

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ – ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

Безрукова Дарья Михайловна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ
РЕСНИЧЕК ИНФУЗОРИИ**

Направление 010900

«Прикладная математика и физика»

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук,

Профессор кафедры МЭКС

Трегубов Владимир Петрович.

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Описание объекта моделирования.....	5
1.1. Биологические сведения об объекте исследования.....	5
1.2. Анализ предшествующих работ.....	9
Глава 2. Модель реснички.....	11
2.1. Механическая модель.....	11
2.2. Математическая модель.....	14
2.3. Экспериментальное исследование движения.....	28
Глава 3. Метод решения задачи.....	34
3.1. Метод Рунге – Кутты и его программная реализация.....	39
3.2. Формулировка гипотезы.....	44
Заключение	45
Список литературы.....	46
Приложение.....	48

Введение

В наше время самым удобным и точным методом изучения объектов окружающей природы, в частности, микроорганизмов является математическое моделирование. Оно базируется на знаниях из физики, механики, математики, биологии и др. науках и потому помогает объяснить изучаемый процесс всесторонне : его структуру, взаимодействие с другими объектами. Особый интерес проявляется к одноклеточным организмам. До сих пор мало понятно, как именно формируется их движение. Мы знаем только, что оно происходит за счет движений особых нитевидных образований-двигательных органелл. Их разделяют на два вида, в зависимости от длины и особенностей движения : жгутики и реснички. Они имеются на поверхности клеток многих типов и встречаются у большинства животных и некоторых растений. Благодаря экспериментам, можно с уверенностью утверждать, что они имеют сложную внутреннюю структуру.

Тысячи ресничек одной клетки движутся координированно, образуя на поверхности бегущие волны. Про ресничку можно сказать, что она работает подобно хлысту: удар вперед, при котором ресничка полностью выпрямляется и передает в окружающую жидкость максимальное усилие, проталкивая ее, а затем, изгибаясь, чтобы уменьшить сопротивление среды, она возвращается в исходное положение . Поэтому такой двигательный органелл, представим в виде системы подвижно соединенных звеньев, которые имеют известные параметры :масса, длина. Можно самим выбрать оптимальное количество звеньев.

Все живые организмы подчиняются законам механики При создании такой биомеханической модели используются биологические знания(внутреннее строение реснички),физические(законы механики) и экспериментальные данные(фото).

Актуальность данной работы состоит в необходимости исследования жизни на микроуровне. Осознавая, что движение ресничек и жгутиков у простейших и сокращение мышц, рост живых тканей у высших позвоночных имеют общие черты, можно предположить, что полученные результаты помогут в исследовании биологической подвижности. Также, и реснички и жгутики выполняют важнейшие функции и в нашем организме. Например, жгутик отвечает за движение сперматозоида, а реснички нейтрализуют вредные химические вещества, проникшие и осевшие в дыхательных путях.

Цель работы

Разработать модель двигательной органеллы-реснички, позволяющую понять характер ее движения на уровне микротрубочек.

Необходимо разделить работу на несколько этапов:

1. Анализ предшествующих работ.
2. Построить механическую модель двигательной органеллы при эффективном и восстановительном гребке.
3. Построить математическую модель двигательной органеллы, используя уравнения Лагранжа второго рода.
4. Провести оцифровку данных движения реснички, полученных в эксперименте, и провести их аппроксимацию.
5. Разработать программное обеспечение для решения поставленных задач, подтвердить полученные результаты, решив обратную задачу методом Рунге-Кутты.
6. На основе построенных графиков зависимостей сформулировать представление о механизме движения реснички.

Глава 1. Описание объекта моделирования

1.1. Биологические сведения об объекте исследования

Предметом исследования является внутренняя структура реснички, которые являются миниатюрными (от 5 до 10 мкм) выростами клетки, выполняющими двигательную функцию за счет выполнения специфических движений (Рис. 1). Их внутреннее строение известно. Характерные размеры её элементов лежат в диапазоне от 5 до 25 нм.

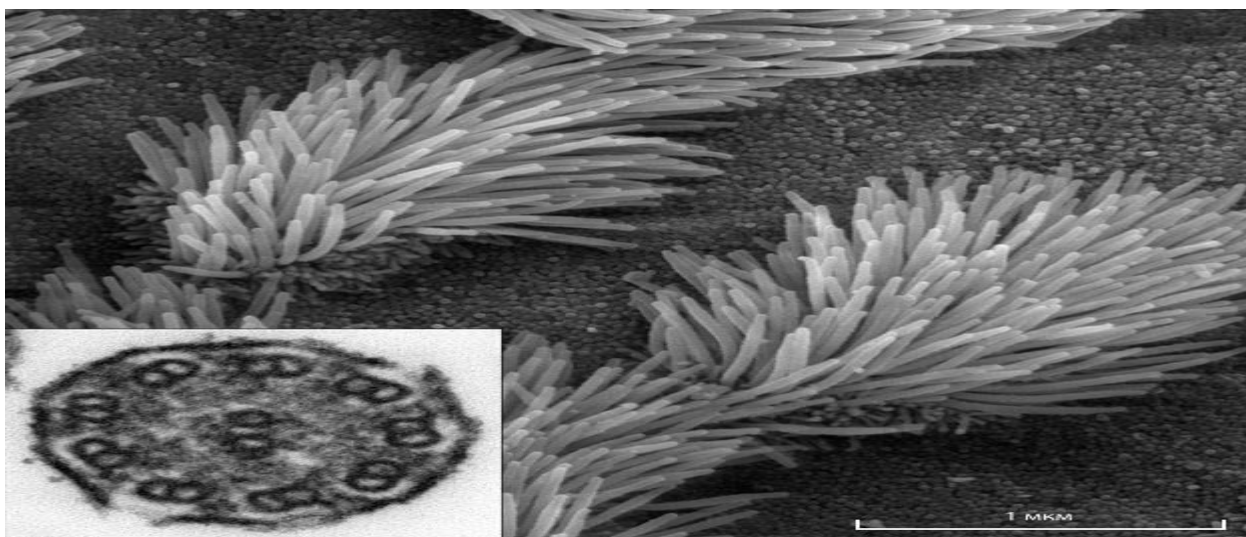


Рис.1. Эпителиальные клетки в дыхательных путях человека и животных

Основу внутренней структуры составляет центральная пара микротрубочек, окруженная кольцом из микротрубочек (обычно парных). Микротрубочки связаны между собой поперечными мостиками; вся конструкция называется аксонемой. Расположение микротрубочек и мостиков в аксонеме изучено в настоящее время довольно подробно; оно схематически представлено ниже (рис. 2).

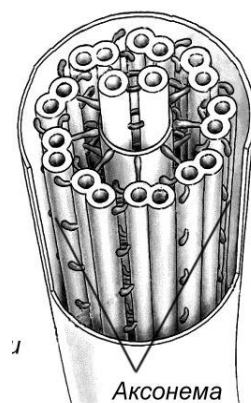


Рис.2.Аксонема.

В центре находится пара микротрубочек, окруженных общей оболочкой из белковых колец, плоскость которых наклонена к оси аксонемы(Рис.3). Стенка каждой из центральных микротрубочек образована тринадцатью продольными рядами (протофибриллами) белковых субъединиц. Эту центральную структуру, окружают девять расположенных по кольцу пар микротрубочек. В каждом дублете одна микротрубочка имеет полностью замкнутую стенку, состоящую из 13 протофибрилл ; другая микротрубочка имеет серповидное сечение и примыкает к парной микротрубочке, так что ее стенка состоит из меньшего числа протофибрилл, обычно из 10. Одна микротрубочка из пары соединена с микротрубочкой соседнего дублета с помощью мостика из белка, называемого нексином. От обращенной внутрь поверхности этой же микротрубочки отходит по направлению к центру белковый выступ — так называемая радиальная спица. Вдобавок одна микротрубочка из пары имеет двойной ряд боковых ручек (их длина около 14 нм), построенных из белка (динеина) и направленных к соседнему дублету. Все эти выступы расположены с определенной периодичностью относительно оси данной микротрубочки и играют очень важную роль в генерации движения.

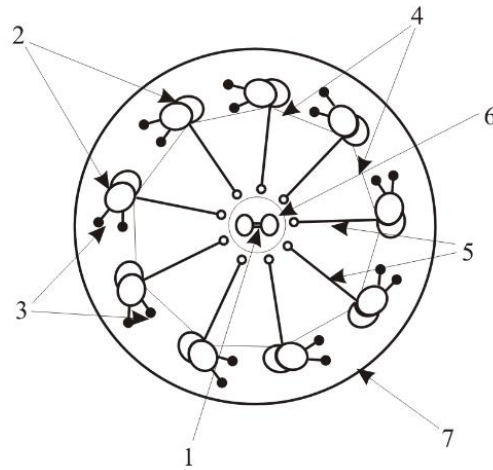


Рис. 3. 1 – центральная пара, 2 – внешние дуплеты, 3 – динеиновые ручки, 4 – нексиновые связки, 5 – радиальные спицы, 6 – центральная капсула, 7 – цитоплазматическая мембрана.

Однако в точности сказать, как именно отдельные элементы внутренней структуры участвуют в формировании движения реснички, невозможно. Но можно с уверенностью утверждать, что соседние пары микротрубочек, будучи прикрепленными к основанию, изгибаются и скользят относительно друг друга (Рис.4 А) за счет внешних поворотов динеиновых ручек микротрубочек относительно основания в результате гидролиза АТФ и присутствия Ca^{2+} . Эта идея была взята за основу при построения механической модели тела.

Микротрубочка состоит из продольных протофиламентов, каждый из которых представляет собой последовательность субъединиц, которые составляют горизонтальный слой микротрубочки. Механическая модель такой системы может быть представлена как последовательность шарнирно соединенных абсолютно твердых тел, поворачивающихся за счет моментов, создаваемых динеиновыми ручками, которые моделируются стержнями (Рис. 4 Б). При этом учитывалось, что динеиновые ручки находятся на расстоянии 24 нм и присоединяются не к каждой субъединице. Движение такой модели описывается системой уравнений Лагранжа. Далее эти модельные пары были закольцованы с помощью вязкоупругих соединений, моделирующих нексиновые связки, как показано выше (рис. 2).

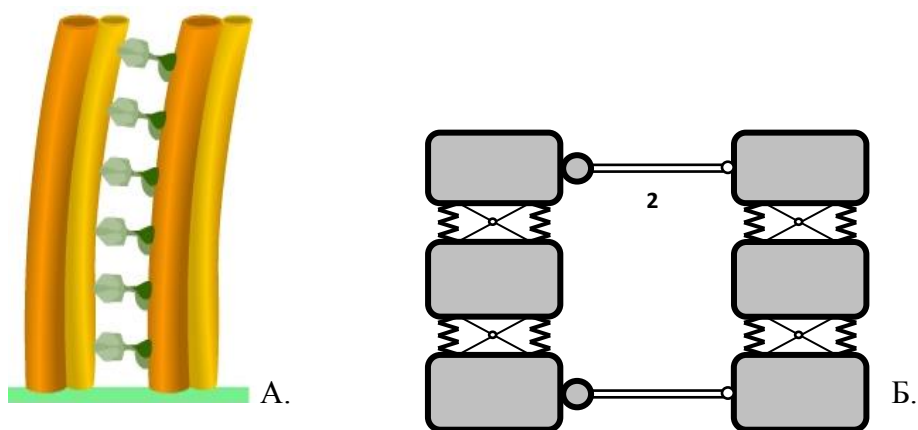


Рис. 4. Схема изгиба соседних пар микротрубочек (А) и их механическая модель (Б). 1 – слой субъединиц микротрубочки, 2 – динеиновая ручка.

Составленные для всей модели реснички уравнения Лагранжа позволяют получить изменения обобщенных сил, т.е. моментов, создаваемых динеиновыми ручками, необходимых для воспроизведения специфических движений реснички. При анализе этих обобщенных сил как функций времени выяснилось, что за счет работы динеиновых ручек выполняется лишь “рабочее движение” (положения 1 – 5, (рис.5)), в положении 6 связи между мономерами тубулина ослабевают и ресничка расслабляется и затем восстанавливает свое исходное положение 1, проходя положения 6–12 (рис.5), благодаря последовательному восстановлению связей между мономерами тубулина.

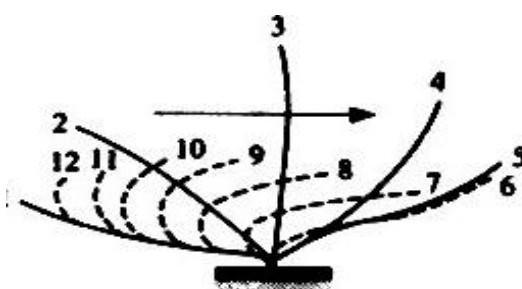


Рис. 5. Биения реснички

1.2. Анализ предшествующих работ

Множество исследований было посвящено изучению механизмов движений двигательных органелл эукариотов. Важной особенностью этих органелл является наличие у них внутренней молекулярной структуры, которая участвует в формировании её движений, а также то, что человек тоже относится к эукариотам и, что реснички его клеток выполняют важные функции.

Разные гипотезы по поводу того, за счет чего осуществляется движение ресничек стали высказываться в середине 20 в. ,хотя в то время еще не было установлено наличие аксонемы. Самой первой была гипотеза, которую высказал К.Е. Machin [1], о том, что движение реснички происходит за счет молекулярного мотора, который находится в области базального тельца. Однако численные расчеты, которые проводились с использованием математических моделей, не подтвердили этой гипотезы. Позднее было даже установлено, что реснички отделенные от базального тельца продолжают совершать гребковые движения [2]

Самое широкое распространение и косвенное подтверждение в результате эксперимента получила гипотеза скользящих нитей. В ней утверждается, что микротрубочки никак в длине не меняются, а скользят относительно друг друга из-за АТФазной активности динеиновых ручек, которые взаимодействуют с тубулиновыми сайтами, расположенными на дублетах, где ручки замыкаются. Также было доказано, что скольжение происходит только при добавлении Аденозинтрифосфата.

Согласно этой гипотезе, обоюдное смещение пар дублетов происходит циклично и в одном направлении : замыкание ручки на тубулиновом сайте; поворот замкнутой ручки, при котором происходит зарождение усилия; размыкание ручки.

Благодаря периодическим изменениям концентрации ионов Ca^{2+} и постоянному поддержанию достаточной концентрации Аденозинтрифосфата в аксонеме, происходит управление процессами замыкания и размыкания ручек. Но почему эти изменения концентрации ионов Ca^{2+} вообще происходят остается пока неизвестной.

Вероятно, деятельность динеиновых ручек управляется посредством других элементов аксонемы. Например, в качестве таких элементов, различные авторы называют центральную пару [3, 4] и радиальные спицы [5]. Также гипотезы высказываются о её деятельности в целом, а не только об отдельных элементах [3, 6-8, 9].

Важная гипотеза была высказана в работах В.П. Трегубова и И.Б. Токина [90–93], в ней говорится о том, что циклические гребковые движения реснички происходят из-за переходов между положениями механохимического равновесия, которые связаны с перестройкой молекул динеина при изменении концентрации АТФ .

Глава 2. Модель реснички

2.1. Механическая модель

Как уже понятно из анализа работ, роль отдельных элементов внутренней структуры в формировании движения ресничек во многом остается неизвестной. Многие гипотезы невозможно проверить с помощью эксперимента. Известно однако, что соседние пары микротрубочек, будучи прикрепленными к основанию, изгибаются и скользят относительно друг друга (Рис.3) за счет внешних поворотов динеиновых ручек микротрубочек относительно основания в результате гидролиза АТФ и присутствия Ca^{2+} .

Это положение было взято за основу при построении механической модели взаимодействия соседних пар микротрубочек. Микротрубочка состоит из продольных протофиламентов, каждый из которых представляет собой последовательность субъединиц, которые составляют горизонтальный слой микротрубочки. Механическая модель такой системы может быть представлена как последовательность шарнирно соединенных абсолютно твердых тел, поворачивающихся за счет моментов, создаваемых динеиновыми ручками, которые моделируются стержнями (Рис. 6). Каждое звено имеет постоянные характеристики: массу, момент инерции (координаты центра масс) и длину. В связи с тем, что расчеты будут производиться непосредственно для эксперимента (то есть для реснички конкретного вида), то и необходимые параметры не будут табличными значениями, а их достаточно определить исходя из формул, приведенных в литературе [14].

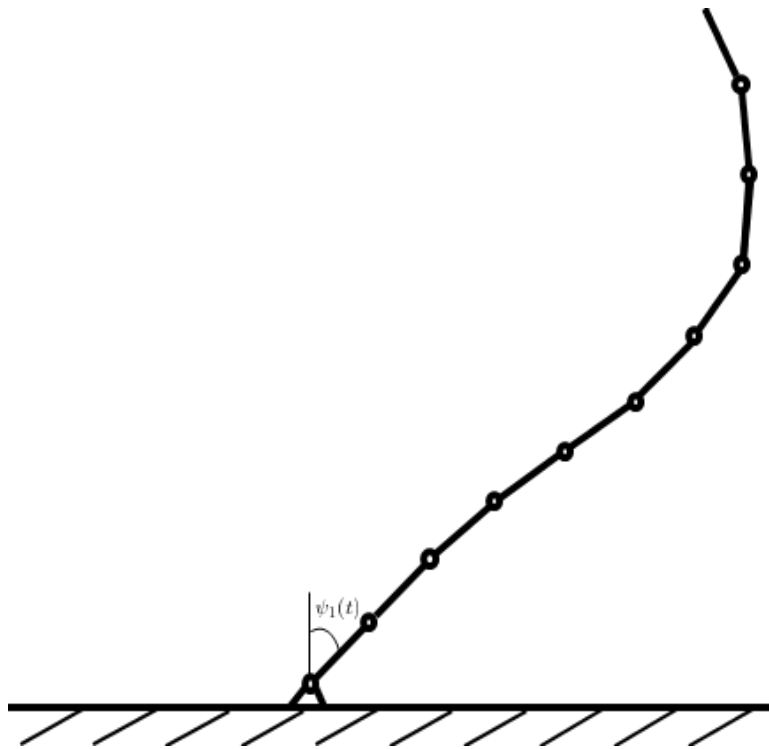


Рис.6. Механическая модель двигательной органеллы.

Управление происходит за счет моментов, приложенных в шарнирах. С использованием моделирования можно исследовать механизм управления при движении реснички. Также можно количественно оценить влияние внутренней структуры и внешнее воздействие непосредственно через скорость и силы в центрах масс сегментов объекта.

