САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математической теории экономических решений

Кравченко Любовь Андреевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Функция субъективного благополучия с эндогенными базисными точками

Направление 010400
Прикладная математика и информатика

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук,
старший преподаватель
Лукина А.А.

Санкт-Петербург
2017

Содержание

Введение

Измерение экономического благополучия является важной практической и теоретической задачей. Исследования в данной области напрямую связаны с поведенческой экономикой и требуют применения знаний и методов, полученных в экономической, математической, психологической и социологической областях. Интерес к измерению экономического благополучия в первую очередь связан с возможностью объяснения экономического самочувствия человека, которое напрямую влияет на принимамые им решения, позволяя их прогнозировать. В теоретических исследованиях понятие «благополучие», более применимое в психологии, зачастую приравнивнивается к экономическому понятию «полезность».

В настоящее время существуют два альтернативных подхода к измерению экономического благополучия: объективный и субъективный. Объективный подход связывает благополучие индивида с абсолютным значением его доходов. В 1945 г. Neumann, Morgenstern в рамках исследований в области теории игр [18] рассмотрели задачу принятия решений в условиях риска и предложили теорию ожидаемой полезности, основанную на объективном подходе к измерению благополучия. Согласно их теории, рациональный индивид, принимая решение, стремится максимизировать функцию полезности, представляющую собой математическое ожидание возможных исходов. Объективный подход до сих пор имеет широкое практическое применение, позволяя проводить неперсонализированный анализ, однако он не учитывает некоторых когнитивных искажений и психологических явлений: начиная с 1950-х годов, экономические и психологические исследования [5], [4], [19], [20] показали, что на практике большинство индивидов действуют вопреки существующей теории. В ходе дальнейших исследований были предложены различные усовершенствованния теории ожидаемой полезности, такие как теория субъективной ожидаемой полезности [16], теория максимин ожидаемой полезности [7]. Новые теории дополняли существующую аксиоматику и предлагали альтернативные виды функции ожидаемой полезности.

В 1979 г. Даниэль Канеман и Амос Тверски показали [9], что людей не столько беспокоят абсолютные значения богатства, сколько их изменения. Эта гипотеза совместима с психологическими исследованиями счастья [2], которые доказывают, что субъективное ощущение благополучия достаточно устойчиво в течение больших промежутков времени. На основании этой гипотезы Канеман и Тверски предложили теорию перспектив, учитывающую недостатки предыдущих теорий, основающихся на ожидаемой (субъективной или объективной) полезности,тем самым заложив основу субъективного подхода к измерению экономического благополучия. В своей работе Канеман и Тверски описали свойства функции субъективной вероятности и функции субъективной ценности, однако не сформулировали, что является точками отсчета, относительно которых человек измеряет свое благополучие, а также то, как эти точки отсчета формируются. Это послужило причиной дальнейших исследований, в результате которых были предложены различные модели субъективного благополучия. Например в модели, разработанной Fehr, Schmidt [6], в качестве точек отсчета рассматривается средний доход референтной группы, а в моделях Easterlin [3], Stutzer [17], точкой отсчета является предыдущий уровень благосостояния.

В 2009 году Koszegi и Rabin [12] предложили динамическую модель субъективного благополучия с эндогенными базисными точками, основанную на работах [15], [8], [10], [11]. Они предположили, что субъективное ощущение экономической удовлетворенности зависит не только от полезности реального потребления индивида, но и от его ожиданий относительного потребления, которые формируются эндогенно, то есть под воздействием внутренних факторов. В рамках данной модели рассматривалась задача рационального формирования ожиданий относительно потребления. В своей работе Koszegi и Rabin, описывая функцию отношения индивида к отклонению от точек отсчета (ожиданий относительно потребления) помимо свойств, утвержденных в работе [1], явно или неявно соответствующих теории перспектив [9], вводят дополнительное свойство, позволяющее рассматривать ее как кусочно-линейную. Это является сильным допущением, значительно упрощающим модель.

Целью данной выпускной квалификационной работы является исследование решений задачи рационального формирования ожиданий в рамках модели, предложенной в [12], с использованием специального вида функции, удовлетворяющего всем требуемым свойствам функции отношения к отклонениям от точки отсчета в отсутствие предположения о ее кусочной линейности.

