

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Шихова Ксения Александровна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Математическое моделирование
распределения транспортных потоков
с эластичным спросом**

Направление 010400

Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Крылатов А. Ю.

Санкт-Петербург

2017

Содержание	
Введение	3
Обзор литературы	6
Постановка задачи	8
Глава 1. Моделирование транспортной сети параллельных каналов с эластичным спросом	10
§1.1. Случай линейной загрузки транспортной сети	10
§1.2. Случай квадратичной загрузки транспортной сети	11
Глава 2. Применение решения задачи распределения транспортных потоков на сети параллельных маршрутов с эластичным спросом	14
§2.1. Применение к экспериментальным данным методологического решения для случая линейной загрузки сети	14
§2.2. Анализ полученных результатов	15
Заключение	19
Список литературы	20
Приложение	22

Введение

Отлаженные транспортные системы сегодня способствуют экономическому и социальному развитию городов. Автомобильные заторы, запутанная городская дорожная сеть, сложность прокладки новых и невозможность расширения уже существующих путей в исторических центрах, - все это не полный перечень актуальных проблем транспортных систем растущих городов и развивающихся связей между ними. Поэтому, можно с уверенностью сказать, что использование математического аппарата для выявления и анализа проблем, а также поисков решения для них уже давно является не прихотью, а необходимостью.

Английский профессор, Ричард Олсоп однажды сказал: "Вся прелесть транспортной науки в том, что она показала наличие законов наподобие законов природы. Тогда они должны объяснять транспорт вместе, не отдельно. То есть экономические и социальные науки вместе с инженерными и естественными науками должны соединиться с публичной политикой и социальным заказом. Это и есть транспортные исследования". С данным утверждением нельзя не согласиться.

Многие модели планирования, загрузки и оптимизации транспортных сетей берут свое начало из моделей, полученных в результате анализа природных явлений. Так например, прототипом гравитационной модели, предложенной для оценки межрайонных корреспонденций, можно считать модель всемирного тяготения, которая описывает взаимодействие между всеми материальными телами. В основе энтропийной модели транспортного моделирования, как и в энтропии из термодинамики и статистической физики, лежит вероятность осуществления макроскопического события. А макроскопические

(гидродинамические) модели динамики транспортных потоков, описывающие движение транспорта в терминах плотности, средней скорости, потока и т.д., рассматривают транспортный поток как движение специфической жидкости.

Однако такой связи наук недостаточно. Современные исследования должны стремиться удовлетворить социальный заказ. Значит, наиболее востребованы сегодня практически применимые результаты. Поэтому, целью данной работы является не только поиск методологического решения для равновесного распределения транспортных потоков между параллельными маршрутами, но и применение полученных результатов на реальных данных.

Задача равновесного распределения транспортных потоков — классическая задача теории транспортных процессов. В общем случае целью такой задачи является нахождение количества путей, по которым происходит передвижение из района отправления в район прибытия, а также в каких отношениях происходит распределение потока среди маршрутов, соединяющих пару этих районов.

В основе модели равновесного распределения лежит следующее допущение: все участники движения выбирают тот маршрут следования, при котором индивидуальная обобщенная цена поездки будет минимальной. Также считается, что после некоторого числа "проб и ошибок" система придет в равновесие с характерными ему свойствами:

1. Цена перемещения из района отправления в район прибытия по каждому используемому пути системы равна для всех участников движения
2. Цена перемещения из района отправления в район прибытия по неиспользуемым маршрутам превышает цену по используемым.

Последние свойства получили свое широкое распространение под названием

принципы Вардропа[1]. Они были сформулированы еще в середине прошлого века, однако их применение началось лишь в 70 -е годы 20 -го века[2, 3]

Отсутствие глобального критерия, который в равновесном состоянии системы достигал бы своего минимума или максимума, в формулировке является источником сложности задачи поиска равновесного распределения. Однако, если ввести несколько упрощающих предположений, такой глобальный критерий может быть найден[4]. Поэтому, задачу поиска равновесного распределения транспортных потоков можно рассматривать, как оптимизационную.

Обзор литературы

При написании данной работы были использованы статьи в периодических изданиях и научная литература.

Исследованные источники предоставляют теоретическую информацию по тематике исследуемого вопроса, общие сведения о решении проблемы, не предлагая конкретного алгоритма решения поставленной задачи.

