

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ДИАГНОСТИКИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Бабков Денис Олегович

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Математический расчет коррекции девиации
коленного сустава при помощи ортопедических
средств**

Направление 010400

Прикладная математика и информатика



Научный руководитель,
доктор мед. наук,
профессор
Шишкин В. И.

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Введение.....	3
Обзор литературы.....	5
Глава 1. Обозначения.....	6
Глава 2. Математическая модель.....	7
Глава 3. Расчет коррекции девиации при помощи ортопедического средства.....	10
Заключение.....	14
Список литературы.....	15
Приложение.....	17

Введение

Коленный сустав (*лат. articulatio genus*) – сустав, соединяющий бедренную кость, большеберцовую кость и надколенник – это один из важнейших элементов организма, обеспечивающий нам возможность передвижения. Обеспечение его целостности и здоровья – необходимые условия для нормального существования человека. Есть множество заболеваний связанных с данным органом. Главным и наиболее частым из них является артроз коленного сустава.[1]

Артроз коленного сустава – это нарушения процесса образования клеток суставного хряща и субхондральной кости вследствие механических или биологических причин: наследственные, эволюционные, метаболические и травматические.[2]

В независимости от причин его делят на несколько стадии, каждая последующая тяжелее предыдущей. Все они имеют свои методы лечения, но в основном, сегодняшняя медицина сконцентрирована на последнем этапе заболевания. Нам кажется, что такой подход не является обязательным и другие методы также достойны самого пристального внимания. Безусловно, хирургическое вмешательство, как крайняя мера, почти неизбежно при самой тяжелой стадии остеоартроза. Однако, для более легких стадий возможно применение других методов.

Одним из них является рассматриваемая нами коррекция девиации коленного сустава при помощи ортопедических средств, предложенный в [3]. В этой работе использовалась простая математическая модель и она носила скорее экспериментальный характер.

Целью нашей работы будет математический расчет коррекции девиации коленного сустава при помощи ортопедических средств.

Для выполнения поставленной цели необходимо решить ряд задач:

- изучить строение коленного и голеностопного сустава
- найти и математически выразить связь между ними
- провести расчеты и указать необходимые характеристики ортопедических средств для коррекции девиации коленного сустава

Обзор литературы

Первые ортопедические стельки, или «ортезы стопы», как их называют специалисты, начали изготавливать в XVIII веке в Голландии. А уже в конце следующего столетия в 1887 году в США был сделан первый индивидуальный ортез на основе гипсового слепка стопы, снятого в положении сидя. При получении слепка нога человека нагружалась неполностью, вследствие чего ходить в таких ортопедических стельках было крайне неудобно.[4] Из-за этого долгое время стельки не пользовались большим спросом. Но в 50-60-е годы XX века они вызвали новый всплеск обсуждения, так как специалисты начали считать, что положение стопы влияет не только на саму стопу [5,6], но также на позвоночник [7], таз [8], и всю нижнюю конечность [9], включая коленный сустав. В [3] обратили внимание на последнее свойство и попытались оказать воздействие на коленный сустав при помощи стельки, уменьшая последствия остеоартроза.

Голеностопный сустав (лат. *articulatio talocruralis*) — подвижное соединение большеберцовой, малоберцовой и таранной костей человека.[10] Именно через него, меняя угол наклона стопы, мы можем оказать влияние на коленный сустав. В работе [11] он рассматривается как упругий цилиндр, и хотя в указанном примере изменение угла наклона стопы происходит в перпендикулярном, более свободно изгибаемом, направлении, малость рассматриваемых углов наклона позволяет использовать данное представление и в нашем случае.

Глава 1. Обозначения

Здесь используются обозначения:

l_1 – высота лодыжки

l_2 – длина большеберцовой кости

r – радиус большеберцовой кости

θ_1 – угол поворота сечения I (лодыжки)

θ_2 – угол поворота сечения II (большеберцовой кости)

ϕ – угол девиации коленного сустава

ϕ^* – угол подъёма стопы

\vec{P} – вес тела

\vec{F} – проекция силы тяжести на верхнюю грань большеберцовой

кости

E – модуль Юнга для сустава

J – момент инерции сечения

\vec{N} – осевое напряжение

S – площадь сечения

\vec{M} – изгибающий момент

1 – лодыжка

2 – сустав

3 – большеберцовая кость

Глава 2. Математическая модель

Прежде всего рассмотрим схематичное представление нижней части ноги (от стопы до нижней части коленного сустава)