Глава 1. Основные положения модели

В данной работе рассматривается Т-периодная динамическая модель субъективного благополучия, предложенная Koszegi, Rabin [12]. Индивид, зная размер своего благосостояния, строит планы относительно его распределения на каждый из периодов — формирует ожидания.

Главной идеей данной модели является то, что на субъективное ощущение экономической удовлетворенности влияют не только эмоции от фактического потребления, но и эмоции, вызванные отклонением реального потребления от запланированного. Эту идею можно интерпретировать так: индивид, потратив в одном из периодов больше, чем он планировал изначально, однозначно получает больше удовольствия от фактического потребления, но мысль о том, что в следующем периоде придется экономить, тоже вызывает у него эмоции, влиящие на его экономическое самочувствие. Исходя из этого, в качестве базисных точек выступают эндогенные ожидания относительно потребления.

В рамках данной модели предлагается концепция рационального формирования ожиданий. Предполагается, что индивид, придерживаясь данной концепции при планировании своего будущего потребления, максимизирует итоговое субъективное благополучие.

1.1. Функция субъективного благополучия

Субъективное благополучие индивида (1) измеряется как сумма полезностей всех периодов потребления. Функция полезности каждого периода (2) складывается из полезности потребления (consumption utility) и функции, отражающей отношение индивида к изменению ожиданий относительно потребления (gain-loss utility).

$$U^t = \sum_{\tau=t}^{T} u_\tau, \tag{1}$$

$$\text{где } u_t = m(c_t) + \sum_{\tau=t}^{T} \gamma_{t,\tau} N(F_{t,\tau}|F_{t-1,\tau}), \tag{2}$$

c_t — объем потребления в период t;

$m(c_t)$ — гедонистическая часть функции (consumption utility), описывающая полезность от потребления.

Функция $m(\cdot)$ обладает следующими свойствами:

1. $m(x)$ определена для всех $x > 0$;

2. $m'(x) > 0$ для $x > 0$;

3. $m''(x) < 0$ для всех $x > 0$ (в соответствии с [9]);

4. $\lim\limits_{x \to 0} m'(x) = \infty$, где $x > 0$.

Индивид имеет сформированные в периоде $t-1$ ожидания относительно потребления в последующих периодах времени $F_{t-1} = \{F_{t-1,\tau}\} \left.\right|_{\tau=t}^{T}$.

Функция $N(F_{t,\tau}|F_{t-1,\tau})$ оценивает отношение индивида к отклонениям от точки отсчета $(F_{t-1,\tau})$. Подробнее об этой фунции будет рассказано в следущем разделе.

$\gamma_{\tau,\tau} \geq \gamma_{\tau-1,\tau} \geq \cdots \geq \gamma_{0,\tau} \geq 0$ определяются как веса, приписываемые функции $N(F_{t,\tau}|F_{t-1,\tau})$ в зависимости от периодов, к которым эта функция относитсы. Следуя работе [12], зададим параметр $\gamma_{t,\tau} = \gamma^{t-\tau}$, где $\gamma < 1$. Практически наличие этого параметра можно объяснить следующим образом: чем больше промежуток времени между тем моментом, когда индивид узнает о необходимости изменения ожиданий, и тем моментом, которого это изменение непосредственно касается, тем меньшее влияние это оказывает на общую функцию полезности. Т.е. изменение ожиданий относительно завтрашнего дня более эмоционально значимо, чем изменение ожиданий относительно того, что будет через месяц.

1.2. Функция отношения к отклонениям от точки отсчета

В своей работе [12] авторы модели заменяют функцию $N(\cdot)$ на $\mu(\cdot)$, где $\mu(\cdot)$ — универсальная функция «gain-loss utility», которая определяет соотношение между ожиданиями относительно потребления следующим образом:

$$N(F_{t,\tau}|F_{t-1,\tau}) = \mu(m(F_{t,\tau}) - m(F_{t-1,\tau})), \text{ где } \tau \geq t.$$

Функция $\mu(\cdot)$ обладает следующими свойствами:

1. $\mu(\cdot)$ непрерывна для всех x, дважды дифференцируема для $x \neq 0$, и $\mu(0) = 0$;

2. $\mu(x)$ строго возрастает;

3. Если $y > x \geq 0$, то $\mu(y) + \mu(-y) < \mu(x) + \mu(-x)$;

4. $\mu''(x) \leq 0$ для $x > 0$ и $\mu''(x) \geq 0$ для $x < 0$;

5. $\frac{\mu'_-(0)}{\mu'_+(0)} \equiv \lambda > 1$, где $\mu'_+(0) \equiv \lim\limits_{x\to 0} \mu'(|x|)$ и $\mu'_-(0) \equiv \lim\limits_{x\to 0} \mu'(-|x|)$.