В качестве вводного материала был рассмотрен обзор кандидата физико-математических наук Швецова В.И. под названием "Математическое моделирование транспортных потоков"[5]. Освоение данной работы позволило составить представление о классических транспортных моделях, подходах к их изучению и способах решения поставленных задач. В результате был сделан вывод, что модель равновесного распределения с эластичным спросом на поток является оптимизационной, динамической моделью с дискриптивным подходом.

Основным теоретическим обоснованием послужили работы Захарова В.В., Крылатова А.Ю. и Wardrop J.G..

Статья Крылатова А.Ю. "Оптимальные стратегии управления транспортными потоками на сети из параллельных каналов"[6] посвящена аналитическому решению задачи распределения транспортного потока в заданной сети при фиксированном спросе. Вместе с другой работой этого автора, написанной в соавторстве с Захаровым В.В., "Конкурентное равновесие Вардропа на транспортной сети из параллельных, неоднородных маршрутах"[7], они являются прямыми предшественниками данных исследований, представляют теоретическую базу, которая была расширена на случай эластичного спроса. Однако, стоит отметить, что случай фиксированного спроса в сети

из параллельных каналов для задачи поиска конкурентного равновесия был рассмотрен и в других работах авторов:[8, 9, 10].

В работе Patriksson M.[11] рассмотрены модели и методы решения задач, как для случая фиксированного спроса на сеть, так и для эластичного. Автор исследует задачи в широком вариационном классе. Однако, такой подход не позволяет находить решение для частных случаев загрузки сети, которые представлены в настоящей работе.

Постановка задачи

Рассмотрим транспортную сеть, представленную ориентированным графом с одной парой исток-сток и n параллельными дугами между ними. Исток будем ассоциировать с пунктом отправления и сток с пунктом прибытия, а саму пару называть ОП-парой. Параллельные дуги определим как независимые маршруты между ОП-парой.

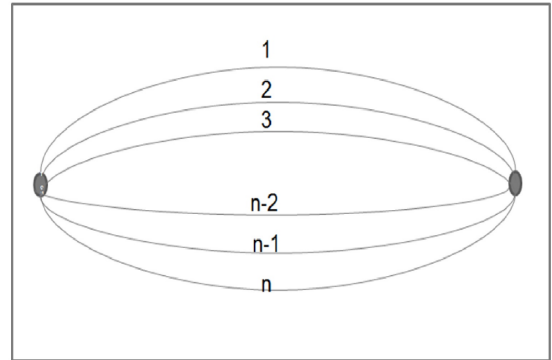


Рис. 1. Транспортная сеть параллельных маршрутов

Параллельные дуги определим как независимые маршруты между ОП-парой.

Обозначим $F = g(t^*)$ эластичный транспортный спрос между ОП-парой, зависящий от равновесного времени перемещения t^* . Для него справедливо следующее распределение по маршрутам $f = (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)$, где f_i — транспортный поток по i -ому маршруту, $i = \overline{1, n}$. Тогда $\sum_{i=1}^n f_i = F$.

Время движения (задержки) по загруженной дуге i будем моделировать линейной функцией $t_i(f_i) = a_i + b_i f_i$

Согласно определению, распределение потока F по имеющимся дугам $f^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$, при котором время путешествия между ОП-парой одинаково для каждой используемой дуги и меньше времени свободного движения по любой неиспользуемой дуге, называется конкурентным равновесием в сети из параллельных маршрутов.[1] Математическая запись данного определения выглядит следующим образом:

$$t_i(f_i^*) \begin{cases} = t^* > 0 & \text{при } f_i^* > 0, \\ > t^* & \text{при } f_i^* = 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}.$$

Сформулируем задачу транспортной сети из параллельных маршрутов. Требуется найти такой вектор транспортных потоков $f^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ в сети,

для которого будут выполнены следующие требования:

1. Поток в сети непрерывен
2. Поток в сети неотрицателен
3. Поток в сети аддитивен
4. Распределение потока в сети согласовано в Принципом Вардропа

