Санкт-Петербургский государственный университет

**Кафедра компьютерных технологий и систем**

**Гилязова Юлия Андреевна**

**Выпускная квалификационная работа бакалавра**

**Робастная оптимизация в задачах управления**

**линейным объектом**

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,  
доктор физ.-мат. наук,  
доцент  
Сотникова М. В.

Санкт-Петербург

2017

# Содержание

Введение 3

Глава 1. Постановка задачи 5

1.1. Математическая модель системы магнитной левитации 5

1.2. Постановка задачи синтеза оптимального стабилизирующего

робастного управления 8

1.3. Обзор литературы 10

Глава 2. Синтез робастных регуляторов для системы магнитной

левитации 11

2.1. Синтез линейно-квадратичного регулятора 11

2.2. Синтез робастного управления с использованием

прогнозирующей модели 15

Глава 3. Практическая реализация 21

3.1. Программный комплекс 21

3.2. Результаты имитационного моделирования 24

Выводы 31

Список литературы 32

Приложение 34

# Введение

В настоящее время повсеместно используются системы с автоматическим управлением. В первую очередь всегда встает вопрос построения математической модели системы. К сожалению, математическая модель не может абсолютно точно описать систему в силу ряда причин [1]. К наиболее существенным из них относятся следующие:

1. часть данных, используемых в решении задачи, неизвестны заранее, то есть мы располагаем только предсказаниями, которые, как известно, в любом случае имеют некоторое отклонение от реальных данных;
2. в некоторых случаях нет возможности измерить данные с необходимой точностью, мы знаем их значения лишь приблизительно;
3. так называемые «ошибки реализации», то есть невозможность реализовать на практике полученное решение с высокой точностью.

По причине неточности данных возникает вопрос о том, как учитывать подобные особенности системы при построении управления. Данная область исследований очень важна и актуальна, так как неточность данных встречается в огромном количестве практических задач в разных сферах деятельности. Для решения подобных проблем используются различные методы робастного управления. В данной работе будут рассмотрены два варианта синтеза робастного управления. Первый из них – это LQR-синтез (линейно-квадратичный регулятор) с заданием допустимого частотного коридора вариации математической модели объекта. Второй вариант заключается в синтезе робастного управления с использованием прогнозирующей модели (Model Predictive Control, MPC). Также будет проведен анализ полученных результатов и сравнение указанных методов.

В работе будет рассматриваться построение управления на примере системы магнитной левитации. Система магнитной левитации представляет собой стальной шарик, который находится в воздухе и на который действует две силы: – сила тяжести и – сила притяжения электромагнита. Система магнитной левитации использует магнитное поле для удержания шарика в воздухе в заданной точке. Если шарик находится далеко от электромагнита, то тогда магнитное поле становится не в силах удерживать шарик. Если же шарик находится слишком близко к магниту, тогда магнитное поле становится слишком сильным и заставляет его двигаться по направлению к магниту до соприкосновения с ним. Управляя напряжением, подаваемым на электромагнит, требуется стабилизировать шарик в заданном положении, используя силу притяжения для уравновешивания силы тяжести.

Важно отметить, что математическое описание действия магнитного поля в рассматриваемой системе является крайне сложным и позволяет получить только приближенные модели. В связи с этим для решения задач управления с обеспечением требуемых свойств замкнутой системы необходимо использовать робастные подходы к синтезу законов управления.

На данный момент, в мире активно разрабатывается использование магнитной левитации для создания поездов на магнитной подушке, магнитных подшипников и маховиков. Поэтому тема синтеза управления для систем магнитной левитации актуальна и важна для дальнейшего развития и воплощения в жизнь подобного рода технологий.

# Глава 1. Постановка задачи

В данной главе будет рассмотрена математическая модель системы магнитной левитации и поставлена задача синтеза стабилизирующего робастного управления.

## 1.1. Математическая модель системы магнитной левитации

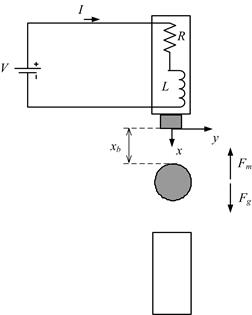
Рассмотрим математическую модель системы магнитной левитации [2]. На рис.1 представлена схема системы магнитной левитации.

Рис. 1. Схема системы магнитной левитации.

На шарик действует две силы: – сила тяжести и – сила притяжения электромагнита. Кроме этого, используются следующие обозначения: – ток, – напряжение, – сопротивление катушки, – индуктивность катушки, – расстояние от шарика до электромагнита.

Введем переменные: , , и составим следующие уравнения, описывающие систему:

, . (1.1)

Здесь – масса шарика, – гравитационная постоянная, – магнитная постоянная, – напряжение, которое является управляющим воздействием, Стоит отметить, что в рассматриваемой системе измеряются только переменные и (система магнитной левитации имеет датчик силы тока, который измеряет ток в электромагните, и оптический датчик для измерения расстояния до шарика), то есть:

Для рассматриваемого устройства магнитной левитации Quanser Maglev [3] расстояние от шарика до электромагнита изменяется в пределах  
 и измеряется в метрах. Остальные значения параметров указаны ниже:

(1.2)

Будем рассматривать динамику системы в отклонениях от положения равновесия где примем равным 0.006 м, а соответствующее ему значение силы тока найдем из соотношения:  
. В результате получим Введем переменные, описывающие систему в отклонениях:

,

а также переменные для измерений: и управляющего воздействия: Теперь составим уравнения линейного приближения для системы (1.1) в окрестности положения равновесия:

, .

