

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Кафедра информационных систем

Лебедев Илья Алексеевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Вычислительный эксперимент
в задачах динамики волн**

Направление 010400.62

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель

Доктор физ.-мат. наук

профессор

Перегудин С.И.

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Введение	3
Постановка задачи	7
Обзор литературы	8
1 Глава 1. Волновые движения неоднородной жидкости со скачкообразным изменением плотности.	10
1.1 Основные уравнения и граничные условия	10
1.2 Линейный вариант задачи	12
2 Глава 2. Вычислительный эксперимент с использова- нием реальных данных.	17
2.1 Случай бесконечно глубокого дна	18
2.2 Случай конечного дна	23
2.3 Анализ потенциалов	24
Заключение	29
Список литературы	31
Приложения	32

Введение

Океан в жизни и деятельности человечества играет большую роль. Поверхность рек, озер, водохранилищ, морей и океанов составляет значительную часть поверхности нашей планеты (71 %). Потребность в морепродуктах и полезных ископаемых, необходимость в морских путях обуславливает связь человека с морем. Освоение океана продолжается, в том числе, благодаря последовательному пополнению знания сущности происходящих в нем динамических процессов.

Мировой океан находится в постоянном движении. В ряде случаев это движение принимает волновой характер. Расслоенность океана по плотности вносит большое разнообразие в волновое движение. Наряду с быстрыми волнами на поверхности океана возникают более медленные, но и более высокие волны внутри водной толщи, поддерживаемые силами плавучести. Наиболее длиннопериодные из внутренних волн чувствуют вращение Земли и видоизменяются под действием силы Кориолиса, стремясь принять форму простых инерционных круговых движений в горизонтальной плоскости.

Основными источниками волн служат течения, приливы и атмосферные воздействия. Приливные течения, создаваемые приливообразующими силами, отклоняются по вертикали неров-

ностями дна и создают внутренние волны со свойственными им частотами. Внутренние приливы также значительно выделяются по интенсивности среди соседних по частоте колебаний. Волны из этих и других источников активно взаимодействуют между собой, а также с течениями, неровностями дна и образуют широкий, сплошной, спадающий по частоте спектр волн, сравнительно неизменный в пространстве и во времени.

В данной работе рассматриваются линейные задачи теории поверхностных и внутренних волн. Внутренними волнами в океане принято называть волны, амплитуда которых в толще воды больше, чем на ее поверхности. Внутренние волны создают временные течения, в том числе на поверхности воды. Волны внутри океана в существенной мере определяют изменчивость толщи вод в широком диапазоне пространственных и временных масштабов.

Внутренние волны играют важную роль при глубоководных погружениях. Неточности или ошибки в расчётах могут привести к катастрофическим последствиям. В качестве примера можно привести трагическое крушение атомной подводной лодки ВМС США «Трешер», которая 10 апреля 1963 года погибла в Атлантическом океане вместе со всем экипажем. Одной из причин гибели американской подводной лодки «Тре-

шер» считается возможное попадание на гребень внутренней волны, в результате чего произошел разлом корпуса.¹ Анализ местных гидрометеорологических условий дает все основания предполагать, что эти внутренние волны имели амплитуду до 100 м, длину волны 1 - 2 км и период около 8 минут. К сожалению, во время катастрофы никаких гидрологических наблюдений не велось, и поэтому приведенные соображения носят предположительный характер. Однако, основываясь на этих данных, можно предположить, что «Трешер» в какой-то момент попала на гребень подобной внутренней волны и затем за время полупериода, т.е. за 4 минуты, опустилась на 200 м. Непредусмотренное заранее столь быстрое погружение могло стать причиной смерти 129 человек экипажа.

Природа внутренних волн и колебательных движений вообще, их свойства, возникновение и взаимодействие в основных чертах исследованы, однако остается широкий круг задач, не получивших до сих пор ни теоретического, ни экспериментального решения. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой волн, следует исходить из достаточно полных математических моделей, которые, как правило, оказываются весьма сложными, нелинейны-

¹ А.П. Юрнев, Б.Д. Сахаров, А.В. Сытин Аварии под водой 1986г.

ми, многопараметрическими, и для успешного их исследования наиболее эффективны, по-видимому, численные методы, основанные на параллельных вычислениях и использовании многопроцессорных ЭВМ. Однако в ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге явлений можно получить и на основе более простых, линейных, моделей, поддающихся аналитическому исследованию. В этом отношении весьма характерны задачи динамики внутренних волн. Даже в рамках линейных моделей их математические постановки весьма своеобразны и приводят к неклассическим начальнo-краевым задачам. Указанное обстоятельство, наряду с нетривиальными физическими следствиями, определяет и самостоятельный математический интерес к этим проблемам.

Постановка задачи

В качестве основной цели работы поставлено рассмотрение методов теоретической гидродинамики, в частности, моделирования волновых движений двухслойной жидкости, а также проведение вычислений, основанных на реальных данных и анализ полученных результатов. Исследуются два слоя однородной, несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Движение жидкости в каждом слое предполагается безвихревым. Нижний слой жидкости ограничен твердым, недеформируемым непроницаемым, горизонтальным дном. Исследуемая физическая задача моделируется математически как краевая задача теории потенциалов. При построении аналитического решения линейного варианта задачи используется метод разделения переменных (метод Фурье) с учетом особенностей краевых условий и физических свойств исследуемой модели.

Обзор литературы

В основе теории волн лежат методы математического моделирования и результаты качественного анализа моделей, методы изучения асимптотических форм движения, учета силовых и энергетических балансов. Для описания волн используются различные их параметры, выделяющие те или иные свойства, такие как: дисперсионные соотношения, переносимые волнами импульсы, энергия, относительные высоты и длины, и другие. Ряд критериев подобия дает возможность проводить экспериментальное изучение волновых движений стратифицированной жидкости в природных или искусственных каналах и водоемах. Однако, ввиду различных затруднений, таких как большая трудоемкость и высокая стоимость физического моделирования, условность переноса лабораторных результатов на натуру, а иногда и непреодолимые сложности в постановке опыта, можно выделить методы теоретической гидродинамики как наиболее перспективные.

Первоначальные положения теории волн на воде были сформулированы классиками теоретической гидродинамики — О. Коши, Ж. Лагранжем, Л. Эйлером, Д. Бернулли, С. Пуассоном и другими исследователями. Так, Лагранж писал в 1788г.: "Мы обязаны Эйлеру первыми общими формулами для дви-

жения жидкостей... записанными в простой и ясной символике частных производных... Благодаря этому открытию вся механика жидкостей свелась к вопросу анализа, и будь эти уравнения интегрируемыми, можно было бы в любом случае полностью определить движение жидкости под воздействием любых сил..."²

Теория волновых движений развивалась благодаря вопросам качки корабля, волнового сопротивления, а также теории приливных волн в каналах и реках. Упрощение задачи о волнах, положенное в основу теории бесконечно малых волн, предложено О. Коши. Среди лиц, способствовавших развитию теории волн малой амплитуды, следует отметить П. Лапласа, М.В. Остроградского, Дж. Эри, Дж. Стокса, У. Кельвина, Дж. Рэлея, Г. Ламба, У. Рэнкина и других ученых. Большой вклад в теорию гидравлики внесли Б. Сен-Венан и Ж. Бусси-неск. Позднее А. Пуанкаре представил свои исследования, в особенности в теории фигур равновесия вращающихся и гравитирующих жидкостей. В этой же области еще ранее значительный вклад был внесен А.М. Ляпуновым.

²Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подobie, 1963г.

1 Глава 1. Волновые движения неоднородной жидкости со скачкообразным изменением плотности.

1.1 Основные уравнения и граничные условия

Рассмотрим безвихревое движение двух слоев однородной несжимаемой идеальной жидкости. Ось x направим вдоль невозмущенной поверхности раздела, ось y - вертикально вверх.

Пусть

$$y = -H(x, t), \quad y = \eta_1, \quad y = H_2(x, t)$$

есть уравнения дна, поверхности раздела и свободной поверхности. Величины, которые относятся к нижнему слою жидкости отмечены индексом 1, к верхнему слою - индексом 2. Имеем задачу^{3 4}

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} &= 0, \quad j = 1, 2, \\ \frac{p_j}{\rho_j} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} \right)^2 \right] + gy &= f_j(t), \quad j = 1, 2, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} &= 0, \quad y = -H(x, t), \\ p_1 = p_2, \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \quad y = \eta_1, \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad y = H_2 + \eta_2, \end{aligned}$$

³Перегудин С. И. Волновые движения в жидких и сыпучих средах, 2004г.

⁴Алешков Ю.З. Течение и волны в океане. 1996г.

$$\frac{p_2^0}{\rho_2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right)^2 \right] + g(H_2 + \eta_2) = f_2(t), y = H_2 + \eta_2.$$

Здесь φ_j — потенциал скорости, p_j — давление, ρ_j — плотность жидкости, $f_j(t)$ — произвольная функция времени, p_2^0 — давление, приложенное к свободной поверхности $y = H_2 + \eta_2$, H_2 — глубина верхнего слоя в невозмущенном состоянии.

