. — М : ИНФРА-М, 1999. — С. 472–473.

5. Barney L. Dwayne Jr., Danielson Morris G. Ranking mutually exclusive projects: The role of duration // The Engineering Economist. — 2004. — no. 49. — P. 43–61.

6. Barney L. Dwayne Jr., Danielson Morris G. Evaluating the reasonableness of an NPV estimate // The Journal of Contemporary Business Issues. — 2008. — Vol. 16, no. 1. — P. 1–7.

7. Beaves Robert G. The case for a generalized net present value formula // The Engineering Economist. — 1993. — Vol. 38, no. 2. — P. 119–133.

8. Beaves Robert G, Stolz Richard W. Technical note: defining project scale // The Engineering Economist. — 2005. — Vol. 50, no. 3. — P. 295–302.

9. Cannaday Roger E., Colwell Peter F., Paley Hiram. Relevant and irrelevant internal rates of return // The Engineering Economist. — 1986. — Vol. 32, no. 1. — P. 17–38.

10. Macaulay F.R. The Movements of Interest Rates. Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856. — New York : National Bureau of Economic Research, 1938.

11. Paroush Jacob, Prisman Eliezer Z. On the relative importance of duration constraints // Managment Science. — 1997. — Vol. 43, no. 2. — P. 198–205.

12. RusBonds, интернет-проект. — Информационное Агентство Финмаркет, 2004–2017. — Дата обращения: 19.05.17. URL: `http://rusbonds.ru/`.

Приложение А

Необходимые экономические понятия

Чистая приведенная ценность (NPV, чистый дисконтированный доход) — разность между суммой дисконтированных доходов и суммой дисконтированных расходов. При выборе из нескольких проектов с разными NPV, выбирается проект с максимальным значением NPV.

Внутренняя норма доходности (IRR) — это процентная ставка, при которой чистая приведённая ценность равна 0. При выборе из нескольких проектов с разными IRR, выбирается проект с максимальным значением IRR. Данный критерий не используется, если денежные потоки несколько раз за рассматриваемый период меняют знак.

Срок окупаемости — период до того момента, когда чистые поступления от проекта сравняются с суммарными инвестициями в него; определяется как отношение первоначальных инвестиций капитала к ежегодным поступлениям от инвестиций. Метод часто оказывается неадекватным, так как игнорирует изменение ценности денег во времени.

Облигация — долговая ценная бумага. Покупатель облигации является кредитором, эмитент облигаций — заемщиком. Эмитент обязан выплатить процентный доход (купонный доход), а также вернуть основную сумму долга (номинальную стоимость). Облигации различаются по сроку обращения и временной схеме выплат.

Приведенная ценность [текущая, дисконтированная, сегодняшняя] — сумма ожидаемого в будущем дохода, дисконтированная на основе определенной процентной ставки

Процентный риск [риск процентной ставки, Interest rate risk] — риск (возможность) возникновения финансовых потерь (убытков) из-за неблагоприятных изменений процентных ставок.

Цена капитала [безрисковая ставка доходности] — ценность привлечения капитала из какого-либо источника; измеряется ставкой процента, выплачиваемой по привлеченному капиталу, то есть уровнем доходности, при котором инвесторы согласны вкладывать в проект.

Индекс прибыльности — отношение приведенной ценности будущих денежных потоков от реализации инвестиционного проекта PV к приведенной ценности первоначальных инвестиций I_0.

Множественная внутренняя норма доходности — ситуация, когда для проекта существует несколько ставок дисконтирования, при которых приведенная ценность поступлений равна приведенной ценности затрат.

Рационирование (нормирование) кредита — ограничение кредитования неценовыми методами. Наблюдается в тех случаях, когда кредиторы выдают ссуды далеко не всем потенциальным заемщикам, готовым платить проценты по назначенной ставке, даже если все они согласны внести соответствующие залоги и отвечают всем прочим требованиям, предъявляемым к их платежеспособности.

Нераспределенная прибыль — чистая прибыль компании, не распределенная среди акционеров, а направленная в резервы или реинвестированная в бизнес.

Совершенный рынок капитала — рынок, на котором отсутствуют налоги и брокерские комиссионные, а все его участники могут совершать инвестирование и финансирование на одинаковых условиях, не зависящих, в частности, от объема средств.