Запишем полученную линейную модель в матричной форме:

(1.3)

где коэффициенты Подставим в (1.3) представленные выше значения физических параметров (1.2) и получим номинальную линейную модель объекта управления:

. (1.4)

Далее, построим уравнения дискретной модели с шагом дискретности 0.002 секунды, основываясь на модели (1.4):

(1.5)

Найдём собственные числа матрицы разомкнутой системы (1.4):   
. Одно из собственных чисел () является положительным, из чего мы делаем вывод о неустойчивости нулевого положения равновесия. Собственные числа матрицы разомкнутой системы (1.5) равны: Здесь также одно из чисел () находится вне единичного круга, что свидетельствует о неустойчивости вертикального положения равновесия шарика.

Стоит отметить, что математическая модель, описывающая систему магнитной левитации, задана неточно в силу нескольких причин. Во-первых, это неточности в измерениях оптического датчика, определяющего положение шарика, о чем подробно говорится в работе [4]. Эти неточности вызваны чувствительностью датчика к изменениям в окружающей среде и зашумленностью его измерений. Во-вторых, существенное значение имеет неоднородность магнитного поля, особенно вблизи поверхности электромагнита, и сложность его математического описания. В связи с этим представленные выше уравнения для силы притяжения электромагнита и соответствующие нелинейная (1.1) и линейные (1.4) и (1.5) модели являются приближенными.

При этом линейные модели вида (1.4), описывающие систему магнитной левитации, отличаются в большей степени величиной коэффициента . Поэтому, кроме представленных выше номинальных моделей (1.4) и (1.5), в работе будут использоваться модели, в которых значение коэффициента варьируется в диапазоне: , где ,  
 – номинальное значение коэффициента.

## 1.2. Постановка задачи синтеза оптимального

## стабилизирующего робастного управления

Целью данной работы является разработка методов синтеза стабилизирующего управления линейным объектом, математическая модель которого задана неточно. Как уже было сказано ранее, в качестве объекта принята линейная модель системы магнитной левитации (1.4), один из параметров которой задан неточно, или соответствующая ей дискретная модель (1.5). В данном случае задача управления состоит в том, чтобы стабилизировать шарик в заданном положении, управляя напряжением, которое подается на электромагнит, то есть обеспечить выполнение равенства:

(1.6)

для непрерывной системы и:

(1.7)

в случае дискретной системы, где смещение шарика относительно заданного положения равновесия .

Качество процессов управления будем определять следующим квадратичным функционалом, заданным на движениях непрерывной системы:   
а также аналогичным функционалом:

в случае дискретной модели, которые будут более подробно рассмотрены во второй главе. Здесь – положительно полуопределенная весовая матрица, а – заданное вещественное число.

Ставится задача синтеза закона управления, обеспечивающего достижения цели управления (1.6) или (1.7) для объекта, представленного уравнениями (1.4) или (1.5) соответственно, с минимизацией заданного функционала качества (1.8) или (1.9) с учётом неточности задания математической модели объекта. При этом неточность модели определяется возможной вариацией коэффициента модели (1.4) в пределах , где ,

В соответствии с поставленной задачей рассматриваются следующие подзадачи:

1. синтез закона управления на основе LQR-регулятора для системы магнитной левитации с заданием допустимого частотного коридора вариации математической модели системы магнитной левитации;
2. синтез робастного управления с использованием MPC-подхода для системы магнитной левитации;
3. анализ и сравнение двух выше приведенных подходов.

На примере использования данных подходов синтеза стабилизирующего управления для системы магнитной левитации можно будет понять преимущества и недостатки этих методов в случае модели с неточностями. Это позволит в дальнейшем применять их и для других систем.

## 1.3. Обзор литературы

Тема синтеза управления для системы магнитной левитации была освещена во множестве трудов. Например, в работе [5] рассматриваются вопросы настройки коэффициентов PID-регулятора (пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) регулятор) с использованием LQR-подхода (линейно-квадратичный регулятор). В работе [6] описывается система магнитной левитации и сравниваются три метода построения управления: PID, LQR и Fuzzy Logic. Кроме того, существуют работы, в которых поднимается проблема неточностей в математической модели, описывающей систему магнитной левитации, и рассматриваются варианты решения данной проблемы. В одной из таких работ [4] рассматриваются линейная и нелинейная модели системы и используется -робастное управление для стабилизации положения подвешенного в воздухе шарика, учитывая неточности в математической модели. Также данная проблема освещена в работе [7], в которой рассматривается применение Fuzzy Logic подхода и приведено сравнение данного метода с LQR синтезом.

Кроме того, в некоторых работах использовались асимптотические наблюдатели. Например, в работе [8] использовался наблюдатель расширенного состояния в сочетании с линеаризацией обратной связью для устранения проблем с неточностями в математической модели при синтезе управления.

Это лишь некоторые из работ, написанных за последние годы. Тема синтеза управления для систем магнитной левитации является актуальной и широко исследуется в настоящее время.

# Глава 2. Синтез робастных регуляторов для системы магнитной левитации

В рамках данной главы разработаны два подхода к синтезу оптимального стабилизирующего регулятора.

В первом подходе используется LQR-синтез с учётом допустимого частотного коридора вариации модели. Во втором подходе применяется прогнозирующая модель, учитывающая неточности задания объекта.

## 2.1. Синтез линейно-квадратичного регулятора

Рассмотрим сначала синтез LQR-регулятора в общем случае для стационарных линейных систем, подробно описанный в работе [9]. Пусть дана система следующего вида:

Здесь и – матрицы с постоянными коэффициентами соответствующей размерности, заданный вектор начальных условий.

Управление в форме линейного стабилизирующего регулятора строится таким образом, чтобы обеспечить минимум функционала:   
где знакоположительная матрица, положительно определенная симметрическая матрица, то есть решается оптимизационная задача

где множество матриц с постоянными вещественными компонентами, для которых матрица гурвицева. Нахождение матрицы сводится к отысканию решения матричного алгебраического уравнения Риккати.