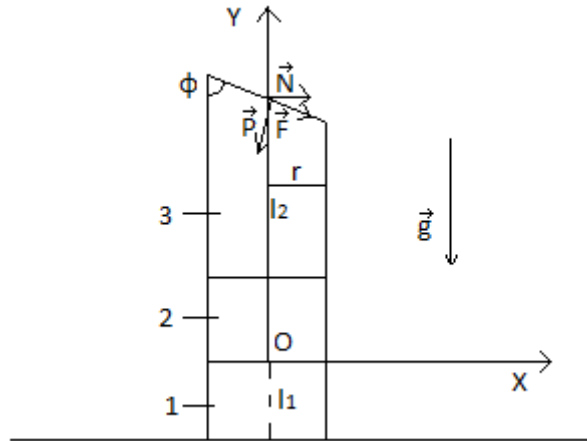


Рис.1

В данной схеме нами были приняты некоторые допущения:

- мы считаем, что сечение сустава представляет собой круг с радиусом r ;
- сустав представляет собой упругий цилиндр;
- ширина сустава достаточно незначительна, что бы мы считали начало координат находящимся одновременно и на верхней грани лодыжки и на нижней грани большеберцовой кости;
- мы не рассматриваем сустав как шарнир в сочленении 2-х стержней, в том смысле, что не учитываем трение, возникающее между суставом и костями;
- осевая нагрузка равномерно распределена по всей длине стержня;
- вес тела давящий на коленный сустав равен полному весу человека;
- так как слишком большой изгиб стопы будет травмировать голеностопный сустав мы ограничим подъем стопы до 5 градусов ($\phi^* < \frac{\pi}{36}$);
- предполагается, что в оптимальном состоянии верхняя часть большеберцовой кости располагается параллельно земле;
- радиус сустава, большеберцовой кости и лодыжки одинаков;

Из-за артроза большеберцовая кость имеет срез на верхней грани, для простоты будем считать, что он направлен в сторону оси X. По этой причине осевая нагрузка также направлена в сторону оси X и мы можем выразить осевое напряжение[12] как:

$$N(x) = \frac{F}{S} \quad (1)$$

$$F = P * \sin \phi \quad (2)$$

$$S = \frac{\pi * r^2}{\sin \phi} \quad (3)$$

Из (1),(2),(3) следует:

$$N(x) = \frac{P * \sin^2 \phi}{2 * r^2 * \pi} \quad (4)$$

Теперь можно вычислить изгибающий момент – момент внешних сил относительно балок [13] – который является суммой всех сил приложенных к балке. Наш случай не дискретный, а потому сумма заменяется интегрированием осевого напряжения по длине бруска:

$$M = r * \int_{-r}^r N(x) dx \quad (5)$$

Подставляя (4) в (5) получаем:

$$M = r * \frac{P * \sin^2 \phi}{2 * r^2 * \pi} * 2 * r = \frac{4}{\pi} * P * \sin^2 \phi \quad (6)$$

Между изгибающим моментом и углом поворота сечения I существует связь [14], и ее можно выразить следующим образом:

$$\theta_2(y) = \frac{M * y}{E * J} + C_2 \quad (7)$$

Мы предположили, что сечение сустава является кругом. Исходя из данного предположения, мы можем представить[15] J как:

$$J = \frac{\pi * r^4}{4} \quad (8)$$

Для вычисления C_1 воспользуемся тем, что на конце больше берцовой кости ($y=l$) известен:

$$\theta_2(l_2) = \phi \quad (9)$$

Решая систему (7),(9) мы получаем:

$$C_2 = \phi - \frac{4 * P * \sin^2 \phi * l_2}{\pi * E * J} \quad (10)$$

Именно этот угол изображен на рис.2

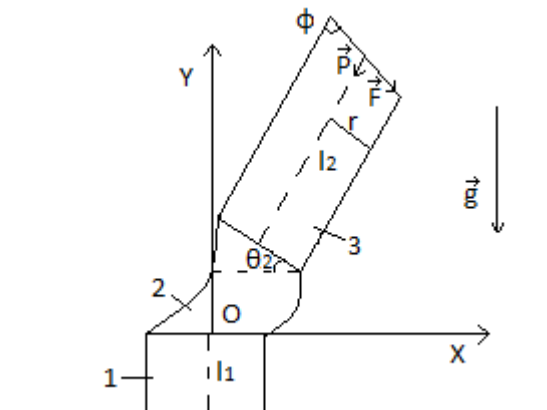


Рис.2

Глава 3. Расчет коррекции девиации при помощи ортопедического средства

Наша итоговая цель состоит в том, чтобы устранить или минимизировать последствия легкой степени артроза. Для этого необходимо сделать так, чтобы нагрузка на верхнюю часть большеберцовой кости распространялась равномерно. Иными словами, нужно сделать так чтобы верхняя грань большеберцовой кости расположилась параллельно земле. Для этого необходимо повернуть большеберцовую кость на угол $\frac{\pi}{2} - \phi$. Это произойдет в том случае, если в точке О, где $y=0$, сумма угла поворота сечения I и угла поворота сечения II будет равна $\frac{\pi}{2} - \phi$, то есть:

$$\theta_1(0) + \theta_2(0) = \frac{\pi}{2} - \phi \quad (11)$$

В итоге мы хотим получить схему, изображенную на Рис.3

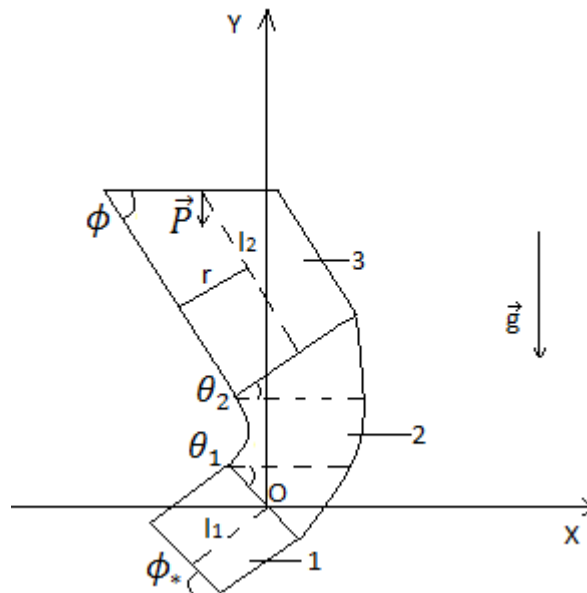


Рис.3

Из третьего закона Ньютона известно, что сила действия равна силе противодействия. Поэтому можно считать, что сила, действующая на

подошву, равна весу тела – Р – по модулю. Таким образом, мы можем провести вычисления аналогичные вышеуказанным и получить:

$$\theta_1(-l_1) = \frac{\pi}{2} - \phi_* \quad (12)$$

$$\theta_1(-l_1) = \frac{4 * P * \cos^2 \phi_* * (-l_1)}{\pi * E * J} + C_1 \quad (13)$$

Из (11) следует:

$$C_1 + C_2 = \frac{\pi}{2} - \phi \quad (14)$$

$$C_1 = \frac{\pi}{2} - \phi - C_2 \quad (15)$$

Из (10),(12),(13),(15) получаем:

$$\phi_* = \frac{4 * P * \cos^2 \phi_* * l_1}{\pi * E * J} + 2 * \phi - \frac{4 * P * \sin^2 \phi * l_2}{\pi * E * J} \quad (16)$$

Введем обозначения:

$$k = \frac{E * J}{P * l_1} * \frac{\pi}{4} \quad (17)$$

$$\bar{C} = k * \left(2 * \phi - \frac{4 * P * \sin^2 \phi * l_2}{\pi * E * J} \right) \quad (18)$$

Запишем (16) в новых обозначениях:

$$k * \phi_* = \cos^2 \phi_* + \bar{C} \quad (19)$$

Данное уравнение нельзя решить аналитически, поэтому будем решать его численно. По условию построения математической модели мы работаем с числами близкими к 0. Поэтому мы можем разложить $\cos^2 \phi^*$ в ряд Тейлора:

$$\cos \phi_* = 1 - \frac{\phi_*}{2} + \dots \quad (20)$$

$$\cos^2 \phi_* = 1 - \phi_*^2 + \frac{\phi_*^4}{4} + \dots \quad (21)$$

Всеми членами этого ряда, начиная с третьего, можно пренебречь ввиду их малости. Получается квадратное уравнение относительно ϕ_* :

$$\phi_*^2 + k * \phi_* - 1 - \bar{C} = 0 \quad (22)$$

Данное уравнение имеет 2 корня:

$$\phi_{*1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4 * (\bar{C} + 1)}}{2} \quad (23)$$