Тогда, математически задача сводится к минимизации следующей целевой функции[4]:

$$z(f^*, F^*) = \min_{f, F} z(f, F) = \min_{f, F} \left\{ \sum_{i=1}^n \int_0^{f_i} t_i(u) du - \int_0^F g^{-1}(u) du \right\}, \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n f_i = F, \quad (2)$$

$$f_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Для справедливости дальнейших исследований, не умаляя общности, перенумеруем маршруты следующим образом

$$a_1 \leq \dots \leq a_n. \quad (4)$$

Глава 1. Моделирование транспортной сети параллельных каналов с эластичным спросом

§1.1. Случай линейной загрузки транспортной сети

Теорема 1 Если $g^{-1}(F) = T - rF$, тогда конкурентное равновесие в задаче (1)–(3), при выполнении (4), достигается следующим распределением потока:

$$f_i^* = \begin{cases} \frac{1}{b_i} \frac{F^* + \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{b_s}}{\sum_{s=1}^k \frac{1}{b_s}} - \frac{a_i}{b_i} & \text{при } f_i^* > 0, \\ 0 & \text{при } f_i^* = 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, n},$$

где

$$F^* = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{1}{b_i} (T - a_i)}{1 + r \sum_{i=1}^k \frac{1}{b_i}}, \quad (5)$$

а количество используемых маршрутов k таково, что

$$\sum_{i=1}^k \frac{a_k - a_i}{b_i} < \frac{\sum_{i=1}^k \frac{1}{b_i} (T - a_i)}{1 + r \sum_{i=1}^k \frac{1}{b_i}}, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_{k+1} - a_i}{b_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{b_i} (T - a_i)}{1 + r \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{b_i}}. \quad (7)$$

Доказательство. Известно, что равновесное время передвижения t^* между ОП-парой является множителем Лагранжа, соответствующим ограничению (2), оптимизационной задачи (1)–(3) [11]:

$$L = \sum_{i=1}^n \int_0^{f_i} t_i(u) du - \int_0^F \frac{1}{u} du + t^* \left(F - \sum_{i=1}^n f_i \right) + \sum_{i=1}^n \eta_i (-f_i),$$

где $\eta_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$ — множители Лагранжа, соответствующие ограничению (3), оптимизационной задачи (1)–(3). Дифференцируя данный Лагранжиан по F и f_i , $i = \overline{1, n}$, и приравнявая полученные к нулю, получим

$$a_i + b_i f_i = t^* + \eta_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

$$t^* = T - rF. \quad (9)$$

Воспользовавшись условием дополняющей нежесткости из условий Куна — Таккера к (8), приходим к $f_i \eta_i = 0$. Равенство имеет смысл, по крайней мере в двух случаях. Если $f_i = 0$, тогда $\eta_i \geq 0$ и $t^* = a_i - \eta_i$. Последнее равенство означает, что время движения по загруженной дуге i будет меньше времени движения по свободной дуге, но такое невозможно. Если же $f_i > 0$, то $\eta_i = 0$, а значит $a_i + b_i f_i = t^*$. Выразив f_i , получаем: $f_i = \frac{t^* - a_i}{b_i}$. [6]

Следовательно, конкурентное равновесие на сети из параллельных каналов с фиксированным спросом, при выполнении (4), достигается следующим распределением транспортного потока F :

$$f_i^* = \begin{cases} \frac{1}{b_i} \frac{F + \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{b_s}}{\sum_{s=1}^k \frac{1}{b_s}} - \frac{a_i}{b_i} & \text{при } f_i^* > 0, \\ 0 & \text{при } f_i^* = 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, n},$$

где количество используемых маршрутов k определяется из неравенств

$$\sum_{i=1}^k \frac{a_k - a_i}{b_i} < F \leq \sum_{i=1}^k \frac{a_{k+1} - a_i}{b_i} \quad (10)$$

и при этом

$$t^* = \frac{F + \sum_{s=1}^k \frac{a_s}{b_s}}{\sum_{s=1}^k \frac{1}{b_s}}. \quad (11)$$

Теперь, если подставить (11) в (9) и выразить F , то получим (5). Если (5) подставить в (10), то получим (6) и (7).

Теорема доказана.

Представленные результаты были опубликованы в работе [12].

