Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра управления медико-биологическими системами

Федорова Дарья Сергеевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Задача Лагранжа об объеме симплекса

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Утешев А. Ю.

Санкт-Петербург
2017

Оглавление

Введение

В повседневной жизни людям так или иначе приходится иметь дело с многогранными геометрическими телами: предметами мебели, произведениями архитектуры и т.д.

Над вычислением объемов многогранников задумывались в IV-III вв до н.э. такие математики как Демокрит и Евдокс Книдский. В "Началах" Евклида приведены теоремы о соотношениях объемов различных геометрических тел. Решением задачи нахождения объема тетраэдра через длины его сторон занимались в XV-XVI вв н.э. Пьеро делла Франческа, Лука Пачоли и Никколо Фонтана (Тарталья).

Задачи, связанные с объемами многогранных тел, находят применение в природе. Например, простейшее морское животное феодария, обитающее на большой глубине, имеет скелет в форме икосаэдра (правильного двадцатигранника, каждая грань которого является правильным треугольником). Из двенадцати вершин скелета выходят иглы, позволяющие феодарии защищаться от хищников. Среди всех двадцатигранников икосаэдр имеет наибольший объем при наименьшей площади поверхности. Это свойство позволяет организму справиться с высоким давлением на морской глубине.

Сравнительно недавно было выяснено, что форму икосаэдра имеет и большинство вирусов. Именно она предоставляет им возможность "хранить" большое количество генетической информации при малых размерах.

Математика Паппа Александрийского в IV в н.э. заинтересовал тот факт, что пчелиные соты имеют форму правильного шестиугольника, а не другого правильного многоугольника. Примечательно, что при фиксированном количестве затраченного воска ячейка именно такой формы имеет наибольший объем [1].

Благодаря пчелиным сотам получила свое название сотовая связь. Зона распространения сигнала каждой базовой станции имеет форму шестиугольника. При этом станции размещаются таким образом, чтобы зоны прилегали друг к другу по принципу "ячейка к ячейке". Вся сеть имеет вид, схожий с видом пчелиных сот. Такое расположение станций создает условия для исправного соединения.

Задачи, которые в вышеописанных примерах так изящно решила природа, часто возникают на производстве, а также в строительстве, когда требуется охватить участок максимальной площади (или пространство максимального объема), затратив при этом минимальное количество ресурсов.

Таким образом, задачи оптимизации объемов многогранников остаются актуальными как в природе, так и в жизни современного человека.

Обзор литературы. Постановка задачи

В 1938 г. в [2] было доказано, что по четырем известным значениям площадей граней трехмерного тетраэдра нельзя однозначно определить его объем. Также в статье рассматривался вопрос существования максимума и минимума объема тетраэдра при заданных значениях площадей его граней. Автор показал, что при таких условиях величина объема имеет верхнюю границу и не имеет нижней.

В [3] обсуждалась задача построения многогранника наибольшего объема при известной площади его поверхности и заданном количестве граней. Особое внимание было уделено случаям, когда требуемое количество граней достаточно велико, поскольку при таком условии возрастает и количество типов многогранников, среди которых нужно выбрать оптимальный.

Задача нахождения минимума объема выпуклого многогранника в пространстве произвольной размерности рассматривалась в [4]. В работе было доказано, что при любых заданных значениях площадей граней минимальный возможный объем многогранника равен нулю.

Максимизация объема ортоцентрического тетраэдра в пространстве произвольной размерности обсуждалась в [5]. В статье выделено несколько задач нахождения наибольшего значения объема при различных ограничениях: при заданных значениях расстояний от фиксированной точки тетраэдра до его граней, при заданных значениях расстояний от фиксированной точки тетраэдра до его вершин, при заданных координатах центроида и т.д.

В настоящей работе рассматривается задача максимизации объема тетраэдра при заданных значениях площадей его граней. Сравнивается оригинальный подход Лагранжа [6] с подходом, развитым Борхардтом [7] для решения многомерного аналога задачи. Целью ставится выведение алгебраического уравнения, корнем которого является искомый объем.

Глава 1. Основные понятия. Математическая формулировка задачи

1.1. Объем и площадь грани тетраэдра

Объем тетраэдра с вершинами $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$, $P_4 = (x_4, y_4, z_4)$ равен абсолютной величине выражения [8]

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Площадь треугольника с вершинами $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$, $P_4 = (x_4, y_4, z_4)$ равна абсолютной величине выражения

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Площади граней тетраэдра с вершинами $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$, $P_4 = (x_4, y_4, z_4)$ вычисляются по формулам (здесь S_i — площадь грани, лежащей против вершины P_i):

$$S_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)^2},$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_2}\right)^2},$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_3}\right)^2},$$

$$S_4 = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x_4}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_4}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_4}\right)^2}.$$

Объем тетраэдра в пространстве размерности $n-1$ равен абсолютной величине выражения

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n-1)} & 1 \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n-1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n-1)} & 1 \end{vmatrix}, \tag{1}$$

где $x_i^{(1)} x_i^{(2)} \ldots x_i^{(n-1)}$, $\quad i = 1, \ldots, n,$ — координаты вершин тетраэдра. Площади граней этого тетраэдра вычисляются как модули выражений

$$S_i = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i^{(j)}}\right)^2}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

1.2. Математическая постановка задачи

Пусть заданы константы $s_1, \ldots, s_n$ такие, что $s_n = \max(s_1, \ldots, s_n)$. Требуется найти максимум величины (1) при ограничениях

$$s_i = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i^{(j)}}\right)^2}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

1.3. Теория исключения

Для полиномов

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \quad \text{и} \quad g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

($a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$) составим квадратную матрицу порядка $m+n$:

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & \dots & \dots & & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \dots & & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_{m-1} & b_m \\ 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & \dots & & \dots & b_m & 0 \\ \vdots & & & \dots & & & & & & \vdots \\ 0 & b_0 & \dots & \dots & & b_m & \dots & & \dots & 0 \\ b_0 & \dots & \dots & & b_m & 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix} ,$$

где элементы выше a_n и b_0 и ниже a_0 и b_m все равны нулю.

Определение 1 *Выражение* $R(f,g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} detM$ *называется результантом полиномов* f *и* g.

Теорема 1 $R(f,g) = 0$ *тогда и только тогда, когда полиномы* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют общий корень.*

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

Определение 2 *Результант* $R_y(f(x,y), g(x,y))$ *полиномов* $f(x,y)$ *и* $g(x,y)$, *рассматриваемых как полиномы по переменной* y, *называется называется элиминантой системы уравнений по переменной* x.

С помощью элиминанты решение системы из двух уравнений с двумя переменными сводится к решению одного уравнения от одной переменной. Говорят, что другая переменная исключена [9].

Глава 2. Трехмерное пространство

Для существования вещественного решения задачи в трехмерном пространстве необходимо, чтобы заданные значения площадей граней тетраэдра удовлетворяли условию

$$s_4 < s_1 + s_2 + s_3.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2,\\
\sigma_2 &= s_1^2 s_2^2 + s_1^2 s_3^2 + s_1^2 s_4^2 + s_2^2 s_3^2 + s_4^2 s_2^2 + s_3^2 s_4^2,\\
\sigma_3 &= s_1^2 s_2^2 s_3^2 + s_1^2 s_2^2 s_4^2 + s_1^2 s_4^2 s_3^2 + s_4^2 s_2^2 s_3^2,\\
\sigma_4 &= s_1^2 s_2^2 s_3^2 s_4^2,\\
c_i &= 16 s_i^2, \quad i = \overline{1,4},\\
V_1 &= (6V)^4,\\
v &= V^4.
\end{aligned}$$