Для построения LQR-регуляторов случае системы магнитной левитации рассмотрим линейную модель (1.4). Будем использовать номинальные значения коэффициентов этой модели для синтеза LQR-регулятора и при этом проверять дополнительное условие, выполнение которого гарантирует устойчивость замкнутой системы с возмущенной моделью.

Рассмотрим вопрос анализа робастной устойчивости SIMO-системы (Single Input Multiplе Output, то есть системы, имеющей один скалярный вход и векторный выход) в общем случае. Пусть дана система следующего вида:

(2.2)

*Передаточная матрица* данного *объекта* задается выражением . Тогда tf-моделью рассматриваемого объекта является следующее уравнение:

Учитывая особенности системы магнитной левитации, доступны измерения только по двум компонентам: по смещению шарика и по силе тока. Запишем tf-модель системы магнитной левитации в следующем виде:

,

то есть , а .

По причине того, что мы не обладаем полной информацией о векторе состояния возникает необходимость построения асимптотического наблюдателя, прежде чем строить закон управления системой.

Система асимптотического наблюдателя представляется в виде:

(2.3)

При этом закон управления будет выглядеть следующим образом:

, (2.4)

где вектор состояния наблюдателя.

Применим преобразование Лапласа к левой и правой частям первого равенства (2.3) при нулевых начальных условиях и в результате получим:

Проведём следующие преобразования:

,

. (2.5)

Введём следующие обозначения:

где и будут соответственно первым и вторым столбцами матрицы Тогда (2.5) примет вид:

(2.6)

Стоит отметить, что коэффициенты матрицы выбираются так, чтобы обеспечить устойчивость системы, то есть вещественные части собственных чисел матрицы должны быть отрицательными.

Подставим (2.6) в (2.4) и получим закон управления:, где

Отметим, что матрица базового регулятора может быть найдена с помощью функции **lqr** пакета Control System Toolbox в среде MATLAB.

Теперь рассмотрим вопрос о предельно допустимых границах изменения возмущений модели объекта, которые не приводят к потере устойчивости. Для этого воспользуемся частотным подходом, подробно изложенным в работе [9].

В нашем случае будем считать, что неточности есть только в коэффициенте , где ,

Согласно [9], достаточным условием сохранения устойчивости является выполнение следующего неравенства:

,

где – передаточная функция возмущенного объекта, – номинальная передаточная функция, *относительное возмущение модели*, а функция определяется следующим образом:

.

При этом отношение в правой части рассматриваемого неравенства задает частотную границу робастной устойчивости, которая определяет предельно широкий допустимый "коридор" вариации амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) возмущённой модели объектаЕсли функция находится в пределах указанного частотного "коридора", то гарантируется сохранение устойчивости замкнутой системы с возмущенной моделью объекта для регулятора .

На рис. 2 изображён пример границ робастной устойчивости в случае системы магнитной левитации с номинальной моделью (1.4). Здесь границы робастной устойчивости сформированы для динамического регулятора , соответствующего выбранным фиксированным коэффициентами весовых матриц LQR-регулятора и заданному распределению корней характеристической матрицы асимптотического наблюдателя. На рис. 2 границы робастной устойчивости обозначены пунктиром, АЧХ номинальной модели обозначена красным цветом, модели с коэффициентом синим, а с коэффициентом зеленым.

Важно отметить, что ширину частотного "коридора" можно варьировать с помощью изменения коэффициентов весовых матриц и в функционале (2.1) и полюсов асимптотического наблюдателя (2.3), которые выбираются с учётом того, что вариации АЧХ возмущённой модели объекта должны лежать в пределах границ робастной устойчивости.

Весовые матрицы, которые были использованы при синтезе управления, и полюса асимптотического наблюдателя подробно описаны в главе 3 и в листинге 1.

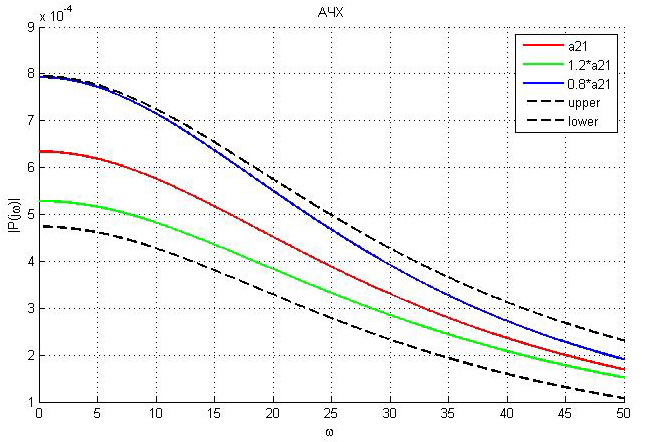


Рис. 2. Границы робастной устойчивости.

## 2.2. Синтез робастного управления с использованием прогнозирующей модели

Рассмотрим применение MPC-подхода для синтеза управления в общем случае [10]. Пусть дана некоторая система разностных уравнений:

(2.7)

Номер такта определяет дискретный момент времени , где – шаг дискретности, –вектор состояния объекта, –управление, –измерение, –внешнее возмущение и –шум в измерениях в момент времени . Матрицы , , –постоянные и имеют соответствующие размерности.

На управляемых движениях системы (2.7) задается квадратичный функционал вида

Здесь значение командного сигнала в момент времени , и положительно определённые симметрические матрицы.

Задача состоит в том, чтобы найти такое управление , при котором функционал (2.8) достигает минимума. Поставленную оптимизационную задачу можно записать как:

Здесь множество произвольных последовательностей m-мерных векторов. Решением данной задачи является дискретный вариант LQR-регулятора, который выглядит следующим образом:

.

