Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Прикладная кибернетики

Перепелова Анастасия Сергеевна

Управление хаосом в модели Билера-Рейтера проводящей системы сердца

Бакалаврская работа

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор Ф. Райтманн

Рецензент:
к. ф.-м. н., старший научный
сотрудник Е. В. Кудряшова

Санкт-Петербург
2017

Saint Petersburg State University
Faculty of Mathematics and Mechanics
Chair of Applied Cybernetics

Perepelova Anastasiia

Chaos control in the Beeler-Reuter model for conduction system of the heart

Graduation Thesis

Scientific Supervisor:
Dr. of Science,Professor V. Reitmann

Reviewer:
Ph.D.,Senior Researcher
E. V. Kudryashova

Saint Petersburg
2017

Оглавление

Введение

С развитием теории динамических систем и теории бифуркаций возникло новое понимание происхождения хаотичности. В связи с этим появилась возможность детального изучения физиологических процессов, предсказание и управление их динамикой, подавление наступающего в них хаоса. Одним из важных направлений является приложение разработанной теории к исследованию процессов возникающих в сердечной мышце [1]. В данной работе рассматривается система Билера–Рейтера [9] описывающая работу проводящей системы сердца. Данная система интересна не только с медицинской точки зрения, но и с математической, так как многие аномалии в сердце представляют собой интересные примеры колебаний, бифуркаций и хаотической динамики [19, 12].

Аритмии в сердце, такие как фибрилляции и эктопическое сердцебиение, опасны для жизни человека [1], поэтому понимание механизмов их возникновения является важной задачей имеющей огромное значение. В данном контексте наиболее трудным является контроль и предотвращение таких биологических аномалий. Но в силу того, что аритмии связаны с бифуркациями и хаосом в системе, мы можем использовать методы управления бифуркациями для контроля сердечного ритма [17, 11]. Переходим к краткому изложению работы.

В первой главе рассмотрена математическая модель Билера-Рейтера проводящей системы сердца, моделирующая работу мембраны клетки сердечного миокарда.

Во второй главе описан метод исследования возникновения бифуркации удвоения периода в системе Билера-Рейтера с помощью построения отображения Пуанкаре и дальнейшей редукцией на центральное многообразие.

В рамках третьей главы описан метод стабилизации системы в терминах максимального показателя Ляпунова. Приведены доказательство диссипативности системы с использованием метода функции Ляпунова и основные понятия теории коциклов. Сформулирован критерий устойчивости по Ляпунову системы, с введенной в нее функцией управления. Также, получены условия на управляющую функцию, при которых система стабилизируется.

В четвертой главе осуществлена проверка того, что при введении функции управления система стабилизируется.

Цели данной работы:

1. Исследование подхода построения отображения Пуанкаре для анализа бифуркаций удвоения периода в системе Билера–Рейтера.

2. Введение функции управления и получение условия для предотвращения цепочки бифуркаций такого типа, приводящей к хаосу.

Глава 1

Общая модель работы сердца

В этой главе описана математическая модель потенциала действия клеточной мембраны сердечной ткани млекопитающих полученная в работе [9]. Данная модель основывается на ионной модели предложенной Ходжкиным и Хаксли [13].

Мембрана клетки проводящей системы сердца представляет собой параллельно включенные емкость C и четыре элемента-источника тока, имеющие внутренние сопротивления. Эти сопротивления являются переменными и определяются ионными проводимостями.

Рассмотрим идею построения модели на калиевом токе [2], для остальных токов аналогично. Имеется сопротивление R_K и калиевая проводимость σ_K. Ионы калия идут через мембрану клетки в обе стороны. Когда потенциал мембраны v равен равновесному потенциалу для кали v_K, то калиевый ток I_K равен нулю. Если потенциал отклоняется от равновесного появляется калиевый ток. Его силу тока можно вычислить из формулы $I = \frac{v}{R}$, заменив $\frac{1}{R}$ на калиевую проводимость σ_K, а v на величину отклонения от равновесного, получим

$$I_K = \sigma_K(v - v_K).$$

Заряд на конденсаторе равен разности потенциалов на его пластинах, умноженной на емкость $q = vC$. Продифференцируем равенство и получим

$$\frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt},$$

где $\frac{dq}{dt}$– сила тока, поступающего на конденсатор, то есть сумма всех ионных токов. Так получим уравнение, определяющее изменение потенциала мембраны при изменении проводимостей мембраны и внешнего воздействия:

$$-C\dot{v} = I_{nab}(v) + I_{Ca}(d, n, v) + I_{k1}(v) + I_K + I_{Na} - I_{app}.$$

Полная система уравнений, описывающая изменения во времени электрических характеристик возбудимой мембраны такова:

$$
\begin{cases}
-C\dot{v} = I_{nab}(v) + I_{Ca}(d,n,v) + I_{k_1}(v) + I_K(v) + I_{Na}(v) - I_{app}, \\
\dot{y} = A(v)(1-y) - B(v),
\end{cases} \tag{1.0.1}
$$

где $y = (d,n,h,m,x)^T \in \mathbb{R}^5$ и $v \in \mathbb{R}\backslash\{-23\}\,, t > 0$; $A(v) = \{a_{ij}(v)\}_{i,j=1}^5\,,$ $B(v) = \{b_{ij}(v)\}_{i,j=1}^5$ –матричные функции с $a_{ij} = b_{ij} = 0, i \neq j,$

$$
a_{ii}(v) = \frac{c_1^{(1,i)} e^{c_2^{(1,i)}(v + c_3^{(1,i)})} + c_4^{(1,i)}(v + c_5^{(1,i)})}{e^{c_6^{(1,i)}(v + c_3^{(1,i)})} + c_7^{(1,i)}},
$$

$$
b_{ii}(v) = \frac{c_1^{(2,i)} e^{c_2^{(2,i)}(v + c_3^{(2,i)})} + c_4^{(2,i)}(v + c_5^{(2,i)})}{e^{c_6^{(2,i)}(v + c_3^{(2,i)})} + c_7^{(2,i)}},\ i = 1, \ldots, 5,
$$

$$
I_{nab}(v) = \sigma_{nab}(v - v_{Na}),\ I_{Ca}(d,n,v) = \sigma_{Ca} dn (v - v_{Ca}),
$$

$$
I_{k_1}(v) = 0.35\left(4\frac{e^{0.04(v+85)} - 1}{e^{0.08(v+53)} + e^{0.04(v+53)}} + 0.2\frac{v + 23}{1 - e^{-0.04(v+23)}}\right).
$$

Модель включает в себя v– напряжение клеточной мембраны и 5 компонентов токов : m, h– активация и инактивация натрия соответственно,d– активация кальция,n–инактивация кальция, x– активация калия. Константы $c_k^{(i,j)}, i,j = 1,2,\ k = 1,2,\ldots 7, \sigma_{nab}, \sigma_{Ca}, C, v_{Ca}, v_{Na}$– заданы в [9].

В работе [8] доказано, что решение $(v(t), d(t), n(t), 0, 0, 0)$– устойчиво на многообразии $M = \left\{(d,n,h,m,x) \in \mathbb{R}^5 | dn \geq 0, h = m = x = I_{app} = 0\right\}$, поэтому для анализа бралась следующая система:

$$
\begin{cases}
-C\dot{v} = \sigma_{nab}(v - v_{Na}) + \sigma_{Ca} dn (v - v_{Ca}) + I_{k_1}(v), \\
\dot{y} = A(v)(1-y) - B(v),
\end{cases} \tag{1.0.2}
$$

$$
y = \begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix}, A(v) = \{a_{ij}(v)\}_{i,j=1}^2\,, B(v) = \{b_{ij}(v)\}_{i,j=1}^2\,.
$$

Все константы и функции $a_{ij}(v), b_{ij}(v), I_{k1}(v), I_{nab}(v)$–определены выше, и в общем виде система (1.0.2) выглядит следующим образом:

$$
\dot{u}(t) = f(u),\ u = (v,d,n)^T,\ d,n \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}\backslash\{-23\}\,, t > 0. \tag{1.0.3}
$$

Глава 2

Использование теории бифуркаций для исследования системы сердца

В данной главе используются основные понятия теории бифуркаций, в качестве источника была использована [5].

2.1. Бифуркация удвоения периода

Пусть задано отображение

$$\varphi : M \times \Lambda \to M, \tag{2.1.1}$$

$$u_{t+1} = \varphi(u_t, \alpha),$$

где $\alpha \in \Lambda \subset \mathbb{R}^d$и $M \subset \mathbb{R}^n$– открытые множества, $\varphi \in C^l$, $l \geq 1$, $(0,0) \in M \times \Lambda$, $\varphi(0,0) = 0$.

Предположим, что в (2.1.1) $l \geq 4, d = 1$. Одно собственное значение $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0)$ равно -1, и остальные собственные значения с $|\lambda_j| \neq 1$. Тогда в силу следствия из принципа редукции Шошитайшвили (см. [5]) имеем описание бифуркации через одномерное отображение $x \mapsto g(x,\alpha)$, $g(0,0) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = -1$, заданное на центральном многообразии $W^c_{loc}(0) := \{(x,y) \in U | y = 0\}$, где $U-$ некоторая окрестность начала координат в $\mathbb{R}^n$. Сделаем следующее предположение.

Предположение 2.1.1. *Пусть выполняются условия:*

1. $a := \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \alpha}(0,0) \neq 0$;
2. $b^2 + c^2 \neq 0$, $b = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0)$, $c = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(0,0)$.

В случае предположения 2.1.2 $g(x,\alpha) = -x + \alpha a x + b x^2 + c x^3 + \ldots$, $g(0,\alpha) = 0$, $|\alpha| < \delta$. Рассмотрим нормальную форму для $g(x,\alpha)$ в виде

$$g(x,\alpha) = (-1+\alpha)x + x^3 + \ldots . \tag{2.1.2}$$

Имеем состояние равновесия $x = 0$ для любого $\alpha \in V$ –окрестности нуля. Проверим его устойчивость с помощью линеаризации:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)|_{x=0} = -1 + \alpha a,$$

возможны два случая:

$$-1 + \alpha a = \begin{cases} < -1 & \alpha a < 0 - \text{неустойчивый случай}, \\ > -1 & \alpha a > 0 - \text{асимптотическая устойчивость}. \end{cases}$$

Интерпретация для дифференциального уравнения : Пусть дана система

$$\dot{u} = f(u, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^N. \tag{2.1.3}$$

Пусть периодическое решение γ_0 системы (2.1.3) в $M \subset \mathbb{R}^N$ имеет мультипликаторы $\rho_1 = -1$, $|\rho_j| < 1, j = 2, \dots, N$. Пусть $N = 3$ и $x \mapsto (-1+\alpha)x + x^3 + \dots$ – редуцированное отображение Пуанкаре P_0 (подробнее в [5]). На рисунке показано, как вблизи $\alpha < 0$ периодического решения при $\alpha > 0$ порождается периодическое движение с удвоенным периодом.