2.1. Подход Лагранжа

Решением этой задачи в трехмерном пространстве занимался Лагранж. В 1773 году он получил уравнение четвертой степени относительно длины одной из граней тетраэдра. Из полученного им уравнения выводится уравнение относительно четвертой степени искомого объема:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1^8\sigma_4 - 16\sigma_1^6\sigma_2\sigma_4 + 96\sigma_1^4\sigma_2^2\sigma_4 - 256\sigma_1^2\sigma_4\sigma_2^3 + 256\sigma_2^4\sigma_4 - 128\sigma_1^4\sigma_4^2 +\\
&+ 1024\sigma_1^2\sigma_4^2\sigma_2 - 2048\sigma_2^2\sigma_4^2 + 4096\sigma_4^3 + (81\sigma_1^6\sigma_3 - 972\sigma_1^4\sigma_2\sigma_3 +\\
&+ 3888\sigma_3\sigma_1^2\sigma_2^2 - 5184\sigma_3\sigma_2^3 - 3240\sigma_1^5\sigma_4 + 25920\sigma_1^3\sigma_2\sigma_4 -\\
&- 51840\sigma_1\sigma_4\sigma_2^2 - 46656\sigma_1^2\sigma_3\sigma_4 + 186624\sigma_3\sigma_4\sigma_2 -\\
&- 124416\sigma_1\sigma_4^2)v + (6561\sigma_1^4\sigma_2 - 52488\sigma_2^2\sigma_1^2 + 104976\sigma_2^3 -\\
&- 236196\sigma_1^3\sigma_3 + 944784\sigma_3\sigma_1\sigma_2 - 2834352\sigma_3^2 + 2204496\sigma_1^2\sigma_4 -\\
&- 3779136\sigma_2\sigma_4)v^2 + (531441\sigma_1^3 - 19131876\sigma_1\sigma_2 +\\
&+ 114791256\sigma_3)v^3 - 1162261467v^4 = 0. \qquad (2)
\end{aligned}$$

1.2. Подход Борхардта

Борхардт решал поставленную задачу в пространстве произвольной размерности [7]. В настоящем разделе рассматриваются полученные им выражения для объема трехмерного тетраэдра и с их помощью выводятся алгебраические уравнения. Результат сравнивается с результатом, полученным в [6].

2.2.1. Первый случай

Если для заданных значений площадей граней тетраэдра выполняется условие $s_4^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$, то искомый объем удовлетворяет равенству

$$v = \frac{1}{82944} c_1 c_2 c_3. \tag{3}$$

Подставив в уравнение (2) $s_i^2 = \frac{1}{16} c_i$, $i = \overline{1,4}$, а затем $c_4 = c_1 + c_2 + c_3$, получаем

$$(-82944v + c_1 c_2 c_3) \left(\frac{14348907}{1024} v^3 - \dots \right) = 0,$$

Очевидно, что (3) является корнем этого уравнения.

2.2.2. Второй случай

Если для заданных значений площадей граней тетраэдра выполняется условие $s_4^2 > s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$, то искомый объем удовлетворяет равенству

$$V_1 = \frac{1}{16} \zeta_0 (\sqrt{\zeta_0 + c_1} - \sqrt{\zeta_0})(\sqrt{\zeta_0 + c_2} - \sqrt{\zeta_0}) \times \\ \times (\sqrt{\zeta_0 + c_3} - \sqrt{\zeta_0})(\sqrt{\zeta_0 + c_4} + \sqrt{\zeta_0}), \tag{4}$$

где ζ_0 — единственный положительный корень уравнения

$$2\sqrt{\zeta} - \sqrt{\zeta + c_1} - \sqrt{\zeta + c_2} - \sqrt{\zeta + c_3} + \sqrt{\zeta + c_4} = 0.$$

Чтобы вывести алгебраическое уравнение, делаем замену переменных

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{\zeta}, \\ z_1 &= \sqrt{\zeta + c_1} - \sqrt{\zeta}, \\ z_2 &= \sqrt{\zeta + c_2} - \sqrt{\zeta}, \\ z_3 &= \sqrt{\zeta + c_3} - \sqrt{\zeta}, \\ z_4 &= \sqrt{\zeta + c_4} + \sqrt{\zeta}. \end{aligned}$$

Получим систему

$$z_0^2 z_1 z_2 z_3 z_4 - 16V_1 = 0, \tag{5}$$

$$z_1^2 + 2z_0 z_1 - c_1 = 0, \tag{6}$$

$$z_2^2 + 2z_0 z_2 - c_2 = 0, \tag{7}$$

$$z_3^2 + 2z_0 z_3 - c_3 = 0, \tag{8}$$

$$z_1^2 - 2z_0 z_4 - c_4 = 0, \tag{9}$$

$$z_1 + z_2 + z_3 - z_4 + 2z_0 = 0.$$

Подставив в уравнения (5) — (9) $z_4 = z_1 + z_2 + z_3 + 2z_0$, получим систему

$$z_0^2 z_1^2 z_2 z_3 + z_0^2 z_1 z_2^2 z_3 + z_0^2 z_1 z_2 z_3^2 + 2z_0^3 z_1 z_2 z_3 - 16V_1, \tag{10}$$
$$z_1^2 + 2z_0 z_1 - c_1 = 0, \tag{11}$$
$$z_2^2 + 2z_0 z_2 - c_2 = 0, \tag{12}$$
$$z_3^2 + 2z_0 z_3 - c_3 = 0, \tag{13}$$
$$z_1^2 + 2z_1 z_2 + 2z_1 z_3 + 2z_0 z_1 + z_2^2 + 2z_2 z_3 + 2z_2 z_0 + z_3^2 + 2z_3 z_0 - c_4 = 0. \tag{14}$$

Исключив попарно из уравнений (10) и (11), (10) и (12), (10) и (13), (10) и (14) переменную z_0, получим четыре уравнения первой степени относительно V_1

$$z_1(64z_1^2 V_1 - z_1^5 z_3^2 z_2 - z_1^5 z_3 z_2^2 + \ldots) = 0, \tag{15}$$
$$z_2(64z_2^2 V_1 - z_2^5 z_3^2 z_1 - z_2^5 z_3 z_1^2 + \ldots) = 0, \tag{16}$$
$$z_3(64z_3^2 V_1 - z_3^5 z_2^2 z_1 - z_3^5 z_2 z_1^2 + \ldots) = 0, \tag{17}$$
$$48z_1 z_2 z_3 V_1 + 31104 z_3^2 z_2 V_1 + \ldots = 0. \tag{18}$$

Величины z_1, z_2 и z_3 не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Из уравнений (15) и (18), (16) и (18), (17) и (18) попарно исключаем переменную z_1. Разложив полученные уравнения на множители, получим

$$(z_2 + z_1)^3 z_2^2 z_3^2 V_1 (4096 z_3^4 V_1^2 + \ldots)(V_1^6 + \ldots) = 0,$$
$$z_3^2 z_2^6 V_1 (4096 z_2^3 V_1^2 + \ldots)(8748 z_2^6 V_1^2 + \ldots) = 0,$$
$$z_3^6 z_2^2 V_1 (4096 z_3^3 V_1^2 + \ldots)(136 z_3^1 0 V_1^2 + \ldots) = 0.$$

Величины $V_1(z_2+z_1)^3 z_2^2 z_3^2$, $z_3^2 z_2^6 V_1$ и $z_3^6 z_2^2 V_1$ не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Полиномы $V_1^6 + \ldots$, $8748 z_2^6 V_1^2 + \ldots$ и $6136 z_3^1 0 V_1^2 + \ldots$ не позволяют продолжить исключение переменных. Имеем три уравнения второй степени относительно V_1:

$$4096 z_3^4 V_1^2 + 16384 V_1^2 z_2 z_3^3 + 24576 V_1^2 z_3^2 z_2^2 + \ldots = 0, \tag{19}$$
$$4096 V_1^2 z_2^3 - 192 z_2^5 V_1 z_3^2 c_2 - 4 z_3^2 c_2^4 c_4 z_2^3 + \ldots = 0, \tag{20}$$
$$4096 z_3^3 V_1^2 - z_3^9 z_2^2 c_4^2 + 128 z_3^2 z_2 c_4 c_3^2 V_1 + \ldots = 0. \tag{21}$$

Чтобы дальнейшие вычисления не были слишком громоздкими, зафиксируем $c_1 = 4, c_2 = 9, c_3 = 16, c_4 = 36$ (условия $c_4 > c_1+c_2+c_3$ и $\sqrt{c_4} < \sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}+\sqrt{c_3}$ для этих значений выполняются). Получим

$$1536 V_1^2 z_2^2 z_3^2 + 1024 V_1^2 z_3 z_2^3 - 480 z_3 z_2^7 V_1 + \ldots = 0, \tag{22}$$
$$1024 z_2^3 V_1^2 + 11664 z_3^2 V_1 z_2 - 81648 z_2^2 V_1 z_3 + \ldots = 0, \tag{23}$$
$$1024 z_3^3 V_1^2 + 24576 z_3^4 z_2 V_1 - 12288 z_3^3 z_2^2 V_1 + \ldots = 0. \tag{24}$$

Из уравнений (22) и (24), (23) и (24) попарно исключаем переменную z_2.