При этом механическая модель в данной задаче может быть универсальной, так как движение реснички рассматривается в двух основных фазах: эффективного гребка и восстановительного. В случае эффективного гребка нет необходимости рассматривать систему из N уравнений Лагранжа, пренебрегая малым изгибом соседних пар микротрубочек при эффективном гребке можно задать их положение одним углом, зависящим от времени $\varphi(t)$ (Рис.7). А при восстановительном гребке представить соседние пары как последовательность шарнирно соединенных стержневых элементов. (Рис. 8)

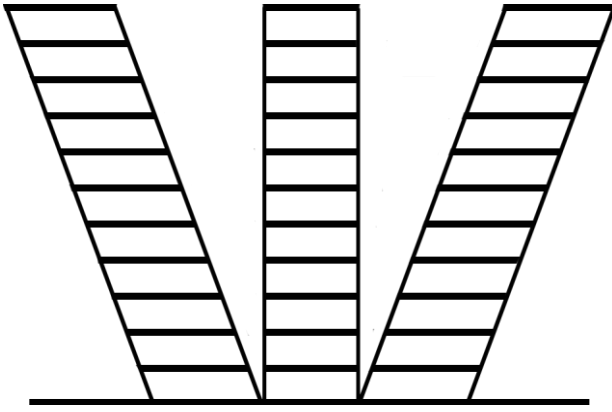


Рис 7. Эффективный гребок.

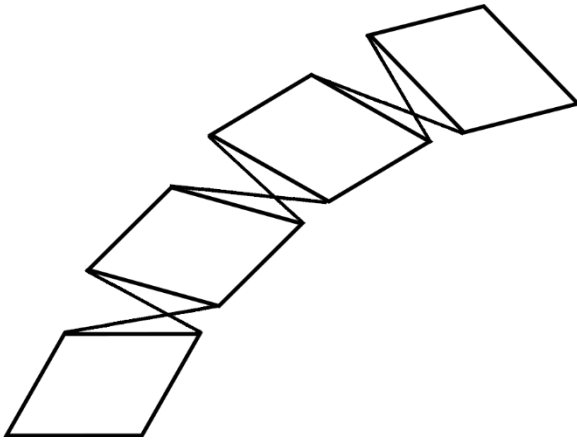


Рис 8. Восстановительный гребок.

2.2. Математическая модель

Различают две задачи динамики. Первая (прямая) задача динамики – по заданному движению всех звеньев (то есть по обобщенным координатам) требуется найти неизвестную действующую силу, в данном случае суставные моменты (обобщенные силы). Вторая (обратная) задача динамики заключается в нахождении законов движения данного объекта по заданным внешним силам и начальным условиям. Для решения основных задач динамики необходимо построить математическую модель исследуемого объекта.

Модель, описывающая движение ресничек представима в виде системы уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (2.1)$$

где T -кинетическая энергия, N -число степеней свободы, q_i -обобщенные координаты, \dot{q}_i -обобщенные скорости, Q_i -обобщенные силы.

Для записи уравнения (2.1) необходимо определить обобщенные координаты. Так как при движении реснички изменяются углы поворота одной части относительно другой, то за обобщенные координаты будут выбраны значения относительных углов, далее их будем обозначать $\psi_i, i = \overline{1, 10}$. В связи с тем, что запись уравнения (2.1) для относительных углов является весьма громоздкой, то в качестве обобщенных координат будут использоваться абсолютные углы – углы поворота каждой части реснички относительно вертикальной оси, обозначим их как $\varphi_i, i = \overline{1, 10}$. Связь между относительными и абсолютными углами задается следующими соотношениями, а их положение указано ниже (рис.9):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 \\ \psi_i &= \varphi_i - \varphi_{i-1}, \quad i = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (2.2)$$

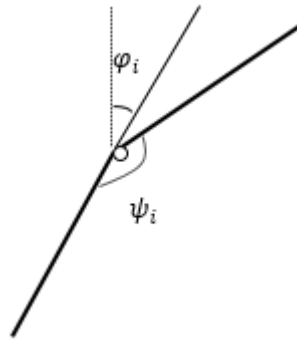


Рис. 9. Расположение абсолютных , относительных углов.

Обобщенные силы, вызывающие изменение φ_i в дальнейшем будем обозначать как Q_i , а обобщенные силы, вызывающие изменения ψ_i ,будем обозначать как Q_i^{rel} .Связь между обобщенными силами Q_i и Q_i^{rel} находится следующим образом:

$$Q_i^{rel} = \sum_{j=i}^N Q_j , \quad i = \overline{1, N} \quad (2.3)$$

Обобщенные силы для абсолютных координат не имеют особого смысла для решения данной задачи, но поскольку намного проще находить изменение φ_i , то в дальнейшем для вычисления обобщенных сил для относительных углов будем использовать формулу (2.3).

Выпишем уравнения (2.1) для абсолютных координат. При этом следует помнить, что исследуемая система имеет изменчивую структуру, то есть меняется количество степеней свободы в каждой фазе. При эффективном гребке – одна степень свободы, то есть для описания движения достаточно одного уравнения. При восстановительном гребке при возврате в исходное положение – десять степеней свободы. Выражение для кинетической энергии данной системы имеет следующий вид:

$$T = \sum_i^N T_i , \quad i = \overline{1, N} \quad (2.4)$$

где T_i – кинетическая энергия i -го звена. Так как каждое звено представляет собой абсолютно твердое тело, то исходя из теоремы Кёнинга [15], полная

кинетическая энергия для каждого i -го звена, совершающего плоское движение, представима следующим образом:

$$T_i = \frac{mV_{Ci}^2}{2} + \frac{I\dot{\varphi}_i^2}{2}, i = \overline{1, N} \quad (2.5)$$

где m – масса звена, l – длина звена, $I = \frac{ml^2}{12}$ – момент инерции стержня, вычисленный относительно его центра масс, $V_{Ci}^2 = \dot{x}_{Ci}^2 + \dot{y}_{Ci}^2$, (x_{Ci}, y_{Ci}) – декартовы координаты центра масс i -го стержня, находящегося на расстоянии $\frac{l}{2}$ от точки шарнирного соединения. Предполагается, что начало декартовой прямоугольной системы координат находится в точке шарнирного соединения первого стержня с неподвижным основанием модели.

Координаты и скорости центров масс стержней вычисляются по следующим соотношениям :

$$x_{Ci} = \sum_{j=0}^{i-1} l \sin(\varphi_j) + \frac{l}{2} \sin(\varphi_i) \quad (2.6)$$

$$y_{Ci} = \sum_{j=0}^{i-1} l \cos(\varphi_j) + \frac{l}{2} \cos(\varphi_i) \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_{Ci} = \sum_{j=0}^{i-1} l \dot{\varphi}_j \cos(\varphi_j) + \frac{l}{2} \dot{\varphi}_i \cos(\varphi_i) \quad (2.8)$$

$$\dot{y}_{Ci} = -\sum_{j=0}^{i-1} l \dot{\varphi}_j \sin(\varphi_j) - \frac{l}{2} \dot{\varphi}_i \sin(\varphi_i) \quad (2.9)$$

$$i = \overline{1, N}$$

Для случая эффективного гребка достаточно написать одно уравнение (2.10):

$$x_{C1} = \frac{l}{2} \sin(\varphi_1)$$

$$\dot{x}_{C1} = \frac{l}{2} \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1)$$

$$y_{C1} = \frac{l}{2} \cos(\varphi_1)$$

$$\dot{y}_{c1} = -\frac{l}{2}\dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1)$$

$$\dot{x}_{c1}^2 + \dot{y}_{c1}^2 = \frac{l^2}{2}\dot{\varphi}_1^2$$

$$T_1 = \frac{ml^2}{6}\dot{\varphi}_1^2$$

$$Q_1 = \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}_1^2 \quad (2.10)$$

В случае восстановительного гребка необходимо составить систему из 10 уравнений, но для дальнейшей работы необходимо представить в общем виде и потому запишем системы для 2х (2.11), 3х (2.12) и 4х (2.13) степеней свободы:

$$x_{c2} = l \sin(\varphi_1) + \frac{l}{2} \sin(\varphi_2)$$

$$\dot{x}_{c2} = l \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 + \frac{l}{2} \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2)$$

$$y_{c2} = l \cos(\varphi_1) + \frac{l}{2} \cos(\varphi_2)$$

$$\dot{y}_{c2} = -l \sin(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 - \frac{l}{2} \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2)$$

$$\dot{x}_{c2}^2 + \dot{y}_{c2}^2 = l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}_2^2 + l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$T = \frac{m(l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}_2^2 + l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2))}{2} + \frac{ml^2}{24} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{ml^2}{6} \dot{\varphi}_1^2$$

$$= \frac{ml^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{6} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{3} \dot{\varphi}_2^2 + l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right)$$

$$\begin{cases} \frac{4ml^2}{3}\ddot{\varphi}_1 + \frac{ml^2}{2}\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = Q_1 \\ \frac{ml^2}{2}\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}_2 - \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = Q_2 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$x_{C3} = l\sin(\varphi_1) + l\sin(\varphi_2) + \frac{l}{2}\sin(\varphi_3)$$

$$\dot{x}_{C3} = l\cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 + l\cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 + \frac{l}{2}\dot{\varphi}_3\cos(\varphi_3)$$

$$y_{C3} = l\cos(\varphi_1) + l\cos(\varphi_2) + \frac{l}{2}\cos(\varphi_3)$$

$$\dot{y}_{C3} = -l\sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - l\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 - \frac{l}{2}\dot{\varphi}_3\sin(\varphi_3)$$

$$\dot{x}_{C2}^2 + \dot{y}_{C2}^2 = l^2\dot{\varphi}_1^2 + l^2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}_3^2 + 2l^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) +$$

$$l^2\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3\cos(\varphi_3 - \varphi_2) + l^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3\cos(\varphi_3 - \varphi_1)$$

$$T = \frac{ml^2}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{13}{6}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{4}{3}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{3}\dot{\varphi}_3^2 + 3l^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + l^2\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3\cos(\varphi_3 - \varphi_2) + l^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3\cos(\varphi_3 - \varphi_1)\right)$$

$$\begin{cases} \frac{7ml^2}{3}\ddot{\varphi}_1 + \frac{3ml^2}{2}\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{ml^2}{2}\ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \frac{3ml^2}{2}\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) = Q_1 \\ \frac{3ml^2}{2}\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{4ml^2}{3}\ddot{\varphi}_2 + \frac{ml^2}{2}\ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) - \frac{3ml^2}{2}\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = Q_2 \\ \frac{ml^2}{2}\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}_3 + \frac{ml^2}{2}\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) - \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = Q_3 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$x_{C4} = l\sin(\varphi_1) + l\sin(\varphi_2) + l\sin(\varphi_3) + \frac{l}{2}\sin(\varphi_4)$$

$$\dot{x}_{C4} = l\cos(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 + l\cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 + l\cos(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 + \frac{l}{2}\dot{\varphi}_4\cos(\varphi_4)$$

$$y_{C4} = l\cos(\varphi_1) + l\cos(\varphi_2) + l\cos(\varphi_3) + \frac{l}{2}\cos(\varphi_4)$$

$$\dot{y}_{C4} = -l\sin(\varphi_1)\dot{\varphi}_1 - l\sin(\varphi_2)\dot{\varphi}_2 - l\sin(\varphi_3)\dot{\varphi}_3 - \frac{l}{2}\dot{\varphi}_4\sin(\varphi_4)$$

$$\dot{x}_{C2}^2 + \dot{y}_{C2}^2 = l^2 \dot{\varphi}_1^2 + l^2 \dot{\varphi}_2^2 + l^2 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}_4^2 + 2l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 2l^2 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + 2l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_1) + l^2 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_2) + l^2 \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_3)$$

$$T = \frac{ml^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{19}{6} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{7}{3} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{4}{3} \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{3} \dot{\varphi}_4^2 + 5 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 3 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + 3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_1) + l^2 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_2) + l^2 \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_3) \right)$$

$$\begin{cases} \frac{ml^2}{2} \left(\frac{19}{3} \ddot{\varphi}_1 - 5 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + 3 \ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) - 3 \dot{\varphi}_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1) + \ddot{\varphi}_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_1) \right) = Q_1 \\ \frac{ml^2}{2} \left(\frac{14}{3} \ddot{\varphi}_2 - 5 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + 3 \ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) - 3 \dot{\varphi}_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) + \ddot{\varphi}_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_2) \right) = Q_2 \\ \frac{ml^2}{2} \left(\frac{8}{3} \ddot{\varphi}_3 + 3 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + 3 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) - 3 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) + \ddot{\varphi}_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_3) \right) = Q_3 \\ \frac{ml^2}{2} \left(\frac{2}{3} \ddot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_4 - \varphi_1)(\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_1) + \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_4 - \varphi_1) - \dot{\varphi}_3 \sin(\varphi_4 - \varphi_1)(\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_1) + \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_4 - \varphi_2) \right) = Q_4 \end{cases} \quad (2.13)$$

Действуя по аналогии, можно вывести подобные системы уравнений для остальных степеней свободы, в данном случае у меня $i=10$ (2.14):

$$x_{C10} = l \sin(\varphi_1) + l \sin(\varphi_2) + l \sin(\varphi_3) + l \sin(\varphi_4) + l \sin(\varphi_5) + l \sin(\varphi_6) + l \sin(\varphi_7) + l \sin(\varphi_8) + l \sin(\varphi_9) + \frac{l}{2} \sin(\varphi_{10})$$

$$\dot{x}_{C3} = l \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 + l \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 + l \cos(\varphi_3) \dot{\varphi}_3 + l \cos(\varphi_4) \dot{\varphi}_4 + l \cos(\varphi_5) \dot{\varphi}_5 + l \cos(\varphi_6) \dot{\varphi}_6 + l \cos(\varphi_7) \dot{\varphi}_7 + l \cos(\varphi_8) \dot{\varphi}_8 + l \cos(\varphi_9) \dot{\varphi}_9 + \frac{l}{2} \dot{\varphi}_{10} \cos(\varphi_{10})$$

$$y_{C10} = l \cos(\varphi_1) + l \cos(\varphi_2) + l \cos(\varphi_3) + l \cos(\varphi_4) + l \cos(\varphi_5) + l \cos(\varphi_6) + l \cos(\varphi_7) + l \cos(\varphi_8) + l \cos(\varphi_9) + \frac{l}{2} \cos(\varphi_{10})$$

$$\dot{y}_{C2} = -l \sin(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 - l \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 - l \sin(\varphi_3) \dot{\varphi}_3 - l \sin(\varphi_4) \dot{\varphi}_4 - l \sin(\varphi_5) \dot{\varphi}_5 - l \sin(\varphi_6) \dot{\varphi}_6 - l \sin(\varphi_7) \dot{\varphi}_7 - l \sin(\varphi_8) \dot{\varphi}_8 - l \sin(\varphi_9) \dot{\varphi}_9 - \frac{l}{2} \dot{\varphi}_{10} \sin(\varphi_{10})$$

$$T = \frac{ml^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{43}{6} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{25}{3} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{20}{3} \dot{\varphi}_3^2 + \frac{17}{3} \dot{\varphi}_4^2 + \frac{15}{6} \dot{\varphi}_5^2 + \frac{7}{3} \dot{\varphi}_6^2 + \frac{4}{3} \dot{\varphi}_7^2 + \frac{2}{3} \dot{\varphi}_8^2 + \frac{4}{3} \dot{\varphi}_9^2 + \frac{1}{3} \dot{\varphi}_{10}^2 + 7 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 5 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + 5 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + 2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_1) + 2 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_2) + 2 \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_3) + 5 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_5 \cos(\varphi_5 - \varphi_1) + 5 \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_5 \cos(\varphi_5 - \varphi_2) + 5 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_5 \cos(\varphi_5 - \varphi_1) + \right)$$

$$\begin{aligned}
& 2\dot{\varphi}_6\dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_6 - \varphi_4) + 2\dot{\varphi}_5\dot{\varphi}_7 \cos(\varphi_7 - \varphi_5) + 3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_6 \cos(\varphi_6 - \varphi_1) + \\
& 3\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_6 \cos(\varphi_6 - \varphi_2) + 3\dot{\varphi}_6\dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_6 - \varphi_3) + 2\dot{\varphi}_7\dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_7 - \varphi_4) + \\
& 2\dot{\varphi}_5\dot{\varphi}_7 \cos(\varphi_7 - \varphi_5) + 3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_7 \cos(\varphi_7 - \varphi_1) + 3\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_7 \cos(\varphi_7 - \varphi_2) + \\
& 3\dot{\varphi}_7\dot{\varphi}_3 \cos(\varphi_7 - \varphi_3) + 2\dot{\varphi}_8\dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_8 - \varphi_4) + 2\dot{\varphi}_5\dot{\varphi}_8 \cos(\varphi_8 - \varphi_5) + \\
& 5\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_8 \cos(\varphi_8 - \varphi_1) + 5\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_9 \cos(\varphi_9 - \varphi_1) + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_{10} \cos(\varphi_{10} - \varphi_1) + \\
& 3\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_8 \cos(\varphi_8 - \varphi_2) + 3\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_9 \cos(\varphi_9 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_{10} \cos(\varphi_{10} - \varphi_2) + \\
& 3\dot{\varphi}_3\dot{\varphi}_8 \cos(\varphi_8 - \varphi_3) + 5\dot{\varphi}_3\dot{\varphi}_9 \cos(\varphi_9 - \varphi_3) + \dot{\varphi}_3\dot{\varphi}_{10} \cos(\varphi_{10} - \varphi_3) + \\
& \dot{\varphi}_9\dot{\varphi}_4 \cos(\varphi_9 - \varphi_1) + \dot{\varphi}_4\dot{\varphi}_{10} \cos(\varphi_{10} - \varphi_4) + 3\dot{\varphi}_5\dot{\varphi}_9 \cos(\varphi_9 - \varphi_5) + \\
& \dot{\varphi}_5\dot{\varphi}_{10} \cos(\varphi_{10} - \varphi_5) + 5\dot{\varphi}_6\dot{\varphi}_7 \cos(\varphi_7 - \varphi_6) + 5\dot{\varphi}_6\dot{\varphi}_8 \cos(\varphi_8 - \varphi_6) + \\
& 5\dot{\varphi}_6\dot{\varphi}_9 \cos(\varphi_9 - \varphi_6) + \dot{\varphi}_6\dot{\varphi}_{10} \cos(\varphi_{10} - \varphi_6) + 2\dot{\varphi}_7\dot{\varphi}_8 \cos(\varphi_8 - \varphi_7) + \\
& 3\dot{\varphi}_7\dot{\varphi}_9 \cos(\varphi_9 - \varphi_7) + \dot{\varphi}_7\dot{\varphi}_{10} \cos(\varphi_{10} - \varphi_7) + 5\dot{\varphi}_8\dot{\varphi}_9 \cos(\varphi_9 - \varphi_8) + \\
& \dot{\varphi}_8\dot{\varphi}_{10} \cos(\varphi_8 - \varphi_{10}) + \dot{\varphi}_9\dot{\varphi}_{10} \cos(\varphi_{10} - \varphi_9)
\end{aligned}$$