Стоит отметить, что собственные значения матрицы должны находиться в открытом круге с радиусом равным единице. Матрица может быть найдена с помощью функции **dlqr** пакета Control System Toolbox в среде MATLAB.

Заметим, что синтез дискретного LQR-регулятора не учитывает возможность неточного задания математической модели объекта. В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать управление с использованием прогноза.

Введем линейную прогнозирующую модель объекта. Она представляется системой разностных уравнений вида:

, (2.9)

где размерности векторов *x, y* и *u* такие же, как и в (2.7), а матрицы близки по норме к матрицам исходной истинной модели (2.7), однако могут не совпадать с ними в виду наличия ряда неточностей.

Модель (2.9) на такте инициируется текущим состоянием реального объекта. При этом для моделей (2.7) и (2.9) выполняются равенства: Тогда конечная последовательность векторов определяемая системой (2.9), будет прогнозом движения реального объекта с горизонтом прогноза . Схема осуществления прогноза для дискретного объекта изображена на рисунке 3.

Пусть горизонты управления и прогноза совпадают, то есть .

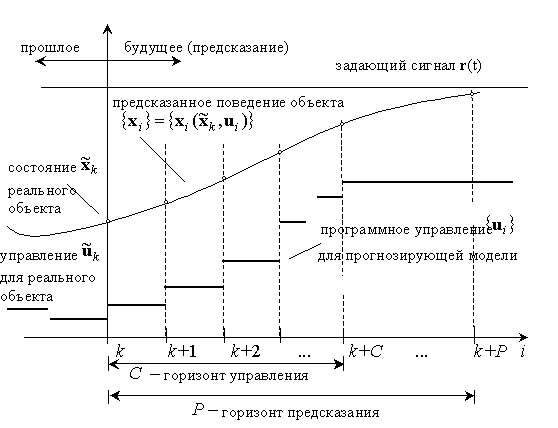


Рис. 3. Схема осуществления прогноза для дискретного объекта.

Ставится задача оптимизации программного движения прогнозирующей модели (2.9) по отношению к квадратичному функционалу

(2.10)

характеризующему качество программного управления прогнозирующей моделью на горизонте прогноза. Здесь и те же матрицы, что и в функционале (2.8), а также введены вспомогательные обозначения

,

,

Представим функционал (2.10) в виде

(2.11)

где

.

Далее найдем оптимальное управление из необходимого условия экстремума. В результате получим:

,

где

,

.

Согласно базовой идее MPC-подхода, на текущем шаге мы используем только первый элемент найденного вектора , определяемый равенством:

.

Здесь первые строк матрицы , а верхний блок размера матрицы .

В нашем случае математическая модель объекта управления задана неточно, поэтому мы не можем использовать только MPC-подход. Необходимо построить робастное управление на основе MPC-подхода, чтобы решить проблему неточностей модели. Отметим, что методам синтеза робастного управления на основе MPC-подхода уделяется существенное внимание в современных публикациях. В частности, этим вопросам посвящена работа [11].

Как и в случае LQR-синтеза, сначала необходимо построить асимптотический наблюдатель, так как доступны измерения только первой и третьей компонент вектора состояния. Более подробно про построение наблюдателя написано выше в параграфе, посвящённом LQR-синтезу.

На первом шаге воспользуемся MPC-подходом для построения регулятора, не учитывая неточностей в модели, то есть примем номинальное значение коэффициента . Зададим вектор начальных условий и командный сигнал , то есть поставим задачу стабилизации шарика в нулевом положении равновесия.

Для формирования управления на основе MPC-подхода рассмотрим дискретную модель (1.5) магнитной левитации, построенную с шагом дискретности с, и примем горизонт прогноза . Соответствующий код программы приведен в листингах 3, 4 и 5.

Теперь перейдем к синтезу регулятора на последующих шагах. Для этого будем использовать задачу оптимизации следующего вида:

.

Опишем процесс синтеза управления подробнее. Сначала необходимо разбить отрезок, в пределах которого может варьироваться коэффициент на конечное число участков. В данной работе принято пять точек, находящихся друг от друга на равном расстоянии:. В каждой точке вычисляется значение квадратичного функционала и находится максимум по параметру на рассматриваемой конечной сетке, то есть определяется значение . Далее находится такой вектор , при котором достигается минимум функционала при наихудшем варианте, то есть рассматривается задача минимакса.

В качестве итога, запишем **алгоритм** действий для синтеза робастного управления на основе MPC-подхода:

1. Задание начального вектора
2. Нахождение максимума:

путём перебора на конечной сетке по параметру

, где ,

1. Переход к следующей итерации, нахождение вектора в зависимости от предыдущего значения в соответствии с алгоритмом безусловной оптимизации.

Переход к пункту 2. Если выполняется критерий остановки численного метода, тогда переход к пункту 4.

1. Найденное оптимальное управление используем на текущем такте. На следующем такте возвращаемся к пункту 1 и повторяем оптимизацию заново.

# Глава 3. Практическая реализация

В ходе работы возникает необходимость проверки на практике полученных законов управления. Для этого используются методы компьютерного и имитационного моделирования.

Осуществить подобную проверку возможно в среде MATLAB с использованием прикладного пакета Simulink. Пакет Simulink позволяет строить динамические модели, например, в данной работе использовались дискретная и непрерывная системы. Кроме того, пакет дает возможность выполнять имитационное моделирование и анализировать полученные модели, задавая нужные пользователю параметры. Более подробную информацию о пакете Simulink и его возможностях можно найти в работах [12] и [13].

## 3.1. Программный комплекс

На рисунках 4 и 5 представлены структуры компьютерных моделей систем управления, которые используются в данной работе. На рис. 4 показана Simulink-модель системы управления, построенной на основе LQR-подхода, а на рис. 5 – Simulink-модель системы управления с MPC-регулятором. Обе модели представляют собой совокупности следующих главных блоков: Model, Controller и Observer.