1.2 Лине́йный вариант задачи

В случае волн малой высоты нелинейные краевые условия и интеграл Лагранжа-Коши упрощаются:⁵

$$\frac{p_j}{\rho_j} = -\frac{\partial\varphi_j}{\partial t} - gy + f_j(t), \quad j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial t} = \frac{\partial\varphi_j}{\partial y}, \rho_1 \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + g\eta_1 \right) - \rho_1 f_1 = \rho_2 \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + g\eta_1 \right) - \rho_2 f_2, \quad y = 0,$$

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + g(H_2 + \eta_2) = f_2 - \frac{p_2^0}{\rho_2}, \quad y = H_2.$$

Составим задачу для потенциалов φ_j . Из краевых условий для величин верхнего слоя имеем

$$\eta_2 = -\frac{1}{g} \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} - \frac{p_2^0}{g\rho_2} + \frac{f_2}{g} - H_2, \quad y = H_2,$$

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2^0}{\partial t} + f_2'(t), \quad y = H_2.$$

Аналогично получаем

$$\eta_1 = -\frac{\rho_1}{g(\rho_1 - \rho_2)} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{\rho_2}{g(\rho_1 - \rho_2)} \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \frac{\rho_1 f_1 - \rho_2 f_2}{g(\rho_1 - \rho_2)},$$

$$g(\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial\varphi_j}{\partial y} = -\rho_1 \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + \rho_2 \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} + \rho_1 f_1' - \rho_2 f_2'.$$

Здесь частные производные вычисляются на невозмущенной поверхности раздела, при $y = 0$. Таким образом, φ_j является гармонической функцией, причем φ_1 удовлетворяет условию

⁵Холодова С. Е., Перегудин С. И. Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. 2009г.

на дней, а φ_2 — условию при $y = H_2$. На невозмущенной поверхности раздела $y = 0$ они связаны определенным соотношением.

Далее рассмотрим задачу, когда дно горизонтально, $H = \text{const}$, и давление на свободной поверхности $p_2^0 = \text{const} = 0$. В силу условий на дне, периодичности φ_j по x и t , будем искать решение задачи в следующем виде:

$$\varphi_1 = A \frac{\text{ch } k(y + H)}{\text{ch } kH} \cos kx \sin \omega t,$$

$$\varphi_2 = (B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky}) \cos kx \sin \omega t.$$

Тогда из интегральных условий

$$\int_0^\lambda \eta_1 dx = \int_0^\lambda \eta_2 dx = 0$$

функции f_j определяются следующими равенствами:

$$f_1(t) = \frac{\rho_2}{\rho_1} f_2(t), \quad f_2(t) = gH_2.$$

Из условий при $y = 0$, $y = H_2$ получаем относительно A, B_1, B_2 линейную однородную систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A \text{th } kH = B_1 - B_2, \\ gk(\rho_1 - \rho_2)A \text{th } kH = \rho_1 \omega^2 A - \rho_2 \omega^2 (B_1 + B_2), \\ (\omega^2 - gk)e^{kH_2} B_1 + (\omega^2 + gk)e^{-kH_2} B_2 = 0 \end{cases}$$

или, исключая A , систему

$$\begin{cases} [gk(\rho_1 - \rho_2) + (\rho_2 - \rho_1 \operatorname{cth} kH) \omega^2] B_1 + \\ + [-gk(\rho_1 - \rho_2) + (\rho_2 + \rho_1 \operatorname{cth} kH) \omega^2] B_2 = 0, \\ (\omega^2 - gk) e^{kH_2} B_1 + (\omega^2 + gk) e^{-kH_2} B_2 = 0. \end{cases}$$

Она имеет нетривиальное решение лишь тогда, когда равен нулю ее определитель

$$\begin{vmatrix} (\rho_2 - \rho_1 \operatorname{cth} kH) \omega^2 + gk(\rho_1 - \rho_2) & (\rho_2 + \rho_1 \operatorname{cth} kH) \omega^2 - gk(\rho_1 - \rho_2) \\ (\omega^2 - gk) e^{kH_2} & (\omega^2 + gk) e^{-kH_2} \end{vmatrix}$$

Следовательно, относительно ω имеем уравнение

$$\begin{aligned} (\rho_2 + \rho_1 \operatorname{cth} kH \operatorname{cth} kH_2) \omega^4 - gk\rho_1(\operatorname{cth} kH_2 + \operatorname{cth} kH) \omega^2 + \\ + (gk)^2(\rho_1 - \rho_2) = 0, \end{aligned}$$

из которого

$$\omega^2 = \chi_1(k), \quad \omega^2 = \chi_2(k),$$

где

$$\begin{aligned} \chi_1(k) &= gk \frac{\rho_1 (\operatorname{cth} kH_2 + \operatorname{cth} kH) - \sqrt{D}}{2(\rho_2 + \rho_1 \operatorname{cth} kH \operatorname{cth} kH_2)}, \\ \chi_2(k) &= gk \frac{\rho_1 (\operatorname{cth} kH_2 + \operatorname{cth} kH) + \sqrt{D}}{2(\rho_2 + \rho_1 \operatorname{cth} kH \operatorname{cth} kH_2)}, \end{aligned}$$

$$D = \rho_1^2 (\operatorname{cth} kH_2 - \operatorname{cth} kH)^2 + 4\rho_1\rho_2 (\operatorname{cth} kH_2 \operatorname{cth} kH - 1) + (2\rho_2)^2 > 0.$$

В частности, при $H = \infty$, т.е. в случае бесконечно глубокого дна, имеем

$$\chi_1(k) = gk, \quad \chi_2(k) = gk \operatorname{th} kH_2 \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2 \operatorname{th} kH_2}.$$

Таким образом, при наличии поверхности раздела жидкость-жидкость существуют два типа волн, характеризуемых для $m = 1, 2$ величинами $\omega^2 = \chi_m(k)$:

$$B_1 = B_1^m = \frac{A}{2} \operatorname{th} kH \frac{\chi_m(k) + gk}{\chi_m(k) \operatorname{ch} kH_2 - gk \operatorname{sh} kH_2} e^{-kH_2},$$

$$B_2 = B_2^m = -\frac{A}{2} \operatorname{th} kH \frac{\chi_m(k) - gk}{\chi_m(k) \operatorname{ch} kH_2 - gk \operatorname{sh} kH_2} e^{kH_2}.$$

В таком случае, для потенциалов скорости, поверхности раздела и свободной поверхности получаем выражения

$$\varphi_1 = A \frac{\operatorname{ch} k(y + H)}{\operatorname{ch} kH} \cos kx \sin \omega_m t,$$

$$\varphi_2 = A \operatorname{th} kH \frac{\chi_m \operatorname{sh} k(y - H_2) + gk \operatorname{ch} k(y - H_2)}{\chi_m \operatorname{ch} kH_2 - gk \operatorname{sh} kH_2} \cos kx \sin \omega_m t,$$

$$\eta_1(x, t) = -\frac{\omega_m A}{g(\rho_1 - \rho_2)} \left[\frac{\chi_m(k) (\rho_1 \operatorname{ch} kH_2 + \rho_2 \operatorname{th} kH \operatorname{sh} kH_2)}{\chi_m(k) \operatorname{ch} kH_2 - gk \operatorname{sh} kH_2} - \frac{gk (\rho_1 \operatorname{sh} kH_2 + \rho_2 \operatorname{th} kH \operatorname{sh} kH_2)}{\chi_m(k) \operatorname{ch} kH_2 - gk \operatorname{sh} kH_2} \right] \cos kx \sin \omega_m t,$$

$$\eta_2(x, t) = -\frac{\omega_m A k \operatorname{th} kH}{\chi_m(k) \operatorname{ch} kH_2 - gk \operatorname{sh} kH_2} \cos kx \sin \omega_m t, \quad \omega_m^2 = \chi_m(k).$$

Отношение амплитуд колебаний поверхности раздела и свободной поверхности может быть представлено в следующем виде

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\chi_m(k) (\rho_1 \operatorname{ch} kH_2 + \rho_2 \operatorname{th} kH \operatorname{sh} kH_2)}{gk(\rho_1 - \rho_2) \operatorname{th} kH} - \frac{gk (\rho_1 \operatorname{sh} kH_2 + \rho_2 \operatorname{th} kH \operatorname{ch} kH_2)}{gk(\rho_1 - \rho_2) \operatorname{th} kH},$$

где $\chi_m(k)$ было определено ранее. Получаем зависимость данного отношения от полноты и глубины каждого из слоев в

случае конечной глубины жидкости. В случае бесконечно глубокого дна

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = e^{-kH_2}, \quad \frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} e^{kH_2}.$$

Данные отношения будут использованы в вычислительных экспериментах.

2 Глава 2. Вычислительный эксперимент с использованием реальных данных.

Для проведения вычислительных экспериментов будем использовать язык программирования Python и библиотеки Math, NumPy - для вычислений и Matplotlib - для построения графиков. В качестве исходных данных будем использовать реальные(либо максимально приближенные к реальным) данные.

В вычислительных экспериментах будем рассматривать отношения амплитуд внутренних и поверхностных волн, а также потенциалы скоростей и поверхностей. Стоит отметить, что для возникновения внутренних волн нужен перепад плотности. В жидкости небольшой перепад плотности может возникнуть из-за изменения температуры и солёности с глубиной. Поскольку эта разница не велика, то внутренние волны имеют малую скорость распространения. С другой стороны амплитуда внутренних волн может быть очень велика, поскольку для их возникновения не нужно большой энергии. Самый простой и наблюдаемый пример внутренних волн — внутренние волны в воде.