После операций дифференцирования и подстановки результатов в

(2.1) система уравнений для восстановительного гребка будет иметь вид

(2.14):

$$\begin{aligned}
ml^2 \left(\begin{aligned}
& 9.3\ddot{\varphi}_1 + 8.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + 7.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \ddot{\varphi}_3 + 6.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) \ddot{\varphi}_4 + \\
& \quad 5.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_5) \ddot{\varphi}_5 + 4.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_6 + \\
& \quad + 3.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_7) \ddot{\varphi}_7 + 2.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_8) \ddot{\varphi}_8 + 1.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_9 + \\
& \quad \quad 0.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_{10} \\
& + 8.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + 7.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \dot{\varphi}_3^2 + 6.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_4) \dot{\varphi}_4^2 + \\
& \quad 5.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_5) \dot{\varphi}_5^2 + \\
& + 4.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_6) \dot{\varphi}_6^2 + 3.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_7) \dot{\varphi}_7^2 + 2.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_8) \dot{\varphi}_8^2 + \\
& \quad 1.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_9) \dot{\varphi}_9^2 + \\
& + 0.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_{10}^2 = Q_1
\end{aligned} \right) +
\end{aligned}$$

$$ml^2 \left(\begin{aligned} &8.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + 8.3 \ddot{\varphi}_2 + 7.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \ddot{\varphi}_3 + 6.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) \ddot{\varphi}_4 + \\ &5.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_5) \ddot{\varphi}_5 + 4.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_6 + \\ &+ 3.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_7) \ddot{\varphi}_7 + 2.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_8) \ddot{\varphi}_8 + 1.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_9 + \\ &0.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_{10} + \\ &- 8.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + 7.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \dot{\varphi}_3^2 + 6.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) \dot{\varphi}_4^2 + \\ &5.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_5) \dot{\varphi}_5^2 + \\ &+ 4.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_6) \dot{\varphi}_6^2 + 3.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_7) \dot{\varphi}_7^2 + 2.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_8) \dot{\varphi}_8^2 + \\ &1.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_9) \dot{\varphi}_9^2 + \\ &+ 0.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_{10}^2 \end{aligned} \right) = Q_2$$

$$ml^2 \left(\begin{aligned} &7.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \ddot{\varphi}_1 + 7.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \ddot{\varphi}_2 + 7.3 \ddot{\varphi}_3 + 6.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \ddot{\varphi}_4 + \\ &5.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_5) \ddot{\varphi}_5 + 4.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_6 + \\ &+ 3.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_7) \ddot{\varphi}_7 + 2.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_8) \ddot{\varphi}_8 + 1.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_9 + \\ &0.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_{10} - \\ &- 7.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \dot{\varphi}_1^2 - 7.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \dot{\varphi}_2^2 + 6.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \dot{\varphi}_4^2 + \\ &5.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_5) \dot{\varphi}_5^2 + \\ &+ 4.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_6) \dot{\varphi}_6^2 + 3.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_7) \dot{\varphi}_7^2 + 2.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_8) \dot{\varphi}_8^2 + \\ &1.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_9) \dot{\varphi}_9^2 + \\ &+ 0.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_{10}^2 \end{aligned} \right) = Q_3$$

$$ml^2 \left(\begin{aligned} &6.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) \ddot{\varphi}_1 + 6.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) \ddot{\varphi}_2 + 6.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) \ddot{\varphi}_3 + 6.3 \ddot{\varphi}_4 + \\ &5.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_5) \ddot{\varphi}_5 + 4.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_6 + \\ &+ 3.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_7) \ddot{\varphi}_7 + 2.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_8) \ddot{\varphi}_8 + 1.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_9 + \\ &0.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_{10} + \\ &- 6.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_4) \dot{\varphi}_1^2 - 6.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) \dot{\varphi}_2^2 - 6.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \dot{\varphi}_3^2 + \\ &5.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_5) \dot{\varphi}_5^2 + \\ &+ 4.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_6) \dot{\varphi}_6^2 + 3.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_7) \dot{\varphi}_7^2 + 2.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_8) \dot{\varphi}_8^2 + \\ &1.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_9) \dot{\varphi}_9^2 + \\ &+ 0.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_{10}^2 \end{aligned} \right) = Q_4$$

$$ml^2 \left(\begin{array}{l} 5.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_5) \ddot{\varphi}_1 + 5.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_5) \ddot{\varphi}_2 + 5.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_5) \ddot{\varphi}_3 + \\ 5.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_5) \ddot{\varphi}_4 + 5.3 \ddot{\varphi}_5 + 4.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_6 + \\ + 3.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_7) \ddot{\varphi}_7 + 2.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_8) \ddot{\varphi}_8 + 1.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_9 + \\ 0.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_{10} \\ - 5.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_5) \dot{\varphi}_1^2 - 5.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_5) \dot{\varphi}_2^2 - 5.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_5) \dot{\varphi}_3^2 - \\ 5.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_5) \dot{\varphi}_5^2 + \\ + 4.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_6) \dot{\varphi}_6^2 + 3.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_7) \dot{\varphi}_7^2 + 2.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_8) \dot{\varphi}_8^2 + \\ 1.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_9) \dot{\varphi}_9^2 + \\ + 0.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_{10}^2 \end{array} \right) = Q_5$$

$$ml^2 \left(\begin{array}{l} 4.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_1 + 4.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_2 + 4.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_3 + \\ 4.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_4 + 4.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_6) \ddot{\varphi}_5 + 4.3 \ddot{\varphi}_6 + \\ + 3.5 \cos(\varphi_6 - \varphi_7) \ddot{\varphi}_7 + 2.5 \cos(\varphi_6 - \varphi_8) \ddot{\varphi}_8 + 1.5 \cos(\varphi_6 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_9 + \\ 0.5 \cos(\varphi_6 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_{10} \\ - 4.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_6) \dot{\varphi}_1^2 - 4.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_6) \dot{\varphi}_2^2 - 4.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_6) \dot{\varphi}_3^2 - \\ 4.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_6) \dot{\varphi}_4^2 + \\ - 4.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_6) \dot{\varphi}_5^2 + 3.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_7) \dot{\varphi}_7^2 + 2.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_8) \dot{\varphi}_8^2 + \\ 1.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_9) \dot{\varphi}_9^2 + \\ + 0.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_{10}^2 \end{array} \right) = Q_6$$

$$ml^2 \left(\begin{array}{l} 3.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_7) \ddot{\varphi}_1 + 3.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_7) \ddot{\varphi}_2 + 3.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_7) \ddot{\varphi}_3 + \\ 3.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_7) \ddot{\varphi}_4 + 3.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_7) \ddot{\varphi}_5 + 3.3 \ddot{\varphi}_6 + \\ + 3.5 \ddot{\varphi}_7 + 2.5 \cos(\varphi_7 - \varphi_8) \ddot{\varphi}_8 + 1.5 \cos(\varphi_7 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_9 + \\ + 0.5 \cos(\varphi_7 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_{10} \\ - 3.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_7) \dot{\varphi}_1^2 - 3.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_7) \dot{\varphi}_2^2 - 3.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_7) \dot{\varphi}_3^2 - \\ 3.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_7) \dot{\varphi}_4^2 - \\ - 3.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_7) \dot{\varphi}_5^2 + 3.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_7) \dot{\varphi}_6^2 + 2.5 \sin(\varphi_7 - \varphi_8) \dot{\varphi}_8^2 + \\ 1.5 \sin(\varphi_7 - \varphi_9) \dot{\varphi}_9^2 + \\ + 0.5 \sin(\varphi_7 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_{10}^2 \end{array} \right) = Q_7$$

$$ml^2 \left(\begin{array}{l} 2.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_8) \ddot{\varphi}_1 + 2.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_8) \ddot{\varphi}_2 + 2.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_8) \ddot{\varphi}_3 + \\ 2.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_8) \ddot{\varphi}_4 + 2.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_8) \ddot{\varphi}_5 + 2.5 \cos(\varphi_6 - \varphi_8) \ddot{\varphi}_6 + \\ + 2.5 \cos(\varphi_7 - \varphi_8) \ddot{\varphi}_7 + 2.3 \ddot{\varphi}_8 + 1.5 \cos(\varphi_8 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_9 + \\ 0.5 \cos(\varphi_8 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_{10} \end{array} \right) -$$

$$-2.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_8) \dot{\varphi}_1^2 - 2.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_8) \dot{\varphi}_2^2 - 2.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_8) \dot{\varphi}_3^2 -$$

$$2.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_8) \dot{\varphi}_4^2 -$$

$$-2.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_8) \dot{\varphi}_5^2 - 2.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_8) \dot{\varphi}_6^2 - 2.5 \sin(\varphi_7 - \varphi_8) \dot{\varphi}_7^2 +$$

$$1.5 \sin(\varphi_8 - \varphi_9) \dot{\varphi}_9^2 +$$

$$+ 0.5 \sin(\varphi_8 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_{10}^2) = Q_8$$

$$ml^2 \left(\begin{array}{l} 1.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_1 + 1.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_2 + 1.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_3 + \\ 1.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_4 + 1.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_5 + 1.5 \cos(\varphi_6 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_6 + \\ + 1.5 \cos(\varphi_7 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_7 + 1.5 \cos(\varphi_8 - \varphi_9) \ddot{\varphi}_8 + 1.3 \ddot{\varphi}_9 + \\ 0.5 \cos(\varphi_9 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_{10} \end{array} \right) -$$

$$-1.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_9) \dot{\varphi}_1^2 - 1.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_9) \dot{\varphi}_2^2 - 1.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_9) \dot{\varphi}_3^2 -$$

$$1.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_9) \dot{\varphi}_4^2 -$$

$$-1.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_9) \dot{\varphi}_5^2 - 1.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_9) \dot{\varphi}_7^2 - 1.5 \sin(\varphi_7 - \varphi_9) \dot{\varphi}_8^2 +$$

$$+ 0.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_{10}^2) = Q_9$$

$$ml^2 \left(\begin{array}{l} 0.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_1 + 0.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_2 + 0.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_3 + \\ 0.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_4 + 0.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_5 + 0.5 \cos(\varphi_6 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_6 + \\ + 0.5 \cos(\varphi_7 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_7 + 0.5 \cos(\varphi_8 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_8 + 0.5 \cos(\varphi_9 - \varphi_{10}) \ddot{\varphi}_9 + \\ 0.3 \ddot{\varphi}_{10} \end{array} \right) -$$

$$-0.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_1^2 - 0.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_2^2 - 0.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_3^2 -$$

$$0.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_4^2 -$$

$$-0.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_5^2 - 0.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_7^2 - 0.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_8^2 -$$

$$0.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_{10}) \dot{\varphi}_9^2) = Q_{10}$$

Для дальнейшего удобства систему (2.14) запишем в матричном виде (2.15):

$$A(\varphi)\ddot{\varphi} + B(\varphi, \dot{\varphi}) = Q \quad (2.15)$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10})^T$,

$\dot{\varphi} = (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3, \dot{\varphi}_4, \dot{\varphi}_5, \dot{\varphi}_6, \dot{\varphi}_7, \dot{\varphi}_8, \dot{\varphi}_9, \dot{\varphi}_{10})^T$,

$\ddot{\varphi} = (\ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_3, \ddot{\varphi}_4, \ddot{\varphi}_5, \ddot{\varphi}_6, \ddot{\varphi}_7, \ddot{\varphi}_8, \ddot{\varphi}_9, \ddot{\varphi}_{10})^T$,

$$Q=(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10})^T,$$

$$B(\varphi)=(B(\varphi)_1, B(\varphi)_2, B(\varphi)_3, B(\varphi)_4, B(\varphi)_5, B(\varphi)_6, B(\varphi)_7, B(\varphi)_8, B(\varphi)_9, B(\varphi)_{10}),$$

$A(\varphi)$ -симметричная матрица масс, причем $\det(A(\varphi))\neq 0$ согласно [15], тогда система (2.14) разрешима относительно старших производных.

Матрицы системы (2.15) для восстановительного гребка имеют следующий вид:

$$A(\varphi)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{1\ 10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{2\ 10} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} & a_{3\ 10} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} & a_{4\ 10} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} & a_{59} & a_{5\ 10} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} & a_{6\ 10} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} & a_{7\ 10} \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} & a_{89} & a_{8\ 10} \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{98} & a_{99} & a_{9\ 10} \\ a_{10\ 1} & a_{10\ 2} & a_{10\ 3} & a_{10\ 4} & a_{10\ 5} & a_{10\ 6} & a_{10\ 7} & a_{10\ 8} & a_{10\ 9} & a_{10\ 10} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$B(\varphi)=\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} & b_{17} & b_{18} & b_{19} & b_{1\ 10} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} & b_{27} & b_{28} & b_{29} & b_{2\ 10} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} & b_{38} & b_{39} & b_{3\ 10} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & 0 & b_{45} & b_{46} & b_{47} & b_{48} & b_{49} & b_{4\ 10} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & 0 & b_{56} & b_{57} & b_{58} & b_{59} & b_{5\ 10} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & 0 & b_{67} & b_{68} & b_{69} & b_{6\ 10} \\ b_{71} & b_{72} & b_{73} & b_{74} & b_{75} & b_{76} & 0 & b_{78} & b_{79} & b_{7\ 10} \\ b_{81} & b_{82} & b_{83} & b_{84} & b_{85} & b_{86} & b_{87} & 0 & b_{89} & b_{8\ 10} \\ b_{91} & b_{92} & b_{93} & b_{94} & b_{95} & b_{96} & b_{97} & b_{98} & 0 & b_{9\ 10} \\ b_{10\ 1} & b_{10\ 2} & b_{10\ 3} & b_{10\ 4} & b_{10\ 5} & b_{10\ 6} & b_{10\ 7} & b_{10\ 8} & b_{10\ 9} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

где $a_{11} = 9.3 ml^2$, $a_{12} = 8.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) ml^2$, $a_{13} = 7.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) ml^2$, $a_{14} = 6.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) ml^2$, $a_{15} = 5.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_5) ml^2$, $a_{16} = 4.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_6) ml^2$, $a_{17} = 3.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_7) ml^2$, $a_{18} = 2.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_8) ml^2$, $a_{19} = 1.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_9) ml^2$, $a_{1\ 10} = 0.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_{10}) ml^2$, $a_{21} = 8.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) ml^2$, $a_{22} = 8.3 ml^2$, $a_{23} = 7.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) ml^2$, $a_{24} = 6.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) ml^2$, $a_{25} = 5.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_5) ml^2$, $a_{26} = 4.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_6) ml^2$, $a_{27} = 3.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_7) ml^2$, $a_{28} = 2.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_8) ml^2$, $a_{29} = 1.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_9) ml^2$, $a_{2\ 10} = 0.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_{10}) ml^2$, $a_{31} = 7.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) ml^2$, $a_{32} = 7.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) ml^2$, $a_{33} =$