Разложив полученные уравнения на множители, получим

$$z_3^{12}(8192V_1^4z_3^4 + \ldots)(z_3^{26}V_1^{16} + \ldots) = 0,$$
$$z_3^{14}V_1^4(1048576V_1^4z_3^4 + \ldots)(642467z_3^{34}V_1^{14} + \ldots) = 0,$$

Величины z_3^{12} и $z_3^{14}V_1^4$ не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Полиномы $z_3^{26}V_1^{16} + \ldots$ и $642467z_3^{34}V_1^{14} + \ldots$ не позволяют продолжить исключение переменных. Имеем два уравнения четвертой степени относительно V_1:

$$8192z_3^4V_1^4 - 8388608V_1^3z_3^2 + 134217728V_1^3 + \ldots = 0,$$
$$1048576z_3^4V_1^4 + 17179869184V_1^3 - 402653184z_3^2V_1^3 + \ldots = 0,$$

Из этих уравнений исключаем переменную z_3. Получим уравнение

$$V_1^{64}(452984832V_1^4 + 47024373760V_1^3 + 610296477696V_1^2 - 6919138746000V_1 - \\ - 17723889500625)^2(17179869184V_1^{12} + 483841017905152V_1^{11} + \ldots) = 0 \quad (25)$$

Уравнение (2) при подстановке $v = \frac{V_1}{6^4}$, $s_i^2 = \frac{1}{16}c_i$, $i = \overline{1,4}$, а затем $c_1 = 4$, $c_2 = 9, c_3 = 16, c_4 = 36$ примет вид

$$-452984832V_1^4 - 47024373760V_1^3 - 610296477696V_1^2 + \\ + 6919138746000V_1 + 17723889500625 = 0. \quad (26)$$

Левая часть уравнения (26) совпадает с множителем левой части уравнения (25).

2.2.2. Третий случай

Введем функцию $\psi(x)$ и параметр k:

$$\psi(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - c_1} - \sqrt{x - c_2} - \sqrt{x - c_3},$$

$$k = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi(c_4) > 0, \\ -1, & \text{если } \psi(c_4) < 0. \end{cases}$$

Если для заданных значений площадей граней тетраэдра выполняется условие $s_4^2 < s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$, то искомый объем удовлетворяет равенству

$$V_1 = \frac{1}{16}\xi_0(\sqrt{\xi_0} - \sqrt{\xi_0 - c_1})(\sqrt{\xi_0} - \sqrt{\xi_0 - c_2}) \times \\ \times (\sqrt{\xi_0} - \sqrt{\xi_0 - c_3})(\sqrt{\xi_0} - k\sqrt{\xi_0 - c_4}),$$

где ξ_0 — единственный положительный корень уравнения

$$2\sqrt{\xi} - \sqrt{\xi - c_1} - \sqrt{\xi - c_2} - \sqrt{\xi - c_3} - k\sqrt{\xi - c_4} = 0.$$

Чтобы далее работать с конкретным значением параметра k, подставим $c_1 = 64, c_2 = 81, c_3 = 49, c_4 = 100$ (условия $c_4^2 < c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$ и

$\sqrt{c_4} < \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \sqrt{c_3}$ для этих значений выполняются). Тогда $\psi(c_4) > 0$ и $k = 1$. Как и в предыдущем случае делаем замену переменных

$$\begin{gathered} w_0 = \sqrt{\xi}, \\ w_1 = \sqrt{\xi - 64} - \sqrt{\xi}, \\ w_2 = \sqrt{\xi - 81} - \sqrt{\xi}, \\ w_3 = \sqrt{\xi - 49} - \sqrt{\xi}, \\ w_4 = \sqrt{\xi - 100} - \sqrt{\xi}. \end{gathered} \tag{27}$$

Получаем систему

$$w_0^2 w_1 w_2 w_3 w_4 - 16V_1 = 0, \tag{28}$$
$$w_1^2 + 2w_0 w_1 + 64 = 0, \tag{29}$$
$$w_2^2 + 2w_0 w_2 + 81 = 0, \tag{30}$$
$$w_3^2 + 2w_0 w_3 + 49 = 0, \tag{31}$$
$$w_1^2 + 2w_0 w_4 + 100 = 0, \tag{32}$$
$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + 2w_0 = 0. \tag{33}$$

Подставив в уравнения (28) — (32) $w_0 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)$, получим

$$2w_1^3 w_2 w_3 w_4 + w_1^2 w_2^2 w_3 w_4 + w_1^2 w_2 w_3^2 w_4 + \ldots = 0. \tag{34}$$
$$w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_1 w_4 - 64 = 0, \tag{35}$$
$$w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_2 w_4 - 81 = 0, \tag{36}$$
$$w_1 w_3 + w_2 w_3 + w_3 w_4 - 49 = 0, \tag{37}$$
$$w_1 w_4 + w_2 w_4 + w_3 w_4 - 100 = 0, \tag{38}$$

Из уравнений (34) и (35), (34) и (36), (34) и (37), (34) и (38) попарно исключаем переменную w_1. Получим систему

$$64w_2^3 V_1 + 64w_3^3 V_1 + 64w_4^3 V_1 + 192w_2 w_3^2 V_1 + \ldots = 0, \tag{39}$$
$$w_2(64w_2^2 V_1 + 13122w_2 w_4^2 w_3 + 6561w_2 w_4 w_3^2 + \ldots) = 0, \tag{40}$$
$$w_3(64w_3^2 V_1 + 2401w_3 w_4^2 w_2 + 2401w_3 w_4 w_2^2 + \ldots) = 0, \tag{41}$$
$$w_4(64V_1 w_4^2 + w_4 c_4^2 w_3^2 w_2 + w_4 c_4^2 w_3 w_2^2 + \ldots) = 0. \tag{42}$$

Величины w_2, w_3 и w_4 не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Из уравнений (39) и (42), (40) и (42), (41) и (42) попарно исключаем переменную w_2. Получим

$$\begin{gathered} w_4^6 w_3^2 V_1 (64w_4^3 V_1^2 + 172w_4^6 w_3 V_1 + \ldots)(2162688w_4^{10} V_1^2 + \ldots) = 0, \\ 64w_4^{10} w_3^2 V_1 (4096w_4^3 V_1^2 + \ldots)(262144w_4^9 V_1^3 + \ldots) = 0, \\ 64w_4^3 w_3^3 V_1 (-100w_3 + 49w_4 + \ldots)^2 (24010000w_3^2 + 5764801w_4^2 + \ldots) = 0. \end{gathered}$$

Величины $w_4^6 w_3^2 V_1$, $64w_4^{10} w_3^2 V_1$ и $64w_4^3 w_3^3 V_1$ не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Полиномы $2162688w_4^{10} V_1^2 + \ldots$,

$262144w_4^9V_1^3+\ldots$ и $24010000w_3^2+5764801w_4^2+\ldots$ не позволяют продолжить исключение переменных. Имеем три уравнения:

$$64w_4^3V_1^2+172w_4^6w_3V_1+\ldots=0, \quad (43)$$
$$4096w_4^3V_1^2+\ldots=0, \quad (44)$$
$$100w_3-49w_4-w_3^2w_4-\ldots=0. \quad (45)$$

Исключаем попарно из уравнений (43) и (45), (44) и (45) переменную w_3. Разложив полученные уравнения на множители, получим

$$w_4^6(4194304w_4^4V_1^4+41943040w_4^8V_1^3+131072w_4^{10}V_1^3+\ldots)=0,$$
$$w_4^6(4096w_4^4V_1^4+43136w_4^8V_1^3+462080000w_4^4V_1^3+128w_4^{10}V_1^3+\ldots)=0.$$

Из этих уравнений исключаем переменную w_4. Результатом будет уравнение

$$V_1^{66}(256V_1^3-382432V_1^2-1220392799V_1-342582912000)^2\times$$
$$\times(810647932926689280 0V_1^{12}+979934507416751785 90208V_1^{11}-\ldots)^2=0. \quad (46)$$

Уравнение (2) при подстановке $v=\frac{V_1}{6^4}$, $s_i^2=\frac{1}{16}c_i$, $i=\overline{1,4}$, а затем $c_1=64$, $c_2=81, c_3=49, c_4=100$ примет вид

$$\frac{59049}{65536}V_1(-793016000-3661178397V_1-1486895616V_1^2+1289945088V_1^3)=0. \quad (47)$$

Левая часть уравнения (47) совпадает с множителем левой части уравнения (46).