Свойства 1 — 5 были сформулированы в работе [1] и соответствуют явным или неявным предположениям теории перспектив [9] о виде функции ценности. Неприятие потерь (плохие новости, как правило, воспринимаются «острее», чем хорошие) фиксируется свойством 3 для больших значений аргумента и свойством 5 — для малых. Снижение эмоциональной чувствительности фиксируется свойством 4.

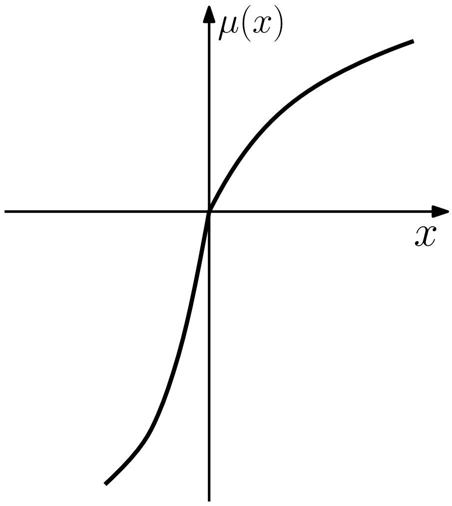

Рис. 1: Общий вид функции gain-loss utility.

В области потерь функция является выпуклой и искривляется резче, чем в области выигрышей, где является вогнутой. Перегиб происходит в точке отсчета. В данной модели, как уже упоминалось ранее, в качестве точек отсчета выступают рациональные ожидания индивида относительно потребления.

1.2.1. Исследуемые виды функций

В своей работе [12] Koszegi, Rabin выдвинули дополнительное предположение о свойстве функции gain-loss utility:

4'. для $\forall x \neq 0 : \mu''(x) = 0$.

Это допущение позволило рассматривать функцию $\mu(\cdot)$ как кусочно-линейную:

$$\mu(x) = \begin{cases} \eta x, & x \geq 0, \\ \lambda \eta x, & x < 0, \end{cases} \tag{3}$$

$\lambda > 1$ — вес неприятия потерь, который интерпретируется как большая чувствительность индивида к плохим новостям, чем к хорошим, η — вес функции $\mu(\cdot)$, интерпретируемый как эмоциональность индивида. От значения параметра η зависит то, какое влияние на общую полезность оказывает функция gain-loss utility.

Однако свойство 4' сводит «психологическую» составляющую субъективного благополучия к функции кусочно-линейного вида, что является достаточно сильным допущением и значительно упрощает модель. Поэтому в данной работе было принято решение рассмотреть функцию $\mu(\cdot)$ специального вида:

$$\mu(x) = \begin{cases} \eta \sqrt[3]{x}, & x \geq 0, \\ \lambda \eta \sqrt[3]{x}, & x < 0, \end{cases} \tag{4}$$

$\lambda > 1$.
Параметры λ и η в этом случае интерпретируются аналогично (3).

Легко убедиться, что функция (4) удовлетворяет свойствам 1-5 gain-loss utility, но, в отличие от функции (3), не удовлетворяет свойству 4', что в значительной степени влияет на общий вид функции:

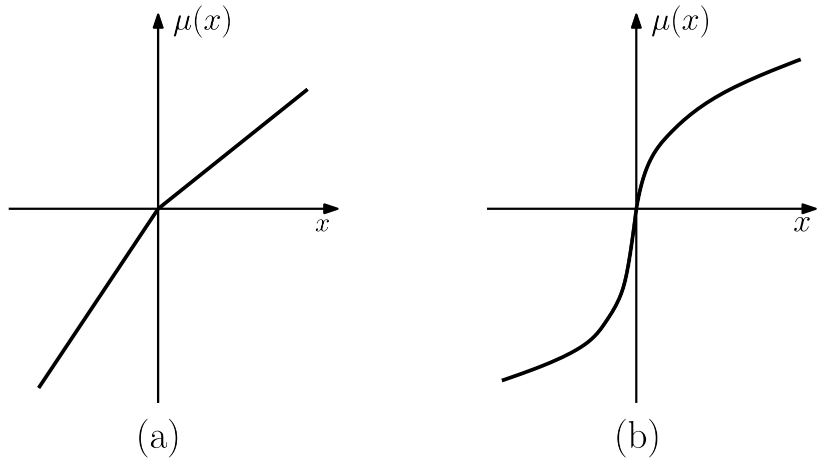

Рис. 2: (a) Общий вид функции (3). (b) Общий вид функции (4).

Рис. 2 дает основания считать, что $\mu(\cdot)$ вида (4) точнее моделирует отношения индивида к изменению ожиданий, чем $\mu(\cdot)$ вида (3).

В связи с этим мы сделали предположение, что результаты анализа модели (1)—(2) с применением функции $\mu(\cdot)$ предложенного нами вида (4) будут отличаться от результатов анализа, проведенного Koszegi и Rabin [12] при использовании $\mu(\cdot)$ вида (3).

1.3. Предпочитаемое персональное равновесие

В рамках данной модели мы рассматриваем задачу формирования эндогенных базисных точек рациональным образом.

Определим, как индивиду следует строить ожидания относительно распределения имеющегося благосостояния между периодами, чтобы оставаться максимально довольным. В данной работе игнорируем любые возможные ошибки формирования ожиданий и предполагаем, что индивид строит планы рационально.

Планом потребления будем называть последовательность решений относительно распределения благосостояния между периодами с учетом имеющейся информации в каждый момент времени. Следуя статье [11], применим концепцию предпочитаемого персонального равновесия *(Preferred Personal Equilibrium, PPE)*.

Определение 1. Пусть D — известный набор планов потребления, из которых индивид может выбирать. $F, F' \in D$ —определенные планы. $U(F|F')$ — значение функции полезности при реализации плана F, в то время как ожидалось потребление согласно плану F'. Тогда $F \in D$ принадлежит множеству *персональных равновесий* $(PersonalEquilibrium, PE)$, если $U(F|F) \geq U(F'|F)$ для всех $F' \in D$.

Определение 2. F из PE является PPE тогда, когда для любых других F' из PE выполняется неравенство: $U(F|F) \geq U(F'|F')$.

Таким образом, план потребления является равновесным (т.е. принадлежит множеству персональных равновесий PE) если индивиду выгоднее ему следовать, чем отклоняться от него в реальном потреблении. Предпочитаемым персональным равновесием (PPE) называется план из множества PE, максимизирующий общую полезность. Т.е. PPE является оптимальной стратегией формирования ожиданий, в соответствии с которой индивид выбирает план потребления, максимизирующий будущую полезность в каждом периоде с учетом ожиданий, порожденных планом.

Глава 2. Двухпериодная модель субъективного благополучия

Рассмотрим модель субъективного благополучия в предположении, что индивид строит план своего потребления, рассчитанный на два периода ($T = 2$). Предположим, что подлежащее распределению благосостояние W определено однозначно, и его величина известна индивиду.

Функция субъективного благополучия.

Введем следующие обозначения:

- C_i — фактическое потребление в периоде i, где $i = 1, 2$;
- $C^e_{j,i}$ — ожидания индивида относительно потребления в периоде i, которые формируются периоде j, где $j = 0, 1$.

Функция полезности (2) выглядит следующим образом:

$$u_1 = m(C_1) + \gamma_{1,1}\mu(m(C_1) - m(C^e_{0,1})) + \gamma_{2,1}\mu(m(C^e_{0,2}) - m(C^e_{1,2})) \tag{5}$$

для $t = 1$,

$$u_2 = m(C_2) + \gamma_{2,2}\mu(m(C_2) - m(C^e_{1,2})) \tag{6}$$

для $t = 2$.

Очевидно, что $C_2 = W - C_1$, т.к. потребление во втором периоде совпадает с остатком благосостояния после потребления C_1.

Отметим также, что $C^e_{1,2} = W - C_1$. Это связано с тем, что в конце первого периода разрешается неопределенность относительно ожидаемого потребления во втором периоде: индивид точно знает, каким благосостоянием обладает после потребления C_1.