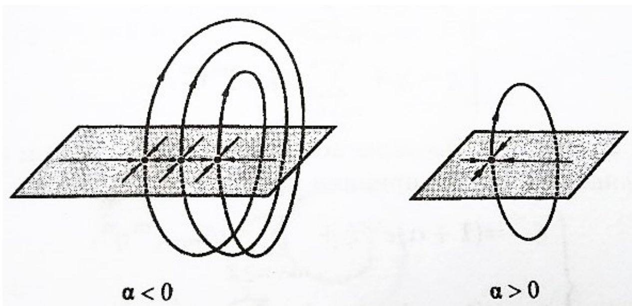

Рис. 2.1.1: Порождение периодического движения с удвоенным периодом (см. [5])

2.2. Отображение Пуанкаре

Для детального анализа модели мы будем пользоваться так называемой нормальной формой Пуанкаре. В данной главе приведен алгоритм получения нормальной формы и некоторые сведения по ее анализу. Источниками являются [5], [16].

2.2.1. Получение формул разложения отображения Пуанкаре в ряд Тейлора

Займемся построением Пуанкаре для системы (1.0.3) с введенным бифуркационным параметром вместо $I_{app} = f(b,\alpha) = \alpha b$ и фильтром обратной связи, который представлен четвертым уравнением. Это частный случай $n-$ мерной системы с $n = 4$:

$$\begin{cases} -C\dot{v} = I_{nab}(v) + I_{Ca}(d,n,v) + I_{k1}(v) - \alpha b, \\ \dot{y} = A(v)(1-y) - B(v), \\ \dot{b} = -c_0(b-b_0) - c_1(v - x_1^{(0)}) - c_2(d - x_2^{(0)}) - c_3(n - x_3^{(0)}), \end{cases} \tag{2.2.1}$$

$$y = \begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix}, A(v) = \begin{pmatrix} a_{11}(v) & 0 \\ 0 & a_{22}(v) \end{pmatrix}, B(v) = \begin{pmatrix} b_{11}(v) & 0 \\ 0 & b_{22}(v) \end{pmatrix},$$

где $\alpha \in \mathbb{R}-$ бифуркационный параметр,$a_{ii}(v), b_{ii}(v), I_{k1}(v), I_{nab}(v)-$определены как в главе 1, $x^{(0)}-$ состояние равновесия, константы $c_k^{(i,j)}, i,j = 1,2,\ k = 1,2,\dots 7, \sigma_{nab}, \sigma_{Ca}, C, v_{Ca}, v_{Na}-$заданны, а $c_0 = 0.001, c_1 = 0.001$, $c_2 = 0.3, c_3 = 0.01, b_0 = 1$, $x_1^{(0)} = 6.414426$, $x_2^{(0)} = 0.969400, x_3^{(0)} = 0.512917$, $x_4^{(0)} = 0.99999$.

Последнее уравнение системы (2.2.1) и функция управления с использованием α были введены согласно [17]. Краткая запись системы (2.2.1) выглядит так:

$$\dot{u} = f(u,\alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.2.2}$$

$$u = \begin{pmatrix} v \\ d \\ n \\ b \end{pmatrix},\ d,n,b \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}\setminus\{-23\}, t > 0,$$

где $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4-$ гладкое векторное поле класса C^4. Для фиксированного α обозначим $\varphi_\alpha^t(u_0) = u(t,u_0,\alpha)$, где $u(t,u_0,\alpha)-$ решение системы (2.2.2), с начальным условием $u(0,u_0,\alpha) = u_0$.

Анализ устойчивости периодического решения $u(t, u_0, \alpha) = u(T + t, u_0, \alpha)$ системы (2.2.2) с начальным условием $u(0, u_0, \alpha) = u_0$ сводится к исследованию тривиального решения $\xi(t) \equiv 0$ – состояния равновесия отображения $P : \Sigma \to \Sigma$, где $\Sigma = \{\xi \in \mathbb{R}^n : (f(u_0, \alpha), \xi) = 0\}$.

Пусть точка u_0 –точка на предельном цикле системы (2.2.2), и пусть Σ– гиперплоскость, трансверсальная к $\gamma(u_0)$ –траектории $T-$периодического движения. Отображение $P(0)$ переводит ее в точку, где кривая вновь пересекается с поверхностью, обозначим эту точку u_1:

$$u_1(\alpha) = P(0, \alpha) = \mathcal{P}(u_0, \alpha) = \varphi_\alpha^T(u_0) = u_0(\alpha).$$

Точка совпадает с начальной, так как движение периодическое. Подобным образом можем получить, что траектория, начинающаяся в точке $u_1 = u_0 + \xi$ вблизи точки u_0, пересекает гиперплоскость Σ в точке u_2:

$$u_2(\alpha) = P(\xi, \alpha) = \mathcal{P}(u_1(\alpha)) = \varphi_\alpha^{\tau(\xi)}(u_1(\alpha)), \tag{2.2.3}$$

где $\tau(\xi)-$ определяет момент времени, в который кривая пересекает гиперплоскость Σ.

Разложим отображение Пуанкаре в ряд Тейлора в точке u_0:

$$P(\xi, \alpha) = \mathcal{P}(u_0(\alpha)+\xi) = P(0, \alpha)+d_0P(\xi, \alpha)+\frac{1}{2}d_0^2P(\xi^2, \alpha)+\frac{1}{6}d_0^3P(\xi^3, \alpha)+\dots, \tag{2.2.4}$$

где многоточие обозначает члены высокого порядка, а $\xi \in \Sigma \subset \mathbb{R}^3$, $P(0, \alpha) = \mathcal{P}(u_0(\alpha)) = u_0(\alpha)$. Также, в данной формуле $dP : \mathbb{R}^3 \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ – дифференциал отображения P, а $d_u(d^{r-1}P) \in L(\mathbb{R}^3, L^r(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$–дифференциал r-ого порядка отображения P в точке u для произвольного натурального $r \geq 2$.

Замечание 2.2.1. Отображение трехмерное потому, что, как показано в [3], $\mathbb{R}^4 = \operatorname{span}\{f(x_0)\} \oplus \Sigma$. Поэтому запишем исходную систему (2.2.2) в системе координат, связанной с циклом $u(t, u_0, \alpha)$ периода T. Замена $u(t) = Q(t, \alpha)y(t)$ с T–периодической матрицей $Q(t, \alpha)$, выбранной в соответствие с переходом. В такой системе одним из координатных векторов является вектор $\dot{u}(t, u_0, \alpha)$, касательный к циклу, другим – вектор цикла $u(t, u_0, \alpha)$. Так как мультипликатор цикла, соответствующий вектору

$\dot{u}(t, u_0, \alpha)$, всегда равен единице, а показатель Флоке – нулю и не является бифуркационным, то координаты нормальной формы лежат в гиперплоскости Σ, задаваемой последними 3 компонентами вектора $y(t)$. Обозначим вектор, имеющий на единицу меньшую размерности, чем вектор $y(t)$ за $\tilde{u}(t)$. Система (2.2.2) в новых координатах, имеющая размерность 3:

$$\dot{\tilde{u}} = h(\tilde{u}, \alpha),\ \tilde{u} \in \mathbb{R}^3, h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3. \tag{2.2.5}$$

Переобозначим $\tilde{u}(t, \tilde{u}_0, \alpha) = \varphi^t_\alpha(\tilde{u}_0)$. Данное замечание описано в [3].

Производные из разложения (2.2.4) можно вычислить как решения дифференциальных уравнений по начальным данным. Это видно, если (2.2.3) разложить в ряд Тейлора до производной третьего порядка при фиксированном $t = T$ в точке $\tilde{u}_0$. Мы можем проделать данную операцию в силу того, что решение системы $\tilde{u} \in C^4$ нужной нам гладкости и $P(\xi) = \tilde{u}(T, \tilde{u}_0 + \xi, \alpha)$. Получим

$$\tilde{u}(T, \tilde{u}_0 + \xi, \alpha) = \varphi^T_\alpha(\tilde{u}_0) + d_{\tilde{u}_0}\varphi^T_\alpha(\tilde{u}_0, \xi) + \frac{1}{2}d^2_{\tilde{u}_0}\varphi^T_\alpha(\tilde{u}_0, \xi^2) + \frac{1}{6}d^3_{\tilde{u}_0}\varphi^T_\alpha(\tilde{u}_0, \xi^3) + \dots\ . \tag{2.2.6}$$

Сравнивая выражения (2.2.4) и (2.2.6), получаем:

$$d_0P(\xi, \alpha) = d_{\tilde{u}_0}\varphi^T_\alpha(\tilde{u}_0, \xi),\ d^2_0P(\xi^2, \alpha) = d^2_{\tilde{u}_0}\varphi^T_\alpha(\tilde{u}_0, \xi^2, \alpha),$$
$$d^3_0P(\xi^3, \alpha) = d^3_{\tilde{u}_0}\varphi^T_\alpha(\tilde{u}_0, \xi^3).$$

Получим уравнение для первого коэффициента разложения, применив частную производную по начальным данным к уравнению (2.2.2).

Замечание 2.2.2. Здесь и далее введем обозначение $D_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),\ x \in \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n -$гладкое векторное поле.

Получим в итоге:

$$D_1D_2\varphi^t_\alpha(\tilde{u}_0) = D_1h(\varphi^t_\alpha(\tilde{u}_0), \alpha)D_2\varphi^t_\alpha(\tilde{u}_0), \tag{2.2.7}$$

или в более краткой форме

$$\dot{y}(t, \alpha) = G(t, \alpha)y(t, \alpha),\ y(t) = D_2\varphi^t_\alpha(\tilde{u}_0) \tag{2.2.8}$$

–система в вариациях, где $G(t, \alpha)$ получается из матрицы

$$(Q^{-1}D_1 f(\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0), \alpha), \alpha)Q - Q^{-1}\dot{Q})$$

с вычеркнутыми первыми столбцом и строкой. Данная процедура описана в [3]. Здесь

$$D_1 f(\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0), \alpha) = \frac{\partial f(\tilde{u})}{\partial \tilde{u}}|_{\tilde{u}=\varphi_\alpha^t(u_0)} = \left(\frac{\partial f(\tilde{u})}{\partial \tilde{u}_1}, \frac{\partial f(\tilde{u})}{\partial \tilde{u}_2}, \cdots, \frac{\partial f(\tilde{u})}{\partial \tilde{u}_4}\right)|_{\tilde{u}=\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0)}$$

– матрица Якоби отображения f в точке $\tilde{u} = \varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0)$, а $D_2\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0) = \frac{\partial}{\partial \tilde{u}_0}\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0)$, $D_1\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0)$.

Таким образом, первый коэффициент разложения отображения Пуанкаре удовлетворяет системе в вариациях (2.2.8). Для его нахождения нужно проинтегрировать систему (2.2.8) порядка 3 линейных однородных дифференциальных уравнений от $t = 0$ до $t = T$, с начальным условием $y(0) = I_3$, где I_3- единичная матрица размера 3×3. Будем в дальнейшем использовать известный факт [5] из которого следует, что решением системы (2.2.8) будет являться фундаментальная матрица, нормированная при $t = 0$. Обозначим решение через $X_1(t, \alpha)$.

Для получения системы для второго коэффициента в разложении (2.2.4), продифференцируем систему (2.2.7) по начальным данным:

$$D_1 D_2^2 \varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0) = D_1 h(\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0), \alpha) D_2^2 \varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0) + D_1^2 h(\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0), \alpha)(X_1(t, \alpha))^2 \quad (2.2.9)$$

или кратко

$$\dot{z}(t, \alpha) = G(t, \alpha) z(t, \alpha) + D_1^2 h(\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0), \alpha)(X_1(t, \alpha))^2, \; z(t) = D_2^2 \varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0).$$

Решение (2.2.9) обозначим через $X_2(t, \alpha)$.