2.2.4. Общий случай

Т.к. все три результата, полученные в [7], свелись к одному и тому же алгебраическому уравнению, проверим, приведет ли уравнение (4) к искомому объему, если подставить в него $c_1=c, c_2=2c, c_3=3c, c_4=6c=c_1+c_2+c_3$. Подставив эти зачения в уравнения (15) — (18), получим

$$z_1(64z_1^2V_1+2z_1^2c^2z_3z_2-z_1c^2z_3^2z_2-z_1c^2z_3z_2^2-c^3z_3z_2+\ldots)=0, \quad (48)$$
$$z_2(64z_2^2V_1+8z_1c^2z_3z_2^2-4z_1c^2z_3^2z_2-4z_1^2c^2z_3z_2-8c^3z_3z_1+\ldots)=0, \quad (49)$$
$$z_3(64z_3^2V_1+18z_1c^2z_3^2z_2-9z_1c^2z_3z_2^2-9z_1^2c^2z_3z_2-27c^3z_2z_1+\ldots)=0, \quad (50)$$
$$48z_1z_2z_3V_1+24z_2z_1^2V_1+24z_3z_1^2V_1+8z_2^3V_1+\ldots=0. \quad (51)$$

Из уравнений (48) и (51), (49) и (51), (50) и (51) попарно исключаем переменную z_1. Получим систему

$$V_1(z_2+z_3)^3z_3^2z_2^2(2048V_1^2z_3^4+\ldots)(4294967296z_2^4V_1^6+\ldots)=0,$$
$$z_3^2z_2^6V_1(2048z_2^3V_1^2+384V_1z_3^2z_2^5+\ldots)(65536z_2^4V_1^2c^4+\ldots)=0,$$
$$z_3^6z_2^2V_1(2048z_3^3V_1^2+1440z_3^4z_2c^2V_1+\ldots)(1769472z_3^8V_1^2+\ldots)=0.$$

Величины $V_1(z_2+z_3)^3z_3^2z_2^2$, $z_3^2z_2^6V_1$ и $z_3^6z_2^2V_1$ не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Полиномы $4294967296z_2^4V_1^6+\ldots$, $5536z_2^4V_1^2c^4+\ldots$ и $1769472z_3^8V_1^2+\ldots$ не позволяют продолжить исключение переменных. Имеем три уравнения второй степени относительно V_1:

$$2048z_3^4V_1^2+\ldots=0, \tag{52}$$
$$2048z_2^3V_1^2+384V_1z_3^2z_2^5+\ldots=0, \tag{53}$$
$$2048z_3^3V_1^2+1440z_3^4z_2c^2V_1+\ldots=0. \tag{54}$$

Из уравнений (52) и (54), (53) и (54) попарно исключаем переменную z_2. Разложив полученные уравнения на множители, получим

$$c^4z_3^{12}(884736z_3^2c^4V_1^3+\ldots)(2448074784719624078780006\,4z_3^{24}cV_1^{16}+\ldots)=0,$$
$$c^4z_3^{12}(1990656c^5V_1^3+\ldots)(3891110078048108544z3^{18}V_1^{14}+\ldots)=0.$$

Величины $c^4z_3^{12}$ и $c^4z_3^{12}$ не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Полиномы $24480747847196240787800064z_3^{24}cV_1^{16}+\ldots$ и $3891110078048108544z3^{18}V_1^{14}+\ldots$ не позволяют продолжить исключение переменных. Имеем два уравнения третьей степени относительно V_1:

$$884736z_3^2c^4V_1^3+\ldots=0,$$
$$1990656c^5V_1^3+\ldots=0.$$

Из этих уравнений исключаем переменную z_3. Результатом будет уравнение

$$c^{54}V_1^{64}(32v-3c^3)^2(201632c^6V_1+3538944V_1^3+188006V_1^3V_1^2+ \\ +1587c^9)^2(22517998136852480\,0V_1^{12}+\ldots)^2=0 \tag{55}$$

По формуле (3) четвертая степень искомого объема при $c_1=c, c_2=2c$, $c_3=3c$ равна $v=\frac{1}{13824}c^3$. Тогда $V_1=\frac{3}{32}c^3$, что, очевидно, является корнем уравнения (55).

Попытаемся теперь вывести уравнение относительно искомого объема, не фиксируя значение наибольшей из площадей граней. В уравнения (15) — (18) подставим зачения $c_1=1, c_2=2, c_3=3$. Получим

$$z_1(64z_1^2V_1+2z_1^2z_2z_3-z_1z_2z_3^2-z_1z_2^2z_3-z_2z_3+\ldots)=0, \tag{56}$$
$$z_2(64z_2^2V_1+8z_1z_2^2z_3-4z_1z_2z_3^2-4z_1^2z_2z_3+8z_1z_3+\ldots)=0, \tag{57}$$
$$z_3(64z_3^2V_1+18z_1z_2z_3^2+9z_1z_2^2z_3+9z_1^2z_2z_3+27z_1z_2+\ldots)=0, \tag{58}$$
$$8z_1^3V_1+8z_2^3V_1+8z_3^3V_1+48z_1z_2z_3V_1+24z_2z1^2V_1+\ldots=0. \tag{59}$$

Величины z_1, z_2 и z_3 не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Исключаем попарно из уравнений (56) и (59), (57) и (59), (58) и (59), переменную z_1. Разложив полученные уравнения на множители, получим

$$(z_2+z_1)^3 z_2^2 z_3^2 V_1(4096 z_3^4 V_1^2+\ldots)(V_1^6+\ldots)=0,$$
$$z_3^2 z_2^6 V_1(512 z_3 z_2^2 c_4 V_1+\ldots)(8748 V_1^2 z_2^6+\ldots)=0,$$
$$z_3^6 z_2^2 V_1(1152 z_3^2 z_2 c_4 V_1+\ldots)(136 z_3^1 0 V_1^2+\ldots)=0.$$

Величины $(z_2+z_1)^3 z_2^2 z_3^2 V_1$, $z_3^2 z_2^6 V_1$ и $z_3^6 z_2^2 V_1$ не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Полиномы $V_1^6+\ldots$, $8748V_1^2 z_2^6+\ldots$ и $136 z_3^1 0 V_1^2+\ldots$ не позволяют продолжить исключение переменных. Имеем три уравнения второй степени относительно V_1:

$$4096 z_3^4 V_1^2+16384 V_1^2 z_2 z_3^3+24576 V_1^2 z_3^2 z_2^2+\ldots=0, \tag{60}$$
$$4096 V_1^2 z_2^3-192 z_2^5 V_1 z_3^2-4 z_3^2 c_2^4 c_4 z_2^3+\ldots=0, \tag{61}$$
$$-4096 z_3^3 V_1^2-z_3^9 z_2^2 c_4^2+128 z_3^2 z_2 c_4 V_1+\ldots=0. \tag{62}$$

Исключаем попарно из уравнений (61) и (62), (60) и (62) переменную z_2. Разложив полученные уравнения на множители, получим

$$z_3^{12} c_4^2(3538944 z_3^2 c_4 V_1^3+\ldots)(z_3^{26} V_1^{16}+\ldots)=0,$$
$$z_3^{14} V_1^4 c_4(14155776 z_3^2 c_4 V_1^3+\ldots)(642467 z_3^{34} V_1^{14}+\ldots)=0,$$

Величины z_3^{12} и z_3^{14} не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Полиномы $z_3^{26}V_1^{16}+\ldots$ и $642467 z_3^{34} V_1^{14}+\ldots$ не позволяют продолжить исключение переменных. Имеем два уравнения четвертой степени относительно V_1:

$$3538944 z_3^2 c_4 V_1^3+326592 z_3^2 c_4^3 V_1+18413568 V_1^2 z_3^4\ldots=0,$$
$$14155776 z_3^2 c_4 V_1^3+31850496 z_3^4 V_1^2+1327104 z_3^2 c_4 V_1^2+\ldots=0,$$