2.1 Случай бесконечно глубокого дна

Рассмотрим полученное ранее отношение амплитуд колебаний свободной поверхности и поверхности раздела в случае бесконечно глубокого дна

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = e^{-kH_2}, \quad \frac{a_{21}}{a_{22}} = -\frac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} e^{kH_2}$$

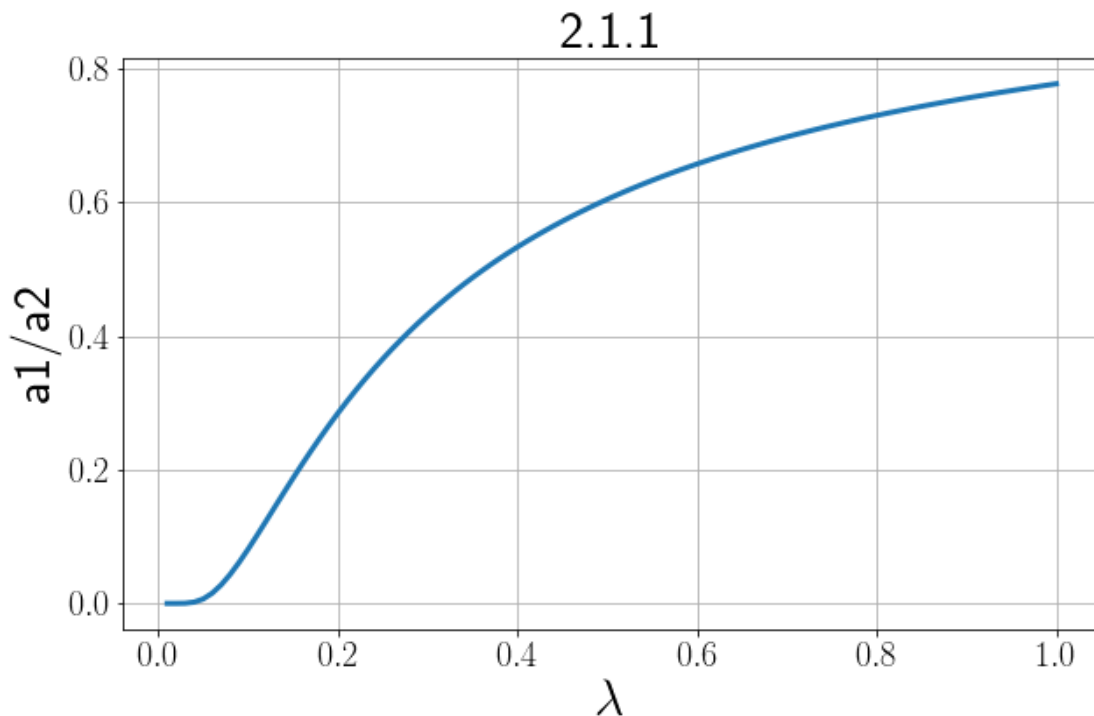
где H_2 - глубина верхнего слоя в невозмущенном состоянии, a_1 - амплитуда колебания поверхности раздела, a_2 - амплитуда колебания свободной поверхности, ρ_j - плотность жидкости j слоя, а $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число, зависящее от λ - длины волны.

В данном случае, первое отношение не зависит от плотностей и совпадает с соответствующим отношением для однородной жидкости. При это поверхностная волна будет выше внутренней и гребню свободной поверхности будет соответствовать гребень поверхности раздела. Второе отношение показывает, что с частотой второго рода амплитуда внутренней волны будет больше амплитуды поверхностной и гребню свободной поверхности будет соответствовать впадина поверхности раздела. Причем внутренние волны второго рода получают значительное развитие по отношению к волнам на свободной поверхности и достигают большей амплитуды, если разность плотностей жидкости мала. Данные различия амплитуд осо-

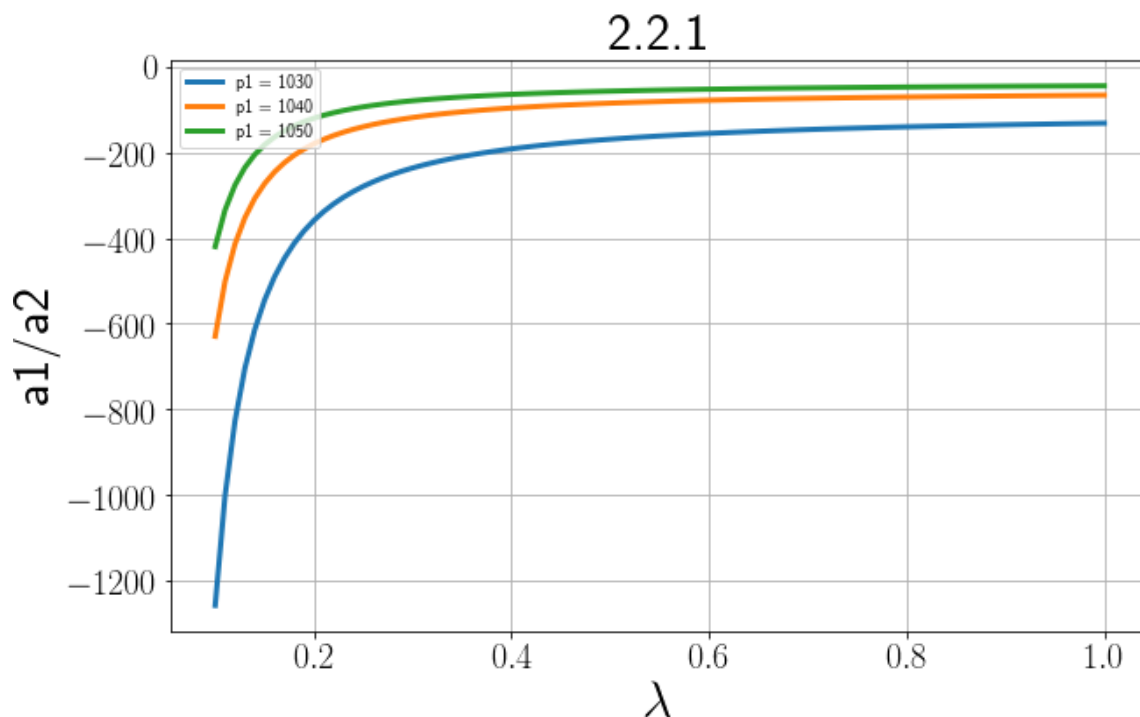
бенно актуальны в реальных условиях, поскольку их значение необходимо принимать во внимание при погружении подводных лодок и глубоководных аппаратов.

Для проведения эксперимента возьмем в качестве коэффициента ρ_2 плотность морской воды $\approx 1020 \text{ кг/м}^3$. Глубина верхнего слоя $\approx 40\text{м}$. Тогда, варьируя ρ_2 в пределах $1030 - 1050 \text{ кг/м}^3$ и изменяя длину волны λ от 10м до 1км получим следующие результаты:

- 1) График первого уравнения $\frac{a_{11}}{a_{21}} = e^{-kH_2}$



2) График второго уравнения $\frac{a_{21}}{a_{22}} = -\frac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} e^{kH_2}$



Из полученных данных видно, что описанные нами условия выполняются и для первого уравнения амплитуда внутренней волны меньше амплитуды поверхностной, а для второго - больше. Стоит отметить, что мы получили отрицательные значения отношения амплитуд в виду того, что в отличии от однородной жидкости, здесь присутствуют два типа колебаний, в одном случае колебания совершаются в фазе, в другом - в противофазе. Как и было замечено ранее, при малой разнице плотностей жидкости (1020 и 1030 кг/м³) заметно значительное увеличение амплитуды. Эта разница амплитуд может быть объяснима следующим образом. При образовании поверхностной волны

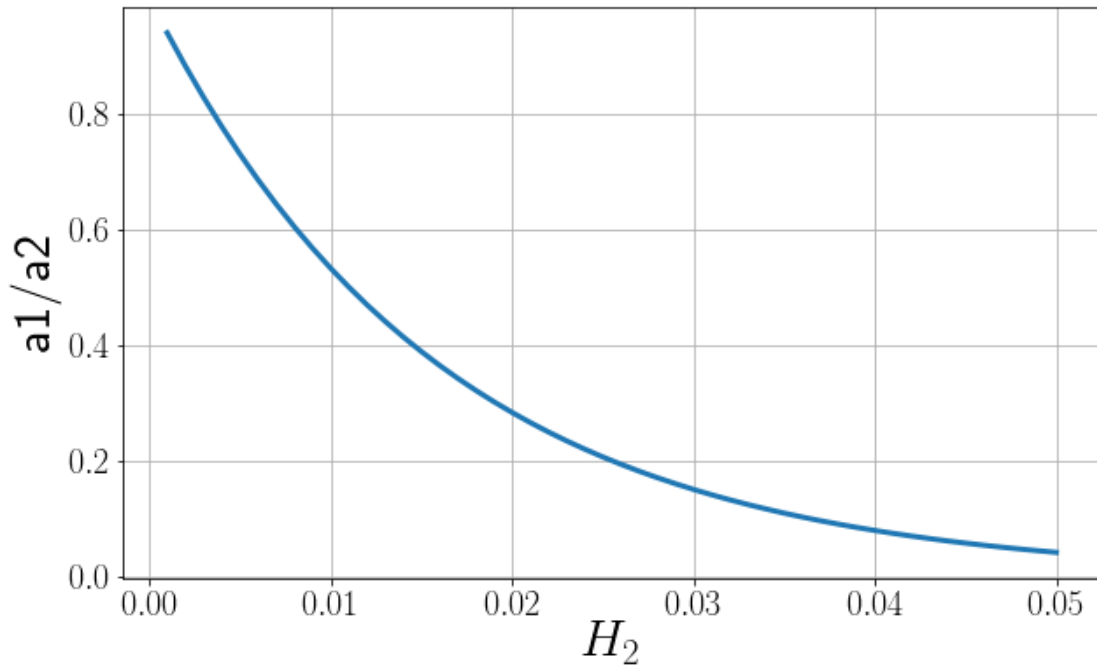
совершается определённая работа на подъём масс воды, в среднем на высоту, пропорциональную амплитуде. Но поскольку воде с плотностью ρ_1 приходится подниматься не в воздушной среде, а в воде, только с плотностью ρ_2 , работа должна быть значительно меньше. Иными словами, при совершении одной и той же работы, вода в среде с плотностью ρ_2 поднимется на значительно большую высоту, по сравнению с тем случаем, когда ей приходилось подниматься в воздушной среде. Вот почему под влиянием совсем небольших возмущений в морской воде могут возникать внутренние волны с громадной амплитудой, иногда превышающей 100 м. ⁶