$$\begin{aligned}
&7.3 ml^2, a_{34} = 6.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) ml^2, a_{35} = 5.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_5) ml^2, a_{36} = 4.5 \cos(\varphi_3 - \\
&\varphi_6) ml^2, a_{37} = 3.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_7) ml^2, a_{38} = 2.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_8) ml^2, a_{39} = \\
&1.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_9) ml^2, a_{310} = 0.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_{10}) ml^2, a_{41} = 6.5 \cos(\varphi_1 - \\
&\varphi_4) ml^2, a_{42} = 6.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) ml^2, a_{43} = 6.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) ml^2, a_{34} = 6.3 ml^2, a_{45} = \\
&5.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_5) ml^2, a_{46} = 4.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_6) ml^2, a_{47} = 3.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_7) ml^2, a_{48} = \\
&2.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_8) ml^2, a_{49} = 1.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_9) ml^2, a_{410} = 0.5 \cos(\varphi_4 - \\
&\varphi_{10}) ml^2, a_{51} = 5.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_5) ml^2, a_{52} = 5.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_5) ml^2, a_{53} = \\
&5.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_5) ml^2, a_{54} = 5.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_5) ml^2, a_{55} = 5.3 ml^2, a_{56} = 4.5 \cos(\varphi_5 - \\
&\varphi_6) ml^2, a_{57} = 3.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_7) ml^2, a_{58} = 2.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_8) ml^2, a_{59} = \\
&1.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_9) ml^2, a_{510} = 0.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_{10}) ml^2, a_{61} = 4.5 \cos(\varphi_1 - \\
&\varphi_6) ml^2, a_{62} = 4.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_6) ml^2, a_{63} = 4.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_6) ml^2, a_{64} = \\
&4.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_6) ml^2, a_{65} = 4.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_6) ml^2, a_{66} = 4.3 ml^2, a_{67} = \\
&3.5 \cos(\varphi_6 - \varphi_7) ml^2, a_{68} = 2.5 \cos(\varphi_6 - \varphi_8) ml^2, a_{69} = 1.5 \cos(\varphi_6 - \\
&\varphi_9) ml^2, a_{610} = 0.5 \cos(\varphi_6 - \varphi_{10}) ml^2, a_{71} = 3.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_7) ml^2, a_{72} = \\
&3.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_7) ml^2, a_{73} = 3.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_7) ml^2, a_{74} = 3.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_7) ml^2, a_{75} = \\
&3.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_7) ml^2, a_{76} = 3.5 \cos(\varphi_6 - \varphi_7) ml^2, a_{77} = 3.3 ml^2, a_{78} = 2.5 \cos(\varphi_7 - \\
&\varphi_8) ml^2, a_{79} = 1.5 \cos(\varphi_7 - \varphi_9) ml^2, a_{710} = 0.5 \cos(\varphi_7 - \varphi_{10}) ml^2, a_{81} = \\
&2.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_8) ml^2, a_{82} = 2.5 \cos(\varphi_2 - \varphi_8) ml^2, a_{83} = 2.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_8) ml^2, a_{84} = \\
&2.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_8) ml^2, a_{85} = 2.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_8) ml^2, a_{86} = 2.5 \cos(\varphi_6 - \varphi_8) ml^2, a_{87} = \\
&2.5 \cos(\varphi_7 - \varphi_8) ml^2, a_{88} = 2.3 ml^2, a_{89} = 1.5 \cos(\varphi_8 - \varphi_9) ml^2, a_{810} = \\
&0.5 \cos(\varphi_8 - \varphi_{10}) ml^2, a_{91} = 1.5 \cos(\varphi_1 - \varphi_9) ml^2, a_{92} = 1.5 \cos(\varphi_2 - \\
&\varphi_9) ml^2, a_{93} = 1.5 \cos(\varphi_3 - \varphi_9) ml^2, a_{94} = 1.5 \cos(\varphi_4 - \varphi_9) ml^2, a_{95} = \\
&1.5 \cos(\varphi_5 - \varphi_9) ml^2, a_{96} = 1.5 \cos(\varphi_6 - \varphi_9) ml^2, a_{97} = 1.5 \cos(\varphi_7 - \varphi_9) ml^2, a_{98} = \\
&1.5 \cos(\varphi_8 - \varphi_9) ml^2, a_{99} = 1.3 ml^2, a_{910} = 0.5 \cos(\varphi_{10} - \varphi_9) ml^2, a_{101} = \\
&0.5 \cos(\varphi_{10} - \varphi_1) ml^2, a_{102} = 0.5 \cos(\varphi_{10} - \varphi_2) ml^2, a_{103} = 0.5 \cos(\varphi_{10} - \\
&\varphi_3) ml^2, a_{104} = 0.5 \cos(\varphi_{10} - \varphi_4) ml^2, a_{105} = 0.5 \cos(\varphi_{10} - \varphi_5) ml^2, a_{106} = \\
&0.5 \cos(\varphi_{10} - \varphi_6) ml^2, a_{107} = 0.5 \cos(\varphi_{10} - \varphi_7) ml^2, a_{108} = 0.5 \cos(\varphi_{10} - \\
&\varphi_8) ml^2, a_{109} = 0.5 \cos(\varphi_{10} - \varphi_9) ml^2, a_{1010} = 0.3 ml^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_{12}=8.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \text{ ml}^2, b_{13} = 7.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \text{ ml}^2, b_{14} = 6.5 \sin(\varphi_1 - \\
& \varphi_4) \text{ ml}^2, b_{15} = 5.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_5) \text{ ml}^2, b_{16} = 4.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_6) \text{ ml}^2, b_{17} = \\
& 3.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_7) \text{ ml}^2, b_{18} = 2.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_8) \text{ ml}^2, b_{19} = 1.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_9) \text{ ml}^2, b_{1\ 10} = \\
& 0.5 \sin(\varphi_1 - \varphi_{10}) \text{ ml}^2, b_{21}=-8.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \text{ ml}^2, b_{23} = 7.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) \text{ ml}^2, b_{24} = \\
& 6.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) \text{ ml}^2, b_{25} = 5.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_5) \text{ ml}^2, b_{26} = 4.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_6) \text{ ml}^2, b_{27} = \\
& 3.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_7) \text{ ml}^2, b_{28} = 2.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_8) \text{ ml}^2, b_{29} = 1.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_9) \text{ ml}^2, b_{2\ 10} = \\
& 0.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_{10}) \text{ ml}^2, b_{31} = -7.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) \text{ ml}^2, b_{32} = -7.5 \sin(\varphi_3 - \\
& \varphi_2) \text{ ml}^2, b_{34} = 6.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \text{ ml}^2, b_{35} = 5.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_5) \text{ ml}^2, b_{36} = \\
& 4.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_6) \text{ ml}^2, b_{37} = 3.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_7) \text{ ml}^2, b_{38} = 2.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_8) \text{ ml}^2, b_{39} = \\
& 1.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_9) \text{ ml}^2, b_{3\ 10} = 0.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_{10}) \text{ ml}^2, b_{41} = -6.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_1) \text{ ml}^2, \\
& b_{42} = -6.5 \sin(\varphi_2 - \varphi_4) \text{ ml}^2, b_{43} = -6.5 \sin(\varphi_3 - \varphi_4) \text{ ml}^2, b_{45} = 5.5 \sin(\varphi_4 - \\
& \varphi_5) \text{ ml}^2, b_{46} = 4.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_6) \text{ ml}^2, b_{47} = 3.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_7) \text{ ml}^2, b_{48} = \\
& 2.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_8) \text{ ml}^2, b_{49} = 1.5 \sin(\varphi_4 - \varphi_9) \text{ ml}^2, b_{4\ 10} = 0.5 \sin(\varphi_4 - \\
& \varphi_{10}) \text{ ml}^2, b_{51} = -5.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_1) \text{ ml}^2, b_{52} = -5.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_2) \text{ ml}^2, b_{53} = \\
& -5.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_3) \text{ ml}^2, b_{54} = -5.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_4) \text{ ml}^2, b_{56} = 4.5 \sin(\varphi_5 - \\
& \varphi_6) \text{ ml}^2, b_{57} = 3.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_7) \text{ ml}^2, b_{58} = 2.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_8) \text{ ml}^2, b_{59} = \\
& 1.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_9) \text{ ml}^2, b_{5\ 10} = 0.5 \sin(\varphi_5 - \varphi_{10}) \text{ ml}^2, b_{61} = -4.5 \sin(\varphi_6 - \\
& \varphi_1) \text{ ml}^2, b_{62} = -4.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_2) \text{ ml}^2, b_{63} = -4.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_3) \text{ ml}^2, b_{64} = \\
& -4.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_4) \text{ ml}^2, b_{65} = -4.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_5) \text{ ml}^2, b_{67} = 3.5 \sin(\varphi_6 - \\
& \varphi_7) \text{ ml}^2, b_{68} = 2.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_8) \text{ ml}^2, b_{69} = 1.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_9) \text{ ml}^2, b_{6\ 10} = \\
& 0.5 \sin(\varphi_6 - \varphi_{10}) \text{ ml}^2, b_{71} = -3.5 \sin(\varphi_7 - \varphi_1) \text{ ml}^2, b_{72} = -3.5 \sin(\varphi_7 - \\
& \varphi_2) \text{ ml}^2, b_{73} = -3.5 \sin(\varphi_7 - \varphi_3) \text{ ml}^2, b_{74} = -3.5 \sin(\varphi_7 - \varphi_4) \text{ ml}^2, b_{75} = \\
& -3.5 \sin(\varphi_7 - \varphi_5) \text{ ml}^2, b_{76} = -3.5 \sin(\varphi_7 - \varphi_6) \text{ ml}^2, b_{78} = 2.5 \sin(\varphi_7 - \\
& \varphi_8) \text{ ml}^2, b_{79} = 1.5 \sin(\varphi_7 - \varphi_9) \text{ ml}^2, b_{7\ 10} = 0.5 \sin(\varphi_7 - \varphi_{10}) \text{ ml}^2, b_{81} = \\
& -2.5 \sin(\varphi_8 - \varphi_1) \text{ ml}^2, b_{82} = -2.5 \sin(\varphi_8 - \varphi_2) \text{ ml}^2, b_{83} = -2.5 \sin(\varphi_8 - \\
& \varphi_3) \text{ ml}^2, b_{84} = -2.5 \sin(\varphi_8 - \varphi_4) \text{ ml}^2, b_{85} = -2.5 \sin(\varphi_8 - \varphi_5) \text{ ml}^2, b_{86} = \\
& -2.5 \sin(\varphi_8 - \varphi_6) \text{ ml}^2, b_{87} = -2.5 \sin(\varphi_8 - \varphi_7) \text{ ml}^2, b_{89} = 1.5 \sin(\varphi_8 - \\
& \varphi_9) \text{ ml}^2, b_{8\ 10} = 0.5 \sin(\varphi_8 - \varphi_{10}) \text{ ml}^2, b_{91} = -1.5 \sin(\varphi_9 - \varphi_1) \text{ ml}^2, b_{92} = \\
& -1.5 \sin(\varphi_9 - \varphi_2) \text{ ml}^2, b_{93} = -1.5 \sin(\varphi_9 - \varphi_3) \text{ ml}^2, b_{94} = -1.5 \sin(\varphi_9 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varphi_4) ml^2, b_{95} = -1.5 \sin(\varphi_9 - \varphi_5) ml^2, b_{96} = -1.5 \sin(\varphi_9 - \varphi_6) ml^2, b_{97} = \\
& -1.5 \sin(\varphi_9 - \varphi_7) ml^2, b_{98} = -1.5 \sin(\varphi_9 - \varphi_8) ml^2, b_{910} = 0.5 \sin(\varphi_9 - \\
& \varphi_{10}) ml^2, b_{101} = -0.5 \sin(\varphi_{10} - \varphi_1) ml^2, b_{102} = -0.5 \sin(\varphi_{10} - \varphi_2) ml^2, b_{103} = \\
& -0.5 \sin(\varphi_{10} - \varphi_3) ml^2, b_{104} = -0.5 \sin(\varphi_{10} - \varphi_4) ml^2, b_{105} = -0.5 \sin(\varphi_{10} - \\
& \varphi_5) ml^2, b_{106} = -0.5 \sin(\varphi_{10} - \varphi_6) ml^2, b_{107} = -0.5 \sin(\varphi_{10} - \varphi_7) ml^2, b_{108} = \\
& -0.5 \sin(\varphi_{10} - \varphi_8) ml^2, b_{109} = -0.5 \sin(\varphi_{10} - \varphi_9) ml^2.
\end{aligned}$$

В силу того, что параметры каждого звена рассчитываются по известным формулам, представленным в [16], то задача сводится к решению системы уравнений (2.14).

2.3. Экспериментальное исследование движения

Для решения первой задачи динамики необходимо знать изменение обобщенных координат со временем. В данной задаче за обобщенные координаты приняты углы поворота относительно вертикальной оси. С этой целью исследовалась история положений реснички во время всего цикла. Биологические параметры были заведомо измерены. В среднем реснички достигают длины от 5 до 50 мкм. Каждый цикл биения реснички длится в среднем от 0.04 до 0.2 сек. Рассчитать масс-инерционные характеристики m и I , при необходимости, можно следующим образом: поскольку все стержни — одинаковой массы и длины, а также учитывая то, что длина органеллы обычно известна, а масса, к примеру, реснички, по данным работы [17] составляет в среднем около $4,0959 \cdot 10^{-17}$ кг, то m и I , ввиду аддитивности длины и массы, можно рассчитывать через известные массу M и длину L всей органеллы и заданное число степеней свободы N по формулам: $m = \frac{M}{N}, I = \frac{L}{N}$.

В ходе эксперимента рисунок оцифровывался (рис.5), что помогло пронаблюдать изменение положения реснички со временем. Измеряемыми параметрами были углы отклонения каждого звена: стержни относительно вертикали, то есть рассматривались абсолютные углы отклонения.

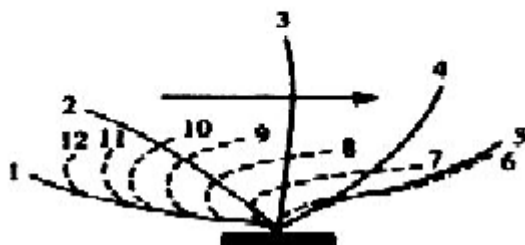


Рис.10.Биение реснички.

Во время движения реснички выбирался временной промежуток, на котором явно можно было пронаблюдать изменение положения реснички при

восстановительном и эффективном гребке. На выбранном промежутке приблизительно через каждые 29 мс измерялись относительные углы. Измерения углов производились с помощью компьютерного транспортира на экране монитора Screen Protractor. Полученные измерения были записаны в градусах, после чего переведены в радианы для дальнейшего удобства (Таблица 1).

	6	7	8	9	10	11	12	13
1	55°	-60°	-75°	-75°	-75°	-75°	-75°	-75°
2	72°	-50°	-73°	-80°	-80°	-80°	-80°	-80°
3	82°	65°	-70°	-74°	-74°	-74°	-74°	-74°
4	85°	65°	-53°	-68°	-78°	-78°	-78°	-78°
5	87°	70°	-5°	-40°	-80°	-80°	-80°	-80°
6	80°	72°	40°	-10°	-72°	-72°	-72°	-72°
7	80°	80°	65°	-5°	-52°	-52°	-52°	-52°
8	72°	86°	68°	50°	-27°	-70°	-70°	-70°
9	68°	87°	75°	60°	3°	-50°	-70°	-70°
10	68°	88°	80°	70°	45°	-28°	-45°	-68°
11	82°	90°	85°	72°	60°	9°	-8°	-70°
12	68°	89°	88°	84°	60°	28°	55°	-62°

Таблица 1. Значения абсолютных углов.

	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0,8727	-1,0472	-1,3090	-1,3090	-1,309	-1,3090	-1,309	-1,309
2	1,1868	-0,9948	-1,274	-1,2915	-1,361	-1,361	-1,361	-1,361
3	1,396	0,698	-1,327	-1,3439	-1,344	-1,344	-1,344	-1,344
4	1,536	1,0821	-0,959	-1,3614	-1,361	-1,361	-1,361	-1,361
5	1,3963	1,1345	-0,2618	-0,8727	-1,3963	-1,3963	-1,3963	-1,3963
6	1,4312	1,2566	0,6981	-0,3491	-1,2566	-1,2566	-1,2566	-1,2566

7	1,4486	1,4835	1,2217	-0,0349	-0,9599	-0,9599	-0,9599	-0,9599
8	1,2566	1,5184	1,3090	0,8727	-0,9725	-1,2741	-1,2741	-1,2741
9	1,3090	1,5184	1,3963	1,0472	0,1745	-0,9599	-1,2217	-1,2392
10	1,3090	1,5359	1,3265	1,2217	0,8727	-0,5585	-0,6981	-1,1868

Таблица 2. Значения абсолютных углов в радианах.

В ходе эксперимента были выявлены зависимости углов отклонения от времени. Полученные графики зависимостей представлены на рисунках (11.1-11.10).

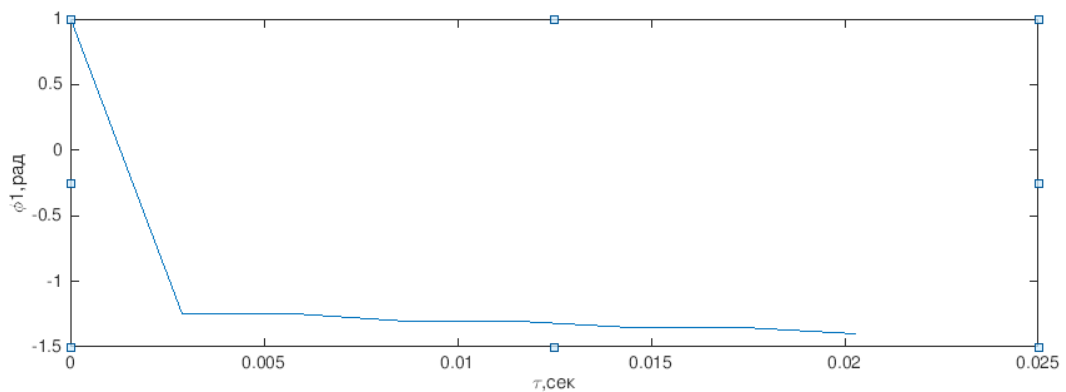


Рис.11.1. Зависимость абсолютных координат от времени.

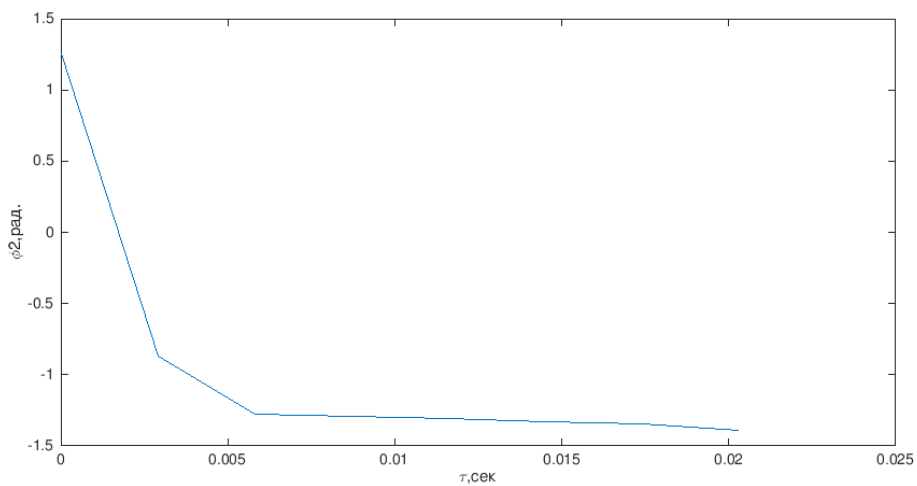


Рис.11.2. Зависимость абсолютных координат от времени.

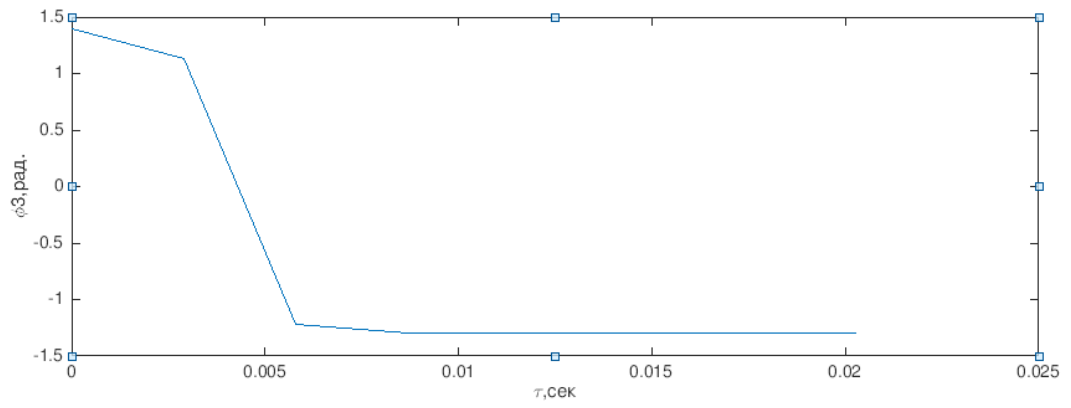


Рис.11.3. Зависимость абсолютных координат от времени.

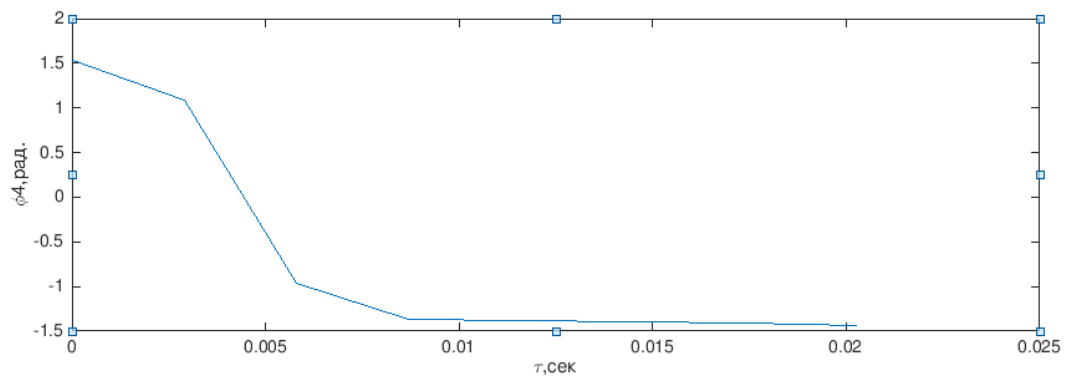


Рис.11.4. Зависимость абсолютных координат от времени.

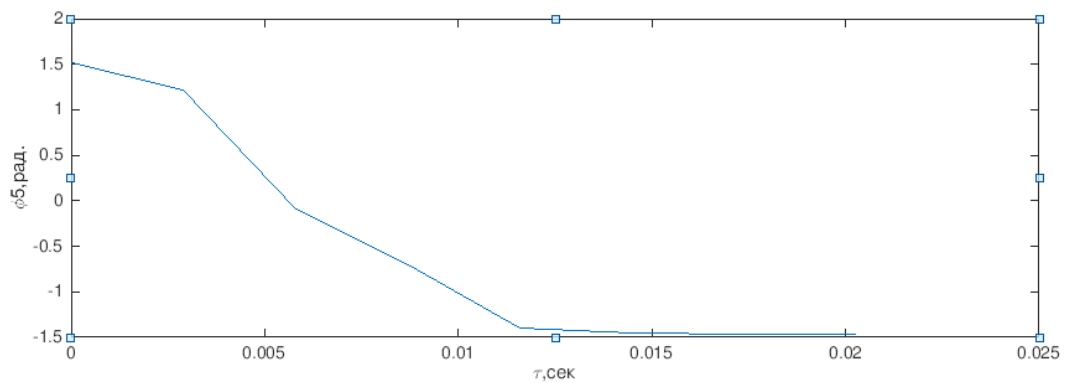


Рис.11.5. Зависимость абсолютных координат от времени.