Теория (модель) арбитражного ценообразования — модель, основанная на предположении о наличии полностью диверсифицируемых портфелей; согласно этому предположению, существует конечное число факторов риска, каждый из которых имеет рыночную стоимость; тогда каждый актив должен приносить доходностьв соответствии с содержащимся в нем риском.

Короткая продажа — продажа ценных бумаг при отсутствии их у продавца в момент продажи в надежде на снижение цен и приобретение этих товаров по сниженной цене для их поставки в определенный срок.

Эквивалентный годовой аннуитет — среднегодовой денежный поток за ряд лет, приведенная стоимость которого равна некоторой заданной сумме.

Ставка дисконтирования с поправкой на риск — ставка процента, которая используется для определения текущей стоимости будущих расходов и доходов и учитывает требуемую инвестором надбавку за риск.

Дисконтированный срок окупаемости — время, необходимое для покрытия начальных инвестиций за счет чистого денежного потока по проекту, рассчитанного с учетом ставки дисконтирования.

Избыточная доходность проекта — разность между доходностю ИП и безрисковой ставкой (при $IRR < k$, где k — цена капитала).

Приложение Б

Листинг макросов

К дипломной работе прилагается файл Excel, в котором содержатся следующие материалы:

- Листы с рассчетами приведенных в тексте работы примеров;
- макросы функций Duration, ReturnDuration.

Здесь мы продублируем лишь листинги макросов для ознакомления со структурой функции.

```
Function Duration(k As Integer, r As Double, ParamArray NCF() As Variant) As Double 'к-порядок дюрации
Dim i As Integer, multsum As Double, Sum As Double, n As Integer, n1 As Integer, j1 As Integer, j As Integer

n = UBound(NCF)
Dim a() As Double
ReDim a(0 To n)
    j1 = 0
    For i = LBound(NCF) To n
            If TypeName(NCF(i)) = "Range" Then
                 n1 = NCF(i).Count
                n = n + n1
                ReDim Preserve a(0 To n)
                For j = 1 To n1 'Each elem In NCF(i)
                     a(i + j - 1 + j1) = NCF(i).Cells(j).Value
                Next j
                j1 = j1 + n1 - 1
            ElseIf TypeName(NCF(i)) = "Double" Then
              a(i + j1) = NCF(i)
            End If
        Next i
For i = 1 To UBound(a) + 1
    multsum = multsum + (i ^ k) * a(i - 1) / ((1 + r) ^ i) 'paramArray начинается с 0
    Sum = Sum + a(i - 1) / ((1 + r) ^ i)
Next i
Duration = (multsum / Sum) ^ (1 / k)
End Function
```

Рис. Б.1. Функция Duration

```
Function returnDuration(I0 As Double, k As Double, ParamArray NCF() As Variant) As Double
'платежи денежного потока NCF должны быть равномерно распределены во времени
'и осуществляться в конце каждого периода
Dim i As Integer, NPV As Double, n As Integer, IR As Double, n1 As Integer, j1 As Integer, j As Integer

n = UBound(NCF)
Dim a() As Double
ReDim a(0 To n)

a(0) = I0
j1 = 0
For i = LBound(NCF) To n
If TypeName(NCF(i)) = "Range" Then
                n1 = NCF(i).Count
                n = n + n1
                ReDim Preserve a(0 To n)
                For j = 1 To n1 'Each elem In NCF(i)
                     a(i + j + j1) = NCF(i).Cells(j).Value
                Next j
                j1 = j1 + n1 - 1
            ElseIf TypeName(NCF(i)) = "Double" Then
              a(i + j1 + 1) = NCF(i)
            End If
Next i

IR = IRR(a())
'удаляем первый элемент I0 чтобы воспользоваться функцией NPV
For i = 1 To UBound(a)
  a(i - 1) = a(i)
Next i
ReDim Preserve a(UBound(a) - 1)
NPV = Application.WorksheetFunction.NPV(k, a) 'ЧПС, то есть без учета начальных инвестиций в момент времени 0
returnDuration = Log(-NPV / I0) / (Log((1 + IR) / (1 + k)))
End Function
```

Рис. Б.2. Функция ReturnDuration