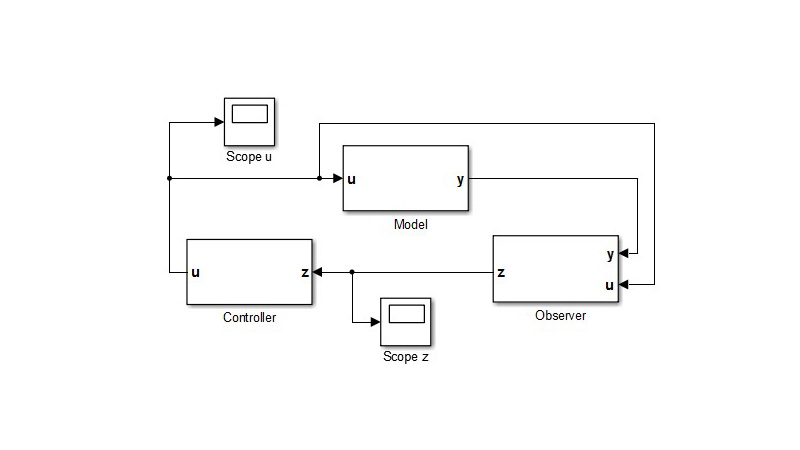
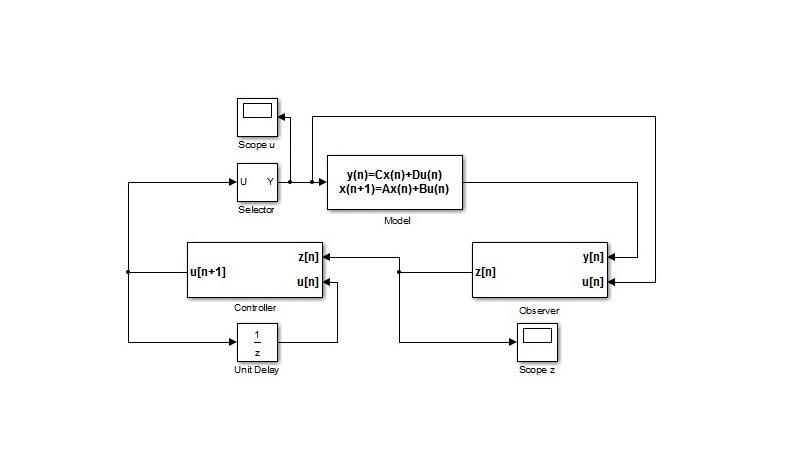


Рис. 4. Simulink-модель системы управления на основе LQR-подхода.

Рис. 5. Simulink модель системы управления на основе MPC-подхода.

Модель системы магнитной левитации реализуется с помощью блока Model в двух вариантах. В первом случае система является непрерывной, а во втором – дискретной. На вход этих блоков подается управление *u*, а выходом является вектор измерений **y**. При этом сигнал управления формируется блоком Controller. В случае LQR-синтеза (рис. 4) блок Controller получает на вход только вектор оценки состояния, который поступает в него из блока Observer. Блок Observer является асимптотическим наблюдателем, принимающим на вход вектор измерений ***y*** и управление *u*. В случае применения MPC-подхода (рис. 5) на вход блока Controller подаётся не только вектор оценки состояния системы **z**, но и вектор управления , построенный на предыдущем шаге, что связано с особенностями синтеза управления в этом подходе.

Как уже было сказано выше, блок Observer является асимптотическим наблюдателем, а блок Controller–регулятором. На вход блок Observer принимает только два из трех параметров системы: положение шарика, которое измеряется с помощью оптического датчика, и силу тока. С помощью асимптотического наблюдателя получаем оценки вектора состояния модели.

Блоки Scope позволяют получить визуализацию оценки вектора состояния и управляющего сигнала. Визуализация дает возможность наглядно сравнить полученные результаты.

Стоит отметить, что на выходе блока Controller в случае использования MPC-подхода мы получаем вектор, а не скалярную величину как в LQR-синтезе. Поэтому из этого вектора берется только первая компонента с помощью блока Selector и передается в качестве управления в блок Model.

Теперь подробнее рассмотрим устройство отдельных блоков. Начнем с устройства блоков, используемых при LQR-синтезе. На рис. 4 представлен блок Controller, а его внутреннее устройство приведено на рис. 6. С помощью усилителя (Gain) формируем регулятор вида (2.2). Усилитель содержит параметр из рабочей области, соответствующий его названию, в данном случае это матрица **K**. Также рассмотрим содержимое блока Observer, показанное на рис. 7. Он представляет собой ss-модель (State-Space), которая получает на вход управление и вектор измерений, а на выходе дает оценку вектора состояния **z**.

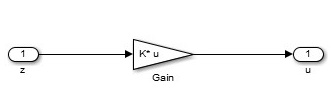


Рис. 6. Блок Controller.

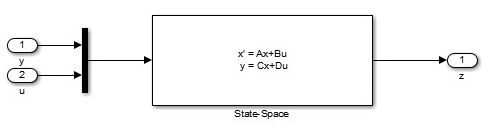


Рис. 7. Блок Observer.

Рассмотрим теперь устройство блоков, используемых для синтеза управления с помощью MPC-подхода. Во-первых, это блок Observer, представленный на рис. 8. С помощью блока Discrete State Space обрабатывается входной сигнал управления и вектор измерений, а на выходе получается оценка вектора состояния системы. То есть эта схема аналогична блоку Observer для LQR-синтеза, но только в дискретном времени. Во-вторых, рассмотрим блок Controller на рис. 9. Здесь построение регулятора реализуется с помощью стандартного блока Interpreted MATLAB Function из библиотеки Simulink. Данный блок принимает на вход вектор оценки состояния и вектор управления, полученного на предыдущем шаге, а на выходе формирует вектор управления для нового горизонта прогноза.