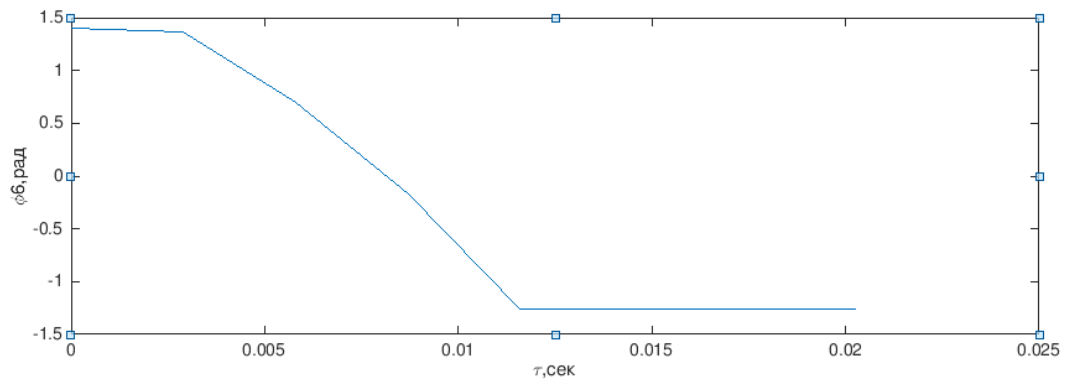


Рис.11.6. Зависимость абсолютных координат от времени.

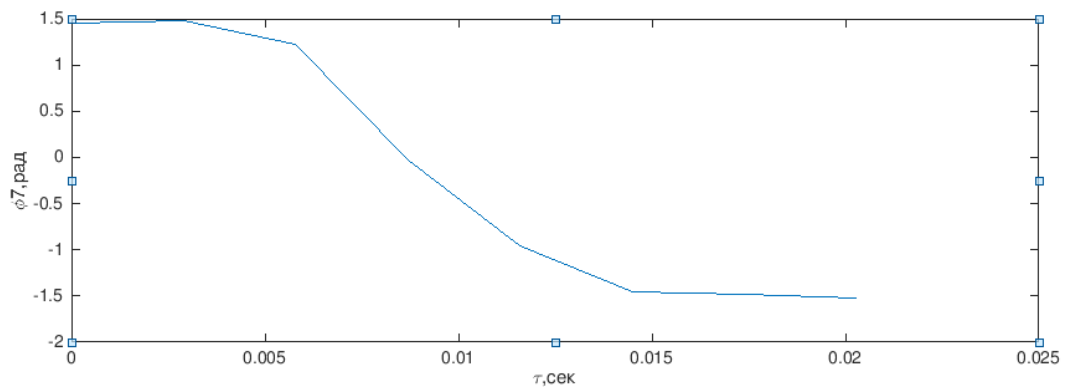


Рис.11.7. Зависимость абсолютных координат от времени.

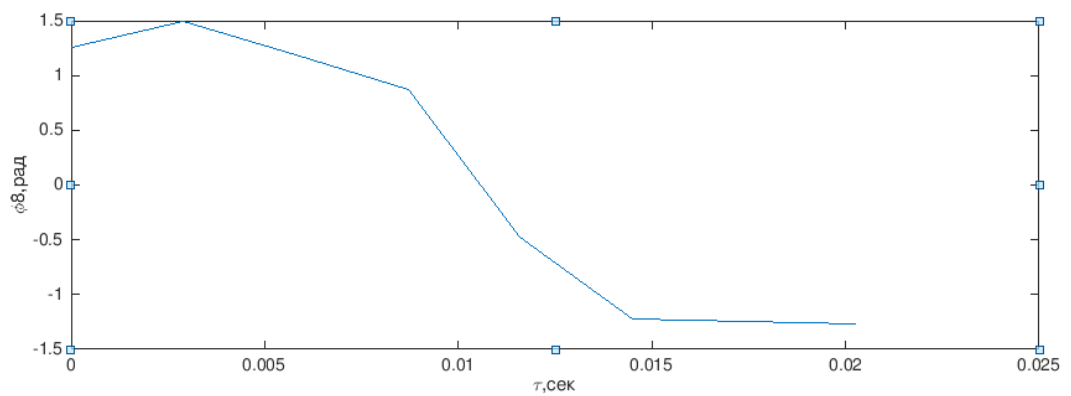


Рис.11.8. Зависимость абсолютных координат от времени.

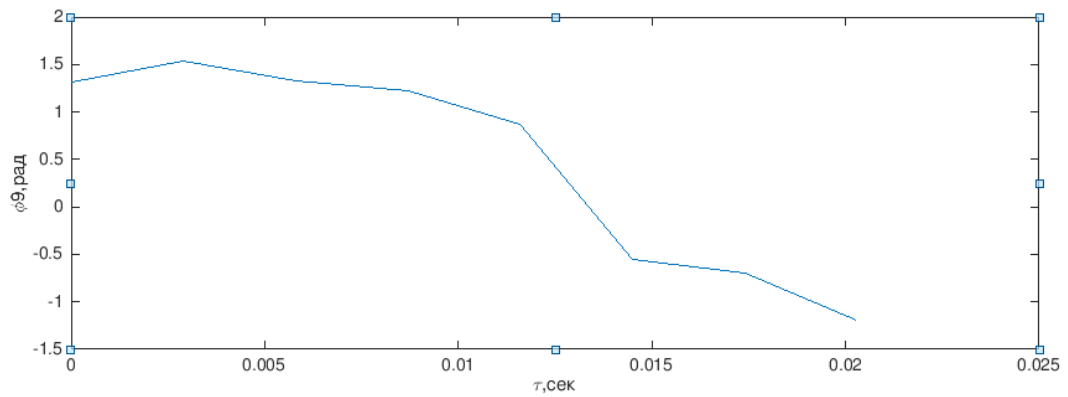


Рис.11.9. Зависимость абсолютных координат от времени.

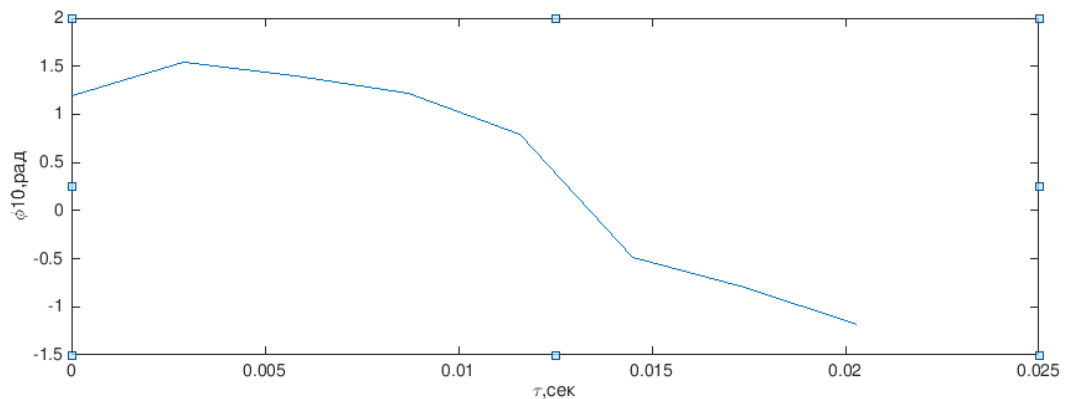


Рис.11.10. Зависимость абсолютных координат от времени.

Для получения решения прямой задачи динамики необходимо значения полученных обобщенных координат (абсолютные углы) аппроксимировать дважды непрерывно-дифференцируемыми функциями, вследствие чего находятся $\varphi_i(t)$. Далее произвести подстановку $\varphi_i(t)$ в систему уравнений каждой из фаз и вычислить $Q_i(t)$, воспользовавшись соотношением (2.3), найти $Q_i^{rel}(t)$.

Глава 3. Метод решения задачи

Интерполирование результатов эксперимента дало кривые (рис. 11.1 - 11.10). Чтобы получить эти зависимости в виде дважды непрерывно-дифференцируемых функций использовалась функция `polyfit`. После применения данной функции были найдены необходимые значения относительных углов. На рисунках 12.1 – 12.10 изображены полученные зависимости углов от времени.

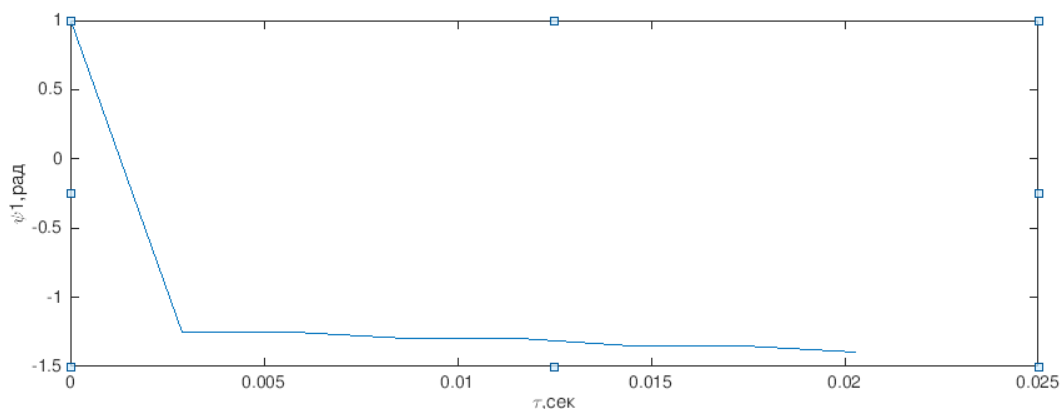


Рис.12.1. Зависимость относительных координат от времени.

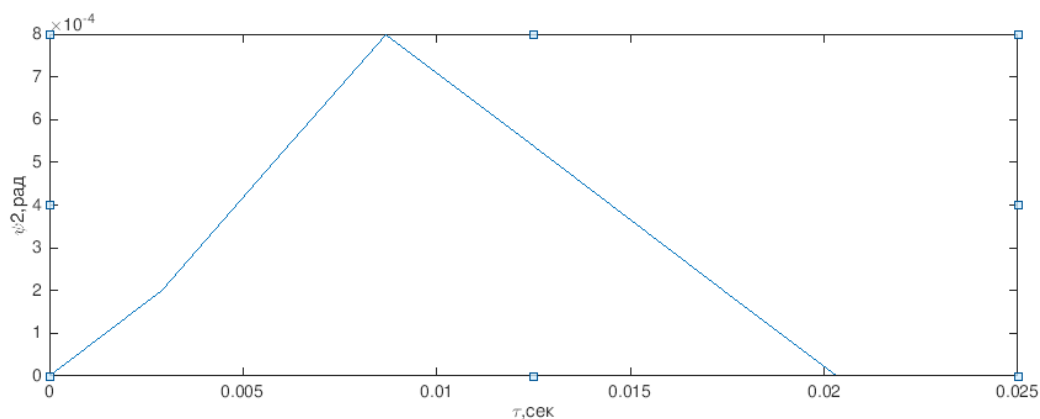


Рис.12.2. Зависимость относительных координат от времени.

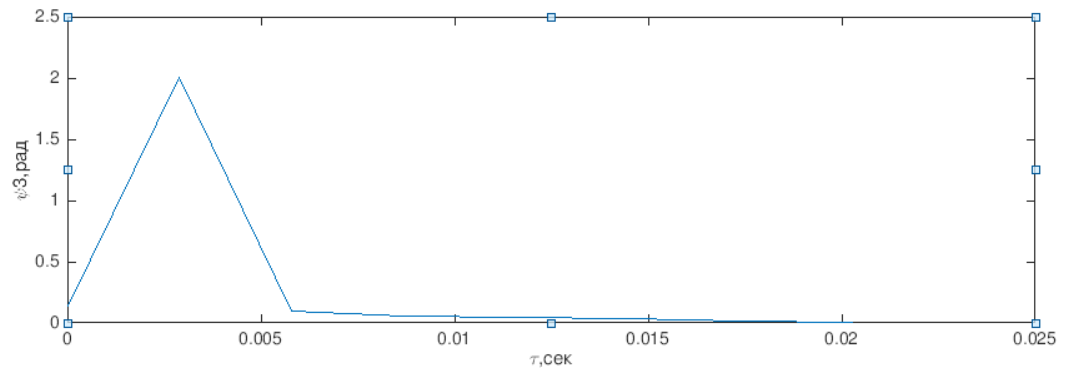


Рис.12.3. Зависимость относительных координат от времени.

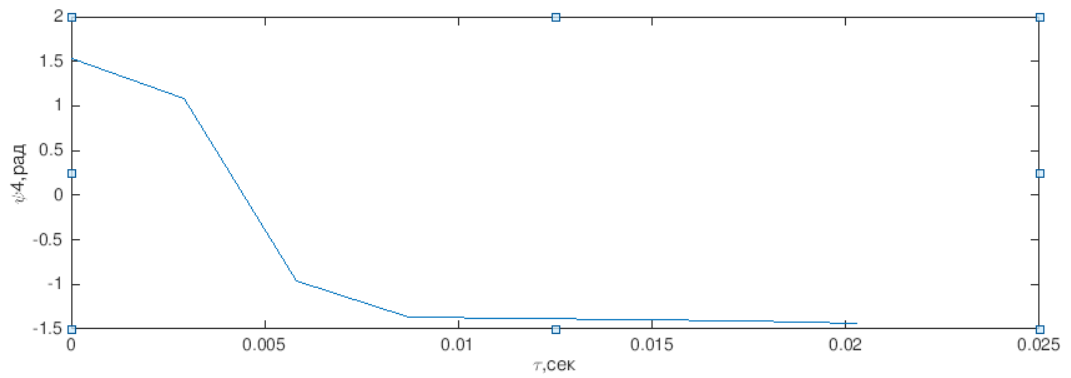


Рис.12.4. Зависимость относительных координат от времени.

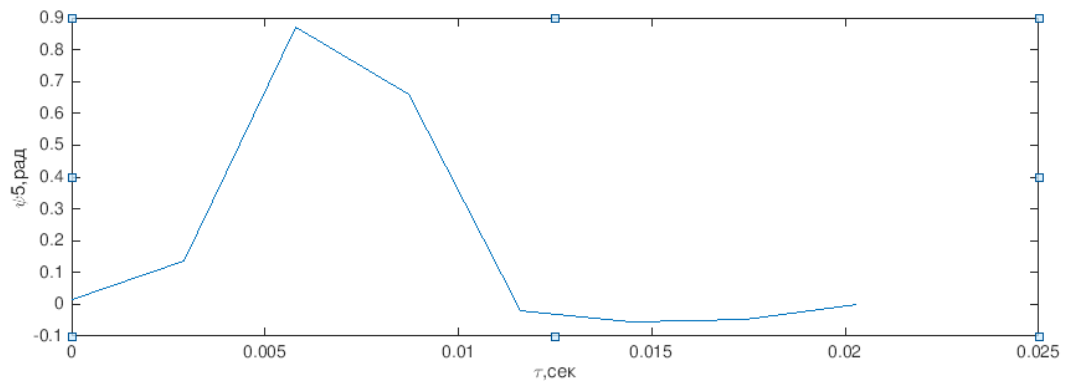


Рис.12.5. Зависимость относительных координат от времени.

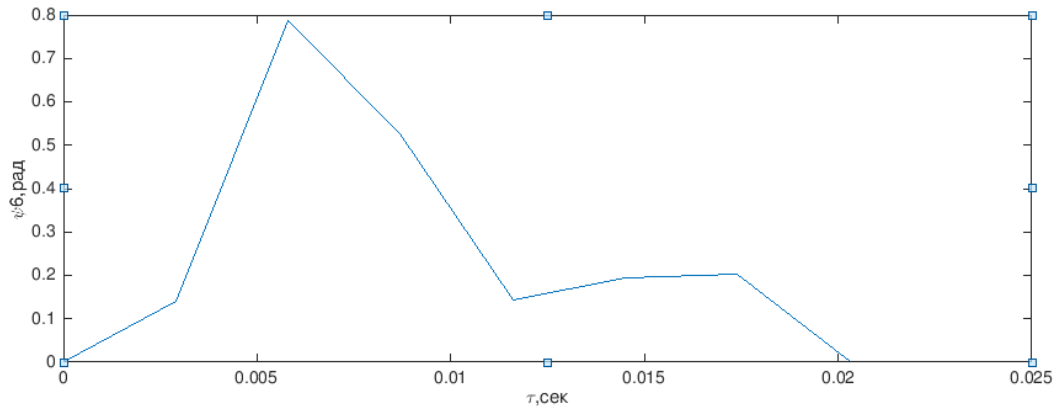


Рис.12.6. Зависимость относительных координат от времени.

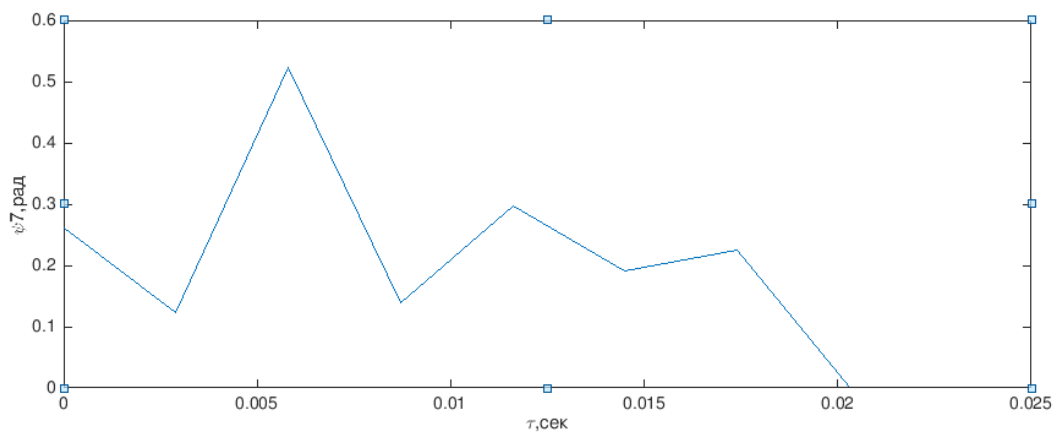


Рис.12.7. Зависимость относительных координат от времени.

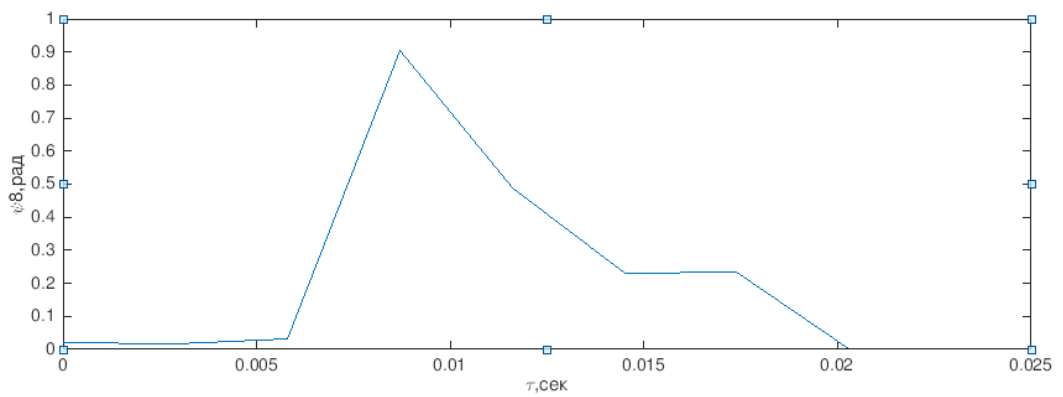


Рис.12.8. Зависимость относительных координат от времени.