Из этих уравнений исключаем переменную z_3. Получим уравнение

$$\begin{aligned}
&V_1^{64} c_4^6(-393216V_1+12288c_4-73728c_4^2+6946816c_4V_1+1099776c_4^5V_1+\\
&+196608c_4^5V_1^2-80640c_4^6V_1-146800640V_1^2+2496c_4^7-435159040c_4^2V_1^2-\\
&-19584c_4^6-1660944384c_4^2V_1^3-144c_4^8+3c_4^9+77184c_4^5-7247757312V_1^3-\\
&-57982058496V_1^4+534773760c_4V_1^2+1408c_4^7V_1-156672c_4^4+6643777536c_4V_1^3+\\
&+153354240c_4^3V_1^2+8388608c_4^3V_1^3+159744c_4^3-5683200c_4^4V_1-\\
&-17334272c_4^4V_1^2-14794752V_1c_4^2+13688832c_4^3V_1)^2\times\\
&\times(4533471823554859405148 16c_4V_1^{12}-1511157274518286468382 72V_1^{12}+\ldots)=0
\end{aligned} \tag{63}$$

Если в уравнения (28) — (32) подставить $c_1=1, c_2=2, c_3=3$, не фиксируя c_4, то после действий, аналогичных действиям в разделе 2.2.2, получим уравнение

$$
\begin{gathered}
c_4^{22}V_1^{64}(-393216V_1+12288c_4-73728c_4^2+159744c_4^3-\\
-5683200V_1c_4^4+1099776V_1c_4^5-80640V_1c_4^6+13688832V_1c_4^3-14794752V_1c_4^2+\\
+6946816c_4V_1+6643777536c_4V_1^3-1660944384c_4^2V_1^3+8388608c_4^3V_1^3+\\
+1408V_1c_4^7-435159040V_1^2c_4^2-17334272V_1^2c_4^4+196608V_1^2c_4^5+534773760c_4V_1^2+\\
+153354240c_4^3V_1^2-156672c_4^4+77184c_4^5-19584c_4^6+2496c_4^7-144c_4^8-146800640V_1^2-\\
-7247757312V_1^3-57982058496V_1^4+3c_4^9)^2\times\\
\times(1511157274518286468382 72V_1^{12}+\ldots)^2=0 \quad (64)
\end{gathered}
$$

Видим, что полиномы четвертой степени относительно V_1 в левых частях (63) и (64) совпадают.

Глава 3. Четырехмерное пространство

В настоящей главе рассматриваются полученные в [7] выражения для объема четырехмерного тетраэдра и с их помощью выводятся алгебраические уравнения. Целью ставится определение степени уравнения относительно искомого объема.

Для существования вещественного решения задачи в четырехмерном пространстве необходимо, чтобы заданные значения площадей граней тетраэдра удовлетворяли условию

$$s_4 < s_1 + s_2 + s_3 + s_4.$$

Введем обозначения

$$V_2 = (6V)^6,$$
$$c_i = 16 s_i^2, \quad i = \overline{1,5}.$$

3.1. Первый случай

Если для заданных значений площадей граней тетраэдра выполняется условие $s_5^2 > s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2$, то искомый объем удовлетворяет равенству

$$V_2 = \frac{1}{512}\zeta_0^{\frac{1}{3}}(\sqrt{\zeta_0 + c_1} - \sqrt{\zeta_0})(\sqrt{\zeta_0 + c_2} - \sqrt{\zeta_0})\times$$
$$\times(\sqrt{\zeta_0 + c_3} - \sqrt{\zeta_0})(\sqrt{\zeta_0 + c_4} - \sqrt{\zeta_0})(\sqrt{\zeta_0 + c_5} + \sqrt{\zeta_0}), \quad (65)$$

где ζ_0 — единственный положительный корень уравнения

$$3\sqrt{\zeta} - \sqrt{\zeta + c_1} - \sqrt{\zeta + c_2} - \sqrt{\zeta + c_3} - \sqrt{\zeta + c_4} + \sqrt{\zeta + c_5} = 0.$$

Чтобы вывести алгебраическое уравнение, делаем замену переменных

$$z_0 = \sqrt{\zeta},$$
$$z_1 = \sqrt{\zeta + c_1} - \sqrt{\zeta},$$
$$z_2 = \sqrt{\zeta + c_2} - \sqrt{\zeta},$$
$$z_3 = \sqrt{\zeta + c_3} - \sqrt{\zeta},$$
$$z_4 = \sqrt{\zeta + c_4} - \sqrt{\zeta},$$
$$z_5 = \sqrt{\zeta + c_5} + \sqrt{\zeta}.$$

Получим систему уравнений

$$z_0^3 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 - 512 V_2 = 0, \quad (66)$$
$$z_1^2 + 2z_0 z_1 - c_1 = 0, \quad (67)$$
$$z_2^2 + 2z_0 z_2 - c_2 = 0, \quad (68)$$
$$z_3^2 + 2z_0 z_3 - c_3 = 0, \quad (69)$$
$$z_4^2 + 2z_0 z_4 - c_4 = 0, \quad (70)$$
$$z_5^2 + 2z_0 z_5 - c_5 = 0, \quad (71)$$
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - z_5 + 2z_0 = 0.$$

В уравнения (66) — (71) подставляем $z_0 = \frac{1}{2}(z_5 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4)$. Получим систему

$$2048V_1 + 3z_1z_2^2z_3^2z_4^2z_5 + 3z_1^2z_2^2z_3^2z_4z_5 + \ldots = 0 \tag{72}$$
$$z_5z_1 - z_1z_2 - z_1z_3 - z_1z_4 - c_1 = 0, \tag{73}$$
$$z_5z_2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_2z_4 - c_2 = 0, \tag{74}$$
$$z_5z_3 - z_1z_3 - z_2z_3 - z_3z_4 - c_3 = 0, \tag{75}$$
$$z_5z_4 - z_1z_4 - z_2z_4 - z_3z_4 - c_4 = 0, \tag{76}$$
$$z_5z_1 + z_5z_2 + z_5z_3 + z_5z_4 - c_5 = 0, \tag{77}$$

Исключаем попарно из уравнений (72) и (73), (72) и (74),(72) и (75),(72) и (76),(72) и (77), переменную z_4. Разложив полученные уравнения на множители, получим

$$\begin{gathered} z_1(4096V_2z_1^3 + 3z_1^3c_1^2z_5z_3^2z_2 + \ldots) = 0, \\ z_2(4096z_2^3V_2 + 3z_1c_2^2z_5z_3^2z_2^3 + \ldots) = 0, \\ z_3(4096z_3^3V_2 + 3z_1c_3^2z_5^2z_3^3z_2 + \ldots) = 0, \\ 24576z_5^2z_2^2V_2 + 16384z_1^3z_3V_2 + \ldots) = 0, \\ z_5(4096z_5^3V_2 + 3z_5^3c_5^2z_3z_2z_1^2 + \ldots) = 0. \end{gathered} \tag{78}$$

Чтобы дальнейшие вычисления не были слишком громоздкими, зафиксируем $c_1 = 4, c_2 = 9, c_3 = 16, c_4 = 36, c_5 = 81$ (условия $c_5 > c_1 + c_2 + c_3 + c_4$ и $\sqrt{c_5} < \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \sqrt{c_3} + \sqrt{c_4}$ выполняются). Получим

$$z_1(4096V_2z_1^3 + 48z_1^3z_5z_3^2z_2 + \ldots) = 0, \tag{79}$$
$$z_2(4096z_2^3V_2 + 243z_1z_5z_3^2z_2^3 + \ldots) = 0, \tag{80}$$
$$z_3(4096z_3^3V_2 + 768z_1z_5^2z_3^3z_2 + \ldots) = 0, \tag{81}$$
$$24576z_5^2z_2^2V_2 + 16384z_1^3z_3V_2 + \ldots) = 0, \tag{82}$$
$$z_5(4096z_5^3V_2 + 19683z_5^3z_3z_2z_1^2 + \ldots) = 0. \tag{83}$$