Третий член в разложении (2.2.4) найдем из (2.2.9), продифференцировав ее по начальным данным. Получим систему:

$$\dot{z}(t, \alpha) = G(t, \alpha) z(t, \alpha) + 3D_1^2 h(\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0), \alpha) X_1(t, \alpha) X_2(t, \alpha) + \quad (2.2.10)$$

$$+D_1^3 h(\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0),\alpha)(X_1(t,\alpha))^3,$$

$$z(t,\alpha) = D_2^3\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0).$$

Решение системы (2.2.10) обозначим через $X_3(t,\alpha)$.

Таким образом, был описан метод получения первых трех коэффициентов в разложении (2.2.4) отображения Пуанкаре.

2.2.2. Координатные функций отображения Пуанкаре

Мы получили выражение (2.2.4) в общем виде. В силу того, что $P(\xi,\alpha)$ – это вектор-функция, можем получить ее координатные функции.

Распишем подробнее дифференциал второго порядка от $P(\xi,\alpha)$:

$$d_0^2P(\xi^2,\alpha) = \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial^2 P(\xi,\alpha)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\xi_i\xi_j. \tag{2.2.11}$$

Соответственно следует брать частные производные правой части $h(\tilde{u},\alpha)$ в (2.2.5) для выражения частных производных $P(\xi)$. Дифференцирование по вектору $\tilde{u}_0 = (\tilde{u}_1^0,\tilde{u}_2^0,\tilde{u}_3^0)$ можем расписать как дифференцирование по каждой его компоненте. Система для компонент вектор–функции $d_0P(0) = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{u}_0}(T,\xi)$ имеет своим решением $X_1(T,\alpha)_i = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{u}_i^0} = \phi_i(u_0,T,\alpha) = \phi_i$-столбцы фундаментальной матрицы системы (2.2.8) .

Семейство систем с $i,j = 1,2,3$ для получения частных производных второго порядка отображения Пуанкаре, полученное из (2.2.9) имеет вид:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{u}_i^0\partial\tilde{u}_j^0}\right)(t,\alpha) = \frac{\partial h}{\partial\tilde{u}}(\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0),\alpha)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{u}_i^0\partial\tilde{u}_j^0} + \sum_{\mu,\nu=1}^3\frac{\partial^2 h(\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0),\alpha)}{\partial\tilde{u}_\mu\partial\tilde{u}_\nu}(\phi_i)_\mu(\phi_j)_\nu,\\ \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{u}_i^0\partial\tilde{u}_j^0}(0,\alpha) = 0.\end{cases} \tag{2.2.12}$$

Для решения системы с фиксированными $i,j = 1,2,3$ можно применять стандартный метод решения систем дифференциальных уравнений. Для начала находим общее решение из однородной системы

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{u}_i^0\partial\tilde{u}_j^0}\right)(t,\alpha) = \sum_{\mu=1}^{3}\frac{\partial h_k(\varphi_\alpha^t(\tilde{u}_0),\alpha)}{\partial\tilde{u}_\mu}\frac{\partial^2\tilde{u}_\mu}{\partial\tilde{u}_0^i\partial\tilde{u}_0^j} \quad, k = 1,2,3.$$

Как это было показано в предыдущем разделе решением однородной системы для компонент вектор-функции $d^2_{\tilde{u}}P(\xi)$ будут компоненты соответствующей строки матрицы $X_1(T,\alpha)$. Значит можем найти частное решение методом вариации произвольных постоянных для $k=1,2,3$:

$$\dot{c_1}(t)_k(\phi_1)_k+\dot{c_2}(t)_k(\phi_2)_k+\dot{c_3}(t)_k(\phi_3)_k=\sum_{\mu,\nu=1}^{3}\frac{\partial^2 h_k(\varphi^t_\alpha(\tilde{u}_0),\alpha)}{\partial\tilde{u}_\nu\partial\tilde{u}_\mu}(\phi_i)_\mu(\phi_j)_\nu,$$

где $c_1(t),c_2(t),c_3(t)-$вектор–функции в $\mathbb{R}^3$, а $c_i(t)_k-k$-ая компонента вектора.

Обозначим решение системы (2.2.12) с начальным условием $\psi_{ij}(\tilde{u}_0,0,\alpha)=0$ через $\psi_{ij}=\psi_{ij}(\tilde{u}_0,T,\alpha)-$вектор–функции, где система решается для каждого $i,j\in 1,2,3$.

Решения системы для третьих частных производных отображения Пуанкаре найдем аналогичным образом и обозначим через $\zeta_{ijk}(t,\alpha)$, $i,j,k=1,2,3$.

Таким образом, согласно (2.2.4) ,выпишем уравнение для $P(\xi)$, подставив полученные нами формулы для коэффициентов разложения отображения Пуанкаре, где многоточие обозначает члены высокого порядка:

$$\tilde{u}_1(\alpha)=\tilde{u}_0(\alpha)+\sum_{i=1}^{3}\phi_i(\tilde{u}_0,T,\alpha)\xi_i+\sum_{i,j=1}^{3}\psi_{ij}(\tilde{u}_0,T,\alpha)\xi_i\xi_j+ \tag{2.2.13}$$

$$+\sum_{i,j,k=1}^{3}\zeta_{ikj}(\tilde{u}_0,T,\alpha)\xi_i\xi_j\xi_k+\dots,$$

$$\tilde{u}_1(\alpha)=\tilde{u}_0(\alpha)+\xi_t(\alpha),\ \xi_t(\alpha)=\left(\xi_{1,t}(\alpha),\xi_{2,t}(\alpha),\xi_{3,t}(\alpha)\right), \tag{2.2.14}$$

$$\xi_{i,t+1}(\alpha)=\sum_{\mu=1}^{3}(\phi_\mu(\tilde{u},T,\alpha))_i\xi_{\mu,t}(\alpha)+\sum_{\mu,\nu=1}^{3}(\psi_{\mu,\nu}(\tilde{u}_0,T,\alpha))_i\xi_{\mu,t}(\alpha)\xi_{\nu,t}(\alpha)+ \tag{2.2.15}$$

$$+\sum_{\mu,\nu,\kappa=1}^{3}(\zeta_{\mu\nu\kappa}(\tilde{u}_0,T,\alpha))_i\xi_{\mu,t}(\alpha)\xi_{\nu,t}(\alpha)\xi_{\kappa,t}(\alpha)+\dots,t=0,1\dots i=1,2,3.$$

Затем, чтобы привести матрицу линейной части $X_1(T,\alpha)$ отображения Пуанкаре $d^2_uP(\xi)$ к жордановой форме $J=B^{-1}X_1(T,\alpha)B$ делаем не особую замену :

$$\xi(\alpha) = B(\alpha)y.$$

Получаем отображение для $i = 1, 2, 3, t = 0, 1, 2, \ldots :$

$$y_{i,t+1}(\alpha) = \lambda_i(\alpha)y_{i,t}(\alpha) + \sum_{\mu,\nu=1}^{3} (\psi'_{\mu,\nu}(\tilde{u}_0, T, \alpha))_i y_{\mu,t}(\alpha)y_{\nu,t}(\alpha) + \qquad (2.2.16)$$

$$+ \sum_{\mu,\nu,\kappa=1}^{3} (\zeta_{\mu\nu\kappa}(\tilde{u}_0, T, \alpha))_i y_{\mu,t}(\alpha)y_{\nu,t}(\alpha)y_{\kappa,t}(\alpha) + \cdots =$$

$$= \lambda_i(\alpha)y_{i,t}(\alpha) + G_i(y_{1,t}, y_{2,t}, y_{3,t}, \alpha),$$

где $\lambda_i(\alpha), i = 1, 2, 3-$ собственные числа матрицы $X_1(T, \alpha)$, а $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3-$ функция содержащая члены порядка два и выше ,

$$G(y) = (G_1(y), G_2(y), G_3(y), \alpha).$$

2.2.3. Вывод одномерного отображения

Имеем трехмерное дискретное отображение (2.2.16). Упорядочим уравнения в (2.2.16) в таком порядке, чтобы линейная часть первого уравнения была с собственным числом $|\lambda_1(\alpha)| = 1$, а остальные два с собственными числами линейной части меньше единицы для $i = 2, 3,\ t = 0, 1, 2, \ldots.$

$$y_{1,t+1}(\alpha) = \lambda_1(\alpha)y_{1,t}(\alpha) + G_1(y_{1,t}, y_{2,t}, y_{3,t}, \alpha), \qquad (2.2.17)$$

$$y_{i,t+1}(\alpha) = \lambda_i(\alpha)y_{i,t}(\alpha) + G_i(y_{1,t}, y_{2,t}, y_{3,t}, \alpha).$$

Выразим вторую и третью компоненту вектора y_t через первую, чтобы получить одномерное отображение. Для этого представим их в виде

$$y_{i,t}(\alpha) = w(y_{1,t}, \alpha)_i, \quad i = 2, 3, t = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (2.2.18)$$

где $w : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2-$ некоторая неизвестная функция от первой компоненты вектора y_t. Ее аппроксимацию обозначим через $W : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

$$y_{i,t}(\alpha) = W(y_{1,t}, \alpha) = b_{i,2}(\alpha)y^2_{1,t}(\alpha) + b_{i,3}(\alpha)y^3_{1,t}(\alpha),\ i = 2, 3, t = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (2.2.19)$$

Подставим представление компонент (2.2.19) в уравнение (2.2.17) и хотим, чтобы такое выражение аппроксимировало бы (2.2.17) с порядком $O(|y^3_{1,t}|)$ для $i = 2, 3,\ t = 0, 1, 2, \ldots:$

$$b_{i,2}(\alpha)(\lambda_1(\alpha)y_{1,t}+G_1(y_{1,t}, W(y_{1,t}), \alpha))^2+b_{i,3}(\lambda_1(\alpha)y_{1,t}+G_1(y_{1,t}, W(y_{1,t}), \alpha))^3-$$

$$-\lambda_i(\alpha)(b_{i,2}(\alpha)y^2_{1,t}(\alpha) + b_{i,3}(\alpha)y^3_{1,t}(\alpha) + \ldots) - G_i(y_{1,t}, W(y_{1,t})) = O(|y^3_{1,t}|).$$

Для этого должно выполняться:

$$b_{i,2}y^2_{1,t}\lambda_1(\alpha) - \lambda_i(\alpha)b_{i,2}y^2_{1,t} - G_{i,2}y^2_{1,t} = 0.$$

Отсюда получим выражение для коэффициентов $W(y_{1,t}, \alpha)$:

$$b_{i,2}(\alpha) = \frac{G_{i,2}(\alpha)}{-1 - \lambda_i(\alpha)}, i = 2, 3,$$

где $G_{i,2}(\alpha)-$коэффициенты при квадратичных членах в разложении $G_i(y_t, \alpha)$. Наши преобразования привели уравнение (2.2.17) к виду:

$$y_{1,t+1}(\alpha) = \lambda_1(\alpha)y_{1,t}(\alpha)+(\psi'_{11})_1y^2_{1,t}(\alpha)+((\zeta'_{111})_1+(\psi'_{12})_1G_{2,2}(\alpha)\frac{1}{-1 - \lambda_2(\alpha)}+$$

$$+(\psi'_{13})_1\frac{G_{3,2}(\alpha)}{-1 - \lambda_3(\alpha)})y^3_{1,t}(\alpha) + \ldots.$$

Подставляя в последнее уравнение выражение для $G_{2,2}(\alpha)$ и $G_{3,2}(\alpha)$ из (2.2.16) можем записать итоговое уравнение для одномерного отображения Пуанкаре в виде

$$y_{1,t+1}(\alpha) = \lambda_1(\alpha)y_{1,t} + (\psi'_{11})_1y^2_{1,t}(\alpha)+ \tag{2.2.20}$$

$$+\left((\zeta'_{111})_1 + (\psi'_{12})_1(\psi'_{12})_2\frac{1}{-1 - \lambda_2(\alpha)} + (\psi'_{13})_1\frac{(\psi'_{12})_3}{-1 - \lambda_3(\alpha)}\right)y^3_{1,t}(\alpha) + \ldots\ ,$$

где $t = 0, 1, 2, \ldots,$ а коэффициенты $\phi'_{11}, \phi'_{12}, \phi'_{13}, \zeta'_{111}$–зависят от α.