§1.2. Случай квадратичной загрузки транспортной сети

Теорема 2 Если $g^{-1}(F) = \frac{1}{t^*}$, тогда конкурентное равновесие в задаче (1)–(3), при выполнении (4), достигается следующим распределением потока:

$$f_i^* = \begin{cases} \left(\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \left(\frac{a_i}{b_i} \right)^2} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{b_i} - \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{2b_i} \right) a_i} - 1 \right) \frac{a_i}{b_i} & \text{при } t^* > a_i, \\ 0 & \text{при } t^* < a_i, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

значение потока при заданной топологии сети задается формулой:

$$F = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \left(\frac{a_i}{b_i} \right)^2} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{b_i} - \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{2b_i}, \quad (13)$$

а множество используемых маршрутов k таково, что

$$a_i \leq \frac{1}{-\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{2b_i} + \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \left(\frac{a_i}{b_i} \right)^2} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{b_i}} \quad (14)$$

Доказательство. Структура настоящего доказательства аналогична доказательству теоремы (1). Рассмотрим Лагранжиан

$$L = \sum_{i=1}^n \int_0^{f_i} t_i(u) du - \int_0^F \frac{1}{u} du + t^* \left(F - \sum_{i=1}^n f_i \right) + \sum_{i=1}^n \eta_i (-f_i),$$

, где t^* — множитель Лагранжа для ограничения (2), а $\eta_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$ для ограничения (3), соответственно, из оптимизационной задачи (1)–(3).

Дифференцируя данный Лагранжиан по F и f_i , $i = \overline{1, n}$, и приравнивая полученные к нулю, получим

$$a_i + b_i f_i = t^* + \eta_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (15)$$

$$t^* = \frac{1}{F}. \quad (16)$$

Применяя условия Куна — Таккера к (15) и выражая f_i через t^* , приходим к следующему равенству:

$$f_i = \left(\frac{t^*}{a_i} - 1 \right) \frac{a_i}{b_i}.$$

Тогда распределение транспортных потоков представимо в виде:

$$f_i = \begin{cases} \left(\frac{t^*}{a_i} - 1\right) \frac{a_i}{b_i} & \text{при } t^* > a_i, \\ 0 & \text{при } t^* \leq a_i, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Подставляя последнее выражение в ограничение (2) и учитывая, что $g^{-1}(F) = \frac{1}{t^*}$, получаем квадратное уравнение для $\frac{1}{t^*}$:

$$\left(\frac{1}{t^*}\right)^2 + \frac{1}{t^*} \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{b_i} - \sum_{i=1}^k \frac{1}{b_i} = 0,$$

где k — количество задействованных маршрутов в ситуации конкурентного равновесия. Отсюда находим время перемещения t^* в явном виде:

$$t^* = \frac{1}{-\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{2b_i} + \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{b_i}}} \quad (18)$$

Заменив теперь значение t^* формулой (18) в выражениях (17) и (16), а также элементарно преобразовав последнее, получаем (12) и (13) соответственно. Не сложно заметить, что множество используемых маршрутов k в таком случае, будет удовлетворять условию (14), а его мощность будет равна $k \leq n$.

Теорема доказана.

Представленные результаты были опубликованы в работе [13].

Глава 2. Применение решения задачи распределения транспортных потоков на сети параллельных маршрутов с эластичным спросом

§2.1. Применение к экспериментальным данным методологического решения для случая линейной загрузки сети

Как говорилось ранее, целью настоящей работы является не только поиск аналитического решения, но и его успешное практическое применение. Для этого в пакете прикладных программ для решения задач технических вычислений MATLAB была создана программная реализация решений, соответствующих §1.1.. (С кодом программы вы можете ознакомиться в Приложении 1 в конце работы). Полученное компьютерное решение было применено к экспериментальным данным. Ознакомимся с ними подробнее.

Рассматривается транспортная сеть с параллельными маршрутами, количество которых варьируется от 2 до 10 включительно. Для каждого маршрута задано время свободного движения и коэффициент задержки, представленные в виде векторов $a = [6; 5; 9; 10; 6; 10; 8; 7; 5; 7]$ и $b = [0.1; 0.5; 0.3; 0.4; 0.3; 0.1; 0.2; 0.5; 0.3; 0.1]$ соответственно. Коэффициент r равен 0.1. Максимальное приемлемое время перемещения по каждому маршруту для всех участников движения принадлежит отрезку $T \in [10, 30]$. В настоящей работе будем считать, что верхняя граница T дискретна и соответствует шагу, равному пяти. То есть, программа находит решения для $T = [10; 15; 20; 25; 30]$.