Так же рассмотрим оба уравнения при фиксированном $\lambda = 100\text{м}$. Изменяя глубину поверхностного слоя от 1 до 50 метров, получим следующие результаты:

1) Для первого уравнения

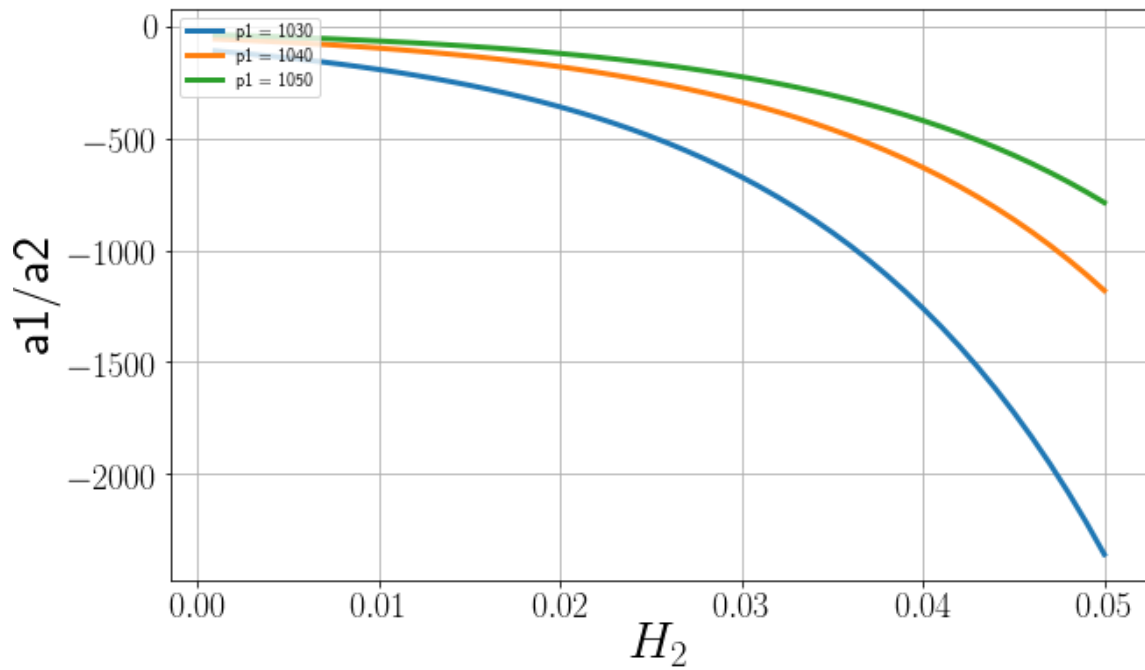
⁶В. В. Шулейкин Физика моря, 1968г.

2.1.2



2) Для второго уравнения

2.2.2



Анализируя полученные результаты, можно однозначно сказать, что отношение амплитуд сильно зависит от глубины по-

верхностного слоя, причем с увеличением глубины, сильно возрастает разница амплитуд.

2.2 Случай конечного дна

В случае конечного дна, отношение амплитуд колебаний поверхности раздела и свободной поверхности выразится в следующем виде

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\chi_m(k) (\rho_1 \operatorname{ch} kH_2 + \rho_2 \operatorname{th} kH \operatorname{sh} kH_2)}{gk(\rho_1 - \rho_2) \operatorname{th} kH} - \frac{gk (\rho_1 \operatorname{sh} kH_2 + \rho_2 \operatorname{th} kH \operatorname{ch} kH_2)}{gk(\rho_1 - \rho_2) \operatorname{th} kH},$$

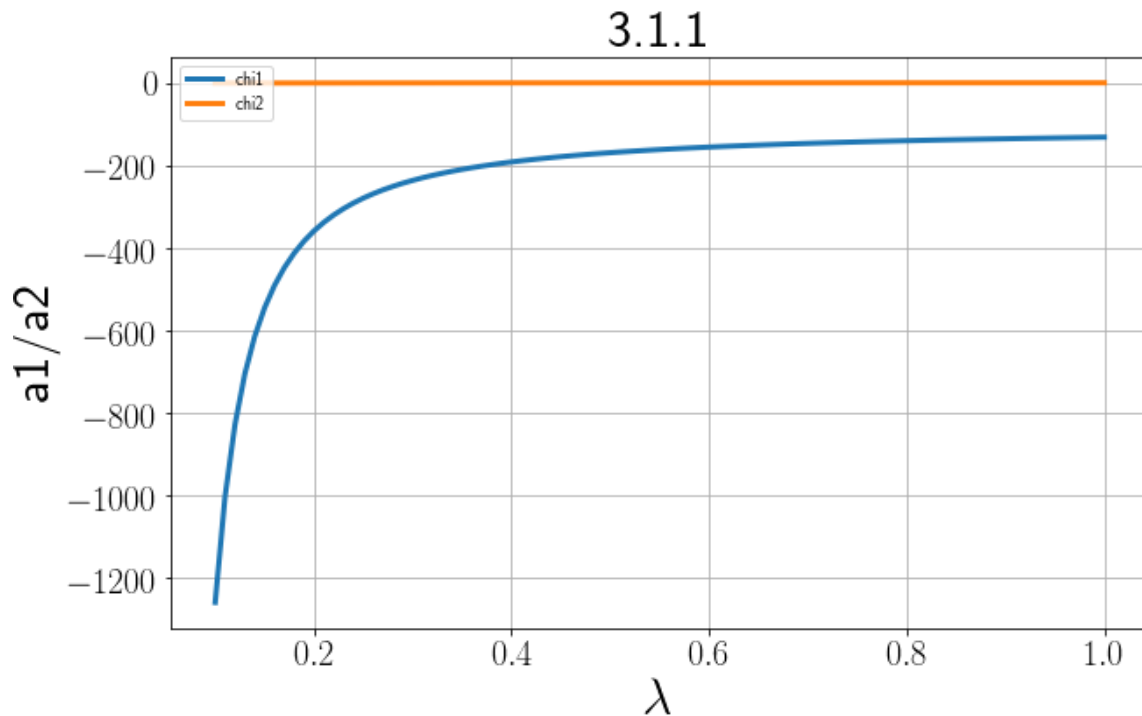
где

$$\chi_1(k) = gk \frac{\rho_1 (\operatorname{cth} kH_2 + \operatorname{cth} kH) - \sqrt{D}}{2(\rho_2 + \rho_1 \operatorname{cth} kH \operatorname{cth} kH_2)},$$

$$\chi_2(k) = gk \frac{\rho_1 (\operatorname{cth} kH_2 + \operatorname{cth} kH) + \sqrt{D}}{2(\rho_2 + \rho_1 \operatorname{cth} kH \operatorname{cth} kH_2)},$$

$$D = \rho_1^2 (\operatorname{cth} kH_2 - \operatorname{cth} kH)^2 + 4\rho_1\rho_2 (\operatorname{cth} kH_2 \operatorname{cth} kH - 1) + (2\rho_2)^2 > 0.$$

Принимая глубину поверхностного слоя H_2 за 40м, глубину внутреннего слоя H — 1км. Тогда, при изменении длины волны λ получим следующие результаты



Такое отклонение результатов получается из за изменения знака \sqrt{D} , т.к. в случае χ_1 мы получаем очень малый коэффициент.

2.3 Анализ потенциалов

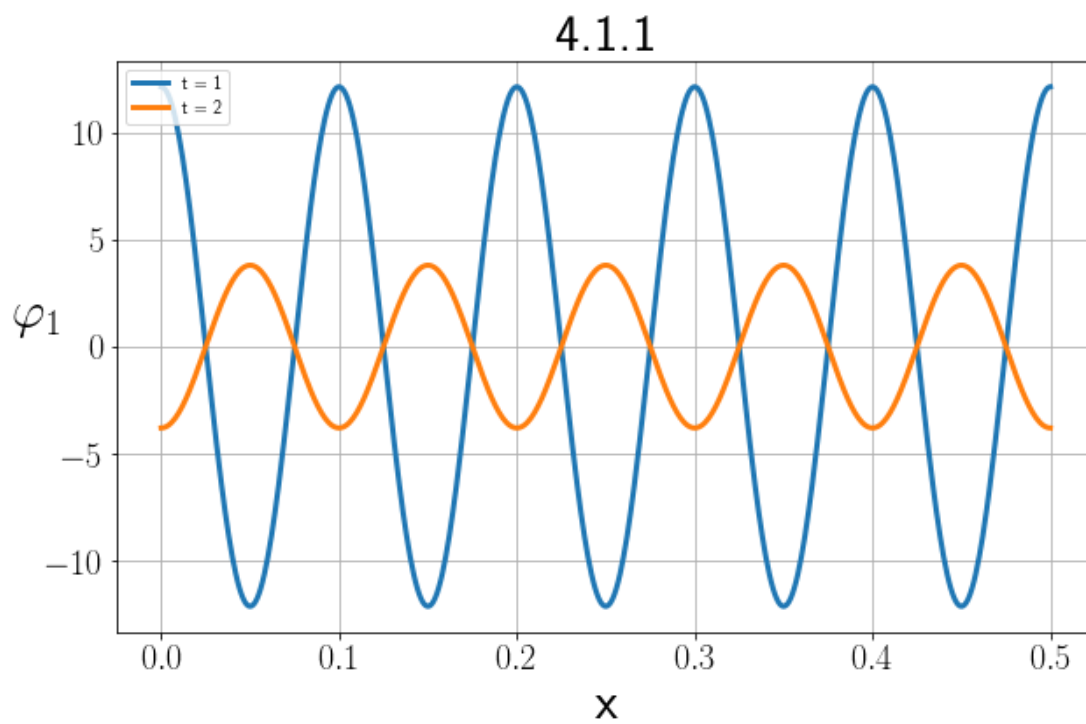
При наличии поверхности раздела жидкость-жидкость существуют два типа волн. Данные выражения описывают их потенциалы скорости

$$\varphi_1 = A \frac{\text{ch } k(y + H)}{\text{ch } kH} \cos kx \sin \omega_m t,$$