2.2.4. Проверка условий бифуркации удвоения периода

В предыдущих разделах мы получили одномерное отображение Пуанкаре и теперь можем провести проверку возникновения в системе бифуркации удвоения периода следуя предложению 2.1.1.

Для бифуркации удвоения периода, согласно [5], нам нужна следующая форма редуцированного отображения:

$$g(x,\alpha) = -x + a\alpha x + bx^2 + cx^3 + \dots .$$

Используя (2.2.20) перепишем правую часть этого уравнения в таком виде

$$\lambda_1 x + (\psi'_{11})_1 x^2 + \left((\zeta'_{111})_1 + (\psi'_{12})_1 (\psi'_{12})_2 \frac{1}{-1-\lambda_2(\alpha)} + (\psi'_{13})_1 \frac{(\psi'_{12})_3}{-1-\lambda_3} \right) x^3 + \dots,$$

где коэффициенты $\lambda_1, \phi'_i, \psi'_{i,j}, \zeta'_{i,j,k}$–зависят от α,для любых $i,j,k = 1,2,3$.

Проверим условия бифуркации удвоения периода для редуцированного отображения Пуанкаре $g(x,\alpha)$ которые были приведены в данной главе.

1. Наложим условие на параметр α так, чтобы одно собственное число матрицы линейной части было $\lambda_1(\alpha) = -1$. Выражение для собственного числа мы можем получить из уравнения

   $$\det(X_1(T,\alpha) - \lambda I_3) = 0,$$

   где матрица $X_1(t,\alpha)$– решение (2.2.7). В последнее уравнение подставим вместо $\lambda = -1$ и получим условие на α.

2. Проверим условие $a := \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \alpha}(0,0) \neq 0$ из предположения 2.1.1. Имеем

   $$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \alpha}(0,0) = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha}(0).$$

   Так как в нашей системе при параметре $\alpha_0 = 0$ возникает бифуркация Андронова-Хопфа, и выполняется $\lambda'(\alpha_0) \neq 0$, то в малой окрестности этого параметра тоже выполняется $\lambda'(\alpha) \neq 0$.

3. Чтобы проверить условие $b = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$ из предположения 2.1.1,

используем соотношение:

$$b = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) = \frac{1}{2}(\psi'_{11}(T,0,x_0))_1.$$

4. Чтобы проверить условие $c = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(0,0) \neq 0$, используем соотношение:

$$c = \frac{1}{6}\left((\zeta'_{111})_1 + (\psi'_{12})_1(\psi'_{12})_2\frac{1}{-1-\lambda_2(\alpha)} + (\psi_{13})_1\frac{(\psi_{12})_3}{-1-\lambda_3(\alpha)}\right)|_{\alpha=0}.$$

5. Проверим условие $g(0,\alpha) = 0\,\forall|\alpha| < \delta$. Это верно,так как полином не имеет свободного члена.

Замечание 2.2.3. Для вычисления коэффициентов a, b, c требуется решить две системы дифференциальных уравнений. В книге [7] используется программный пакет AUTO для решения подобной задачи для близкой системе Ходжкина-Хаксли. Если данный программный продукт доступен, данные коэффициенты возможно вычислить по приведенному нами алгоритму, используя AUTO. В данной работе конкретное вычисление коэффициентов не было в центре внимания, так как вычисления трудоемки и интереснее было развить общую схему исследования системы Билера-Рейтера на наличие бифуркации удвоения периода.

Глава 3

Управление хаосом в модели проводящей системы сердца Билера–Рейтера

Разработка надежной динамической системы которая может оставаться в нужном состоянии, даже при изменении значений параметров системы очень важная задача. Так как изменение состояния системы происходит в силу бифуркаций, контроль бифуркационных параметров является ключевым для построения надежной системы. В данной главе предложен метод контроля максимального показателя Ляпунова.

3.1. Тип хаоса в модели Билера-Рейтера

В системе Билера–Рейтера в работе [8] было доказано наличие бифуркации Андронова-Хопфа. Также есть результаты о последующей бифуркации удвоения периода [19]. Как известно бифуркация удвоения периода приводит к рождению неустойчивого предельного цикла с периодом большим чем период предельного цикла при бифуркации Андронова-Хопфа. В [4] показано, что однин из переходов к хаосу в трехмерных нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется одним и тем же способом с использованием одних и тех же механизмов, а именно, через каскад бифуркаций удвоения периода циклов Фейгенбаума, затем через субгармонический каскад бифуркаций Шарковского рождения устойчивых циклов любого периода, и затем через гомоклинический каскад бифуркаций циклов, сходящихся к гомоклиническим контурам особых точек.

Именно с таким типом хаоса мы будем бороться в системе (1.0.3).

3.2. Использование максимального показателя Ляпунова для управления хаосом

Локальные бифуркации в системе с предельным циклом происходят, когда хотя бы один из мультипликаторов пересекает единичную окружность. Но вычисление мультипликаторов системы довольно трудоемко и требует много времени. В силу этого, стандартная процедура вычисления мультипликаторов и изменения бифуркационного параметра, в зависимости от них, не может быть использована.

В данной работе выбран другой метод изучения влияния управления на модель. Для предотвращения бифуркаций в системе воспользуемся методом, предложенным в [15], заключающийся в введении возмущения в один из коэффициентов системы (1.0.3) и постоянном контроле максимального показателя Ляпунова системы косого произведения и изменении параметра динамической системы в реальном времени.

3.3. Элементы теории коциклов

Определения и теоремы взяты из [5].

Пусть (Q, ρ_Q)– полное метрическое пространство с метрикой ρ_Q , а $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} | t \geq 0\}$.

Определение 3.3.1. *Непрерывным базисным полупотоком называется* $\left(\{\vartheta^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, (Q, \rho_Q)\right)$*, где непрерывное отображение* $\vartheta : \mathbb{R}_+ \times Q \to Q$, $(t, q) \mapsto \vartheta(t, q) = \vartheta^t(q)$*, удовлетворяет условиям*

$\vartheta^0 = id_Q$ *и* $\vartheta^{t+s} = \vartheta^t \circ \vartheta^s$ *для всех* $t, s \in \mathbb{R}_+$.

Определение 3.3.2. *Пусть* (N, ρ_N) *– метрическое пространство. Пусть на множестве* $\mathbb{R}_+ \times Q \times N$ *задано некоторое непрерывное отображение*

$$\psi : \mathbb{R}_+ \times Q \times N \to N,\ (t, q, w) \mapsto \psi^t(q, w). \tag{3.3.1}$$

Тогда пара $\left(\{\psi^t(q,\cdot)\}_{q\in Q, t\in\mathbb{R}^+}, (N, \rho_N)\right)$ *называется коциклом над базисным потоком* $\left(\{\vartheta^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, (Q, \rho_Q)\right)$*, если отображение* ψ *удовлетворяет условиям:*

$\psi^0(q,\cdot) = id_{Q\times N},\ \forall q \in Q$ *и* $\psi^{t+s}(q, w) = \psi^t(\vartheta^s(q), \psi^s(q, w))\ t, s \geq 0, \forall q \in Q$.

Обозначим через $W = Q \times N$ – прямое произведение пространств. Зададим на W структуру метрического пространства: определим метрику ρ_W для любых $(q, w), (q', w') \in W$ например как

$$\rho_W\left((q, w), (q', w')\right) = \sqrt{\rho_Q(q, q')^2 + \rho_N(w, w')^2}.$$

Определение 3.3.3. *Полупотоком системы косого произведения ϑ, ψ над прямым произведением пространств $W = Q \times N$ называют пару*

$$(\{S^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, (W, \rho_W),$$

$$S : \mathbb{R}_+ \times W \to W,\ (t, q, w) \mapsto (\vartheta^t(q), \psi^t(q, w)), \tag{3.3.2}$$

где отображение S^t, где $t > 0$, непрерывно для любых $(q, w) \in W = Q \times N$. Полупоток линейный, если $S^t(q, w)$ линейно по w для каждой $(t, q) \in \mathbb{R}_+ \times Q$.

Теперь можем перейти к определению верхнего показателя Ляпунова. Допустим полупоток регулярен, то есть отображение S дифференцируемо по w и $\frac{\partial}{\partial w}\psi^t(q, w) = D_2\psi^t(q, w)$ непрерывна для всех $t > 0, q \in Q, w \in N$, также, это означает непрерывность в $t = 0$ линейного дифференциального оператора, а именно для каждого $p \in N$ $\lim_{t\to 0+} D_2\psi^t(q, w)p = p$ для $\forall(q, w) \in Q \times N$.

Если $\mathcal{K} \subset W$ компактное положительно инвариантное множество, то *линеаризованным полупотоком* (3.3.2) определенным на $\mathcal{K} \times N$ называется

$$L : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{K} \times N \to \mathcal{K} \times N \tag{3.3.3}$$

$$(t, (q, w), p) \mapsto (S^t(q, w), D_2\psi^t(q, w)p).$$

Тогда $D_2\psi^t(q, w)$ удовлетворяет условиям коцикла:

$$D_2\psi^{t+s}(q, w) = D_2\psi^t(S^s(q, w))D_2\psi^s(q, w),\ t, s \in \mathbb{R}_+, (q, w) \in \mathcal{K}.$$

Определение 3.3.4. *Максимальный показатель Ляпунова в точке $(q, w) \in \mathcal{K}$ для коцикла (3.3.1)*

$$\nu(q, w) = \limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln \|D_2\psi^t(q, w)\|}{t} = \limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln \sigma_1(D_2\psi^t(q, w))}{t},$$

где $\sigma_i(D_2\psi^t(q, w))$–сингулярные числа матрицы $D_2\psi^t(q, w)$ системы (3.3.3). Максимальной показатель Ляпунова системы (3.3.3) на множестве $\mathcal{K}$:

$$\nu_{\mathcal{K}} = \sup_{(q,w)\in\mathcal{K}} \nu(q, w).$$

В определении использовано понятие сингулярных чисел, которое можно найти в книге [5].