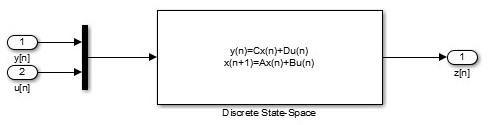
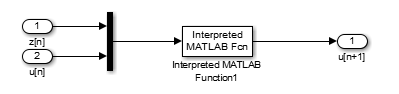
Рис. 8. Блок Observer.

Рис. 9. Блок Controller.

Функция, вызываемая в блоке Controller (рис. 9) подробно описана в листинге 4. В свою очередь она вызывает функцию **myfun**, представленную в листинге 5, которая находит матрицы и для заданного значения коэффициента из диапазона

Далее, с помощью функции **fminunc** пакета Optimization Toolbox находится оптимальный вектор управления, при котором функционал (2.11) достигает наименьшего значения. Отметим, что в качестве начальной точки на первом шаге алгоритма берется вектор управления, найденный с помощью базового варианта MPC-подхода, не учитывающего вариацию параметра , а в дальнейшем в качестве начального значения для оптимизации принимается вектор с предыдущего шага.

## 3.2. Результаты имитационного моделирования

Как уже было сказано ранее, в работе используется математическая модель системы (1.4) для LQR-синтеза и модель (1.5) для MPC-подхода. В качестве начальных условий для обеих моделей примем вектор   
. Более подробно задание начальных данных можно посмотреть в листингах 1 и 3.

Для начала рассмотрим LQR-синтез в соответствии с рассмотренными выше теоретическими положениями. Отметим, что на конечный результат работы замкнутой системы влияет выбор весовых матриц , в функционале (2.1) и назначение полюсов при построении асимптотического наблюдателя (2.5). Необходимо выбирать эти настраиваемые элементы таким образом, чтобы, во-первых, АЧХ возмущенного объекта при любых вариациях параметра находилась в пределах границ робастной устойчивости. Во-вторых, обеспечить необходимое качество переходного процесса.

На основе проведенных вычислительных экспериментов, были выбраны следующие значения параметров:

Здесь и – настраиваемые весовые матрицы функционала, а вектор полюсов характеристического полинома асимптотического наблюдателя, которые должны быть расположены в левой половине комплексной плоскости. Отметим, что при выборе коэффициентов весовых матриц необходимо помнить, что чем больше *i*-ый элемент на диагонали в матрице , тем сильнее подавляется соответствующая компонента в переходном процессе. Для числа наоборот: чем меньше значение, тем энергичнее работает управление. Заметим, что при построении управления можно варьировать эти параметры в зависимости от поставленных целей.

При реализации MPC-подхода, на основе проведенных экспериментов, были выбраны следующие параметры функционала (2.10) и полюса характеристического полинома асимптотического наблюдателя:

Как и при LQR-синтезе, здесь есть возможность варьировать данные настраиваемые параметры.

Сравним полученные результаты синтеза управления для LQR- и MPC-подходов. Для этого посмотрим графики переходных процессов с помощью компьютерных моделей из предыдущего параграфа. В дальнейшем на всех рисунках результат работы LQR-регулятора будет обозначен синим цветом, а регулятора, построенного с помощью MPC-подхода – зеленым.

**На рисунках 10-12 представлены графики переходных процессов по компонентам и при номинальном значении коэффициента

Рис. 10. Переходный процесс для смещения *x*.

На рис. 10 можно заметить, что стабилизация положения шарика при использовании MPC-подхода происходит в промежутке 0.2-0.3 секунды, в то время как LQR-синтез даёт результат около 0.7 секунды. При этом стоит отметить, что если LQR-синтез дает апериодический процесс, то MPC–колебательный.

Подобные результаты дают и графики, изображенные на рис. 11 и 12. Можно сделать предварительный вывод по данным результатам о том, что MPC-подход позволяет в более короткий промежуток времени стабилизировать рассматриваемую систему.

Рис. 11. Переходный процесс для силы тока *I*.

Рис. 12. Входное напряжение *u*.

Далее, на рисунках 13-15 рассмотрим переходный процесс по компонентам и при значении коэффициента , составляющего 80% от номинального значения.

Рис. 13. Переходный процесс для смещения *x*.

Рис. 14. Переходный процесс для силы тока *I*.

Рис. 15. Входное напряжение *u*.

На рис. 13 можно заметить, что стабилизация положения шарика при использовании MPC-подхода происходит намного быстрее, нежели чем при использовании LQR-синтеза. Как и на рисунках 10-12 LQR-синтез дает апериодический процесс, а MPC–колебательный. При этом стоит отметить, что число колебаний на рис. 13 при использовании MPC-подхода выросло по сравнению с рис.10. Аналогичные результаты получаются и на рис. 14 и 15.

На рисунках 16-18 приведен переходный процесс по компонентам и при значении коэффициента , составляющего 120% от номинального значения.

Рис. 16. Переходный процесс для смещения *x*.

Рис. 17. Переходный процесс для силы тока *I.*



Рис. 18. Входное напряжение *u*.

Как можно заметить из рис. 16 LQR-подход даёт сильное перерегулирование и время переходного процесса в этом случае значительно больше по сравнению с MPC-подходом. Подобным образом можно охарактеризовать и переходные процессы на рис. 17 и 18.

Для большей наглядности рассмотрим некоторые из основных характеристик качества переходных процессов, представленные в таблице 1. Здесь время переходного процесса обозначено как .

Данные, приведенные в таблице 1, были получены с помощью функции **stepinfo** пакета Control System Toolbox в среде MATLAB.