Величины z_1 и z_2, z_3 и z_5 не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Исключаем попарно из уравнений (79) и (82), (79) и (83), 79) и (81), 79) и (80), переменную z_3.

$$\begin{gathered} z_1z_2^2z_5^2V_2(524288z_1^5V_2^2 + \ldots)(6220800z_1^{21}z_2^2z_5^4V_2^2 + \ldots) = 0, \\ z_1z_2^2z_5V_2(z_1z_5^2 - 81z_1 - 4z_5 + z_1^2z_5)^2(12288z_1^7z_5^7V_2 + \ldots) = 0, \\ z_1^2z_2^2z_5^2(327680z_1^5z_2z_5V_2 + \ldots)(35184372088832z_1^{16}z_5z_2V_2^5 + \ldots) = 0, \\ z_1z_2z_5^2V_2(9z_1 - 4z_2 + z_1^2z_2 - z_2^2z_1)^2(11501568z_1^4z_2^4V_2 + \ldots) = 0. \end{gathered}$$

Величины $z_1z_2^2z_5^2V_2$, $z_1z_2^2z_5V_2$, $z_1^2z_2^2z_5^2$ и $z_1z_2z_5^2V_2$ не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Полиномы $6220800z_1^{21}z_2^2z_5^4V_2^2 + \ldots$, $12288z_1^7z_5^7V_2 + \ldots$, $35184372088832z_1^{16}z_5z_2V_2^5 + \ldots$ и $11501568z_1^4z_2^4V_2 + \ldots$ не позволяют продолжить исключение переменных. Имеем четыре уравнения:

$$524288z_1^5V_2^2 + \ldots = 0, \tag{84}$$

$$z_1z_5^2 - 81z_1 - 4z_5 + z_1^2z_5 = 0, \tag{85}$$

$$327680z_1^5z_2z_5V_2 + \ldots = 0, \tag{86}$$

$$9z_1 - 4z_2 + z_1^2z_2 - z_2^2z_1 = 0. \tag{87}$$

Исключаем попарно из уравнений (86) и (87), (84) и (87), (85) и (87) переменную z_2. Разложив полученные уравнения на множители, получим

$$z_1^4(1099511627776z_1^{10}V_2^4 + \ldots) = 0, \tag{88}$$

$$z_1^4(17592186044416z_1^{10}V_2^4 + \ldots) = 0, \tag{89}$$

$$-81z_1 - 4z_5 + z_1^2z_5 + z_1z_5^2 = 0. \tag{90}$$

Исключаем попарно из уравнений (88) и (90), (89) и (90) переменную z_1. Получим

$$z_5^{11}(147573952589676412928z_5^{18}V_2^8 + \ldots) = 0,$$
$$z_5^{11}(9444732965739290427392z_5^{18}V_2^8 + \ldots) = 0.$$

Из этих уравнений исключаем z_5. Результатом будет уравнение

$$V_2^{388}(40532396646334464V_2^{10} + \ldots)^2(2^{169} \cdot 7411887V_2^{27} + \ldots)^2 \times$$
$$\times (2^{162} \cdot 19683V_2^{28} + \ldots)^2(2^{193} \cdot 13689V_2^{33} + \ldots)^2 = 0 \tag{91}$$

Видим, что уравнение относительно V_2 имеет степень 584.

В систему (78) подставим значения $c_1 = 1, c_2 = 4, c_3 = 30, c_4 = 49, c_5 = 100$ (условия $c_5 > c_1 + c_2 + c_3 + c_4$ и $\sqrt{c_5} < \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \sqrt{c_3} + \sqrt{c_4}$ выполняются). Получим

$$z_1(4096V_2z_1^3 + 3z_1^3z_5z_3^2z_2 + \ldots) = 0, \tag{92}$$

$$z_2(4096z_2^3V_2 + 48z_1z_5z_3^2z_2^3 + \ldots) = 0, \tag{93}$$

$$z_3(4096z_3^3V_2 + 2700z_1z_5^2z_3^3z_2 + \ldots) = 0, \tag{94}$$

$$24576z_5^2z_2^2V_2 + 16384z_1^3z_3V_2 + \ldots) = 0, \tag{95}$$

$$z_5(4096z_5^3V_2 + 30000z_5^3z_3z_2z_1^2 + \ldots) = 0. \tag{96}$$

Величины z_1 и z_2, z_3 и z_5 не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Исключаем попарно из уравнений (92) и (95), (92) и (96), (92) и (94), (92) и (93) переменную z_3.

$$z_1z_2^2z_5^2V_2(524288z_1^5V_2^2 + \ldots)(6220800z_1^{21}z_2^2z_5^4V_2^2 + \ldots) = 0,$$
$$z_1z_2^2z_5V_2(4z_1 - z_2 + z_1^2z_2 - z_2^2z_1)^2(12741z_1^7z_5^7V_2 + \ldots) = 0,$$
$$z_1^2z_2^2z_5^2(1024z_1^5z_2z_5V_2 + \ldots)(351843853362z_1^{16}z_5z_2V_2^5 + \ldots) = 0,$$
$$z_1z_2z_5^2V_2(z_1z_5^2 - 100z_1 - z_5 + z_1^2z_5)^2(11407768z_1^4z_2^4V_2 + \ldots) = 0.$$

Величины $z_1z_2^2z_5^2V_2$, $z_1z_2^2z_5V_2$, $z_1^2z_2^2z_5^2$ и $z_1z_2z_5^2V_2$ не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Полиномы

$6220800z_1^{21}z_2^2z_5^4V_2^2 + \ldots$, $12741z_1^7z_5^7V_2 + \ldots$, $351843853362z_1^{16}z_5z_2V_2^5 + \ldots$ и $11407768z_1^4z_2^4V_2+\ldots$ не позволяют продолжить исключение переменных. Имеем четыре уравнения:

$$524288z_1^5V_2^2 + \ldots = 0, \tag{97}$$
$$4z_1 - z_2 + z_1^2z_2 - z_2^2z_1 = 0, \tag{98}$$
$$1024z_1^5z_2z_5V_2 + \ldots = 0, \tag{99}$$
$$z_1z_5^2 - 100z_1 - z_5 + z_1^2z_5 = 0. \tag{100}$$

Исключаем попарно из уравнений (99) и (100), (97) и (100), (98) и (100) переменную z_2. Разложив полученные уравнения на множители, получим

$$z_1^4(128849018880z_1^{10}V_2^4 + \ldots) = 0, \tag{101}$$
$$z_1^4(17179869184z_1^{10}V_2^4 + \ldots) = 0, \tag{102}$$
$$z_1z_5^2 - 100z_1 - z_5 + z_1^2z_5 = 0. \tag{103}$$

Исключаем попарно из уравнений (101) и (103), (102) и (103) переменную z_1. Получим систему

$$z_5^{11}(276084228515625z_5^{18}V_2^8 + \ldots) = 0,$$
$$z_5^{11}(137438953472z_5^{18}V_2^8 + \ldots) = 0.$$

Из этих уравнений исключаем z_5. Результатом будет уравнение

$$\begin{aligned} V_2^{384}(&4397353518610711455481678071956376213520384V_2^{11} + \ldots)^2\times\\ &\times(2^{304}\cdot 401144404777208263437525V_2^{27} + \ldots)^2\times\\ &\times(2^{284}\cdot 89731541058887358225V_2^{34} + \ldots)^2\times\\ &\times(2^{217}\cdot 9972798048141453978158671875V_2^{28} + \ldots)^2 = 0 \end{aligned} \tag{104}$$

Как и в предыдущем случае, имеем уравнение 584 степени, из чего можно сделать вывод, что уравнение относительно V_2 в имеет такую степень и в общем случае. Однако, результат, полученный в следующем разделе, не позволяют этого утверждать.