3.4. Диссипативность системы Билера-Рейтера

Прежде чем строить коцикл и получать критерий устойчивости системы (1.0.3) с возмущением в параметре $\sigma_{nab}(t) = q(t)$, докажем, что система диссипативна, и, следовательно, имеет решения продолжимые на $\mathbb{R}_+$.

Теорема 3.4.1. *Система (1.0.3) с возмущением, которая имеет вид*

$$\begin{cases} -C\dot{v} = q(t)(v - v_{Na}) + \sigma_{Ca} dn(v - v_{Ca}) + I_{k_1}(v), \\ \dot{d} = g_1(v)(1-d) - g_2(v)d, \\ \dot{n} = f_1(v)(1-n) - f_2(v)n, \end{cases} \tag{3.4.1}$$

$$g_1(v) = \frac{0.095e^{-0.01(v-5)}}{e^{-0.72(v-5)}+1},\ g_2(v) = \frac{0.07e^{-0.017(v+44)}}{e^{0.05(v+44)}+1},$$

$$f_1(v) = \frac{0.012e^{-0.008(v+28)}}{e^{0.15(v+28)}+1},\ f_2(v) = \frac{0.0065e^{-0.02(v+30)}}{e^{-0.2(v+30)}+1},$$

$$d, n \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}\setminus\{-23\}, t \geq 0,$$

где I_{k_1}—как в (1.0.1), диссипативна на многообразии

$\forall t \geq 0\, d(t), n(t) \in (0,1);$

$v(t) < v_{Ca} + \frac{v_{Na} - v_{Ca}a - 0.35P_1(v)}{a + \sigma_{Ca}d(t)n(t) + \frac{0.07}{1-e^{-0.04(v+23)}}}$, *если* $v(t) > \sqrt{2}$ *и*

$v(t) < v_{Ca} + \frac{(v_{Na} - v_{Ca}a + 0.35\sigma_K P_1(v))}{a - \sigma_{Ca}d(t)n(t) - \frac{0.07}{1-e^{-0.04(v+23)}}}$, *если* $v(t) < -\sqrt{2}, t > 0\}$,

где $P_1(v) = \left(4\frac{e^{0.04(v+85)}-1}{e^{0.08(v+53)}+e^{0.04(v+53)}} + 0.2\frac{80+23}{1-e^{-0.04(v+23)}}\right)$,

при выполнении следующих условий:

1)$\sigma_{Ca}, C, v_K, v_{Na}, \sigma_K > 0$;

2) Функция $|q(t)| < a$*—равномерно ограниченна и равностепенно непрерывна для* $t \geq 0$.

Доказательство. Доказательство будем проводить по методу функции Ляпунова. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(v,d,n) := \frac{1}{2}\left(v^2 - d^2 - n^2\right).$$

Для того чтобы она была положительна определена следует брать $v^2 > d^2 + n^2$– это первое условие на переменные v, d, n.

Пусть $(v(t), d(t), n(t))$–произвольное решение системы (3.4.1). Посчитаем и оценим производную V в силу системы:

$$\dot{V}(v(t), d(t), n(t)) = v(t)\dot{v}(t) - d(t)\dot{d}(t) - n(t)\dot{n}(t) = \tag{3.4.2}$$

$$= v(t)\dot{v}(t) - d(t)(g_1(v)(1-d(t)) - g_2(v)) - n(t)(f_1(v)(1-n(t)) - f_2(v)).$$

Разделим выражение (3.4.2) на две части:

$$-\frac{v(t)}{C}\big(\sigma_{nab}(t)(v(t) - v_{Na}) + \sigma_{Ca}d(t)n(t)(v(t) - v_{Ca}) + \tag{3.4.3}$$

$$+0.35\left(4\frac{e^{0.04(v(t)+85)} - 1}{e^{0.08(v(t)+53)} + e^{0.04(v(t)+53)}} + 0.2\frac{v(t) + 23}{1 - e^{-0.04(v(t)+23)}}\right)\big)$$

и

$$-\left(d(t)(g_1(v)(1\text{-}d(t))\text{-}g_2(v)d(t)) + n(t)(f_1(v)(1\text{-}n(t))\text{-}f_2(v)n(t))\right). \tag{3.4.4}$$

Оценим для начала вторую часть, для этого перепишем ее в виде

$$-(-(g_1(v(t)) + g_2(v(t)))d(t)^2 + g_1(v(t))d(t) - (f_1(v(t)) + f_2(v(t)))n(t)^2 +$$

$$+f_1(v(t))n(t)) = (g_1(v(t)) + g_2(v(t)))\left(d(t)^2 - \frac{g_1(v(t))d(t)}{(g_1(v(t)) + g_2(v(t)))}\right) +$$

$$+(f_1(v(t)) + f_2(v(t)))\left(n(t)^2 - \frac{f_1(v(t))n(t)}{(f_1(v(t)) + f_2(v(t)))}\right).$$

Найдем условия, при которых это выражение отрицательно. Рассмотрим функции $(f_1(v) + f_2(v))$, $(g_1(v) + g_2(v))$. Обе функции строго положительны и не имеют точек пересечения с осью. Поэтому далее рассмотрим функции $F_1(t) = \left(d^2(t) - \frac{g_1(v(t))d(t)}{(g_1(v(t))+g_2(v(t)))}\right)$,$F_2(t) = \left(n^2(t) - \frac{f_1(v(t))n(t)}{(f_1(v(t))+f_2(v(t)))}\right)$ –они должны быть отрицательны, чтобы (3.4.4) была отрицательна.

Найдем точку минимума. Для этого найдем производную по d функции $F_1(t)$ и приравняем к нулю:

$$\frac{\partial}{\partial d}(F_1(t)) = 2d(t) - \frac{g_1(v(t))}{(g_1(v(t)) + g_2(v(t)))} = 0.$$

Найдем корень этого уравнения:

$$d(t) = \frac{g_1(v(t))}{2(g_1(v(t)) + g_2(v(t)))} > 0, \forall v(t) \in \mathbb{R} \backslash \{-23\}, t \geq 0.$$

Заметим, что корень один и это точка минимума. Посчитаем значение $F_1(t)$ в этой точке

$$\frac{g_1^2(v(t))}{4(g_1(v(t)) + g_2(v(t)))^2} - \frac{g_1^2(v(t))}{2(g_1(v(t)) + g_2(v(t)))^2} = -\frac{g_1^2(v(t))}{4(g_1(v(t)) + g_2(v(t)))^2}$$

значение отрицательное. Для того, чтобы определить промежуток на котором $F_1(t)$ отрицательна, найдем точки ее пересечения с осью:

$$d(t) = 0,\ d(t) = \frac{g_1(v(t))}{(g_1(v(t)) + g_2(v(t)))} = \psi(v(t)).$$

Отсюда получим

$$0 < d(t) < \psi(v(t)).$$

Второй корень мы рассмотрим как функцию обозначенную $\psi(v(t))$. Ищем ее точки экстремума, приравняв производную к нулю. Используя программу Mathematica получим, что все корни комплексные. Для оценки интервала, где парабола отрицательна, найдем пределы функции $\psi(v(t))$ при $v(t) \to \pm\infty$. Так для $v(t) \to +\infty$ предел равен 1, а для $v(t) \to +\infty$ равен 0. Таким образом первая часть функции (3.4.4) отрицательна на $d(t) \in (0, 1)\,, v(t) \in \mathbb{R} \backslash \{-23\}, t \geq 0$.

Вторая часть (3.4.4) исследуется аналогичным образом. Функция $F_2(t)$ отрицательна на промежутке

$$0 < n(t) < \frac{f_1(v(t))}{(f_1(v(t)) + f_2(v(t)))} = \phi(v(t))$$

и функция $\phi(v(t))$ имеет пределы значений $0, 1$. Следовательно вторая часть (3.4.4) отрицательна на $n(t) \in (0, 1)\,, v(t) \in \mathbb{R} \backslash \{-23\}, t \geq 0$.

Что касается (3.4.3), известно, что функция $|q(t)| < a\, \forall t \geq 0$, поэтому достаточно получить неравенство

$$-\frac{v(t)}{C}\big(a(v(t)-v_{Na})+\sigma_{Ca}d(t)n(t)(v(t)-v_{Ca})+$$

$$+0.35\left(4\frac{e^{0.04(v(t)+85)}-1}{e^{0.08(v(t)+53)}+e^{0.04(v(t)+53)}}+0.2\frac{v(t)+23}{1-e^{-0.04(v(t)+23)}}\right)<0.$$

1.Предположим $v(t)<0, t\geq 0$, тогда

$$(a(v(t)-v_{Na})+\sigma_{Ca}d(t)n(t)(v(t)-v_{Ca})+$$

$$+0.35\left(4\frac{e^{0.04(v(t)+85)}-1}{e^{0.08(v(t)+53)}+e^{0.04(v(t)+53)}}+0.2\frac{v(t)+23}{1-e^{-0.04(v(t)+23)}}\right)$$

должна быть отрицательна. Проведем ряд преобразований и получим

$$v(t)<\frac{(v_{Na}-\sigma_{Ca}d(t)n(t)v_{Ca}+0.35\sigma_K P_0(v(t)))}{a-\sigma_{Ca}d(t)n(t)-\frac{0.07}{1-e^{-0.04(v+23)}}},$$

$$P_0(v)=\left(4\frac{e^{0.04(v+85)}-1}{e^{0.08(v+53)}+e^{0.04(v+53)}}+0.2\frac{23}{1-e^{-0.04(v+23)}}\right),$$

с учетом того, что знаменатель не ноль. В правой части можем выделить целую часть и избавиться от слагаемого с $d(t)n(t)$ в числителе:

$$v(t)<v_{Ca}+\frac{(v_{Na}-v_{Ca}a+0.35\sigma_K P_1(v(t)))}{a-\sigma_{Ca}dn-\frac{0.07}{1-e^{-0.04(v+23)}}},\ t\geq 0,$$

$$P_1(v)=\left(4\frac{e^{0.04(v+85)}-1}{e^{0.08(v+53)}+e^{0.04(v+53)}}+0.2\frac{103}{1-e^{-0.04(v+23)}}\right).$$

Также, имея информацию о поведении $d(t), n(t)$ можно найти минимум правой части и таким образом найти верхнюю границу для $v(t)$.

2.Предположим $v>0$: тогда выражение в скобках из (3.4.4) должно быть больше нуля. Перенесем члены с $v(t)$ в одну сторону, а члены с экспонентой от $v(t)$–в другую. Оценив при этом функцию как $q(t)>-a$, получим неравенство:

$$v(t)<v_{Ca}+\frac{v_{Na}-v_{Ca}a-0.35P_1(v)}{a+\sigma_{Ca}d(t)n(t)+\frac{0.07}{1-e^{-0.04(v(t)+23)}}},\ t\geq 0,$$

при условии, что знаменатель не обращается в ноль.

Можем также оценить $v(t)$, зная пределы для $d(t), n(t)$. Для этого правую часть неравенства $v(t)^2 > d(t)^2 + n(t)^2$ для всех $t \geq 0$ заменим на супремум на $d, n \in (0,1)$. Получим оценку

$$v(t)^2 > 2.$$

Если последнее неравенство выполняется, то функция Ляпунова (3.4.2) отрицательна.