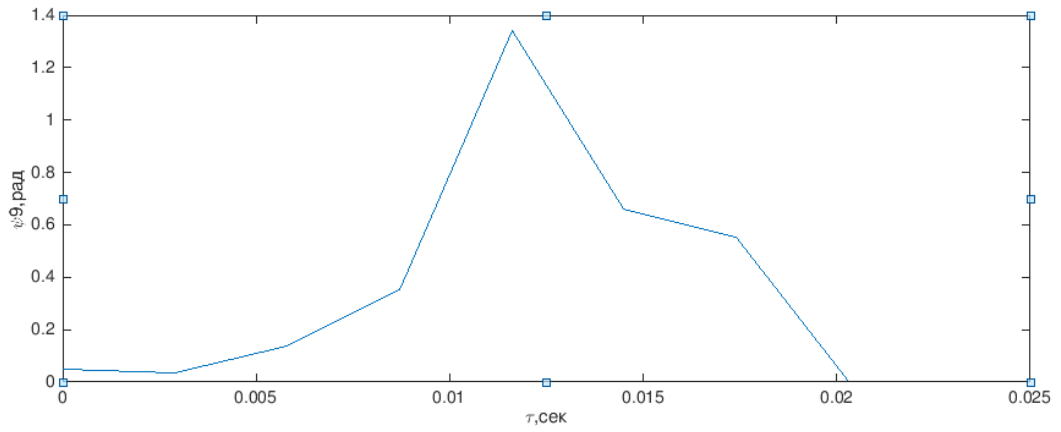


Рис.12.9. Зависимость относительных координат от времени.

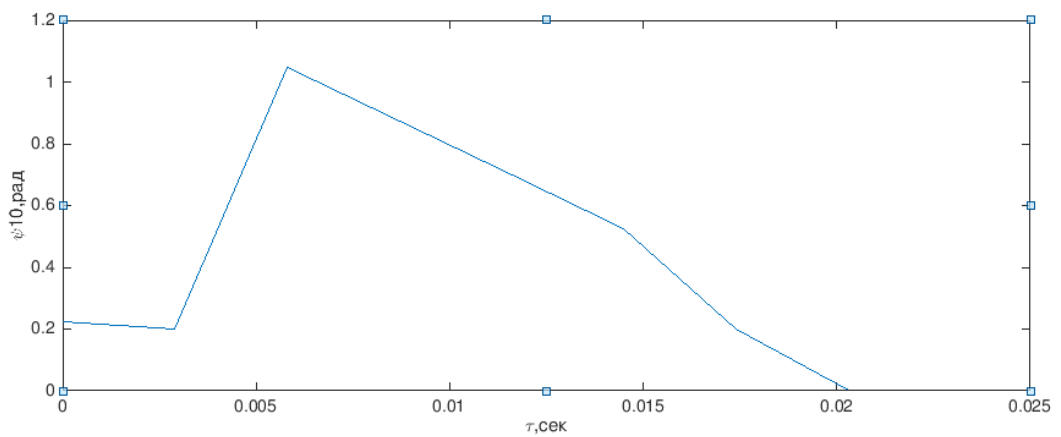


Рис.12.10. Зависимость относительных координат от времени.

После нахождения обобщенных сил Q_i , по формулам (2.3) вычислялись интересующие нас силы Q_i^{rel} . На указанных ниже графиках указаны найденные зависимости абсолютных и относительных сил от времени:

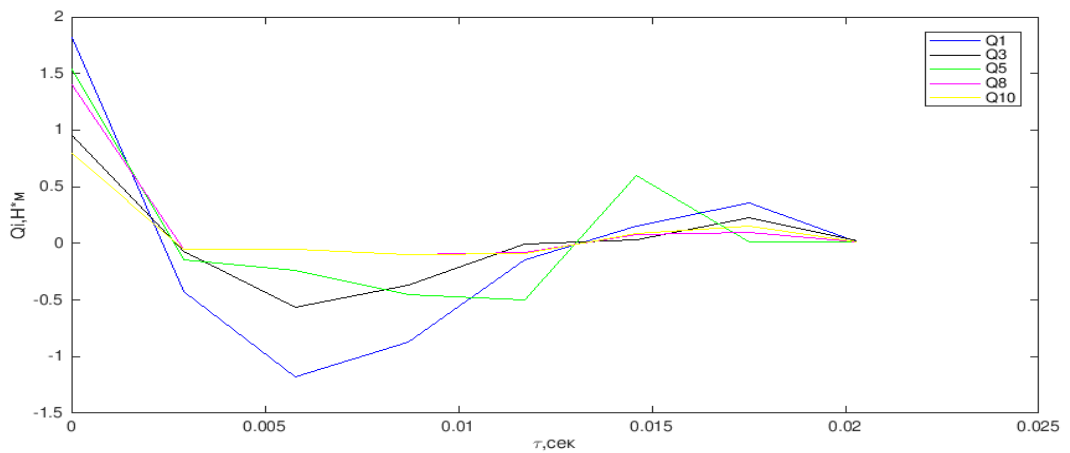


Рис.13. График зависимостей обобщенных абсолютных сил от времени.

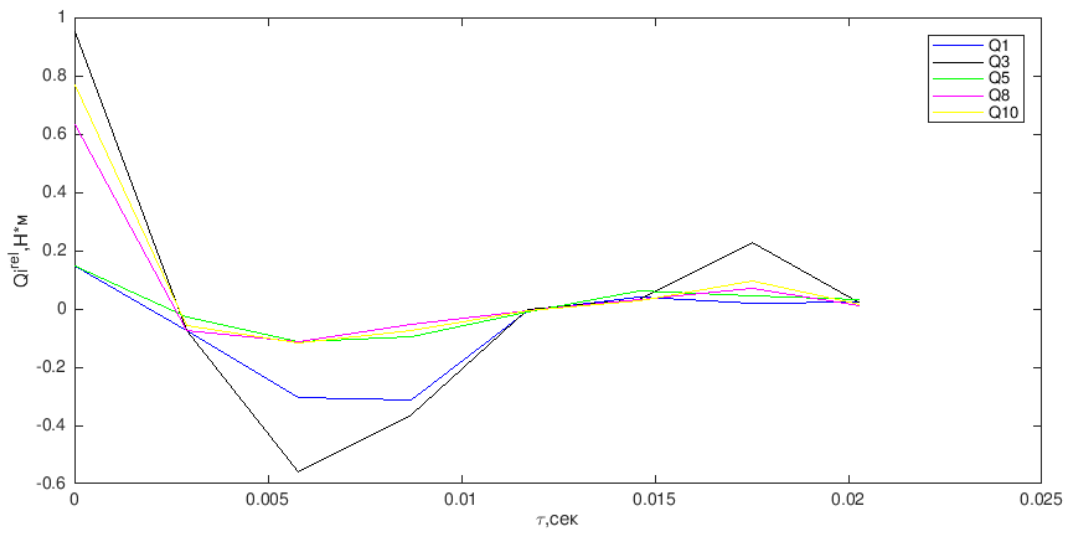


Рис.14. График зависимостей обобщенных относительных сил от времени.

3. Метод Рунге – Кутты и его программная реализация

Для проверки прямой задачи динамики выбран метод Рунге – Кутты 4го порядка точности. Алгоритм выбранного метода описывается в [18]. Воспользовавшись литературой, изложим основную суть метода. Идея построения явных методов Рунге – Кутты p -го порядка заключается в получении приближений к значениям $f(x_{i+1})$ по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + h\alpha(x_i, y_i, h) \quad (3.1)$$

где $\alpha(x, y, h)$ – некоторая функция, которая приближает отрезок ряда Тейлора ([18] с. 294) до p -го порядка и не содержит частных производных функции $f(x, y)$.

Так как выбран метод 4-го порядка точности, то функцию $\alpha(x, y, h)$ принято выбирать многопараметрической и подбирают ее параметры сравнением выражения (3.1) с многочленом Тейлора для $y(x)$ соответствующей четвертому порядку степени.

Данный метод описывается системой, состоящей из следующих соотношений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1^i = f(x_i, y_i) \\ \eta_2^i = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\eta_1^i) \\ \eta_3^i = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\eta_2^i) \\ \eta_4^i = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\eta_3^i) \\ \Delta y_i = \frac{h}{6}(\eta_1^i + 2\eta_2^i + 2\eta_3^i + \eta_4^i) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \end{array} \right. \quad (3.2)$$

где Δy_i – шаговая поправка, h – величина шага сетки интегрирования, также необходимо задать y_0 – начальное значение функции (в данном случае $y_0 = 0$) и интервал интегрирования $[t_0, T]$. Непосредственно в данной задаче за значения y принимались значения $Q(t)$, а за x – $\varphi(t)$.

Удобства выбранного метода заключаются в следующем:

- метод является одношаговым;
- имеет возможность регулировать погрешность;
- значение функции рассчитывается на каждом шаге.

Реализация численного метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности производилась с использованием пакета программ Matlab. Интерфейс данного пакета является наиболее эффективным и скоростным в среде вычислительного программирования.

При решении второй задачи динамики получены зависимости углов от времени, указанные на рисунках (12.1-12.10). Так как вторая задача динамики является проверкой для первой задачи, то на данных графиках сопоставлены значения углов, полученных в ходе эксперимента, и углов, полученных с помощью расчетов. Следует отметить, что графики экспериментальных и расчетных результатов практически совпадают, что говорит о малой погрешности решения второй задачи динамики.

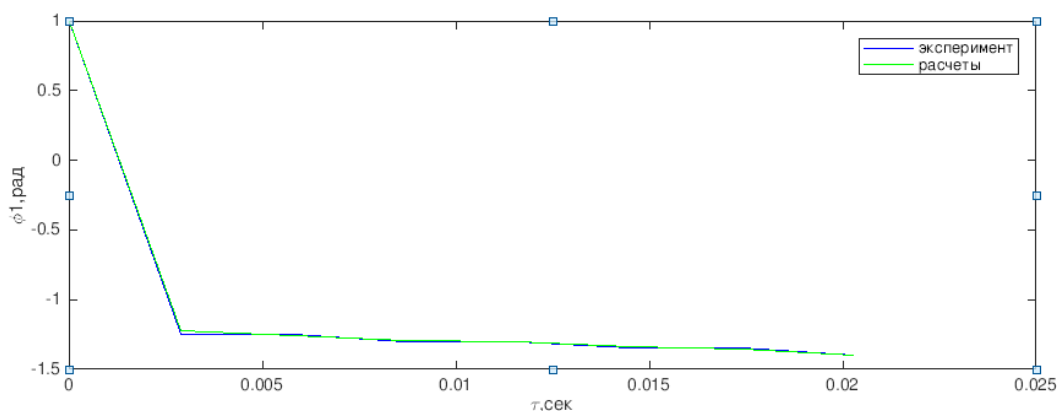


Рис.13.1. Сопоставление графиков зависимости абсолютных координат от времени.

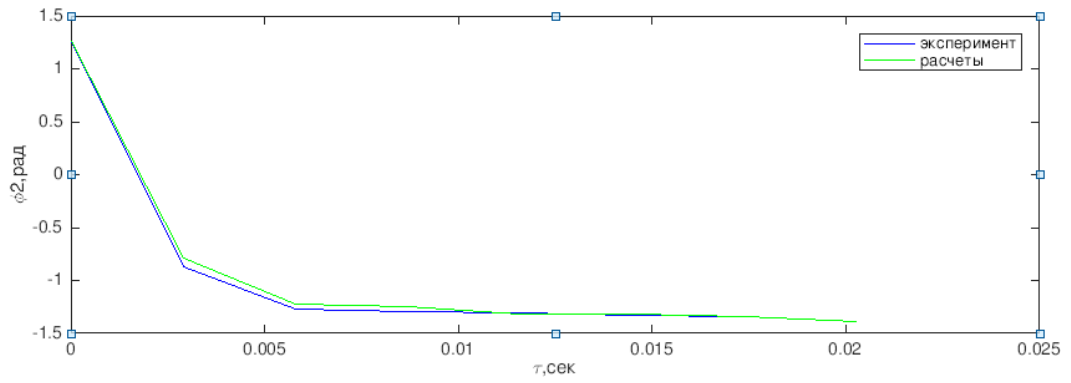


Рис.13.2. Сопоставление графиков зависимости абсолютных координат от времени.

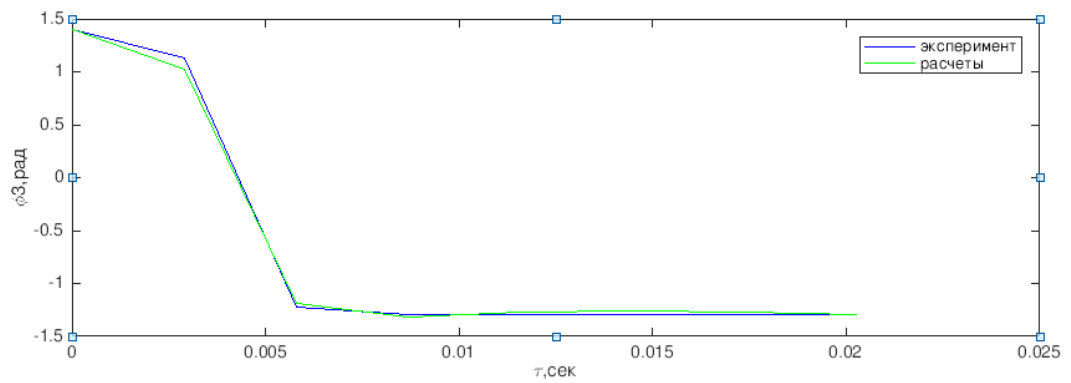


Рис.13.3. Сопоставление графиков зависимости абсолютных координат от времени.

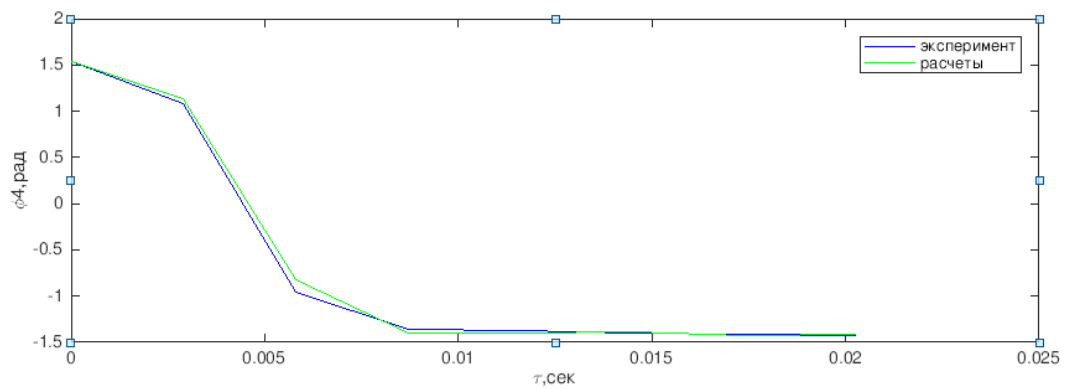


Рис.13.4. Сопоставление графиков зависимости абсолютных координат от времени.

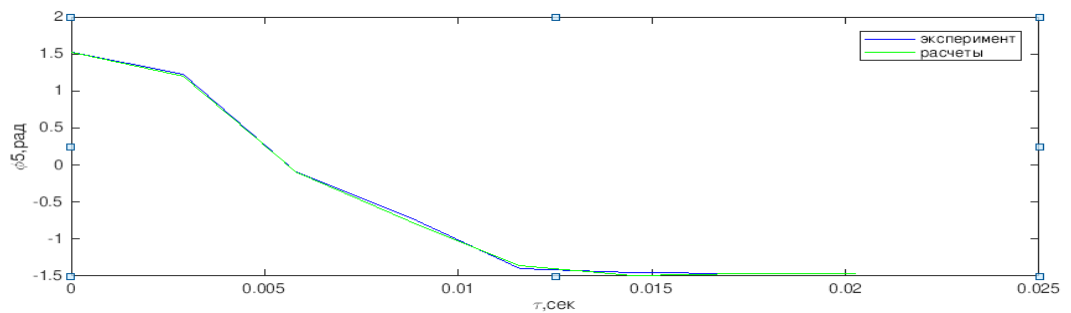


Рис.13.5. Сопоставление графиков зависимости абсолютных координат от времени.

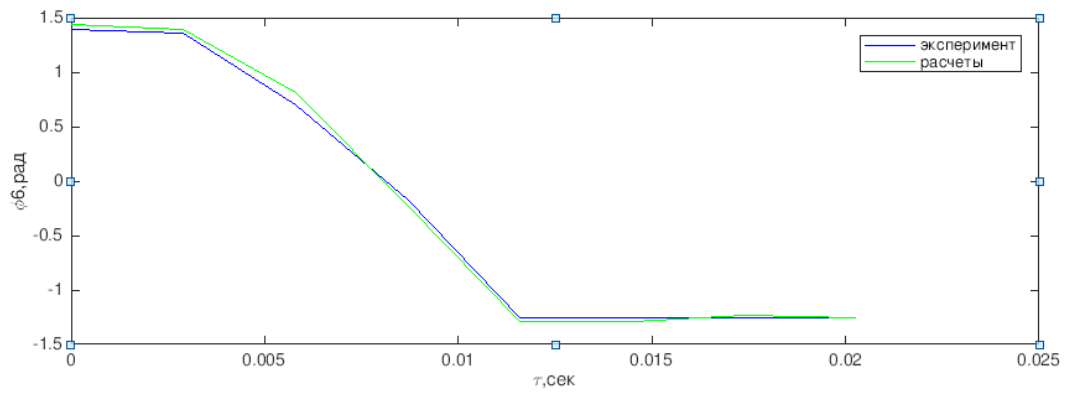


Рис.13.6. Сопоставление графиков зависимости абсолютных координат от времени.