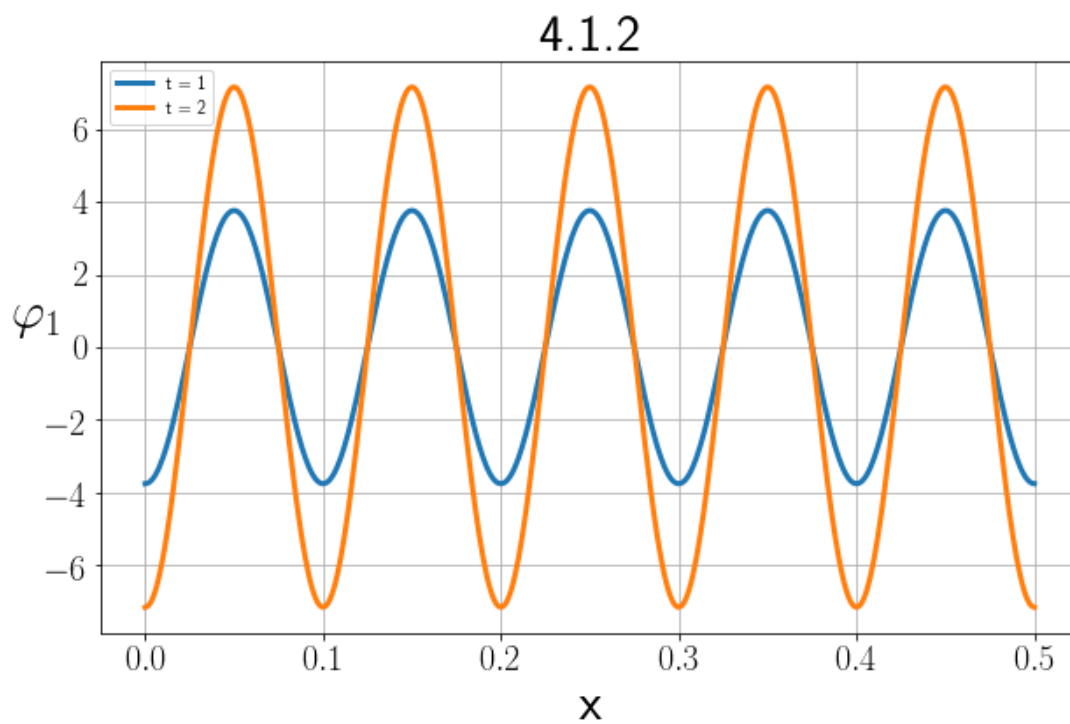
$$\varphi_2 = A \text{th } kH \frac{\chi_m \text{sh } k(y - H_2) + gk \text{ch } k(y - H_2)}{\chi_m \text{ch } kH_2 - gk \text{sh } kH_2} \cos kx \sin \omega_m t,$$

Для проведения эксперимента возьмем ранее использованные значения H и $\rho = 1030 \text{ кг/м}^3$. Горизонтальную координату изменяем от 0 до 500м с шагом 1м.