Получаем, что система диссипативна и область дисипативности

$$\mathcal{K} := \Big\{ d(t), n(t) \in (0,1),\ v(t) \neq -23,$$

$$v(t) < v_{Ca} + \frac{v_{Na} - v_{Ca}a - 0.35P_1(v)}{a + \sigma_{Ca}d(t)n(t) + \frac{0.07}{1-e^{-0.04(v+23)}}}, \text{если } v(t) > \sqrt{2}$$

$$\text{и } v(t) < v_{Ca} + \frac{(v_{Na} - v_{Ca}a + 0.35\sigma_K P_1(v))}{a - \sigma_{Ca}d(t)n(t) - \frac{0.07}{1-e^{-0.04(v+23)}}}, \text{если } v(t) < -\sqrt{2}, t > 0 \Big\}.$$

Значит любое решение (3.4.1) внутри $\mathcal{K}$ можно продлить на $\mathbb{R}_+$ и система диссипативна. □

Замечание 3.4.2. 1)Далее можно показать, что существуют $v_0 < v_1$ такие, что область диссипативности можно представить в виде

$$\mathcal{K} = \{(v(t), d(t), n(t)) |\ d(t), n(t) \in (0,1),\ v(t) \in (v_0, v_1) \backslash \{-23\}, \forall t \geq 0\}.$$

2)Для уточнения области диссипативности можно использовать несколько функций Ляпунова и для каждой искать условия положительной определенности и отрицательности производной. Область диссипативности в этом случае есть пересечение областей, полученных для каждой функции.

3.5. Построение системы расширения для системы Билера–Рейтера

Все необходимые в данном разделе определения можно найти в [6, 10, 5]. В данной работе рассматриваются следующие типы функций управления: рекуррентные и почти периодические. Определения таких классов функций даны в [6]. Данные типы функций обладают важными свойствами: ограниченностью и множество функций таких типов есть полное пространство в смысле топологии равномерной сходимости и есть замкнутое подпространство пространства ограниченных функций. Отсюда, при построении оболочки $Q = \mathcal{H}(f) := \overline{\{f(\cdot + t, \cdot), t \geq 0\}}$, где замыкание берется в данной топологии, мы не выйдем за рамки класса рассматриваемых функций. Обозначим множество допустимых функций управления Q.

Для построения системы расширения для системы дифференциальных уравнений (1.0.3) прежде нужно построить коцикл. Общая процедура построения коцикла над потоком Бебутова на оболочке $\mathcal{H}$ для системы с введенной функцией управления $q \in Q$

$$\dot{u} = f(t, u), \tag{3.5.1}$$

где $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$—гладкое отображение, удовлетворяющее условиям теоремы Векмана, описана в [6].

Существование глобального коцикла доказывалось на основе теоремы Векмана. Из нее были получены условия существования глобального коцикла для конкретной задачи. Если использовать эту процедуру, тогда для системы (1.0.3) с введенным в нее управлением $q \in Q$ справедлива теорема.

Теорема 3.5.1. *Пусть функция управления $q \in Q$ ограничена и равномерно непрерывна.*

Тогда для любых значений параметров $\sigma_{Ca}, C, v_{Ca}, v_{Na} > 0$ система (3.5.1) порождает глобальный коцикл $\left(\{\psi^t(q, \cdot)\}_{t\in\mathbb{R}, q\in\mathcal{H}}, (\mathcal{K}, \|\cdot\|)\right)$ над потоком Бебутова $(\{\vartheta^t\}_{t\in\mathbb{R}}, , (\mathcal{H}, \rho_{\mathcal{H}}))$ на оболочке, где $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$ рассматривается как топологическое пространство с индуцированной из $\mathbb{R}^3$топологией и метрикой.

Доказательство. Так как в разделе 3.4 была доказана диссипативность системы относительно области $\mathcal{K}$, то глобальный коцикл существует внутри области $\mathcal{K}$ в силу теоремы Векмана. □

Так было доказано, что система порождает глобальный коцикл над базисным потоком $(\{\vartheta^t\}_{t\in\mathbb{R}}, (\mathcal{H}, \rho_{\mathcal{H}}))$, который имеет вид

$$\dot{u}(t) = \hat{f}(\vartheta^t(q), u), \; q \in Q \tag{3.5.2}$$

$$u \in \mathcal{K}, t \geq 0,$$

где $\hat{f}$- отображение взятия значения, описанное в [6], и пусть $\psi^t(q, u_0) = u(t, u_0, q)$ –решение системы из этого семейства с начальными данными $u(0, u_0, q) = u_0$.

Для такого базового потока и коцикла системы дифференциальных уравнений (1.0.3) построим систему расширения на оболочку $\mathcal{H}$:

$$S : \mathbb{R}^+ \times Q \times \mathcal{K} \to Q \times \mathcal{K},$$

$$(t, q, w) \mapsto (\vartheta^t(q), \psi^t(q, u_0)),$$

где $\psi^t(q, u_0) = u(t, u_0, q)$, $t \geq 0$.

Теперь построим линеаризацию системы (3.5.2).Для этого зафиксируем $(q, u_0) \in Q \times \mathcal{K}$ и обозначим через $z(t, z_0)$ решение линейного дифференциального уравнения в вариациях с начальным условием $z(0, z_0) = z_0$

$$\dot{z} = D_2 f(\psi^t(q, u_0), q)z, \; z(0, z_0) = z_0. \tag{3.5.3}$$

Нетрудно понять, что $D_2\psi^t(q, u_0)z_0 = z(t, z_0)$ для каждого $t \geq 0$. Значит фундаментальной матрицей системы (3.5.3) является $D_2\psi^t(q, u_0)$.

В [15] была сформулирована теорема об устойчивости системы в терминах макисмального показателя Ляпунова линеаризованной системы расширения, определение которого приведено в этом же источнике.

Поэтому для проверки устойчивости нам нужно вычислить максимальный показатель Ляпунова, но данное вычисление трудоемко. Одновременно с максимальным показателем Ляпунова используем сингулярные числа, которые гораздо удобнее вычислять. Оценим их как описано в [6] и интерпретируем результат для коциклов.

Теорема 3.5.2. *Пусть имеется коцикл над потоком Бебутова (3.5.2).По нему построена линеаризованная система (3.5.3) с фундаментальной мат-*

рицей $D_2\psi^t(q,u_0)$. *Пусть*

$$\sigma_1(\vartheta(q),\psi^t(q,u_0)) \geq \sigma_2(\vartheta^t(q),\psi^t(q,u_0)) \geq \dots \geq \sigma_n(\vartheta^t(q),\psi^t(q,u_0))$$

– упорядоченные сингулярнвные числа фундаментальной матрицы ,

$$\lambda_1(\vartheta^t(q),\psi^t(q,u_0)) \geq \lambda_2(\vartheta^t(q),\psi^t(q,u_0)) \geq \dots \lambda_n(\vartheta^t(q),\psi^t(q,u_0)) -$$

собственные числа симметризованной матрицы $\frac{1}{2}\Big(\hat{J}(t,u_0)+\hat{J}^T(t,u_0)\Big)$, *где* $\hat{J}(t,u_0)=\hat{J}(\vartheta^t(q),\psi^t(q,u_0))=D_2\hat{f}(\vartheta^t(q),\psi^t(q,u_0))$.

Обозначим для краткости для всех $i=1,2,\dots,n$, $t\geq 0$

$$\lambda_i(\vartheta^t(q),\psi^t(q,u_0))=\lambda_i(t,u_0),\ \sigma_i(\vartheta(q),\psi^t(q,u_0))=\sigma_i(t,u_0).$$

Тогда для $k=1,2,\dots,n$

$$\sigma_1(t,u_0)\sigma_2(t,u_0)\cdot\dots\cdot\sigma_k(t,u_0) \leq exp\int\limits_0^t(\lambda_1(s,u_0)+\dots+\lambda_k(s,u_0))\,\mathrm{d}s.$$

3.6. Критерий устойчивости системы Билера–Рейтера

Используя результаты полученные в [15] получим критерий устойчивости для системы (1.0.3), который заключается в следующем.

Теорема 3.6.1. *(Критерий устойчивости) Пусть:*

1)Система (3.4.1) с функцией управления $q\in Q$ *диссипативна в области* $\mathcal{K}$, *построен коцикл (3.5.2) и его линеаризация (3.5.3).*
2)Задано $\sigma_1(D_2\psi^t(q,w))$*−максимальное сингулярное число фундаментальной матрицы* $D_2\psi^t(q,w)$ *системы (3.5.3) в произвольной точке* $t>0, q\in Q$, $w\in\mathcal{K}$.

Тогда при условии

$$\sup_{(q,w)\in Q\times\overline{\mathcal{K}},t>0}\sigma_1(D_2\psi^t(q,w))<1$$

система (3.4.1) равномерно экспоненциально устойчива в области $\mathcal{K}$.

Замечание 3.6.2. *Вместо условия на максимальное сингулярное число матрицы $D_2\psi^t(q,w)$ системы (3.5.3) в теореме 3.6.1 можно использовать условие $\nu_{\mathcal{K}} < 0$, где $\nu_{\mathcal{K}}-$ максимальный показатель Ляпунова системы (3.5.3) на множестве $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Свойство диссипативности доказано в разделе 3.4. Утверждение теоремы вытекает из применения теоремы полученной в [15] с использованием оценок максимального показателя Ляпунова системы (3.5.3) на множестве $\mathcal{K}$. □

Ниже представлены достаточные условия на функцию управления для выполнения условий теоремы 3.6.1.

Теорема 3.6.3. *Пусть задана линеаризация системы (3.5.3) на произведении $Q \times \overline{\mathcal{K}}$*

$$\dot{z} = D_2\hat{f}(\psi^t(q,w),q)z,\ z(0,z_0) = z_0.$$

Пусть далее для всех $q \in Q$, $w \in \mathcal{K}$

$$\lambda_1(\vartheta^t(q),\psi^t(q,w)) \geq \lambda_2(\vartheta^t(q),\psi^t(q,w)) \geq \cdots \geq \lambda_n(\vartheta^t(q),\psi^t(q,w)) -$$

собственные числа симметризованной матрицы Якоби

$$\frac{1}{2}\left(\hat{J}(t,w) + \hat{J}^T(t,w)\right),$$

$$\hat{J}(t,w) = \hat{J}(\vartheta^t(q),\psi^t(q,w)) = D_2\hat{f}(\vartheta^t(q),\psi^t(q,w)).$$

Кроме того, пусть для всех компонент $v(t), d(t), n(t)$ решения системы (1.0.3) в области диссипативности $\mathcal{K}$ выполнены условия:

$$\begin{cases} -0.35I_1(v(t)) < q(t); \\ \frac{C}{4}\left(\frac{\left(\frac{\sigma_{Ca}(v(t)+2.1534-v_{Ca})(n(t)-2.6637)}{C}-g_1(v(t))\right)^2}{g_1(v(t))+g_2(v(t))}\right) - 0.35I_1(v(t)) < q(t); \\ \frac{I_2(v(t),d(t),n(t))C}{4(f_1(v(t))+f_2(v(t)))(g_1(v(t))+g_2(v(t)))v(t)^2} - 0.35I_1(v(t)) < q(t); \end{cases}$$

$$I_1(v) = -\frac{4\left(0.04e^{0.04(v+53)} + 0.08e^{0.08(v+53)}\right)\left(e^{0.04(v+85)} - 1\right)}{\left(e^{0.04(v+53)} + e^{0.08(v+53)}\right)^2} +$$

$$+\frac{0.2}{1-e^{-0.04(v+23)}}-\frac{0.008e^{-0.04(v+23)}(v+25.1534)}{\left(1-e^{-0.04(v+23)}\right)^2}+\frac{0.16e^{0.04(v+85)}}{e^{0.04(v+53)}+e^{0.08(v+53)}},$$

$$I_2(v,d,n)=(g_1(v)+g_2(v))v\left((n-1)f_1(v)+nf_2(v)+\frac{\sigma_{ca}d(v-v_{Ca})}{C}\right)^2+$$

$$+((1-d)g_1(v)-g_2d(v))(f_1(v)+f_2(v))v-\frac{2n\sigma_{Ca}v}{C}(v-v_{Ca})(f_1(v)+f_2(v))\times$$

$$\times((1-d)g_1(v)-g_2(v)d)+\frac{n^2\sigma_{Ca}^2v(v-80)^2(f_1+f_2)}{C^2}.$$

где $t \geq 0$, *константы* $\sigma_{Ca}, \sigma_K, C, v_{Na}, v_{Ca} > 0$.