Результаты работы программной реализации для заданных экспериментальных данных представлены в таблицах 1–5.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	2	3	4	4	6	6	6	6	6
F*	23.0041	21.2992	19.3923	21.3904	16.3570	16.6065	21.6594	25.4701	27.5912
t*	7.6996	7.8701	8.0608	7.8610	8.3643	8.3394	7.8341	7.4530	7.2409

Таблица 1. Результаты работы программы для T=10

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	2	3	4	4	6	6	6	6	7
F*	50.3704	51.6329	51.4867	55.3476	54.2380	55.7762	58.5590	62.6496	66.1905
t*	9.9630	9.8367	9.8513	9.4652	9.5762	9.4224	9.1441	8.7350	8.3810

Таблица 2. Результаты работы программы для T=15

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	2	3	4	5	6	7	8	9	8
F*	77.7366	81.9666	83.5811	89.5977	92.1190	95.1327	96.5777	100.0294	105.6958
t*	12.2263	11.8033	11.6419	11.0402	10.7881	10.4867	10.3422	9.9971	9.4304

Таблица 3. Результаты работы программы для T=20

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F*	105.1029	112.3004	115.6755	123.6016	130.0000	134.3236	136.2166	140.3377	146.7774
t*	14.4897	13.7700	13.4324	12.6398	12.0000	11.5676	11.3783	10.9662	10.3223

Таблица 4. Результаты работы программы для T=25

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F*	132.4691	142.6341	147.7699	157.6054	167.8810	173.5146	175.8556	180.6461	188.6593
t*	16.7531	15.7366	15.2230	14.2395	13.2119	12.6485	12.4144	11.9354	11.1341

Таблица 5. Результаты работы программы для T=30

Отметим, что при проведении численных экспериментов время работы программы было незначительным, а сам программный комплекс легко принимает на вход данные разных объемов.

§2.2. Анализ полученных результатов

Сперва обратимся к результатам, представленным в таблицах 1 и 2.

При увеличении количества независимых маршрутов n с 2 до 3 и с 3 до 4

при $T = 10$, а также при росте n с 2 до 3 для $T = 15$, на транспортной сети наблюдается парадокс Браеса[14, 15]: привлечение дополнительных мощностей в сеть, при условии, что каждый участник движения выбирает маршрут в индивидуальном порядке, может уменьшить общую производительность сети. В результате вместе с ростом количества транспортных путей n мы наблюдаем не только снижение общего спроса на транспортную сеть, но и увеличение оптимального времени перемещения по каждому используемому маршруту t^* .

Рассмотрим все результаты программной реализации и проанализируем их в целом.

Максимальный объем суммарного транспортного потока на сети и минимальное время перемещения по активным маршрутам достигается при $n = 10$. Однако, в первых трех случаях (см. табл. 1-3) число используемых путей не максимально. Так происходит в виду того, что время свободного движения по некоторым маршрутам достаточно велико по отношению к максимальному приемлемому времени перемещения T . Чтобы внести ясность, проиллюстрируем данное обоснование следующим примером:

Представим, что вы проживаете в студенческом городке СПбГУ в Петергофе и вам назначили встречу возле станции метро Кировский Завод. С учетом всех ваших планов и индивидуальных предпочтений вы пришли к выводу, что приемлемым временем проезда до конечной точки маршрута для вас будет интервал, ограниченный сверху $T = 60$ минут. В этом случае, подходящие маршруты для вас представлены на рисунке 2.