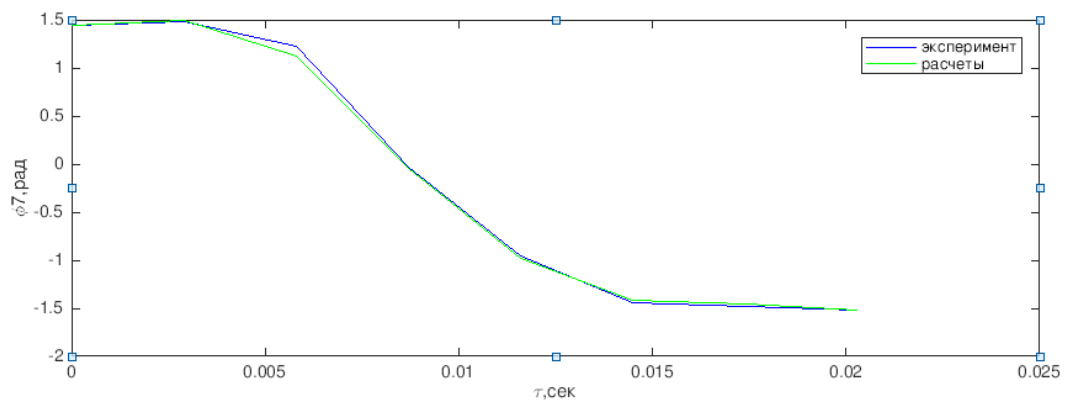


Рис.13.7. Сопоставление графиков зависимости абсолютных координат от времени.

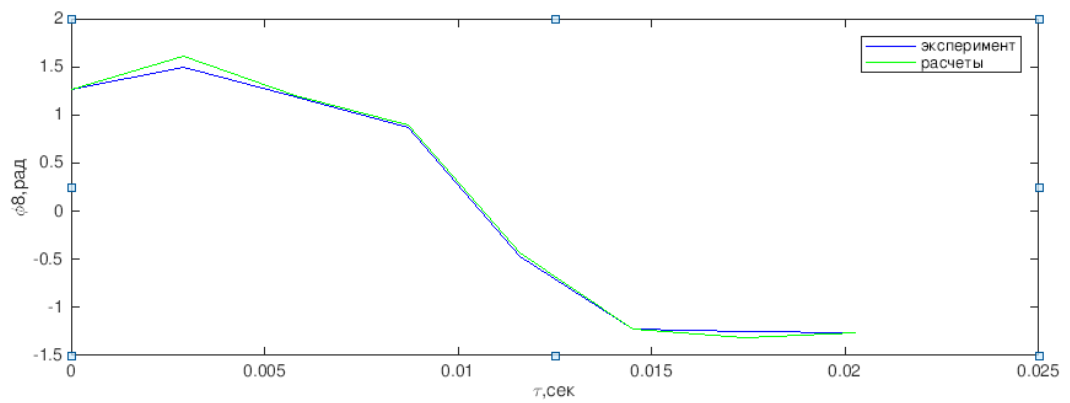


Рис.13.8. Сопоставление графиков зависимости абсолютных координат от времени.

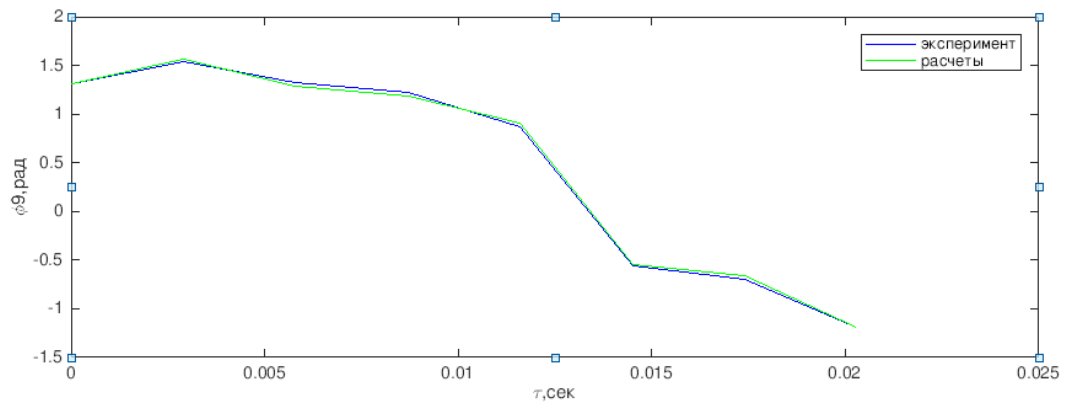


Рис.13.9. Сопоставление графиков зависимости абсолютных координат от времени.

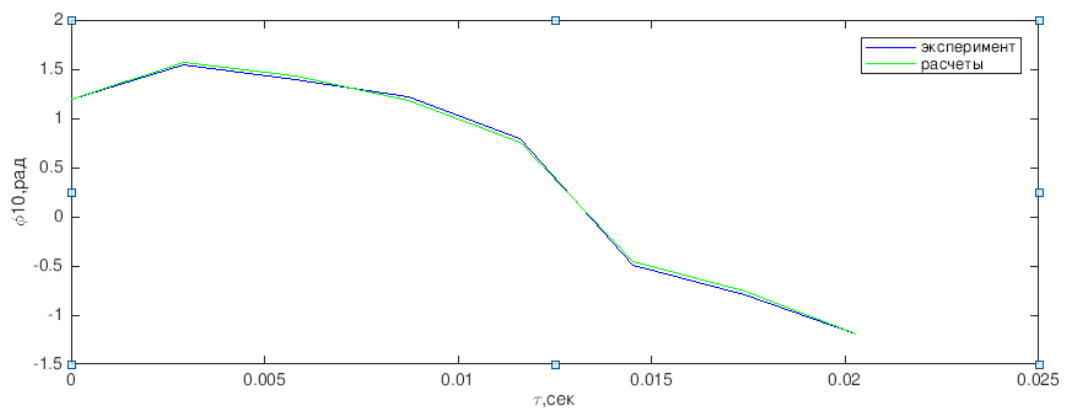


Рис.13.10. Сопоставление графиков зависимости абсолютных координат от времени.

3.2 Формулировка гипотезы.

Для формулировки гипотезы о механизме движения двигательной органеллы был получен график зависимости относительных обобщенных сил от относительных координат (рис. 14)

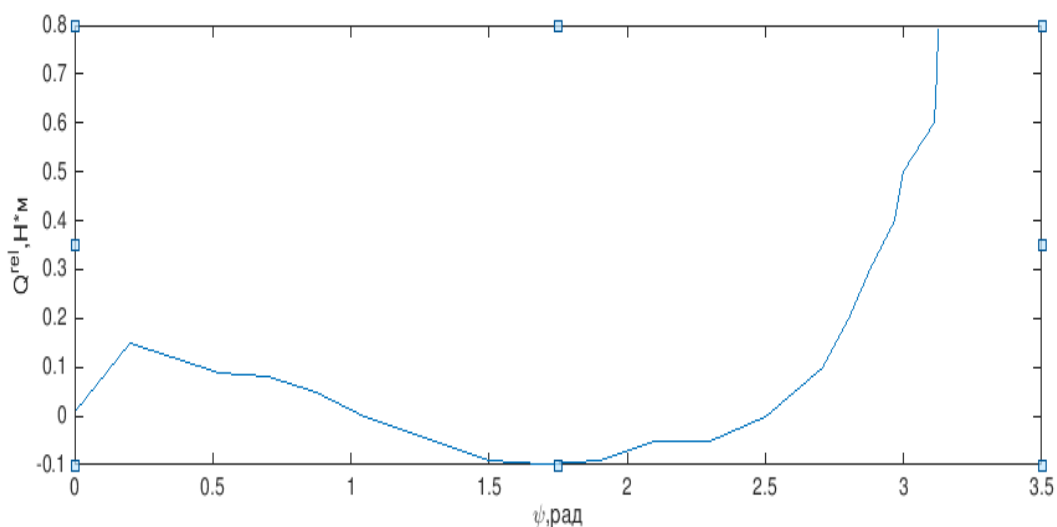


Рис.14. Зависимость относительных обобщенных сил от относительных координат.

Гипотеза основана на том, что внутриклеточные микротрубочки подвержены процессам полимеризации и деполимеризации, которые сменяют друг друга, образуя циклический процесс. Было сформулировано предположение о том, что работа динеиновых ручек обеспечивает лишь выполнение эффективного гребка, а восстановительный гребок выполняется за счет процесса полимеризации микротрубочек, восстанавливая исходное положение реснички.

Заключение

Таким образом, были получены следующие результаты:

1. На основе анализа биологической структуры ресничек и с учетом специфики их движений, построена механическая модель.
2. Получены уравнения движения модели двигательной органеллы.
3. Разработан метод решения полученных систем уравнений и его программная реализация с использованием пакета программ Matlab.
4. Вычислены моменты, развиваемые в шарнирах, в разные моменты времени.
5. Сформулировано предположение о механизме движений реснички.

Список литературы

1. Machin K.E. Wave propagation along flagella // *Journal of Experimental Biology*. Vol. 35, 1958, pp. 796–806.
2. Hoops H.J., Witman G.B. Basal bodies and associated structures are not required for normal flagellar motion or phototaxis in the Green Alga *Chlorogonium elongatum* // *Journal of Cell Biology*, vol. 100, 1985, pp. 297–309.
3. Costello D.P. A new theory on the mechanics of ciliary and flagellar motility // *Biological Bulletin*. Vol. 145, 1973, pp. 292–309.
4. Mitchell D.R. Orientation of the central pair complex during flagellar bend formation in *Chlamydomonas* // *Cell Motility and the Cytoskeleton*, vol. 156, 2003, pp. 120–129.
5. Curry A.M., Rosenbaum J.L. Flagellar radial spoke: a model molecular genetic system for studying organelle assembly // *Cell Motility and The Cytoskeleton*. Vol. 24, 1993. pp. 224–232.
6. Lindemann C.B. Testing the geometric clutch hypotheses // *Biology of the Cell*. Vol. 96, 2004, pp. 681–690.
7. Lindemann C.B. The geometric clutch as a working hypotheses for future research on cilia and flagella // *Annals of New York Academy of Science*. Vol. 1101, 2007, pp.477–493.
8. Lindemann C.B., Kanous K.S. "Geometric clutch" hypotheses of axonemal function: key issues and testable predictions // *Cell Motility and the Cytoskeleton*. Vol. 31, 1995, pp. 1–8.
9. Silflow C.D., Lefebvre P.A. Assembly and motility of eukaryotic cilia and flagella. Lessons from *Chlamydomonas reinhardtii* // *Plant Physiology*, vol. 127, 2001, pp. 1500–1507.
10. Tokin I.B., Tregoubov V.P. Mathematical modelling of generation and control of flagellar and ciliar motility // 11th European Cytoskeleton Forum. Book of Abstracts. 1996, p. 70.
11. Tokin I.B., Tregoubov V.P., Sokoloff A.B. Hypotheses and modelling of ciliary motility // *Acta of Bioengineering and Biomechanics*. Vol. 1, Supp. 1, 1999, pp. 515–518.
12. Tregoubov V.P., Tokin I.B. Model study of ciliar motility normally and in pathology // *World Congress on Medical Physics and Biomedical Engineering*, Nice, 1997, Part 1, p.292.

13. Tregoubov V.P. Mathematical modelling of cilium motility in normal and pathology cases // Abstracts of International Symposium "HYPOTHESIS III". SPb. 1999, pp.142– 143.
14. Кривовичев Г.В. Математическое моделирование двигательного аппарата живых клеток.2009,С.29
15. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И., «Курс теоретической механики. Том2. Динамика». – М.: «Наука»,1983.– 640с.
16. Дубровский В. И., Федорова В. Н., «Биомеханика». М.: «Владос», 2003. – 543 с.
17. Johnson K.A., Wall J.S. Structure and molecular weight of dynein ATPase // Journal of Cell Biology, vol. 96, 1983. pp. 669–678.
18. Вержбицкий В.М., «Основы численных методов».– М.: «Высш.шк.»), 2002.– 840 с.

Приложение

```
function yy_diff = my_system2(t,yy);
A_matrix = [2.0e-18, 1.8e-18*cos(1.5e5*t^3 - 6.5e3*t^2 + 75.0*t - 0.29), 1.6e-
18*cos(- 3.1e5*t^3 + 7.6e3*t^2 + 18.0*t - 0.9), 1.4e-18*cos(5.5e5*t^3 - 1.6e4*t^2
+ 36.0*t + 1.1), 1.2e-18*cos(1.1e6*t^3 - 3.7e4*t^2 + 266.0*t + 0.88), 9.6e-
19*cos(1.7e6*t^3 - 6.2e4*t^2 + 499.0*t + 0.82), 7.5e-19*cos(2.0e6*t^3 - 7.4e4*t^2
+ 633.0*t + 0.8), 5.3e-19*cos(2.1e6*t^3 - 8.4e4*t^2 + 800.0*t + 0.51), 3.2e-
19*cos(2.0e6*t^3 - 8.0e4*t^2 + 799.0*t + 0.53), 1.1e-19*cos(1.5e6*t^3 - 6.5e4*t^2
+ 722.0*t + 0.55);
1.8e-18, 1.8e-18, 1.6e-18*cos(4.6e5*t^3 - 1.4e4*t^2 + 57.0*t + 0.61), 1.4e-
18*cos(7.0e5*t^3 - 2.2e4*t^2 + 111.0*t + 0.81), 1.2e-18*cos(1.2e6*t^3 - 4.4e4*t^2
+ 333.0*t + 0.59), 9.6e-19*cos(1.8e6*t^3 - 6.8e4*t^2 + 577.0*t + 0.53), 7.5e-
19*cos(2.1e6*t^3 - 8.1e4*t^2 + 711.0*t + 0.51), 5.3e-19*cos(2.3e6*t^3 - 9.1e4*t^2
+ 877.0*t + 0.22), 3.2e-19*cos(2.1e6*t^3 - 8.6e4*t^2 + 877.0*t + 0.24), 1.1e-
19*cos(1.6e6*t^3 - 7.2e4*t^2 + 799.0*t + 0.26);
1.6e-18, 1.6e-18, 1.6e-18, 1.4e-18*cos(2.4e5*t^3 - 8.3e3*t^2 + 54.0*t + 0.2),
1.2e-18*cos(7.7e5*t^3 - 3.0e4*t^2 + 288.0*t - 0.015), 9.6e-19*cos(1.4e6*t^3 -
5.4e4*t^2 + 511.0*t - 0.076), 7.5e-19*cos(1.7e6*t^3 - 6.7e4*t^2 + 655.0*t -
0.096), 5.3e-19*cos(1.8e6*t^3 - 7.6e4*t^2 + 822.0*t - 0.39), 3.2e-
19*cos(1.6e6*t^3 - 7.2e4*t^2 + 811.0*t - 0.37), 1.1e-19*cos(1.2e6*t^3 - 5.8e4*t^2
+ 744.0*t - 0.35);
1.4e-18, 1.4e-18, 1.4e-18, 1.3e-18, 1.2e-18*cos(5.3e5*t^3 - 2.2e4*t^2 + 222.0*t
- 0.21), 9.6e-19*cos(1.1e6*t^3 - 4.6e4*t^2 + 466.0*t - 0.27), 7.5e-
19*cos(1.4e6*t^3 - 5.8e4*t^2 + 600.0*t - 0.29), 5.3e-19*cos(1.6e6*t^3 - 6.8e4*t^2
+ 766.0*t - 0.59), 3.2e-19*cos(1.4e6*t^3 - 6.4e4*t^2 + 766.0*t - 0.57), 1.1e-
19*cos(9.2e5*t^3 - 5.0e4*t^2 + 688.0*t - 0.55);
1.2e-18, 1.2e-18, 1.2e-18, 1.2e-18, 1.1e-18, 9.6e-19*cos(6.2e5*t^3 - 2.4e4*t^2 +
233.0*t - 0.061), 7.5e-19*cos(8.9e5*t^3 - 3.7e4*t^2 + 388.0*t - 0.081), 5.3e-
19*cos(1.0e6*t^3 - 4.7e4*t^2 + 544.0*t - 0.38), 3.2e-19*cos(8.7e5*t^3 - 4.2e4*t^2
+ 533.0*t - 0.36), 1.1e-19*cos(3.9e5*t^3 - 2.8e4*t^2 + 466.0*t - 0.33);
9.6e-19, 9.6e-19, 9.6e-19, 9.6e-19, 9.6e-19, 9.2e-19, 7.5e-19*cos(2.8e5*t^3 -
1.3e4*t^2 + 144.0*t - 0.02), 5.3e-19*cos(4.3e5*t^3 - 2.2e4*t^2 + 311.0*t - 0.32),
3.2e-19*cos(2.5e5*t^3 - 1.8e4*t^2 + 300.0*t - 0.3), 1.1e-19*cos(2.3e5*t^3 +
3.7e3*t^2 - 233.0*t + 0.27);
7.5e-19, 7.5e-19, 7.5e-19, 7.5e-19, 7.5e-19, 7.5e-19, 7.1e-19, 5.3e-
19*cos(1.5e5*t^3 - 9.8e3*t^2 + 166.0*t - 0.3), 3.2e-19*cos(2.5e4*t^3 + 5.5e3*t^2
- 166.0*t + 0.28), 1.1e-19*cos(- 5.0e5*t^3 + 8.8e3*t^2 + 86.0*t - 0.25);
5.3e-19, 5.3e-19, 5.3e-19, 5.3e-19, 5.3e-19, 5.3e-19, 5.3e-19, 5.0e-19, 3.2e-
19*cos(1.7e5*t^3 - 4.3e3*t^2 + 6.2*t - 0.021), 1.1e-19*cos(6.5e5*t^3 - 1.9e4*t^2
+ 79.0*t - 0.044);
3.2e-19, 3.2e-19, 3.2e-19, 3.2e-19, 3.2e-19, 3.2e-19, 3.2e-19, 3.2e-19, 2.8e-19,
1.1e-19*cos(4.8e5*t^3 - 1.4e4*t^2 + 72.0*t - 0.023);
1.1e-19, 1.1e-19, 1.1e-19, 1.1e-19, 1.1e-19, 1.1e-19, 1.1e-19, 1.1e-19, 1.1e-19,
7.0e-20];
B_matrix = [0, 1.8e-18*sin(1.5e5*t^3 - 6.5e3*t^2 + 75.0*t - 0.29), 1.6e-18*sin(-
3.1e5*t^3 + 7.6e3*t^2 + 18.0*t - 0.9), -1.4e-18*sin(5.5e5*t^3 - 1.6e4*t^2 +
36.0*t + 1.1), -1.2e-18*sin(1.1e6*t^3 - 3.7e4*t^2 + 266.0*t + 0.88), -9.6e-
19*sin(1.7e6*t^3 - 6.2e4*t^2 + 499.0*t + 0.82), -7.5e-19*sin(2.0e6*t^3 -
7.4e4*t^2 + 633.0*t + 0.8), -5.3e-19*sin(2.1e6*t^3 - 8.4e4*t^2 + 800.0*t + 0.51),
-3.2e-19*sin(2.0e6*t^3 - 8.0e4*t^2 + 799.0*t + 0.53), -1.1e-19*sin(1.5e6*t^3 -
6.5e4*t^2 + 722.0*t + 0.55);
1.8e-18, 0, -1.6e-18*sin(4.6e5*t^3 - 1.4e4*t^2 + 57.0*t + 0.61), -1.4e-
18*sin(7.0e5*t^3 - 2.2e4*t^2 + 111.0*t + 0.81), -1.2e-18*sin(1.2e6*t^3 -
4.4e4*t^2 + 333.0*t + 0.59), -9.6e-19*sin(1.8e6*t^3 - 6.8e4*t^2 + 577.0*t +
4.4e4*t^2 + 333.0*t + 0.59), -9.6e-19*sin(1.8e6*t^3 - 6.8e4*t^2 + 577.0*t +
```