Отметим, что физический смысл это выражение имеет, только если подкоренное выражение больше 0. А так как $k > 0$ по построению, то рассматривать мы будем только один корень:

$$\phi_* = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4 * (\bar{C} + 1)}}{2} \quad (24)$$

Для того чтобы ϕ_* принадлежал области действительных чисел необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\sqrt{k^2 + 4 * (\bar{C} + 1)} > k \quad (25)$$

Раскрывая наши обозначения, мы приходим к неравенству:

$$2 * \frac{E*J}{P*l_1} * \frac{\pi}{4} * \phi - \frac{l_2}{l_1} * \sin^2 \phi + 4 > 0 \quad (26)$$

Заключение

При помощи данного представления голеностопного сустава, мы смогли вычислить на какой угол должна поднимать стелька голеностоп, для коррекции девиации коленного сустава.

Данная модель сильно упрощена. Она не учитывает трение между суставом и костями, что может довольно сильно снизить точность результата полученного нами. Было высказано большое количество предположений и не все они обязательно верные.

Однако, эти расчеты можно использовать для первичного создания стельки и последующей коррекцией угла в зависимости от индивидуальных особенностей пациента.

Список литературы

1. https://ru.wikipedia.org/wiki/Коленный_сустав
2. *Покровский В. И.* Малая медицинская энциклопедия. — Советская энциклопедия, 1996. — Т. 4. — 577 с.
3. М.Л. Головаха, В.А. Филиппенко, И.В. Шишка, А.М. Горелов, О.В. Банит, С.Н. Красноперов — Применение корригирующих стелек при остеоартрозе коленного сустава с варусной деформацией
4. http://formthotics.ru/traumas/traumas_13.html
5. Smith, M.A. Flat feet in children / M.A. Smith. Br Med J 1990; 301:1331
6. Gajewski, R.: Badanie rozmieszczenia nacisków na podeszwowej stronie stopy i ich rola w ocenie deformacji stóp i w projektowaniu wkładek do obuwia. Materiały konferencji CLPO nt. Obuwie Profilaktyczne i ortopedyczne dla dzieci i dorosłych. Potrzeby rynku – wymagania stóp – zaopatrzenie / R. Gajewski, B. Rajchel-Chyla. – Kraków 2005, s.88–91.
7. <http://www.delfi.lv/woman/zdorovje/zdorovje/stopa-i-pozvonochnik-kakova-vzaimosvyaz?id=32538217>
8. http://www.uhlib.ru/medicina/vse_o_zdorove_vashih_nog_ot_mladenchestva_do_starosti/p4.php
9. http://ilive.com.ua/health/narusheniya-dvizheniy-stopy_113817i16070.html
10. Анатомия человека / Привес М. Г., Лысенков Н. К. — 9-е изд., перераб. и доп. — М.: Медицина, 1985. — С. 156-157. — 672 с. — (Учебная литература для студентов медицинских институтов).
11. Осипенко, Михаил Анатольевич. Об оптимизации упругого элемента протеза стопы / М. А. Осипенко, Ю. И. Няшин // Российский журнал биомеханики. — 2011 .— № 2 .— С. 16-23.
12. <http://www.studfiles.ru/preview/4257871/>
13. <http://www.soprotmat.ru/izgib.htm>
14. http://sopromat.org/info/4/4_1.php

15. Дарков А.В., Шапиро Г.С. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1975. с. 147

Приложение

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;

namespace dip
{
    class Program
    {
        static void Main(string[] args)
        {
            double fi, alpha, E, J, P, l1, l2;
            fi = double.Parse(Console.ReadLine());
            fi /= 180;
            Console.Write(fi);
            E = double.Parse(Console.ReadLine());
            J = double.Parse(Console.ReadLine());
            P = double.Parse(Console.ReadLine());
            l1 = double.Parse(Console.ReadLine());
            l2 = double.Parse(Console.ReadLine());
            double k = (E * J) / (P * l1) * Math.PI / 4;
            double C = k * (2 * fi - 4 * P * Math.Pow(Math.Sin(fi), 2) * l2 / (Math.PI *
* E * J))+1;
            alpha = (-k + Math.Sqrt(k * k + 4 * C));
            Console.Write(alpha);
        }
    }
}
```