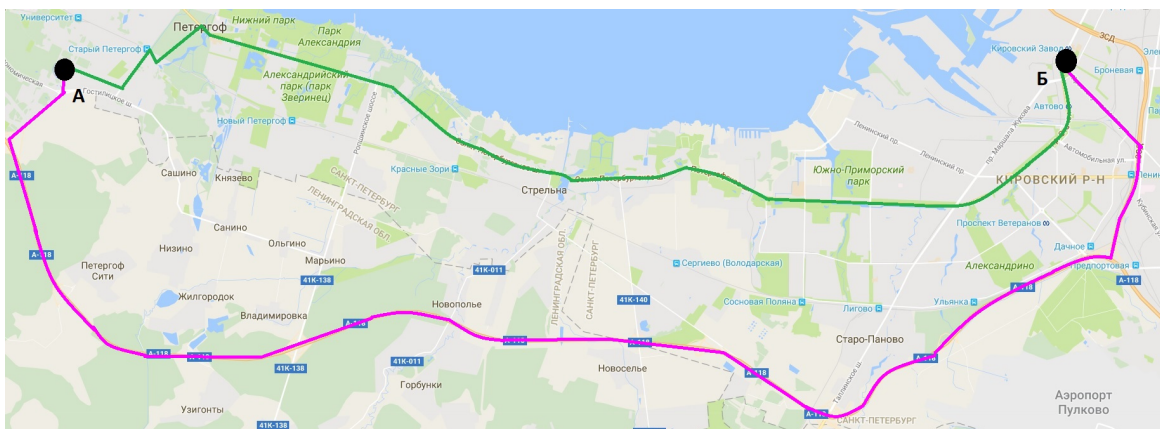


Рис. 2. Основные маршруты перемещения из А в Б

То есть из начальной точки маршрута А (Студенческий городок) в конечную точку маршрута Б (Кировский Завод) вы можете проехать либо через КАД и ЗСД (розовый маршрут), либо через Санкт-Петербургское и Петергофское шоссе (зеленый маршрут).

Однако, если верхняя граница вашего приемлемого времени T намного больше 60 минут, то подходящим для вас будет и маршрут, представленный на рисунке 3. Он проходит через Кронштадт (красный маршрут).

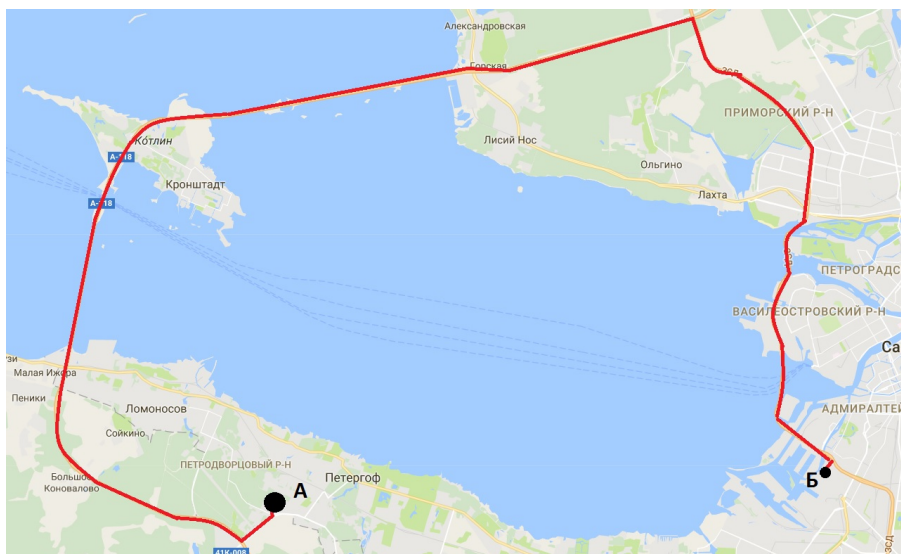


Рис. 3. Дополнительный маршрут перемещения из А в Б

Поэтому, можно сказать, что ситуации, представленные в таблицах 3–5, являются более предсказуемыми и стабильными, потому что в данном случае

время перемещения по активным маршрутам не так значимо для участников движения, как в случаях, представленных в таблицах 1 и 2.

Заключение

В данной работе сформулирована задача поиска равновесного распределения транспортных потоков по параллельными маршрутами с эластичным спросом на транспортную сеть, решена соответствующая оптимизационная задача для случаев линейной и квадратичной загрузки сети. Равновесное значение потоков, время перемещения по используемому маршруту, а также суммарный транспортный спрос найдены в явном виде. Продемонстрирована программная реализация решения для случая линейной загрузки транспортной сети. Наглядным образом представлены и проанализированы результаты численного решения для экспериментальных данных.

К достоинству настоящей работы также можно отнести возможность продолжения исследований в рамках выбранной темы. Так, например, в дальнейшем может быть рассмотрен случай экспоненциальной загрузки транспортной сети, характерный для уличных дорожных систем в часы пик.