3.2. Второй случай

Введем функцию $\psi_1(x)$ и параметр k:

$$\psi_1(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{x-c_1} - \sqrt{x-c_2} - \sqrt{x-c_3} - \sqrt{x-c_4},$$
$$k = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi(c_5) > 0,\\ -1, & \text{если } \psi(c_5) < 0. \end{cases}$$

Если для заданных значений площадей граней тетраэдра выполняется условие $s_5^2 < s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2$, то искомый объем удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} V_1 = \frac{1}{512}\xi_0(\sqrt{\xi_0} - \sqrt{\xi_0 - c_1})(\sqrt{\xi_0} - \sqrt{\xi_0 - c_2})\times&\\ \times(\sqrt{\xi_0} - \sqrt{\xi_0 - c_3})(\sqrt{\xi_0} - \sqrt{\xi_0 - c_4})(\sqrt{\xi_0} - k\sqrt{\xi_0 - c_5}),& \end{aligned}$$

где ξ_0 — единственный положительный корень уравнения

$$3\sqrt{\xi}-\sqrt{\xi-c_1}-\sqrt{\xi-c_2}-\sqrt{\xi-c_3}-\sqrt{\xi-c_4}-k\sqrt{\xi-c_5}=0.$$

Чтобы далее работать с конкретным значением параметра k, зафиксируем $c_1=4, c_2=9, c_3=16, c_4=36, c_5=49$ (условия $\sqrt{c_5}<\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}+\sqrt{c_3}+\sqrt{c_4}$ и $c_5^2<c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2$ для этих значений выполняется). Тогда $\psi(c_5)<0$ и $k=-1$. Делаем замену переменных

$$\begin{gathered}
w_0=\sqrt{\xi},\\
w_1=\sqrt{\xi-4}-\sqrt{\xi},\\
w_2=\sqrt{\xi-9}-\sqrt{\xi},\\
w_3=\sqrt{\xi-16}-\sqrt{\xi},\\
w_4=\sqrt{\xi-36}-\sqrt{\xi},\\
w_5=\sqrt{\xi-49}+\sqrt{\xi}.
\end{gathered}$$

, Получим систему уравнений

$$w_0^3w_1w_2w_3w_4w_5-512V_2=0, \tag{105}$$
$$w_1^2+2w_0w_1+4=0, \tag{106}$$
$$w_2^2+2w_0w_2+9=0, \tag{107}$$
$$w_3^2+2w_0w_3+16=0, \tag{108}$$
$$w_4^2+2w_0w_4+36=0, \tag{109}$$
$$w_5^2-2w_0w_5+49=0, \tag{110}$$
$$w_1+w_2+w_3+w_4-w_5+2w_0=0.$$

В уравнения (105) — (110) подставляем $z_0=\frac{1}{2}(z_5-z_1-z_2-z_3-z_4)$. Получим систему

$$2048V_2+3w1^2w2^2w3w4w5^2+3w1w2^2w3^2w4w5^2+\ldots=0, \tag{111}$$
$$2w_1^2-w_5w_1+w_1w_2+w_1w_3+w_1w_4+4=0, \tag{112}$$
$$2w_2^2-w_5w_2+w_1w_2+w_2w_3+w_2w_4+9=0, \tag{113}$$
$$2w_3^2-w_5w_3+w_1w_3+w_2w_3+w_3w_4+16=0, \tag{114}$$
$$2w_4^2-w_5w_4+w_1w_4+w_2w_4+w_3w_4+36=0, \tag{115}$$
$$2w_5^2-w_5w_1-w_5w_2-w_5w_3-w_5w_4+49=0. \tag{116}$$

Из уравнений (111) и (114), (111) и (115), (111) и (113), (111) и (112) попарно исключаем переменную w_4. Разложив полученные уравнения на множители, получим

$$w_1(4096V_2w_1^3+48w_1^3w_5w_3^2w_2+\ldots)=0, \tag{117}$$
$$w_2(4096w_2^3V_2+243w_1w_5w_3^2w_2^3+\ldots)=0, \tag{118}$$
$$w_3(4096w_3^3V_2+768w_1w_5^2w_3^3w_2+\ldots)=0, \tag{119}$$
$$24576w_5^2w_2^2V_2+3888w_1^3w_3V_2+\ldots=0, \tag{120}$$
$$w_5(4096w_5^3V_2+7203w_5^3w_3w_2w_1^2+\ldots)=0. \tag{121}$$

Величины w_1 и w_2, w_3 и w_5 не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем.Исключаем попарно из уравнений (117) и (120), (117) и (121), (117) и (119), (117) и (118), переменную w_3.

$$w_1^2w_2^2w_5^4V_2^2(4096w_1^6V_2^2+\ldots)(46080w_1^{32}w_2^2w_5^4V_2^2+\ldots)=0,$$
$$w_1w_2^2w_5V_2(49w_1+4w_5+w_1^2w_5+w_1w_5^2)^2(1048576w_1w_5^5V_2+\ldots)=0,$$
$$w_1^2w_2^2w_5^2(281474976710656w_1^{43}w_2^5w_5^6V_2+\ldots)(10240w_5w_1^{21}w_2^2V_2^5+\ldots)=0,$$
$$w_1w_2w_5^2V_2(w_1^2w_2-9w_1+4w_2-w_2^2w_1)^2(2293760w_1^3w_2^5V_2+\ldots)=0.$$

Величины $w_1^2w_2^2w_5^4V_2^2$, $w_1w_2^2w_5V_2$, $w_1^2w_2^2w_5^2$ и $w_1w_2w_5^2V_2$ не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Полиномы $46080w_1^{32}w_2^2w_5^4V_2^2+\ldots$, $1048576w_1w_5^5V_2+\ldots$, $10240w_5w_1^{21}w_2^2V_2^5+\ldots$ и $2293760w_1^3w_2^5V_2+\ldots$ не позволяют продолжить исключение переменных. Имеем четыре уравнения:

$$4096w_1^6V_2^2+\ldots=0, \tag{122}$$
$$49w_1+4w_5+w_1^2w_5+w_1w_5^2=0, \tag{123}$$
$$281474976710656w_1^{43}w_2^5w_5^6V_2+\ldots=0, \tag{124}$$
$$w_1^2w_2-9w_1+4w_2-w_2^2w_1=0. \tag{125}$$

Исключаем попарно из уравнений (124) и (125), (122) и (125), (123) и (125), переменную w_2. Разложив полученные уравнения на множители, получим

$$w_1^4(1099511627776w_1^{12}V_2^4+\ldots)=0, \tag{126}$$
$$w_1^4(17592186044416w_1^{12}V_2^4+\ldots)=0, \tag{127}$$
$$9w_1+4w_5+w_1^w{}_5+w_1w_5^2=0. \tag{128}$$

Исключаем попарно из уравнений (126) и (128), (127) и (128), переменную w_1. Получим систему

$$w_5^8(295147905179352825856w_5^{24}V_2^8+\ldots)=0,$$
$$w_5^8(377789318629571617095 68w_5^{24}V_2^8+\ldots)=0.$$

Из этих уравнений исключаем w_5. Результатом будет уравнение

$$\begin{gathered}V_2^{386}(2^{96}\cdot 30517578125V_2^{15}+\ldots)^2(2^{215}\cdot 4431533203125V_2^{32}+\ldots)^2\times\\ \times(2^{214}\cdot 15569560546875V_2^{32}+\ldots)^2(2^{220}\cdot 8341734375V_2^{34}+\ldots)^2=0\end{gathered} \tag{129}$$

Имеем уравнение 612 степени относительно V_2

Зафиксируем теперь значения $c_1=4, c_2=9, c_3=1, c_4=25, c_5=64$ (условия $c_5>c_1+c_2+c_3+c_4$ и $\sqrt{c_5}<\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}+\sqrt{c_3}+\sqrt{c_4}$ для этих значений выполняются). Тогда $\psi(c_4) < 0$ и $k = -1$. Делаем замену переменных

$$\begin{gathered} w_0 = \sqrt{\xi}, \\ w_1 = \sqrt{\xi - 4} - \sqrt{\xi}, \\ w_2 = \sqrt{\xi - 9} - \sqrt{\xi}, \\ w_3 = \sqrt{\xi - 1} - \sqrt{\xi}, \\ w_4 = \sqrt{\xi - 25} - \sqrt{\xi}, \\ w_5 = \sqrt{\xi - 100} + \sqrt{\xi}. \end{gathered}$$

, Получим систему уравнений

$$w_0^3 w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 - 512 V_2 = 0, \tag{130}$$
$$w_1^2 + 2w_0 w_1 + 4 = 0, \tag{131}$$
$$w_2^2 + 2w_0 w_2 + 9 = 0, \tag{132}$$
$$w_3^2 + 2w_0 w_3 + 1 = 0, \tag{133}$$
$$w_4^2 + 2w_0 w_4 + 25 = 0, \tag{134}$$
$$w_5^2 - 2w_0 w_5 + 64 = 0, \tag{135}$$
$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - w_5 + 2w_0 = 0.$$