Тогда максимальное собственное число $\lambda_1(\vartheta^t(q), \psi^t(q,w))$ *отрицательно для всех* $t > 0, q \in Q, w \in \mathcal{K}$.

Доказательство. Для начала рассмотрим матрицу $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^3$с $a_{23} = 0$ и $a_{32} = 0$, как и у матрицы Якоби системы (3.5.3), и рассмотрим ее симметризацию:

$$B := \frac{1}{2}(A+A^T) = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & \frac{a_{13}+a_{31}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & a_{22} & 0 \\ \frac{a_{13}+a_{31}}{2} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы максимальное собственное число матрицы было отрицательно воспользуемся критерием Рауса–Гурвица для характеристического полинома матрицы B:

$$\chi_B(\lambda) = \frac{1}{8}\lambda\left(-8a_{11}a_{22}-8a_{11}a_{33}+2(a_{12}+a_{21})^2+2(a_{13}+a_{31})^2-8a_{22}a_{33}\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\left(8a_{11}a_{22}a_{33}-2a_{33}(a_{12}+a_{21})^2-2a_{22}(a_{13}+a_{31})^2\right)+\frac{1}{8}\lambda^2(8a_{11}+8a_{22}+8a_{33})-$$

$$-\lambda^3 =: b_3\lambda^3+b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0.$$

Для полиномов третьего порядка критерий Рауса–Гурвица имеет вид: $b_i < 0, i = 0, \ldots, 3$ и $b_1b_2 - b_0b_3 > 0$. Из этих условий можем получить систему условий на коэффициенты матрицы A. После некоторых преобразований они выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} a_{ii} < 0; & i = 1, 2, 3; \\ |a_{12} + a_{21}| < 2\sqrt{a_{11}a_{22}}; \\ |a_{13} + a_{31}| < \sqrt{\frac{4a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}^2 a_{33} - 2a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}^2 a_{33}}{a_{22}}}. \end{cases} \tag{3.6.1}$$

Теперь перейдем конкретно к матрице системы (3.5.3). Для нее условия $a_{ii} < 0$ выполняются для всех $i = 2, 3$ в области диссипативности $\mathcal{K}$. Остается проверить остальные условия и найти таким образом ограничения на функцию управления $q(t)$.

Итак, первое условие $a_{11} < 0$ для линеаризации над косым произведением (3.5.3) для всех компонент $v(t), d(t), n(t)$ решения системы (1.0.3) в области диссипативности $\mathcal{K}$ выглядит как:

$$-\sigma_{Ca} d(t) n(t) - 0.35 I_1(v(t)) < q(t),\ \forall t \geq 0$$

$$I_1(v) = -\frac{4\left(0.04e^{0.04(v+53)} + 0.08e^{0.08(v+53)}\right)\left(e^{0.04(v+85)} - 1\right)}{\left(e^{0.04(v+53)} + e^{0.08(v+53)}\right)^2} + \\ + \frac{0.2}{1 - e^{-0.04(v+23)}} - \frac{0.008e^{-0.04(v+23)}(v + 25.1534)}{\left(1 - e^{-0.04(v+23)}\right)^2} + \\ + \frac{0.16e^{0.04(v+85)}}{e^{0.04(v+53)} + e^{0.08(v+53)}}.$$

В левой части неравенста супремум по $d(t), n(t) \in \mathcal{K}$ достигается при $d(t) = n(t) = 0, t > 0$:

$$-0.35\sigma_K I_1 < q(t),\ \forall t > 0.$$

Второе условие из (3.6.1) –это $|a_{12} + a_{21}| < 2\sqrt{a_{11}a_{22}}$. При подстановке элементов симметризованной матрицы Якоби вместо a_i, получим для любого $t > 0$

$$|(d(t) - 1)g_1(v(t)) + d(t)g_2(v(t)) + \frac{\sigma_{Ca}(v(t) - v_{Ca})n(t)}{C}| < \\ < \frac{2\sqrt{I_2(v(t), d(t), n(t), t)}}{\sqrt{C}},$$

$$I_2(v,d,n,t) = v(t)(g_1(v(t)) + g_2(v(t)))(-q(t) - \sigma_{Ca}n(t)d(t) - 0.35I_1(v(t)),$$

где $I_1(v)$ как и выше. Группируя слагаемые не содержащие $q(t)$ в одной стороне, остальные в другой, возведя обе части в квадрат и проводя анализ подобно тому, как это делалось в первом пункте, приведем сразу полученный результат для данного пункта для всех $v(t), d(t), n(t) \in \mathcal{K}$, $t > 0$:

$$\frac{C}{4v(t)}\left(\frac{\frac{(\sigma_{Ca}(v(t)-v_{Ca})n(t)}{C} - (1-g_1(v(t)))^2}{g_1(v(t)) + g_2(v(t))}\right) - 0.35I_1(v(t)) < q(t), t \geq 0.$$

Последнее из условий (3.6.1) дает нам еще одни условия на функцию управления для всех $v(t), d(t), n(t) \in \mathcal{K}$, $t > 0$:

$$|(n(t)-1)f_1(v(t)) + n(t)f_2(v(t)) + \frac{\sigma_{ca}d(t)(v(t) - v_{Ca})}{C}| <$$

$$< \frac{\sqrt{Q(v(t), d(t), n(t))}}{\sqrt{-v(t)(g_1(v(t)) + g_2(v(t))}},$$

$$Q(v,d,n) = ((1-d)g_1(v) - g_2d(v))(f_1(v) + f_2(v))v +$$

$$+\frac{4}{C}(f_1(v) + f_2(v))(g_1(v) + g_2(v))v^2(-I(v)) -$$

$$-\frac{2}{C}n((1-d)g_1 - g_2d)\sigma_{Ca}v(v - v_{Ca})(f_1 + f_2) + \frac{n^2\sigma_{Ca}^2 v(v-80)^2(f_1+f_2)}{C^2}.$$

Отсюда получим последнее условие на функцию $q(t)$:

$$\frac{(I_2(v(t), d(t), n(t)))C}{(f_1(v(t)) + f_2(v(t)))(g_1(v(t)) + g_2(v(t)))v(t)^2} - d(t)n(t)\sigma_{Ca} - 0.35I_1(v(t)) < q(t),$$

$$4I_2(v,d,n) = (g_1(v) + g_2(v))v\left((n-1)f_1(v) + nf_2(v) + \frac{\sigma_{ca}d(v - v_{Ca})}{C}\right)^2 +$$

$$((1-d)g_1(v) - g_2d(v))(f_1(v) + f_2(v))v - \frac{2n\sigma_{Ca}v}{C}(v - v_{Ca})(f_1(v) + f_2(v))\times$$

$$\times((1-d)g_1(v) - g_2(v)d) + + \frac{n^2\sigma_{Ca}^2 v(v-80)^2(f_1+f_2)}{C^2}, v(t), d(t), n(t) \in \mathcal{K},\ t > 0.$$

Так получили все требуемые неравенства. $\square$

Замечание 3.6.4. Множество управлений, при которых система (3.4.1) стабилизируется, не пусто. Так, например, при стандартных значениях коэффициентов модели $\sigma_{Ca} = 0.09$, $C = 1$, $v_{Na} = 40$, $v_{Ca} = 80$, и $q \in Q$ получаем оценку $|\sigma_{nab}(t)| = |q(t)| < 0.006993$, $t > 0$, при которых система (3.5.3) устойчива. В множестве Q допустимых управлений содержатся рекуррентные и почти периодические функции. Среди таких типов всегда находятся функции, отвечающие ограничениям, при которых система устойчива по Ляпунову.

При использовании условий из леммы 3.6.3 , получим, что собственные числа симметризованной матрицы Якоби $\frac{1}{2}\left(\hat{J}(t,w) + \hat{J}^T(t,w)\right)$, где $\hat{J}(t,w) = \hat{J}(\vartheta^t(q), \psi^t(q,w)) = D_2\hat{f}(\vartheta^t(q), \psi^t(q,w))$, системы (3.5.3) отрицательны. В силу того, что по теореме 3.5.2 максимальное сингулярное число оценивается как

$$\sigma_1(t,w) \leq exp \int\limits_0^t \lambda_1(\vartheta^s(q), \psi^s(q,w))\mathrm{d}s,\ t > 0,$$

получаем, что сингулярное число меньше единицы. Отсюда следует, что максимальный показатель Ляпунова (см.[15]) в любой точке $(q,w) \in \mathcal{K}$ для коцикла (3.5.2)

$$\nu(q,w) = \limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln \sigma_1(\vartheta^t(q), \psi^t(q,w))}{t}$$

отрицательный, а значит и максимальный показатель Ляпунова системы (3.5.2) в области диссипативности $\mathcal{K}$

$$\nu_{\mathcal{K}} = \sup_{(q,w)\in\mathcal{K}} \nu(q,w)$$

отрицательный. По теореме из [15] множество $\mathcal{K}$ равномерно экспоненциально устойчиво, а значит система устойчива по Ляпунову.

Глава 4

Численное моделирование стабилизации системы Билера–Рейтера

В третьей главе рассматривалась система (1.0.3) с введенной в нее функцией управления $q(t)$ вместо параметра σ_{nab}, которая имеет вид (3.4.1), и были получены условия на функцию управления $q(t)$,отраженные в теореме (3.6.3), при которых система стабилизируется. Рассмотрим как стабилизация выглядит на практике.