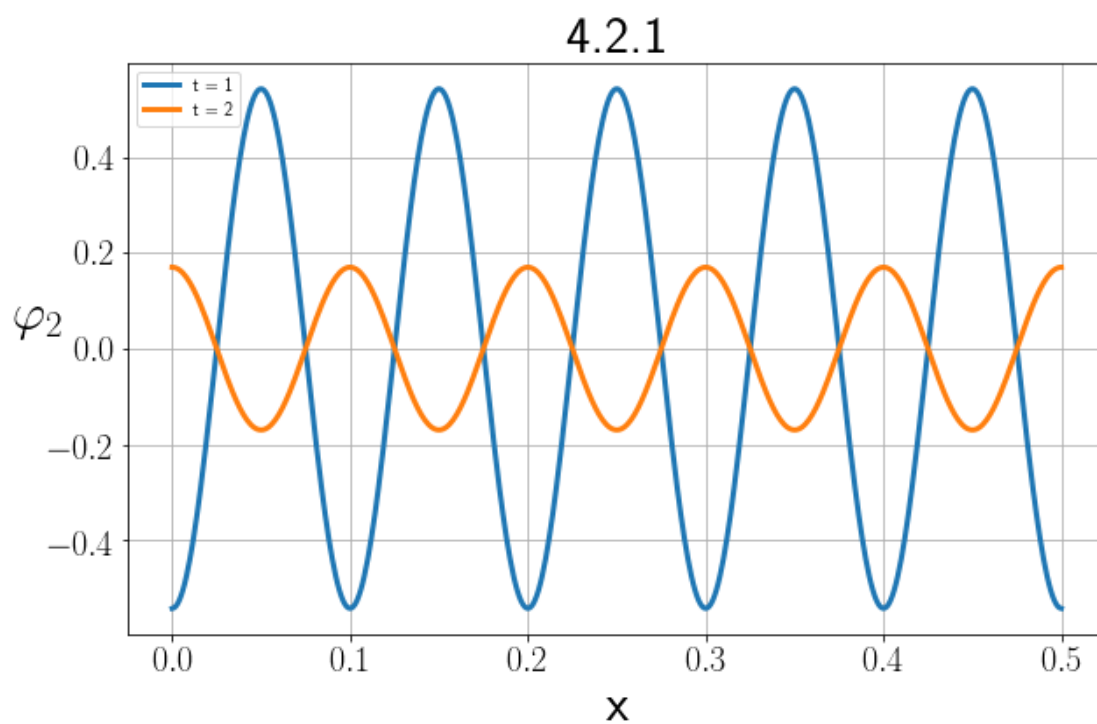
Тогда для φ_1 при ω_1 получим



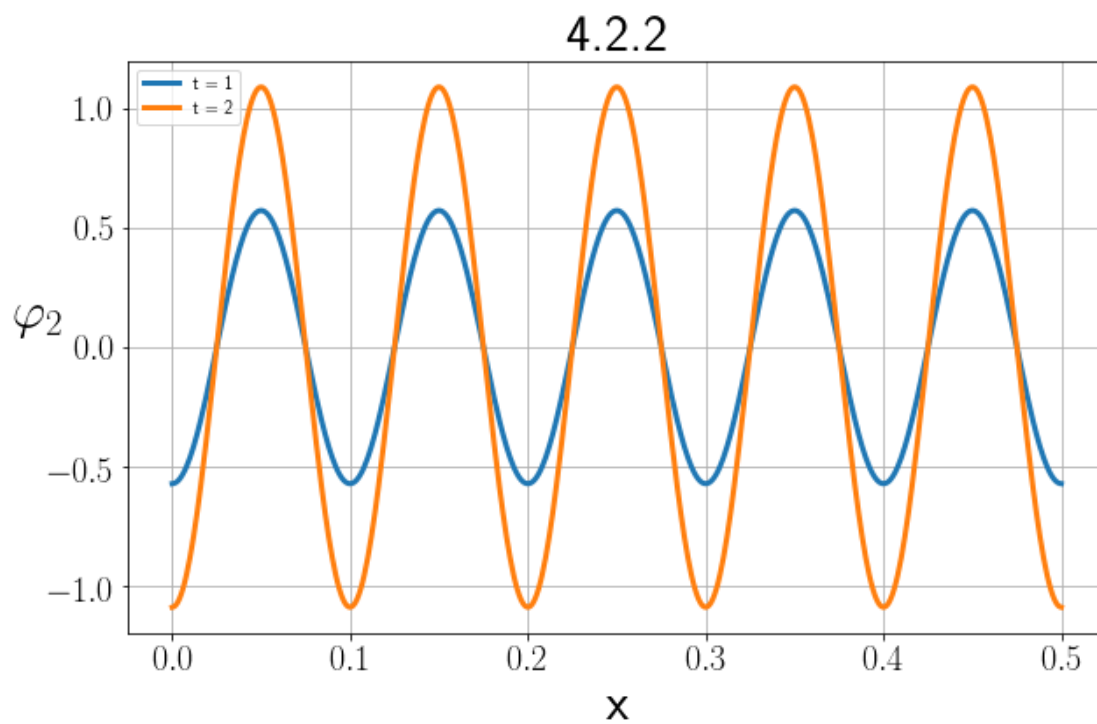
А при ω_2



Аналогично для φ_2 при ω_1



И при ω_2

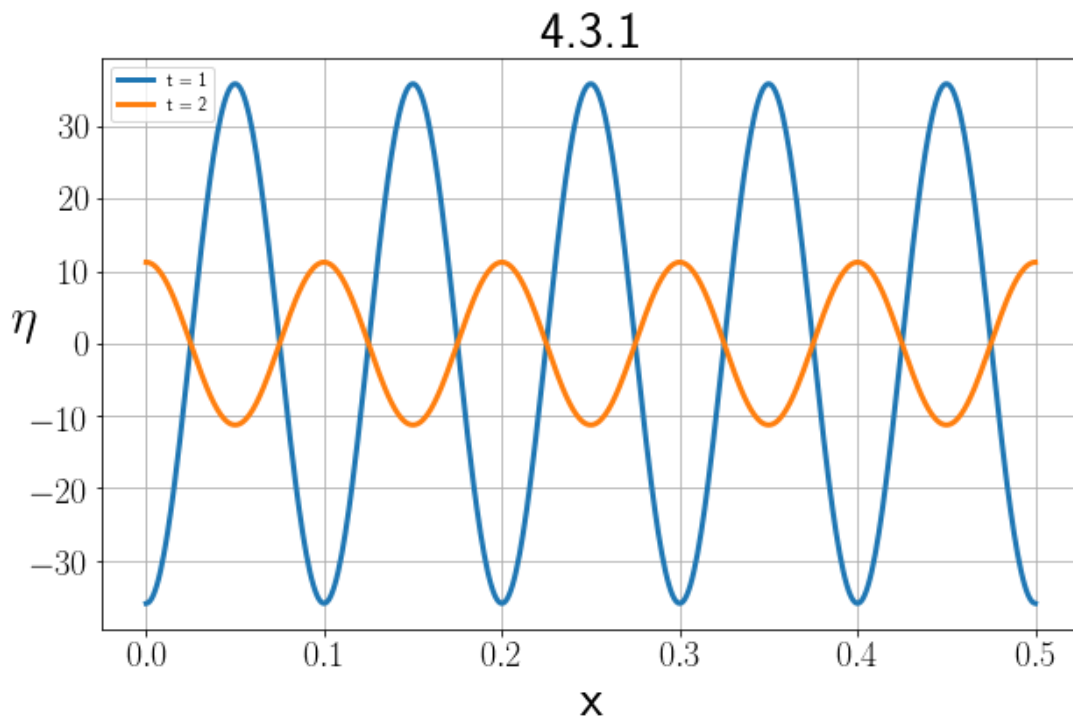


Рассмотрим так же потенциалы поверхности раздела и свободной поверхности. Они представлены следующим образом

$$\eta_1(x, t) = -\frac{\omega_m A}{g(\rho_1 - \rho_2)} \left[\frac{\chi_m(k) (\rho_1 \operatorname{ch} kH_2 + \rho_2 \operatorname{th} kH \operatorname{sh} kH_2)}{\chi_m(k) \operatorname{ch} kH_2 - gk \operatorname{sh} kH_2} - \frac{gk (\rho_1 \operatorname{sh} kH_2 + \rho_2 \operatorname{th} kH \operatorname{sh} kH_2)}{\chi_m(k) \operatorname{ch} kH_2 - gk \operatorname{sh} kH_2} \right] \cos kx \sin \omega_m t,$$

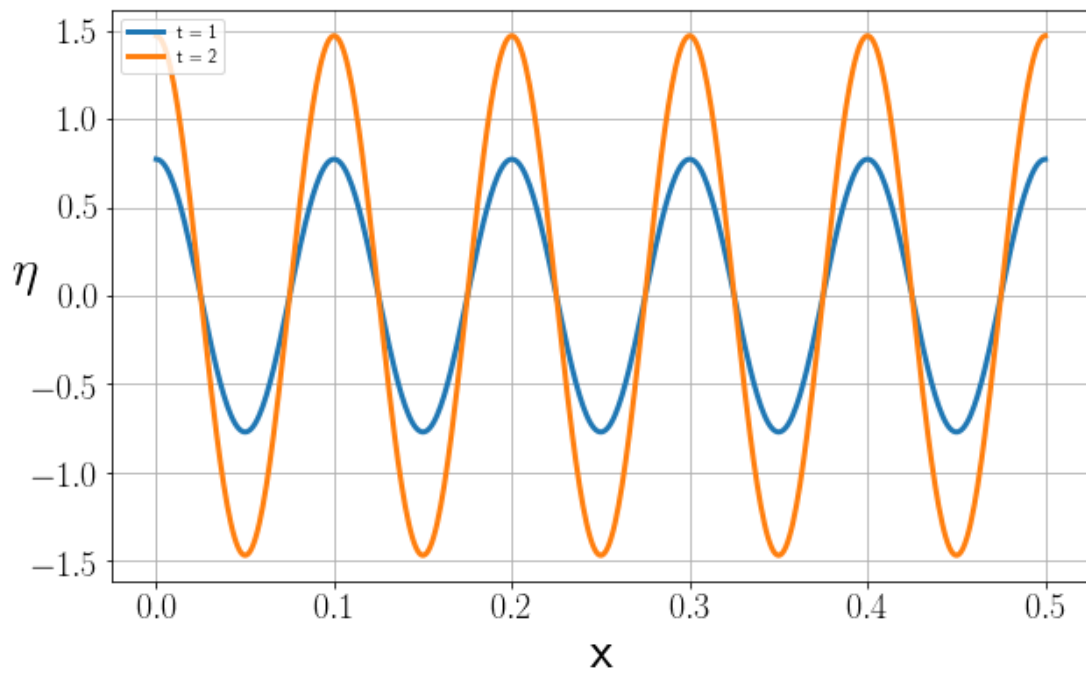
$$\eta_2(x, t) = -\frac{\omega_m A k \operatorname{th} kH}{\chi_m(k) \operatorname{ch} kH_2 - gk \operatorname{sh} kH_2} \cos kx \sin \omega_m t, \quad \omega_m^2 = \chi_m(k).$$