Список литературы

1. Wardrop J. G. Some theoretical aspects of road traffic research // Proc. Inst. Civil Eng. 1952. Vol. 1, No 3. P. 325–362.
2. Швецов В. И. Алгоритмы распределения транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10. С. 148–157.
3. LeBlanc L. J., Morlok E. K., Pierskalla W. An efficient approach to solving the road network equilibrium traffic assignment problem // Transpn. Res. B. 1975. Vol. 9. P. 309 --318.
4. Sheffi Y. Urban transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods. N.J.: Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs. 1985. P. 416
5. Швецов В. И. Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и Телемеханика. 2003. No 11. С. 3–46.
6. Крылатов А. Ю. Оптимальные стратегии управления транспортными потоками на сети из параллельных каналов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления. 2014. № 2. С. 121–130.
7. Захаров В. В., Крылатов А. Ю. Конкуреннтное равновесие Вардропа на транспортной сети из параллельных неоднородных маршрутов // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1. № 1. С. 476–481.
8. Захаров В. В., Крылатов А. Ю. Современные проблемы использования интеллектуальной базы математического моделирования при борьбе с зато-

- рами в крупных городах России // Транспорт Российской Федерации. 2014. № 4(53). С. 69–73.
9. Захаров В. В., Крылатов А. Ю. Конкурентная маршрутизация транспортных потоков поставщиками услуг навигации // Управление большими системами. 2014. Вып. 49. С. 129–147.
 10. Захаров В. В., Крылатов А. Ю. Системное равновесие транспортных потоков в мегаполисе и стратегии навигаторов: теоретико-игровой подход // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. № 4. С. 23–44.
 11. Patriksson M. The Traffic Assignment Problem: Models and Methods. Utrecht, Netherlands: VSP, 1994. 223 p.
 12. Крылатов А. Ю., Шихова К. А. Эластичный спрос на транспортной сети из параллельных маршрутов // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 736–740.
 13. Крылатов А. Ю., Шихова К. А. Определение зависимости эластичного спроса на перемещение от топологических характеристик сети из параллельных маршрутов // Транспорт России: проблемы и перспективы. 2016. С. 95–98.
 14. Braess D. Uber ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung // Unternehmensforschung 12. 1969. P. 258–268
 15. Korilis Y. A., Lazar A. A., Orda A. Avoiding the Braess paradox in non-cooperative networks // J. Appl. Prob. 1999. Vol. 36. P. 211 –222.

Приложение

В приложении представлена программная реализация решения задачи равновесного распределения транспортных потоков по параллельным каналам с эластичным спросом на сети, представленным линейной функцией. Работа выполнена в пакете MATLAB.

Приложение 1

```
1 clear all
2
3 N=10;
4 r=0.1;
5 a00=[6,5,9,10,6,10,8,7,5,7];
6 b00=[0.1,0.5,0.3,0.4,0.3,0.1,0.2,0.5,0.3,0.1];
7 K=[];
8 F_opt=[];
9 T_opt=[];
10
11 for T =10:5:30
12 F=[];
13 K1=[];
14 t_opt=[];
15
16 for n = 2:N
17 a=[];
18 b=[];
19 a0=[];
20 b0=[];
21 k=1;
22 P1=0;
23 P2=1;
24     for i=1:n
25         a0=[a0,a00(i)];
26         b0=[b0,b00(i)];
27     end
28     for i = 1:n %сортировка с условием, что a1<a2<...
29         [v,k]=min(a0);
30         a=[a,v];
31         a0(k)=inf;
32         b=[b,b0(k)];
33     end
34     a=[a,1];
```

```

35     b=[b,11];
36
37     while P1<P2 && k<n+1
38         k=k+1;
39         P1=0;
40         P2=0;
41         P2_ch=0;
42         P2_znam=0;
43         for i=1:(k-1)
44             P1=P1+(a(k)-a(i))/b(i);
45         end
46         for i=1:k
47             P2_ch=P2_ch+(T-a(i))/b(i);
48             P2_znam=P2_znam+1/b(i);
49             P2=P2_ch/(1+r*P2_znam);
50         end
51     end
52     F=[F,P2];
53     K1=[K1,k-1];
54     t_opt=[t_opt,T-r*P2];
55 end
56
57 F_opt=[F_opt;F];
58 K=[K;K1];
59 T_opt=[T_opt;t_opt];
60 end

```