$0.53), -7.5e-19*\sin(2.1e6*t^3 - 8.1e4*t^2 + 711.0*t + 0.51), -5.3e-19*\sin(2.3e6*t^3 - 9.1e4*t^2 + 877.0*t + 0.22), -3.2e-19*\sin(2.1e6*t^3 - 8.6e4*t^2 + 877.0*t + 0.24), -1.1e-19*\sin(1.6e6*t^3 - 7.2e4*t^2 + 799.0*t + 0.26);$
 $1.6e-18, 1.6e-18, 0, -1.4e-18*\sin(2.4e5*t^3 - 8.3e3*t^2 + 54.0*t + 0.2), -1.2e-18*\sin(7.7e5*t^3 - 3.0e4*t^2 + 288.0*t - 0.015), -9.6e-19*\sin(1.4e6*t^3 - 5.4e4*t^2 + 511.0*t - 0.076), -7.5e-19*\sin(1.7e6*t^3 - 6.7e4*t^2 + 655.0*t - 0.096), -5.3e-19*\sin(1.8e6*t^3 - 7.6e4*t^2 + 822.0*t - 0.39), -3.2e-19*\sin(1.6e6*t^3 - 7.2e4*t^2 + 811.0*t - 0.37), -1.1e-19*\sin(1.2e6*t^3 - 5.8e4*t^2 + 744.0*t - 0.35);$
 $1.4e-18, 1.4e-18, 1.4e-18, 0, -1.2e-18*\sin(5.3e5*t^3 - 2.2e4*t^2 + 222.0*t - 0.21), -9.6e-19*\sin(1.1e6*t^3 - 4.6e4*t^2 + 466.0*t - 0.27), -7.5e-19*\sin(1.4e6*t^3 - 5.8e4*t^2 + 600.0*t - 0.29), -5.3e-19*\sin(1.6e6*t^3 - 6.8e4*t^2 + 766.0*t - 0.59), -3.2e-19*\sin(1.4e6*t^3 - 6.4e4*t^2 + 766.0*t - 0.57), -1.1e-19*\sin(9.2e5*t^3 - 5.0e4*t^2 + 688.0*t - 0.55);$
 $1.2e-18, 1.2e-18, 1.2e-18, 1.2e-18, 0, -9.6e-19*\sin(6.2e5*t^3 - 2.4e4*t^2 + 233.0*t - 0.061), -7.5e-19*\sin(8.9e5*t^3 - 3.7e4*t^2 + 388.0*t - 0.081), -5.3e-19*\sin(1.0e6*t^3 - 4.7e4*t^2 + 544.0*t - 0.38), -3.2e-19*\sin(8.7e5*t^3 - 4.2e4*t^2 + 533.0*t - 0.36), -1.1e-19*\sin(3.9e5*t^3 - 2.8e4*t^2 + 466.0*t - 0.33);$
 $9.6e-19, 9.6e-19, 9.6e-19, 9.6e-19, 9.6e-19, 0, -7.5e-19*\sin(2.8e5*t^3 - 1.3e4*t^2 + 144.0*t - 0.02), -5.3e-19*\sin(4.3e5*t^3 - 2.2e4*t^2 + 311.0*t - 0.32), -3.2e-19*\sin(2.5e5*t^3 - 1.8e4*t^2 + 300.0*t - 0.3), 1.1e-19*\sin(2.3e5*t^3 + 3.7e3*t^2 - 233.0*t + 0.27);$
 $7.5e-19, 7.5e-19, 7.5e-19, 7.5e-19, 7.5e-19, 7.5e-19, 0, -5.3e-19*\sin(1.5e5*t^3 - 9.8e3*t^2 + 166.0*t - 0.3), 3.2e-19*\sin(2.5e4*t^3 + 5.5e3*t^2 - 166.0*t + 0.28), -1.1e-19*\sin(-5.0e5*t^3 + 8.8e3*t^2 + 86.0*t - 0.25);$
 $5.3e-19, 5.3e-19, 5.3e-19, 5.3e-19, 5.3e-19, 5.3e-19, 5.3e-19, 0, 3.2e-19*\sin(1.7e5*t^3 - 4.3e3*t^2 + 6.2*t - 0.021), 1.1e-19*\sin(6.5e5*t^3 - 1.9e4*t^2 + 79.0*t - 0.044);$
 $3.2e-19, 3.2e-19, 3.2e-19, 3.2e-19, 3.2e-19, 3.2e-19, 3.2e-19, 3.2e-19, 0, 1.1e-19*\sin(4.8e5*t^3 - 1.4e4*t^2 + 72.0*t - 0.023);$
 $1.1e-19, 1.1e-19, 1.1e-19, 1.1e-19, 1.1e-19, 1.1e-19, 1.1e-19, 1.1e-19, 1.1e-19, 0;];$
 $Q_vector = [1.8e-18*\sin(1.5e5*t^3 - 6.5e3*t^2 + 75.0*t - 0.29)*(3.2e6*t^2 - 9.4e4*t + 611.0)^2 - 5.3e-19*\sin(2.1e6*t^3 - 8.4e4*t^2 + 800.0*t + 0.51)*(3.6e6*t^2 - 8.7e4*t + 266.0)^2 - 1.5e-11*t - 1.2e-18*\sin(1.1e6*t^3 - 3.7e4*t^2 + 266.0*t + 0.88)*(4.8e5*t^2 + 5.9e3*t - 288.0)^2 - 1.4e-18*\sin(5.5e5*t^3 - 1.6e4*t^2 + 36.0*t + 1.1)*(1.1e6*t^2 - 4.9e4*t + 500.0)^2 - 7.5e-19*\sin(2.0e6*t^3 - 7.4e4*t^2 + 633.0*t + 0.8)*(3.2e6*t^2 - 6.8e4*t + 95.0)^2 - 3.2e-19*\sin(2.0e6*t^3 - 8.0e4*t^2 + 799.0*t + 0.53)*(3.1e6*t^2 - 7.9e4*t + 255.0)^2 - 1.1e-19*\sin(1.5e6*t^3 - 6.5e4*t^2 + 722.0*t + 0.55)*(1.6e6*t^2 - 5.0e4*t + 188.0)^2 + 1.6e-18*\sin(-3.1e5*t^3 + 7.6e3*t^2 + 18.0*t - 0.9)*(1.8e6*t^2 - 6.5e4*t + 566.0)^2 - 9.6e-19*\sin(1.7e6*t^3 - 6.2e4*t^2 + 499.0*t + 0.82)*(-2.3e6*t^2 + 4.3e4*t + 47.0)^2 + 3.4e-13;$
 $1.8e-18*(2.8e6*t^2 - 8.1e4*t + 544.0)^2 - 1.6e-18*\sin(4.6e5*t^3 - 1.4e4*t^2 + 57.0*t + 0.61)*(1.8e6*t^2 - 6.5e4*t + 566.0)^2 - 7.5e-19*\sin(2.1e6*t^3 - 8.1e4*t^2 + 711.0*t + 0.51)*(3.2e6*t^2 - 6.8e4*t + 95.0)^2 - 9.6e-19*\sin(1.8e6*t^3 - 6.8e4*t^2 + 577.0*t + 0.53)*(-2.3e6*t^2 + 4.3e4*t + 47.0)^2 - 1.2e-18*\sin(1.2e6*t^3 - 4.4e4*t^2 + 333.0*t + 0.59)*(4.8e5*t^2 + 5.9e3*t - 288.0)^2 - 1.1e-19*\sin(1.6e6*t^3 - 7.2e4*t^2 + 799.0*t + 0.26)*(1.6e6*t^2 - 5.0e4*t + 188.0)^2 - 1.4e-11*t - 5.3e-19*\sin(2.3e6*t^3 - 9.1e4*t^2 + 877.0*t + 0.22)*(3.6e6*t^2 - 8.7e4*t + 266.0)^2 - 3.2e-19*\sin(2.1e6*t^3 - 8.6e4*t^2 + 877.0*t + 0.24)*(3.1e6*t^2 - 7.9e4*t + 255.0)^2 - 1.4e-18*\sin(7.0e5*t^3 - 2.2e4*t^2 + 111.0*t + 0.81)*(1.1e6*t^2 - 4.9e4*t + 500.0)^2 + 3.2e-13;$

$1.6e-18*(2.8e6*t^2 - 8.1e4*t + 544.0)^2 - 7.5e-19*\sin(1.7e6*t^3 - 6.7e4*t^2 + 655.0*t - 0.096)*(3.2e6*t^2 - 6.8e4*t + 95.0)^2 - 1.2e-11*t - 9.6e-19*\sin(1.4e6*t^3 - 5.4e4*t^2 + 511.0*t - 0.076)*(-2.3e6*t^2 + 4.3e4*t + 47.0)^2 - 5.3e-19*\sin(1.8e6*t^3 - 7.6e4*t^2 + 822.0*t - 0.39)*(3.6e6*t^2 - 8.7e4*t + 266.0)^2 - 1.1e-19*\sin(1.2e6*t^3 - 5.8e4*t^2 + 744.0*t - 0.35)*(1.6e6*t^2 - 5.0e4*t + 188.0)^2 - 3.2e-19*\sin(1.6e6*t^3 - 7.2e4*t^2 + 811.0*t - 0.37)*(3.1e6*t^2 - 7.9e4*t + 255.0)^2 + 1.6e-18*(3.2e6*t^2 - 9.4e4*t + 611.0)^2 - 1.4e-18*\sin(2.4e5*t^3 - 8.3e3*t^2 + 54.0*t + 0.2)*(1.1e6*t^2 - 4.9e4*t + 500.0)^2 - 1.2e-18*\sin(7.7e5*t^3 - 3.0e4*t^2 + 288.0*t - 0.015)*(4.8e5*t^2 + 5.9e3*t - 288.0)^2 + 2.9e-13;$

$1.4e-18*(2.8e6*t^2 - 8.1e4*t + 544.0)^2 - 9.6e-19*\sin(1.1e6*t^3 - 4.6e4*t^2 + 466.0*t - 0.27)*(-2.3e6*t^2 + 4.3e4*t + 47.0)^2 - 5.3e-19*\sin(1.6e6*t^3 - 6.8e4*t^2 + 766.0*t - 0.59)*(3.6e6*t^2 - 8.7e4*t + 266.0)^2 - 7.5e-19*\sin(1.4e6*t^3 - 5.8e4*t^2 + 600.0*t - 0.29)*(3.2e6*t^2 - 6.8e4*t + 95.0)^2 - 8.3e-12*t - 1.2e-18*\sin(5.3e5*t^3 - 2.2e4*t^2 + 222.0*t - 0.21)*(4.8e5*t^2 + 5.9e3*t - 288.0)^2 - 1.1e-19*\sin(9.2e5*t^3 - 5.0e4*t^2 + 688.0*t - 0.55)*(1.6e6*t^2 - 5.0e4*t + 188.0)^2 + 1.4e-18*(3.2e6*t^2 - 9.4e4*t + 611.0)^2 - 3.2e-19*\sin(1.4e6*t^3 - 6.4e4*t^2 + 766.0*t - 0.57)*(3.1e6*t^2 - 7.9e4*t + 255.0)^2 + 1.4e-18*(1.8e6*t^2 - 6.5e4*t + 566.0)^2 + 2.4e-13;$

$1.2e-18*(2.8e6*t^2 - 8.1e4*t + 544.0)^2 - 7.5e-19*\sin(8.9e5*t^3 - 3.7e4*t^2 + 388.0*t - 0.081)*(3.2e6*t^2 - 6.8e4*t + 95.0)^2 - 4.6e-12*t - 5.3e-19*\sin(1.0e6*t^3 - 4.7e4*t^2 + 544.0*t - 0.38)*(3.6e6*t^2 - 8.7e4*t + 266.0)^2 - 3.2e-19*\sin(8.7e5*t^3 - 4.2e4*t^2 + 533.0*t - 0.36)*(3.1e6*t^2 - 7.9e4*t + 255.0)^2 - 9.6e-19*\sin(6.2e5*t^3 - 2.4e4*t^2 + 233.0*t - 0.061)*(-2.3e6*t^2 + 4.3e4*t + 47.0)^2 + 1.2e-18*(3.2e6*t^2 - 9.4e4*t + 611.0)^2 - 1.1e-19*\sin(3.9e5*t^3 - 2.8e4*t^2 + 466.0*t - 0.33)*(1.6e6*t^2 - 5.0e4*t + 188.0)^2 + 1.2e-18*(1.1e6*t^2 - 4.9e4*t + 500.0)^2 + 1.2e-18*(1.8e6*t^2 - 6.5e4*t + 566.0)^2 + 1.8e-13;$

$9.6e-19*(2.8e6*t^2 - 8.1e4*t + 544.0)^2 - 7.5e-19*\sin(2.8e5*t^3 - 1.3e4*t^2 + 144.0*t - 0.02)*(3.2e6*t^2 - 6.8e4*t + 95.0)^2 - 5.3e-19*\sin(4.3e5*t^3 - 2.2e4*t^2 + 311.0*t - 0.32)*(3.6e6*t^2 - 8.7e4*t + 266.0)^2 - 1.1e-12*t - 3.2e-19*\sin(2.5e5*t^3 - 1.8e4*t^2 + 300.0*t - 0.3)*(3.1e6*t^2 - 7.9e4*t + 255.0)^2 + 9.6e-19*(3.2e6*t^2 - 9.4e4*t + 611.0)^2 + 9.6e-19*(4.8e5*t^2 + 5.9e3*t - 288.0)^2 + 9.6e-19*(1.1e6*t^2 - 4.9e4*t + 500.0)^2 + 1.1e-19*\sin(2.3e5*t^3 + 3.7e3*t^2 - 233.0*t + 0.27)*(1.6e6*t^2 - 5.0e4*t + 188.0)^2 + 9.6e-19*(1.8e6*t^2 - 6.5e4*t + 566.0)^2 + 1.2e-13;$

$1.4e-12*t - 5.3e-19*\sin(1.5e5*t^3 - 9.8e3*t^2 + 166.0*t - 0.3)*(3.6e6*t^2 - 8.7e4*t + 266.0)^2 + 3.2e-19*\sin(2.5e4*t^3 + 5.5e3*t^2 - 166.0*t + 0.28)*(3.1e6*t^2 - 7.9e4*t + 255.0)^2 - 1.1e-19*\sin(-5.0e5*t^3 + 8.8e3*t^2 + 86.0*t - 0.25)*(1.6e6*t^2 - 5.0e4*t + 188.0)^2 + 7.5e-19*(2.8e6*t^2 - 8.1e4*t + 544.0)^2 + 7.5e-19*(-2.3e6*t^2 + 4.3e4*t + 47.0)^2 + 7.5e-19*(3.2e6*t^2 - 9.4e4*t + 611.0)^2 + 7.5e-19*(4.8e5*t^2 + 5.9e3*t - 288.0)^2 + 7.5e-19*(1.1e6*t^2 - 4.9e4*t + 500.0)^2 + 7.5e-19*(1.8e6*t^2 - 6.5e4*t + 566.0)^2 + 6.3e-14;$

$2.7e-12*t + 1.1e-19*\sin(6.5e5*t^3 - 1.9e4*t^2 + 79.0*t - 0.044)*(1.6e6*t^2 - 5.0e4*t + 188.0)^2 + 3.2e-19*\sin(1.7e5*t^3 - 4.3e3*t^2 + 6.2*t - 0.021)*(3.1e6*t^2 - 7.9e4*t + 255.0)^2 + 5.3e-19*(2.8e6*t^2 - 8.1e4*t + 544.0)^2 + 5.3e-19*(-2.3e6*t^2 + 4.3e4*t + 47.0)^2 + 5.3e-19*(3.2e6*t^2 - 6.8e4*t + 95.0)^2 + 5.3e-19*(3.2e6*t^2 - 9.4e4*t + 611.0)^2 + 5.3e-19*(4.8e5*t^2 + 5.9e3*t - 288.0)^2 + 5.3e-19*(1.1e6*t^2 - 4.9e4*t + 500.0)^2 + 5.3e-19*(1.8e6*t^2 - 6.5e4*t + 566.0)^2 + 2.4e-14;$

$2.5e-12*t + 3.2e-19*(2.8e6*t^2 - 8.1e4*t + 544.0)^2 + 3.2e-19*(-2.3e6*t^2 + 4.3e4*t + 47.0)^2 + 3.2e-19*(3.2e6*t^2 - 6.8e4*t + 95.0)^2 + 3.2e-19*(3.6e6*t^2 - 8.7e4*t + 266.0)^2 + 3.2e-19*(3.2e6*t^2 - 9.4e4*t + 611.0)^2 + 3.2e-19*(4.8e5*t^2 + 5.9e3*t - 288.0)^2 + 1.1e-19*\sin(4.8e5*t^3 - 1.4e4*t^2 + 72.0*t -$

```

0.023)*(1.6e6*t^2 - 5.0e4*t + 188.0)^2 + 3.2e-19*(1.1e6*t^2 - 4.9e4*t + 500.0)^2
+ 3.2e-19*(1.8e6*t^2 - 6.5e4*t + 566.0)^2 + 3.3e-15;
1.0e-12*t + 1.1e-19*(2.8e6*t^2 - 8.1e4*t + 544.0)^2 + 1.1e-19*(- 2.3e6*t^2 +
4.3e4*t + 47.0)^2 + 1.1e-19*(3.2e6*t^2 - 6.8e4*t + 95.0)^2 + 1.1e-19*(3.6e6*t^2 -
8.7e4*t + 266.0)^2 + 1.1e-19*(3.2e6*t^2 - 9.4e4*t + 611.0)^2 + 1.1e-19*(4.8e5*t^2
+ 5.9e3*t - 288.0)^2 + 1.1e-19*(1.1e6*t^2 - 4.9e4*t + 500.0)^2 + 1.1e-
19*(3.1e6*t^2 - 7.9e4*t + 255.0)^2 + 1.1e-19*(1.8e6*t^2 - 6.5e4*t + 566.0)^2 -
1.6e-15;];
% systema vida
% y1' = y2
% y2' = A^{-1}*(Q-By2)
% y1 = z = [f1(t);f2(t).. f10(t)] - pervye 10
% t.e. y1 = yy(1:10,:);
% y2= z' = [f1' (t);f2' (t).. f10' (t)] - poslednie 10
% t.e. y2 = yy(11:20,:);
yy_diff = [ yy(11:20,:);
            inv(A_matrix)*(Q_vector - B_matrix * yy(11:20,:))
end
Time_scale =[0, 0.0029, 0.0058, 0.0087, 0.0117, 0.0146, 0.0175, 0.0203]; %
otrezok integrirovania
Initials_values = [0.87;-1.05;-1.31;-1.33;-1.31;-1.34;-1.33;-1.3;-1.31;-
1.33;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
[time,solution_y] = ode45(@my_system2,Time_scale,Initials_values);
for index = 1:length(time)
disp('_____')
disp(['Time = ' num2str(time(index))]); % reshenie v tochke t = 0.0029
disp('Functions Values at this Time')
disp(solution_y(index,1:10)');
end

```