Информация, представленная в данной таблице, позволяет понять, что использование робастного управления на основе MPC-подхода по сравнению с LQR даёт значительно меньшее время регулирования и несколько меньшую величину перерегулирования.

Таблица 1. Характеристики качества переходных процессов.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | LQR | | | MPC | | |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0.49 | 0.646 | 0.946 | 0.278 | 0.213 | 0.222 |

Стоит отметить, что есть возможность в дальнейшем улучшать качество переходных процессов при использовании MPC-подхода, варьируя коэффициенты весовых матриц , и полюса асимптотического наблюдателя. Кроме того, возможно развитие предложенного подхода с целью учета ограничений на управляющие и контролируемые переменные.

# Выводы

В ходе выполнения работы получены следующие результаты:

1. Построена математическая модель системы магнитной левитации.
2. Построены два варианта законов автоматического управления, стабилизирующие нулевое положение равновесия системы, математическая модель которой имеет неточности.
3. Разработан имитационно-моделирующий комплекс и проведен сравнительный анализ двух способов синтеза управления.

Сравнительный анализ показал, что использование робастного управления на основе MPC-подхода позволяет значительно быстрее стабилизировать систему магнитной левитации как при номинальном значении коэффициента , который задан неточно, так и при значениях данного коэффициента, составляющих 80% и 120% от номинального.

Стоит отметить, что варьируя некоторые параметры при синтезе регулятора на основе MPC-подхода и вводя ограничения на колебательность процессов, возможно улучшить качество управления.

# Список литературы

1. A. Ben-Tal, L. El-Ghaoui, A. Nemirovski. Robust Optimization. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. 570 p.
2. Сотникова М.В. Многоцелевые законы цифрового управления подвижными объектами: диссертация ... доктора физико-математических наук : 05.13.01; [Место защиты: С.-Петерб. гос. ун-т]. - Санкт-Петербург, 2016. - 371 с.
3. MAGLEV .2007. Magnetic Levitation Plant. User Manual. Quanser.
4. Choudhary, Santosh Kr. Robust feedback control analysis of magnetic levitation system // WSEAS Transaction on Systems, 2014. Vol. 13. P. 285.
5. E. Vinodh Kumar, Jovitha Jerome. LQR based optimal tuning of PID controller for trajectory tracking of magnetic levitation system // Procedia Engineering, 2013. Vol. 64. P. 254-264.
6. PID, fuzzy and LQR controllers for magnetic levitation system.https://www.researchgate.net/publication/309778592\_PID\_fuzzy\_and\_LQR\_controllers\_for\_magnetic\_levitation\_system (дата обращения: 28.04.2017).
7. Tania Tariq Salim, Vedat Mehmet Karsli. Control of Single Axis Magnetic Levitation System Using Fuzzy Logic Control // International Journal of Advanced Computer Science and Applications, 2013. Vol. 4, No. 11. P. 83-88.
8. Robust Uncertainty Compensation in MagLev by using Extended State Observer. https://www.researchgate.net/publication/313953610\_Robust\_uncertainty\_compensation\_in\_MagLev\_by\_using\_extended\_state\_observer (дата обращения: 28.04.2017).
9. Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью. СПб.: Лань, 2013. 448 с.
10. Е.И. Веремей, М.В. Сотникова. Управление с прогнозирующими моделями: учебное пособие. Воронеж: Издательство «Научная книга», 2016. - 214 с.
11. Bemporad A., Morari M. Robust Model Predictive Control: A Survey // Robustness in Identification and Control, 1999.Vol. 245. P. 207-226.
12. Дьяконов В. П. Simulink 5/6/7: Самоучитель.– М.: ДМК-Пресс, 2008.   
    784 с.
13. Черных И.В. Simulink. Среда создания инженерных приложе­ний.­­– М.: Диалог-МИФИ, 2004. 496 с.

# Приложение

В этой части работы приведены исходные коды программ на языке MATLAB, которые использовались в ходе исследования.

В листинге 1 приведен код, инициализирующий параметры математической модели системы магнитной левитации для LQR-синтеза и построения асимптотического наблюдателя.

**Листинг 1**

clear;

% Parameters

global L R Km M xb0 I0 g;

L = 0.4125;

R = 11;

Km = 6.5308e-005;

M = 0.068;

xb0 = 0.006;

I0 = 0.86;

g = 9.81;

% Linear model

global a21 a23 a33 b0;

a21 = 2\*g/xb0; a23 = -2\*g/I0;

a33 = -R/L; b0 = 1/L;

A = [0 1 0; a21 0 a23; 0 0 a33];

Amin = [0 1 0; 0.8\*a21 0 a23; 0 0 a33];

Amax = [0 1 0; 1.2\*a21 0 a23; 0 0 a33];

B = [0;0;b0];

C = [1 0 0; 0 0 1];

D = [0;0];

x0(1) = 0.006;

x0(2) = 0;

x0(3) = x0(1)/sqrt(Km/(2\*g\*M));

% LQR

lyambda = 0.0001;

Q = diag([10 10 200]);

K = -lqr(A,B,Q,lyambda);

% Observer

p = [-0.5; -240; -320];

G = place(A',C',p);

G = G';

В листинге 2 представлена программа, отображающая график АЧХ, изображенный на рис. 2.