Рассмотрим η_1 при ω_1



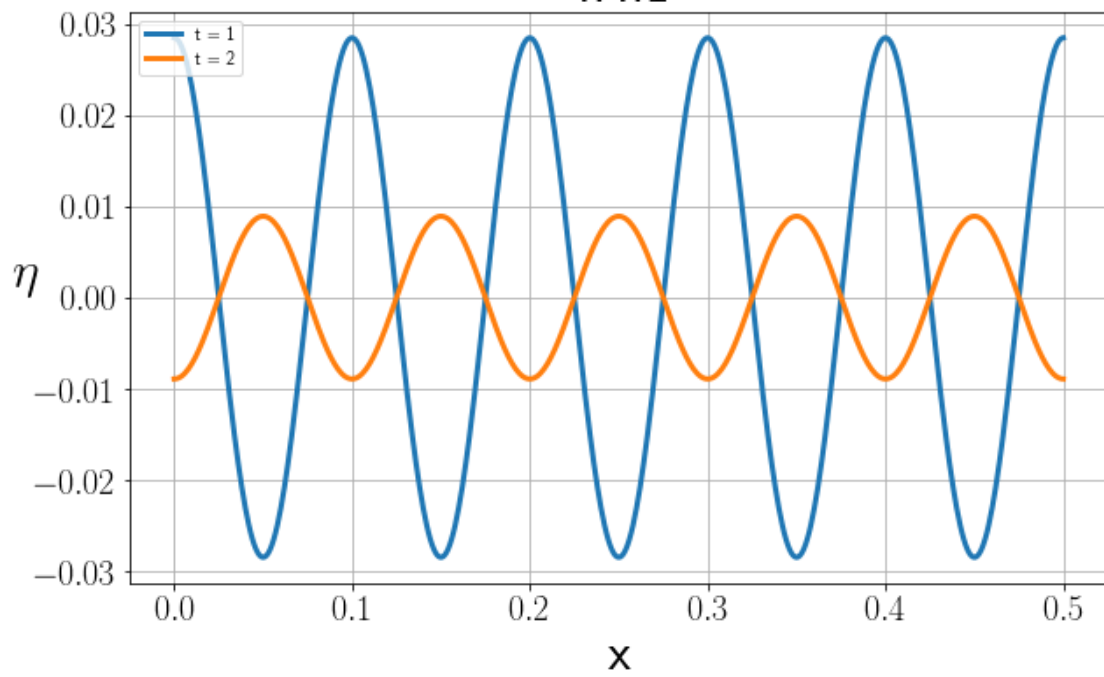
При ω_2

4.3.2

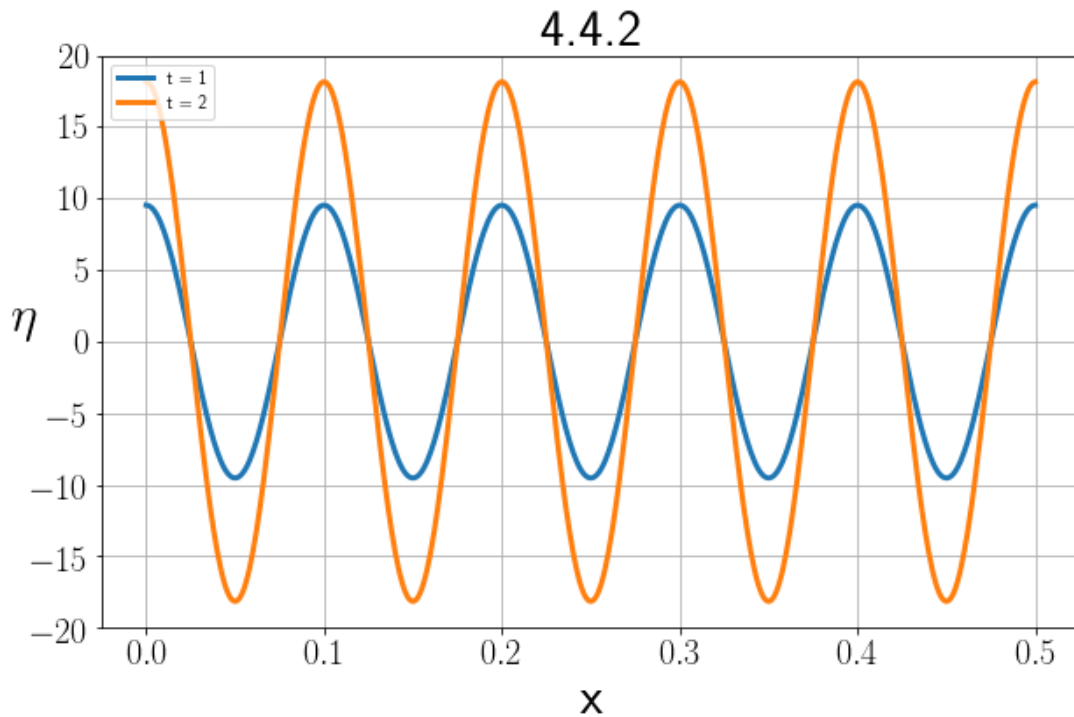


А так же η_2 при ω_1

4.4.1



И при ω_2



Здесь мы можем наблюдать ситуацию, подобную случаю 3.1.1, где изменение χ сильно повлияло на результаты, в связи с большой разницей между χ_1 и χ_2 , которая, в свою очередь, зависит от знака \sqrt{D} .

Заключение

В данной работе изучены методы теоретической гидродинамики, а именно, моделирования волновых движений двухслойной жидкости. Были проведены вычислительные эксперименты с использованием реальных данных на языке Python, которые позволили визуально оценить влияние каждого из параметров на изменение динамики исследуемого процесса, а также получить весомые результаты. Полученные результаты могут быть использованы при реализации погружения и движения глубоководных аппаратов, при моделировании процессов распространения волн, при строительстве морских гидротехнических сооружений и проектировании морских буровых платформ для добычи углеводородов и других ресурсов глубоководных океанских недр.

Список литературы

1. Юрнев А. П., Сахаров Б. Д., Сытин А. В. Аварии под водой // Изд. 2-е, перераб. и доп. - Л.: Судостроение. 1986г
2. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подobie М.: Иностранная литература, 1963г.
3. Перегудин С. И. Волновые движения в жидких и сыпучих средах // Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 2004г.
4. Алешков Ю.З. Течение и волны в океане. СПб., 1996г.
5. Холодова С. Е., Перегудин С. И. Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. - СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2009г.
6. Шулейкин В. В. Физика моря // Издание четвертое, Издательство «Наука», Москва, 1968г.
7. П. А. Шабанов Научная графика в Python // Электронный учебник https://github.com/whitehorn/Scientific_graphics_in_python

Приложения

В приложении приведен код вычислительных экспериментов на языке Python.

1) Эксперимент 2.1.1

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import numpy as np
plt.rc('text', usetex=True)

fig = plt.figure(num=None, figsize=(10,
    6), dpi=100, facecolor='w', edgecolor='
    k')

def func(x):
    H_2 = 0.04
    k = 2*math.pi/x
    return np.exp(-k*H_2)

dx = 0.01
xmin = 0.01
xmax = 1
xlist = plt.mlab.frange (xmin, xmax, dx)
```



```

ylist = [func (x) for x in xlist]

plt.rc('xtick', labelsizes=20)
plt.rc('ytick', labelsizes=20)
plt.title('2.1.1', fontsize = 30)
plt.xlabel(r'$\lambda$', fontsize = 30)
plt.ylabel('a1/a2', rotation=90, fontsize
          = 30)

plt.plot(xlist, ylist, linewidth = 3.0)
plt.grid(True)
plt.show()

fig.savefig('211.png')

```

2) Эксперимент 2.2.1

```

import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

fig = plt.figure(num=None, figsize=(10,
          6), dpi=100, facecolor='w', edgecolor='
          k')

```

```

def k(x):
    return 2*math.pi/x
def func(x,n):
    return -p2/(p1[n]-p2)*np.exp(k(x)*H_2
        )
H_2 = 0.04
p1 = [1030, 1040, 1050]
p2 = 1020
dx = 0.01
xmin = 0.1
xmax = 1
xlist = plt.mlab.frange (xmin, xmax, dx)
ylist1 = [func (x,0) for x in xlist]
ylist2 = [func (x,1) for x in xlist]
ylist3 = [func (x,2) for x in xlist]

plt.title('2.2.1', fontsize = 30)
plt.xlabel(r'$\lambda$', fontsize = 30)
plt.ylabel('a1/a2', rotation=90, fontsize
    = 30)

plt.plot(xlist, ylist1, linewidth = 3.0,

```

```

    label = 'p1_=_1030')
plt.plot(xlist, ylist2, linewidth = 3.0,
    label = 'p1_=_1040')
plt.plot(xlist, ylist3, linewidth = 3.0,
    label = 'p1_=_1050')
plt.legend(loc='upper_left')
plt.grid(True)
plt.show()

fig.savefig('221.png')

```

3) Эксперимент 2.1.2

```

import matplotlib.pyplot as plt
import math
import numpy as np
plt.rc('text', usetex=True)

fig = plt.figure(num=None, figsize=(10,
    6), dpi=100, facecolor='w', edgecolor='
    k')

def func(x):
    lamb = 0.1
    k = 2*math.pi/lamb

```

```

    return np.exp(-k*x)

dx = 0.001
xmin = 0.001
xmax = 0.05
xlist = plt.mlab.frange (xmin, xmax, dx)
ylist = [func (x) for x in xlist]

plt.rc('xtick', labelszize=20)
plt.rc('ytick', labelszize=20)
plt.title('2.1.2', fontsize = 30)
plt.xlabel(r'$H_2$', fontsize = 30)
plt.ylabel('a1/a2', rotation=90, fontsize
    = 30)

plt.plot(xlist, ylist, linewidth = 3.0)
plt.grid(True)
plt.show()

fig.savefig('212.png')

```

4) Эксперимент 2.2.2

```
import math
```

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

fig = plt.figure(num=None, figsize=(10,
    6), dpi=100, facecolor='w', edgecolor='
    k')

def func(x,n):
    return -p2/(p1[n]-p2)*np.exp(k*x)

lamb = 0.1
k = 2*math.pi/lamb
p1 = [1030, 1040, 1050]
p2 = 1020
dx = 0.001
xmin = 0.001
xmax = 0.05

xlist = plt.mlab.frange (xmin, xmax, dx)
ylist1 = [func (x,0) for x in xlist]
ylist2 = [func (x,1) for x in xlist]
ylist3 = [func (x,2) for x in xlist]

```

```

plt.title('2.2.2', fontsize = 30)
plt.xlabel(r'$H_2$', fontsize = 30)
plt.ylabel('a1/a2', rotation=90, fontsize
          = 30)

plt.plot(xlist, ylist1, linewidth = 3.0,
         label = 'p1_1030')
plt.plot(xlist, ylist2, linewidth = 3.0,
         label = 'p1_1040')
plt.plot(xlist, ylist3, linewidth = 3.0,
         label = 'p1_1050')
plt.legend(loc='upper_left')
plt.grid(True)
plt.show()

```

```
fig.savefig('222.png')
```

5) Эксперимент 3.1.1

```
import math
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
fig = plt.figure(num=None, figsize=(10,
        6), dpi=100, facecolor='w', edgecolor=''
```

```

    k')
def k(x):
    return 2*math.pi/x
def cth(x):
    return math.cosh(x)/math.sinh(x)
def th(x):
    return math.sinh(x)/math.cosh(x)
def chi(x, sign):
    return g*k(x)*((p1*(cth(k(x)*H_2) +
        cth(k(x)*H)) + (-1)**(sign)*math.
        sqrt(D(x)))/(2*(p2 + p1*cth(k(x)*H)
        *cth(k(x)*H_2))))
def D(x):
    return p1**2*(cth(k(x)*H_2) - cth(k(x)
        )*H))**2 + 4*p1*p2*(cth(k(x)*H_2)*
        cth(k(x)*H) - 1) + (2*p2)**2
def func1(x, n):
    left = (chi(x, n)*(p1*math.cosh(k(x)*
        H_2) + p2*th(k(x)*H)*math.sinh(k(x)
        *H_2)))/(g*k(x)*(p1-p2)*th(k(x)*H))
    right = (g*k(x)*(p1*math.sinh(k(x)*
        H_2) + p2*th(k(x)*H)*math.cosh(k(x)

```

```

        *H_2))) / (g*k(x)*(p1-p2)*th(k(x)*H))
    return left - right

H_2 = 0.04
H = 1
g = 9.80665
p1 = 1030
p2 = 1020
dx = 0.01
xmin = 0.1
xmax = 1

xlist = plt.mlab.frange (xmin, xmax, dx)
ylist1 = [func1(x,1) for x in xlist]
ylist2 = [func1(x,2) for x in xlist]

plt.title('3.1.1', fontsize = 30)
plt.xlabel(r'$\lambda$', fontsize = 30)
plt.ylabel('a1/a2', rotation=90, fontsize
    = 30)

plt.plot(xlist, ylist1, linewidth = 3.0,
    label = 'chi1')
plt.plot(xlist, ylist2, linewidth = 3.0,