В уравнения (130) — (135) подставляем $z_0 = \frac{1}{2}(z_5 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4)$. Получим систему

$$2048 V_2 + 3w_1^2 w_2^2 w_3 w_4^2 w_5 3 w_1^2 w_2 w_3 w_4^2 w_5^2 + \ldots = 0, \tag{136}$$
$$2w_1^2 - w_5 w_1 + w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_1 w_4 + 4 = 0, \tag{137}$$
$$2w_2^2 - w_5 w_2 + w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_2 w_4 + 9 = 0, \tag{138}$$
$$2w_3^2 - w_5 w_3 + w_1 w_3 + w_2 w_3 + w_3 w_4 + 16 = 0, \tag{139}$$
$$2w_4^2 - w_5 w_4 + w_1 w_4 + w_2 w_4 + w_3 w_4 + 36 = 0, \tag{140}$$
$$2w_5^2 - w_5 w_1 - w_5 w_2 - w_5 w_3 - w_5 w_4 + 49 = 0. \tag{141}$$

Исключаем попарно из уравнений (136) и (137),(136) и (138), (136) и (139), (136) и (140), (136) и (141) переменную w_4. Разложив полученные уравнения на множители, получим

$$w_1(4096 V_2 w_1^3 + 48 w_1^3 w_5 w_3^2 w_2 + \ldots) = 0, \tag{142}$$
$$w_2(4096 w_2^3 V_2 + 243 w_1 w_5 w_3^2 w_2^3 + \ldots) = 0, \tag{143}$$
$$w_3(4096 w_3^3 V_2 + 3 w_1 w_5^2 w_3^3 w_2 + \ldots) = 0, \tag{144}$$
$$125 w_1^3 w_2 w_3 w_5 V_2 + 125 w_1 w_2^3 w_3 w_5 V_2 + \ldots = 0, \tag{145}$$
$$w_5(4096 w_5^3 V_2 + 12288 w_5^3 w_3 w_2 w_1^2 + \ldots) = 0. \tag{146}$$

Величины w_1 и w_2, w_3 и w_5 не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Исключаем попарно из уравнений (142) и (145),

(142) и (146), (142) и (144), (142) и (143) переменную w_3.

$$w_1^2 w_2^4 w_5^4 V_2^2 (16777216 w_1^6 V^2 + \ldots)(3518437208883200000 w_1 V_2^2 + \ldots) = 0,$$
$$w_1 w_2^2 w_5 V_2 (64 w_1 + 4 w_5 + w_1^2 w_5 + w_1 w_5^2)^2 (524288 w_1^2 w_5^6 V_2 + \ldots) = 0,$$
$$w_1^2 w_2^2 w_5^2 (16777216 w_1^6 V_2 + \ldots)(1383505805528216371 2 w_5 w_1^{20} V_2^5 + \ldots) = 0,$$
$$w_1 w_2 w_5^2 V_2 (w_1^2 w_2 - 9 w_1 + 4 w_2 - w_1 w_2^2)^2 (286720 w_1^7 w_2^5 V_2 + \ldots) = 0.$$

Величины $w_1^2 w_2^4 w_5^4 V_2^2$, $w_1 w_2^2 w_5 V_2$, $w_1^2 w_2^2 w_5^2$ и $w_1 w_2 w_5^2 V_2$ не должны обращаться в ноль, поэтому эти множители учитывать не будем. Полиномы $3518437208883200000 w_1 V_2^2 + \ldots$, $524288 w_1^2 w_5^6 V_2 + \ldots$, $13835058055282163712 w_5 w_1^{20} V_2^5 + \ldots$ и $286720 w_1^7 w_2^5 V_2 + \ldots$ не позволяют продолжить исключение переменных. Имеем четыре уравнения:

$$16777216 w_1^6 V^2 + \ldots = 0, \tag{147}$$
$$64 w_1 + 4 w_5 + w_1^2 w_5 + w_1 w_5^2 = 0, \tag{148}$$
$$16777216 w_1^6 V_2 + \ldots = 0, \tag{149}$$
$$w_1^2 w_2 - 9 w_1 + 4 w_2 - w_1 w_2^2 = 0. \tag{150}$$

Исключаем попарно из уравнений (149) и (150), (147) и (150), (148) и (150), переменную w_2. Разложив полученные уравнения на множители, получим

$$w_1^4 (35184372088832 w_1^{12} V_2^4 + \ldots) = 0, \tag{151}$$
$$w_1^4 (281474976710656 w_1^{12} V_2^4 + \ldots) = 0, \tag{152}$$
$$64 w_1 + 4 w_5 + w_1^2 w_5 + w_1 w_5^2 = 0. \tag{153}$$

Исключаем попарно из уравнений (151) и (153), (152) и (153) переменную w_1. Получим систему

$$w_5^8 (4835703278458516698824704 w_5^{24} V_2^8 + \ldots) = 0,$$
$$w_5^8 (2251799813685248 w_5^{24} V_2^8 + \ldots) = 0.$$

Из этих уравнений исключаем w_5. Результатом будет уравнение

$$\begin{aligned} V_2^{386} (2^{172} \cdot 8009033203125 V_2^{16} + \ldots)^2 (2^{215} \cdot 4431533203125 V_2^{31} + \ldots)^2 \times \\ \times (2^{132} \cdot 21532355532033537597656 25 V_2^{31} + \ldots)^2 \times \\ \times (2^{191} \cdot 5725634814750944602489471435546875 V_2^{36} + \ldots)^2 = 0 \end{aligned} \tag{154}$$

Как и в предыдущем случае, имеем уравнение 612 степени.

Можно предположить, что и в общем случае уравнение относительно V_2, если его выводить так, как это было сделано в настоящей главе, имеет такую степень. Тем не менее, остается неясным, среди корней какого из множителей левой части этого уравнения присутствует искомая величина. Рассмотрим полиномы в левых частях уравнений (91), (104), (129) и (154). Их степени не превосходят 36. Есть основания предполагать, что, решая поставленную задачу в пространстве размерности 4, можно вывести уравнение относительно V_2, степень которого не будет превосходить 36, т.е. уравнение степени не выше 216 относительно икомого объема.

Заключение

В работе рассмотрена задача Лагранжа об объеме симплекса. Проведено сравнение решений, предложенных Лагранжем и Борхардтом, а также исследован подход, развитый Борхардтом для решения многомерного аналога задачи. На основе полученных им результатов выведены алгебраические уравнения относительно искомого объема при некоторых значениях параметров задачи. Определена предположительная степень уравнения относительно искомого объема для случая четырехмерного пространства.

Список литературы

[1] Rèaumur, Mèmoires pour servir à l'histoire des insectes, Paris, 1740. 459 p.

[2] Auluck F. C., The volume of a tetrahedron, the areas of the faces being given // Proc. Indian Acad. Sci., Sect. 1938. є7. C. 279Ц281 p.

[3] M. Goldberg, The isoperimetric problem for polyhedra // Tòhoku Math. 1935. є40. C. 226Ц236,

[4] Abrosimov N. V., Makai E. Jr., Mednih A. D., Nikonorov Yu. G, Rote G. The infimum of the volumes of convex polytops of any given facet areas is 0 // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. 2014. є51. C. 466Ц519.

[5] L.Gerber,The orthocentric simplex as an extreme simplex // Pacific Journal of Mathematics. 1973. є46. C. 155-157p.

[6] Моденов П. С. Задачи по геометрии. М.: Наука, 1979. 368 с.

[7] Borchardt C. W. Über die Aufgabe des Maximum, welche der Bestimmung des Tetraeders von grossten Volumen bei gegebenen Flacheninhalt der Seitenflächen fur mehr als drei Dimensionen entspricht. Berlin: Math. Abh. Akad. Wis., 1867. 155 c.

[8] Утешев А.Ю., Калинина Е.А. Лекции по высшей алгебре. Часть I. Учеб. пособие. СПб.: "СОЛО". 2007. 246 с.

[9] Калинина Е.А., Утешев А.Ю. Теория исключения: Учеб. пособие. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2002. 72 с.