**Листинг 2**

% Models

sys = ss(A,B,C,D);

tfsys = tf(sys);

[b,a] = ss2tf(A,B,C,D);

[bmin,amin] = ss2tf(Amin,B,C,D);

[bmax,amax] = ss2tf(Amax,B,C,D);

% Frequency response

w = 0:0.1:50;

b = b(1,4);

bmin = bmin(1,4);

bmax = bmax(1,4);

h = freqs(b,a,w);

hmin = freqs(bmin,amin,w);

hmax = freqs(bmax,amax,w);

% Graphic

grid on;

hold on;

title('АЧХ');

xlabel('\omega');

ylabel('|P(j\omega)|');

plot(w, abs(h),'r', 'LineWidth',2);

hold on;

plot(w, abs(hmax),'g', 'LineWidth',2);

hold on;

plot(w, abs(hmin),'b', 'LineWidth',2);

% Border of robust stability

sysF = ss(A-G\*C,[B G],eye(3),zeros(3));

F = tf(sysF);

Ks = -K\*F(1:3,2)/(1-K\*F(1:3,1)-K\*F(1:3,3)\*tfsys(2));

T = Ks\*inv(1+tfsys(1)\*Ks)\*tfsys(1);

[num,den] = tfdata(T,'v');

TT = freqs(num,den,w);

Wdmax = (1+1./abs(TT)).\*abs(h);

Wdmin = (1-1./abs(TT)).\*abs(h);

plot(w, Wdmax, 'k--', 'LineWidth',2);

hold on;

plot(w, Wdmin, 'k--', 'LineWidth',2);

legend('a21','1.2\*a21','0.8\*a21','upper','lower');

В листинге 3 представлена инициализация параметров дискретной модели системы магнитной левитации, асимптотического наблюдателя и начальное значение вектора MPC-управления.

**Листинг 3**

clear;

% Parametres

global L Rc Km M xb0 I0 g;

L = 0.4125;

Rc = 11;

Km = 6.5308e-005;

m = 0.068;

xb0 = 0.006;

I0 = 0.86;

g = 9.81;

% Linear model

global a21 a23 a33 b0;

a21 = 2\*g/xb0; a23 = -2\*g/I0;

a33 = -Rc/L; b0 = 1/L;

A = [0 1 0; a21 0 a23; 0 0 a33];

Amin = [0 1 0; 0.8\*a21 0 a23; 0 0 a33];

Amax = [0 1 0; 1.2\*a21 0 a23; 0 0 a33];

B = [0;0;b0];

C = [1 0 0; 0 0 1];

D = [0;0];

x0(1) = 0.006;

x0(2) = 0;

x0(3) = x0(1)/sqrt(Km/(2\*g\*m));

Ts = 0.002;

P = 100;

global Q R L5 M5 x0 u0;

sys = ss(A,B,C,D);

x0 = [0.006; 0; 0.86];

sys\_d = c2d(sys, Ts);

Q = eye(P);

R = eye(2\*P);

[Ad,Bd,Cd,Dd] = ssdata(sys\_d);

p = [-0.2; -0.2001; -0.2002];

G = place(Ad',Cd',p);

G = G';

L = Cd\*Ad;

[rows,cols] = size(Cd\*Bd);

M = [];

for i = 2:P

L = [L;Cd\*Ad^i];

end

for i = 1:P

if (i == 1)

Mc = Cd\*Bd;

else

Mc = zeros(rows,cols);

end

Mr = Bd;

for j = 2:P

if (j < i)

Mc = [Mc;zeros(rows,cols)];

elseif (i == j)

Mc = [Mc;Cd\*Bd];

else

Mr = Cd\*Ad^(j-i)\*Bd;

Mc = [Mc;Mr];

end

end

M = [M Mc];

end

K = -inv(M.'\*R\*M+Q)\*M.'\*R\*L;

T = i nv(M.'\*R\*M+Q)\*M.'\*R;

u0 = K\*x0;

A5 = zeros(3,3,5);

L5 = zeros(200,3,5);

M5 = zeros(200,100,5);

b = A(2,1)\*0.7;

for i = 1:5

A5(:,:,i) = A;

A5(2,1,i) = b;

b = b+A(2,1)\*0.15;

sys = ss(A5(:,:,i),B,C,D);

sys\_d = c2d(sys, Ts);

[Ad,Bd,Cd,Dd] = ssdata(sys\_d);

clear L M;

L = Cd\*Ad;

for k = 2:P

L = [L;Cd\*Ad^k];

end

L5(:,:,i) = L;

M = [];

for k = 1:P

if (k == 1)

Mc = Cd\*Bd;

else

Mc = zeros(rows,cols);

end

Mr = Bd;

for j = 2:P

if (j < k)

Mc = [Mc;zeros(rows,cols)];

elseif (k == j)

Mc = [Mc;Cd\*Bd];

else

Mr = Cd\*Ad^(j-k)\*Bd;

Mc = [Mc;Mr];

end

end

M = [M Mc];

end

M5(:,:,i) = M;

end

В листинге 4 описана функция, вызываемая в блоке Controller, показанного на рис. 9. На вход функция получает оценку вектора состояния, полученную с помощью наблюдателя и управление, найденное на предыдущем шаге, а возвращает вектор управления.

**Листинг 4**

function [ y ] = MPC( u )

global u0 x0;

if (u(4:end) == 0)

uu = u0;

x = x0;

else

uu = u(4:end);

x = u(1:3);

end

options = optimoptions('fminunc','Algorithm','quasi-newton');

y = fminunc(@myfun,uu,options,x);

end

В листинге 5 описана функция, используемая при оптимизации из листинга 4. Данная функция находит максимальное значение функционала при заданном управлении с учетом вариации коэффициента .

**Листинг 5**

function [ max ] = myfun( u, x )

global Q R M5 L5;

max = 0;

for i = 1:5

cur = u'\*Q\*u+(L5(:,:,i)\*x+M5(:,:,i)\*u)'\*R\*(L5(:,:,i)\*x+

+M5(:,:,i)\*u);

if (cur >= max)

max = cur;

Lmax = L5(:,:,i);

Mmax = M5(:,:,i);

end

end

max = u'\*Q\*u+(Lmax\*x+Mmax\*u)'\*R\*(Lmax\*x+Mmax\*u);

end