Конкретно возьмем параметры из стандартной модели Билера–Рейтера: $\sigma_{Ca} = 0.09$, $C = 1$, $v_{Na} = 40$, $v_{Ca} = 80$ и найдем параметр σ_{nab} при котором возникает потеря устойчивости. Например, можно найти параметр, при котором возникает седло-узловая бифуркация и проверить условия ее возникновения по алгоритму описанному во второй главе, найдя перед этим состояние равновесия системы (Приложение А). После вычислений получили точку $u_0 = (-2.15344480199925, 2.43151903794977, 2.6637578950646)$

В нашем случае параметр равен 0.367277. Произведем сдвиг $\alpha = \sigma_{nab} - 0.367277$. При $\alpha = 0$ одно собственное число матрицы Якоби системы равно 0, а другие имеют вещественные части не равные нулю. Так же условие $\frac{\partial^2 g(x,\alpha)}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$ для отображения Пуанкаре $g(x, \alpha)$ тоже выполняется и $\frac{\partial^2 g(x,\alpha)}{\partial x^2}(0,0) = 14.0757$. Программа по вычислению параметра и проверки условий приведена в приложении Б.

При таком наборе параметров ограничение на функцию $q(t)$ из класса допустимых управлений, который был описан в разделе (3.5), имеет вид: $|q(t)| < 0.006993$, $t > 0$. В качестве управления возьмем представителя из класса почти периодических функций $q(t) = 0.006\sin(t^2)$, которая удовлетворяет условию.

Построим графики потенциала действия $v(t)$ для модели с таким управлением (см. рис. 4.0.1b) и без (см. рис.4.0.1a).

При бифуркации потенциал не переходит в отрицательную область, а стремится к некоторому положительному значению. В случае управляемой модели (см. рис. 4.0.1b) мембраны сердечного миокарда наблюдается стандартное поведение потенциала клеточной мембраны, свойственное здоровым клеткам сердца, то есть наблюдается стабилизация системы (1.0.3).

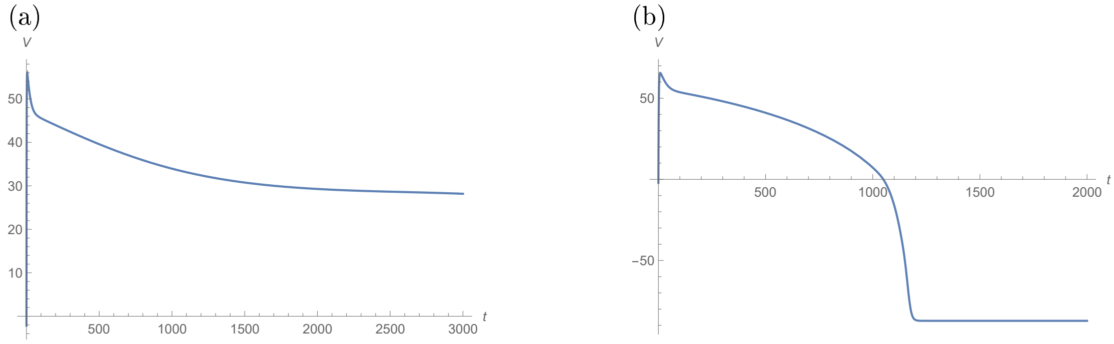

Рис. 4.0.1: Зависимость потенциала клеточной мембраны v (в мВ) от времени (в сек.) для модели без управления (a) и для модели с функцией управления $q(t) = 0.006\sin(t^2)$ (b).

Аналогичным образом можно получить стабилизацию и по другим компонентам решения системы (1.0.3).

Полученный результат хорошо согласуется с моделью работы сердца. При нормальном функционировании сердца потенциал клеточной мембраны миокарда, то есть первая компонента решения системы (1.0.3), имеет отрицательное состояние равновесия и после стимуляции мембраны синоатрильным узлом, потенциал возвращается в свое состояние равновесия за промежуток времени, называемый рефрактерным периодом. В случае нарушения, а именно при седло–узловой бифуркации, потенциал мембраны не возвращается в свое обычное состояние равновесие, а переходит в новое, положительное (см. рис. 4.0.1b,4.0.1a). С точки зрения физиологии сердца в мембране относительный рефракторный период длится дольше и для него нужен более сильный стимул, чтобы вернуть его в отрицательную область значений. Удлинение относительного рефрактерного периода приводит к снижению частоты сердечных сокращений и устранению нарушений ритма работы сердца, а слишком продолжительный к блокаде сердца. Это очень опасный режим сердца.

Заключение

1. Представлена математическая модель Билера–Рейтера проводящей системы сердца и изложены ее наиболее важные физиологические свойства.

2. Используя теорию динамических систем и, в особенности, теорему о редукции на центральное многообразие, описан подход к построению отображения Пуанкаре для исследования бифуркации удвоения периода и седло–узловой бифуркации в системе Билера–Рейтера.

3. Построен коцикл для системы Билера–Рейтера и доказана его диссипативность. Получены оценки сингулярных чисел и функции управления, гарантирующие равномерную экспоненциальную устойчивость системы Билера-Рейтера на инвариантном множестве.

4. Для случая седло–узловой бифуркации проведена стабилизация заданной системы с помощью почти периодической функции управления.

Список литературы

1. А.В.Ардашев,А.Ю.Лоскутов.Практические аспекты современных методов анализа вариабельности сердечного ритма.–М.:Медпрактика-М,2010.–126с.
2. М.Б.Беркинблит,Е.Г.Глаголева.Электричество в живых организмах.–М.:Библиотечка «Квант»,1988.–№69.–288с.
3. Н.А.Магницкий, С.В. Сидоров. Новые методы хаотической динамики–М.:Едиториал УРСС,2004.–318с.
4. Н.А.Магницкий,С.В.Сидоров.Управление хаосом в нелинейных динамических системах//Диффернециальные уравнения,1998.–т.34,№11.–с.1501-1509.
5. Ф.Райтманн. Динамические системы, аттракторы и оценки их размерности.–Учеб.пособие–СПб.:изд-во С.-Петерб. ун-та,2013.–222с.
6. А.С. Слепухин. Верхние оценки размерности Хаусдорфа отрицательно инвариантных множеств и аттракторов коциклов.–Кандидатская диссертация.–СПб:СПбГУ,2012.–113с.
7. Б.Хэссард, Н.Казаринов, И.Вен. Теория и приложения бифуркации рождения цикла.–М.:Мир,1985.–280с.
8. О.В.Шарников.Управление бифуркациями в модели Билера-Рейтера для проводящей системы сердца.–Дипломная работа.–СПб:СПбГУ,2015.–43с.
9. G. W.Beeler, H.Reuter.Reconstruction of the action potential of ventricular myocardial fibres//J. Physiol.– 1977.–Vol.-268.–P.177-210.
10. V.A.Boichenko,G.A.Leonov,V.Reitmann. Dimension Theory for Ordinary Differential Equations.–Wiesbaden,Teubner, 2006.–P.443.
11. K. Fujimoto, K.Aihara. Bifurcation avoidance control of state periodic points using the maximal local Lapunov exponent.//J.Nonlinear Theory and It's Application–2015.–Vol.–P.2-14.
12. M.R.Guevara, G.Ward, A. Shrier, L. Glass. Electrical alternans and period-doubling gifurcations.//IEEE Computer Society.–Salt Lake City:Silver Spring,1984.–P.167-170.
13. A. L. Hodgkin and A. F.Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in

nerve.//J.Physiol–1952.–Vol.117,№4–P.500–544.

14. T.Matsumoto,M.Komuro,H.Kokubu,R.Tokunaga.Bifurcations:Sights,Sounds and Mathematics.–Tokyo:Springer-Verlag,1993.–P.468.
15. S.Novo, R.Obaya, A.M.Sanz. Exponential stability in non-autonomus delayed equations with applications to neural networks.//Discrete and Continious Dynamic Systems–2007.–Vol.18,№2,3.–P.517-536.
16. H.Troger, A.Steindl. Nonlinear Stability and Bifurcation Theory.–Wien, New-York:Springer-Verlag,1991.–P.407.
17. H.O.Wang, D.Chen, G.Chen. Bifurcation control of pathological heart rhythms.//Automatica,1998.–Vol.2.– P.858-862.
18. H.O.Wang, D.Chen,L.Bushnell. Dynamic feedback control of bifurcations.//39th IEEE Conference on Decision and Control–2000.–Vol. 2,№ 55–P.1619 – 1624.
19. C. Zemlin, E. Storch, H. Herzel. Alternans and 2:1 rhythms in an ionic model of heart cells//BioSystems,2002.–Vol.66– P.1-10

Приложение А

Вычисление состояния равновесия.(Программный пакет Maple)

1. > restart;
2. >with(DirectSearch);
3. > with(linalg);
4. > eq1 := -(1*1)*(0.3e-2*(V-40)+0.9e-1*d*n*(V-80)+
5. >5.35*((4*(exp(0.4e-1*(V+85))-1))/(exp(0.8e-1*(V+53))
6. >+exp(0.4e-1*(V+53)))+(.2*(V+23))/(1-exp(-0.4e-1*(V+23))))) = 0;
7. >eq2 := 0.95e-1*exp(-0.1e-1*(V-5))*(1-d)/(exp(-.72*(V-5))+1)-
8. >0.7e-1*exp(-0.17e-1*(V+44))*d/(1+exp(0.5e-1*(V+44))) = 0;
9. >eq3 := 0.12e-1*exp(-0.8e-2*(V+28))*(1-n)/(1+exp(.15*(V+28)))-
10. >0.65e-2*exp(-0.2e-1*(V+30))*n/(1+exp(-.2*(V+30))) = 0;
11. > SolveEquations([eq1, eq2, eq3], tolerances = 10^(-12));

Приложение В

Проверка условий возникновения седло–узловой бифуркации. (программный пакет Wolfram Mathematica)

```
g1 = Simplify[(0.095 E^(−0.01 (−5 + V)))/(1 +
E^(−0.72 (−5 + V)))];
g2 = Simplify[(0.07 E^(−0.017 (44 + V)))/(1 +
E^(0.05 (44 + V)))];
f1 = Simplify[(0.012 E^(−0.008 (28 + V)))/(1 +
E^(0.15 (28 + V)))];
f2 = Simplify[((0.0065 E^(−0.02 (30 + V)))/(1 +
E^(−0.2 (30 + V))))];
xVec = {V, d, f};
func[xVec_] := {−((0.003 + a)∗(V − 40) +
0.09∗d∗f∗(V − 80) +(0.35)∗(4∗(Exp[0.04∗(V + 85)]−
1)/(Exp[0.08∗(V + 53)]
+ Exp[0.04∗(V + 53)]) + (.2∗(V + 23))/(1 −
Exp[−0.04∗(V + 23)]))),
g1∗(1 − d) − d∗g2, f1∗(1 − f) − f2∗f} ;
J = D[func[xVec], {xVec}] /. {V −> −2.153444,d −>2.431519,
f −>2.663757};
sol = Solve[Det[J] == 0, a] J = J /. sol[[1]] ;
Eigenvalues[J] X1 = Exp[J];
fi = Take[Transpose[X1], 1][[1]];
Summa = D[D[func[xVec], {xVec}], V]∗ fi [[1]] +
D[D[func[xVec], {xVec}], d]∗ fi [[2]]
+ D[D[func[xVec], {xVec}], f]∗ fi [[3]] /.{V −>
−2.1534448019992,
d −> 2.43151903794977, f −> 2.6637578950646};
X2[t_] = {X21[t], X22[t], X23[t]};
{sol1, sol2, sol3} = DSolveValue[{X2'[t] ==
J.X2[t] + Summa.fi,
X2[0] == {0, 0, 0}}, {X21, X22, X23}, t];
sol1[t] /. t −> 3;
```