```



```

    label = 'chi2')

plt.legend(loc='upper_left')
plt.grid(True)
plt.show()

fig.savefig('311.png')

6) Эксперимент 4.1.1 и 4.1.2

import math
import matplotlib.pyplot as plt

fig = plt.figure(num=None, figsize=(10,
    6), dpi=100, facecolor='w', edgecolor='
    k')

def cth(x):
    return math.cosh(x)/math.sinh(x)

def phil(x, t):
    return (math.cosh(k*(H_2+H))/(math.
        cosh(k*H))*math.cos(k*x)*math.sin(
            omega1*t))

lamb = 0.1

```

```

k = 2*math.pi/lamb
print(k)
g = 9.80665
H_2 = 0.04
H = 1
p2 = 1020
p1 = 1030
dx = 0.001
xmin = 0
xmax = 0.5

D = p1**2*(cth(k*H_2) - cth(k*H))**2 + 4*
    p1*p2*(cth(k*H_2)*cth(k*H) - 1) + (2*p2
    )**2
chi1 = g*k*((p1*(cth(k*H_2) + cth(k*H)) -
    math.sqrt(D))/(2*(p2 + p1*cth(k*H)*cth
    (k*H_2))))
chi2 = g*k*((p1*(cth(k*H_2) + cth(k*H)) +
    math.sqrt(D))/(2*(p2 + p1*cth(k*H)*cth
    (k*H_2))))

omegal = math.sqrt(chi1)

```

```

omega2 = math.sqrt(chi2)

xlist = plt.mlab.frange (xmin, xmax, dx)
ylist1 = [phi1(x,1) for x in xlist]
ylist2 = [phi1(x,2) for x in xlist]

plt.title('4.1.1', fontsize = 30)
plt.xlabel('x', fontsize = 30)
plt.ylabel(r'$\varphi_1$', rotation=0,
           fontsize = 30)

plt.plot(xlist, ylist1, linewidth = 3.0,
         label = 't1')
plt.plot(xlist, ylist2, linewidth = 3.0,
         label = 't2')
plt.legend(loc='upper_left')
plt.grid(True)
plt.show()

fig.savefig('412.png')

```

7) Эксперимент 4.2.1 и 4.2.2

```

import math

```

```

import matplotlib.pyplot as plt

fig = plt.figure(num=None, figsize=(10,
    6), dpi=100, facecolor='w', edgecolor='
    k')

def cth(x):
    return math.cosh(x)/math.sinh(x)

def th(x):
    return math.sinh(x)/math.cosh(x)

def phi2(x,y,t):
    return th(k*H)*((chi1*math.sinh(k*(y-
        H_2))+g*k*math.cosh(k*(y-H_2)))/(
        chi1*math.cosh(k*H_2) - g*k*math.
        sinh(k*H_2)))*math.cos(k*x)*math.
        sin(omega1*t)

lamb = 0.1
k = 2*math.pi/lamb

print(k)

g = 9.80665
H_2 = 0.04
H = 1

```

```
p2 = 1020
```

```
p1 = 1030
```

```
dx = 0.001
```

```
xmin = 0
```

```
xmax = 0.5
```

```
D = p1**2*(cth(k*H_2) - cth(k*H))**2 + 4*  
    p1*p2*(cth(k*H_2)*cth(k*H) - 1) + (2*p2  
    )**2
```

```
chi1 = g*k*((p1*(cth(k*H_2) + cth(k*H)) -  
            math.sqrt(D))/(2*(p2 + p1*cth(k*H)*cth  
            (k*H_2))))
```

```
chi2 = g*k*((p1*(cth(k*H_2) + cth(k*H)) +  
            math.sqrt(D))/(2*(p2 + p1*cth(k*H)*cth  
            (k*H_2))))
```

```
omega1 = math.sqrt(chi1)
```

```
omega2 = math.sqrt(chi2)
```

```
xlist = plt.mlab.frange(xmin, xmax, dx)
```

```
ylist1 = [phi2(x,0.01,1) for x in xlist]
```

```
ylist2 = [phi2(x,0.01,2) for x in xlist]
```

```

plt.title('4.2.1', fontsize = 30)
plt.xlabel('x', fontsize = 30)
plt.ylabel(r'$\varphi_2$', rotation=0,
           fontsize = 30)

plt.plot(xlist, ylist1, linewidth = 3.0,
         label = 't1')
plt.plot(xlist, ylist2, linewidth = 3.0,
         label = 't2')
plt.legend(loc='upper_left')
plt.grid(True)
plt.show()

fig.savefig('421.png')

```

8) Эксперимент 4.3.1 и 4.3.2

```

import math
import matplotlib.pyplot as plt

fig = plt.figure(num=None, figsize=(10,
    6), dpi=100, facecolor='w', edgecolor='
    k')

```

```

def cth(x):
    return math.cosh(x)/math.sinh(x)

def th(x):
    return math.sinh(x)/math.cosh(x)

def eta1(x, t):
    return -(omega1)/(g*(p1-p2))*(((chi1
        *(p1*math.cosh(k*H_2)+p2*th(k*H)*
        math.sinh(k*H_2)))/(chi1*math.cosh(
        k*H_2) - g*k*math.sinh(k*H_2))) - (
        g*k*(p1*math.sinh(k*H_2)+p2*th(k*H)
        *math.cosh(k*H_2)))/(chi1*math.cosh
        (k*H_2) - g*k*math.sinh(k*H_2)))*
        math.cos(k*x)*math.sin(omega1*t)

lamb = 0.1
k = 2*math.pi/lamb
print(k)
g = 9.80665
H_2 = 0.04
H = 1
p2 = 1020
p1 = 1030

```

```
dx = 0.001
```

```
xmin = 0
```

```
xmax = 0.5
```

```
D = p1**2*(cth(k*H_2) - cth(k*H))**2 + 4*  
    p1*p2*(cth(k*H_2)*cth(k*H) - 1) + (2*p2  
    )**2
```

```
chi1 = g*k*((p1*(cth(k*H_2) + cth(k*H)) -  
    math.sqrt(D))/(2*(p2 + p1*cth(k*H)*cth  
    (k*H_2))))
```

```
chi2 = g*k*((p1*(cth(k*H_2) + cth(k*H)) +  
    math.sqrt(D))/(2*(p2 + p1*cth(k*H)*cth  
    (k*H_2))))
```

```
omega1 = math.sqrt(chi1)
```

```
omega2 = math.sqrt(chi2)
```

```
xlist = plt.mlab.frange(xmin, xmax, dx)
```

```
ylist1 = [eta1(x,1) for x in xlist]
```

```
ylist2 = [eta1(x,2) for x in xlist]
```

```
ylist3 = [eta1(x,3) for x in xlist]
```



```

plt.title('4.3.1', fontsize = 30)
plt.xlabel('x', fontsize = 30)
plt.ylabel(r'$\eta$', rotation=0,
          fontsize = 30)

plt.plot(xlist, ylist1, linewidth = 3.0,
         label = 't1')
plt.plot(xlist, ylist2, linewidth = 3.0,
         label = 't2')

plt.legend(loc='upper_left')
plt.grid(True)
plt.show()

fig.savefig('431.png')

```

9) Эксперимент 4.4.1 и 4.4.2

```

import math
import matplotlib.pyplot as plt

fig = plt.figure(num=None, figsize=(10,
        6), dpi=100, facecolor='w', edgecolor='
        k')

```

```

def cth(x):
    return math.cosh(x)/math.sinh(x)

def th(x):
    return math.sinh(x)/math.cosh(x)

def eta2(x, t):
    return -((omega1*k*th(k*H))/(chi1*
        math.cosh(k*H_2)-g*k*math.sinh(k*
        H_2)))*math.cos(k*x)*math.sin(
        omega1*t)

lamb = 0.1
k = 2*math.pi/lamb

print(k)

g = 9.80665
H_2 = 0.04
H = 1

p2 = 1020
p1 = 1030
dx = 0.001
xmin = 0
xmax = 0.5

```

```
D = p1**2*(cth(k*H_2) - cth(k*H))**2 + 4*
    p1*p2*(cth(k*H_2)*cth(k*H) - 1) + (2*p2
    )**2
```

```
chi1 = g*k*((p1*(cth(k*H_2) + cth(k*H)) -
    math.sqrt(D))/(2*(p2 + p1*cth(k*H)*cth
    (k*H_2))))
```

```
chi2 = g*k*((p1*(cth(k*H_2) + cth(k*H)) +
    math.sqrt(D))/(2*(p2 + p1*cth(k*H)*cth
    (k*H_2))))
```

```
omega1 = math.sqrt(chi1)
```

```
omega2 = math.sqrt(chi2)
```

```
xlist = plt.mlab.frange (xmin, xmax, dx)
```

```
ylist1 = [eta2(x,1) for x in xlist]
```

```
ylist2 = [eta2(x,2) for x in xlist]
```

```
plt.title('4.4.1', fontsize = 30)
```

```
plt.xlabel('x', fontsize = 30)
```

```
plt.ylabel(r'$\eta$', rotation=0,
```

```
    fontsize = 30)
```

```
plt.plot(xlist ,ylist1 , linewidth = 3.0 ,
         label = 't_1')
plt.plot(xlist ,ylist2 , linewidth = 3.0 ,
         label = 't_2')

plt.legend(loc='upper_left')
plt.grid(True)
plt.show()

fig.savefig('441.png')
```