Таким образом, C_2 и $C^e_{1,2}$ рассчитываются одинаково, т.к. для второго периода ожидаемое и реальное потребление совпадают. Следовательно, функция полезности (6) не содержит слагаемых, возникающих при сопоставлении реального потребления с ожидаемым, и только функция полезности для первого периода (5) содержит слагаемые, описываемые функцией gain-loss utility.

Для упрощения записи можно опустить первый индекс в записи ожидаемого потребления $C^e_{j,i}$, так как в двухпериодной модели на функцию субъективного благополучия влияют только ожидания, сформированные в нулевом периоде (т.е. при $j = 0$).

Напомним, что ранее нами было решено задать параметр $\gamma_{t,\tau} = \gamma^{t-\tau}$.

С учетом приведенных выше рассуждений совокупная полезность (1) примет вид

$$U(C_1, C_1^e) = \sum_{t=1}^{2} u_i(C_i, C_i^e) =$$

$$= m(C_1) + m(W - C_1) + \mu\left(m(C_1) - m(C_1^e)\right) + \gamma\mu\left(m(W - C_1) - m(W - C_1^e)\right). \quad (7)$$

Учитывая, что функция $\mu(\cdot)$ задается различным образом для положительных и отрицательных значений аргумента, совокупная функция полезности (7) также будет кусочно-непрерывной.

Перепишем совокупную полезность (7) с учетом вида функции $\mu(\cdot)$. Для $\mu(\cdot)$ вида (3) получим:

$$\begin{cases} m(C_1) + m(W - C_1) + \eta(m(C_1) - m(C_1^e)) + \gamma\lambda\eta(m(W - C_1) - m(W - C_1^e)), & C_1 \geq C_1^e, \\ m(C_1) + m(W - C_1) + \lambda\eta(m(C_1) - m(C_1^e)) + \gamma\eta(m(W - C_1) - m(W - C_1^e)), & C_1 < C_1^e; \end{cases} \quad (8)$$

для $\mu(\cdot)$ вида (4):

$$\begin{cases} m(C_1) + m(W - C_1) + \eta\sqrt[3]{(m(C_1) - m(C_1^e))} + \gamma\lambda\eta\sqrt[3]{(m(W - C_1) - m(W - C_1^e))}, & C_1 \geq C_1^e, \\ m(C_1) + m(W - C_1) + \lambda\eta\sqrt[3]{(m(C_1) - m(C_1^e))} + \gamma\eta\sqrt[3]{(m(W - C_1) - m(W - C_1^e))}, & C_1 < C_1^e. \end{cases} \quad (9)$$

Предпочитаемое персональное равновесие.

Рассмотрим задачу формирования рациональных ожиданий для двухпериодной модели субъективного благополучия. Применим введенную ранее концепцию предпочитаемого персонального равновесия.

Согласно определению 1 ожидание $C_1^e \in PE$, если для любого допустимого реального потребления C_1 выполняется условие

$$m(C_1^e) + m(W - C_1^e) \geq m(C_1) + m(W - C_1) + \mu(m(C_1) - m(C_1^e)) + \gamma\mu(m(W - C_1) - m(W - C_1^e)). \quad (10)$$

Введем обозначение C_1^* для искомого PPE. Согласно определению 2 $C_1^* \in$ PE является PPE, если для $\forall C_1^e \in$ PE выполняется условие

$$m(C_1^*) + m(W - C_1^*) \geq m(C_1^e) + m(W - C_1^e). \quad (11)$$

2.1. Аналитический поиск персонального равновесия

Условие (11), в отличие от условия (10), не зависит от функции $\mu(\cdot)$ и, следовательно, является общим для функций (8) и (9). В связи с этим нами было решено начать анализ с рассмотрения условия (11).

В силу того, что функция $m(\cdot)$ является вогнутой, для нее выполняется неравенство Ейнсена [21]. Следовательно, условие (11) выполняется при $C_1^* = W/2$. Однако по определению 2 PPE выбирается из PE. Значит $W/2$ является PPE только если для $\forall C_1 \in [0, W]$ выполняется неравенство

$$2m(W/2) \geq m(C_1) + m(W - C_1) + \mu(m(C_1) - m(W/2)) + \gamma\mu(m(W - C_1) - m(W/2)).$$

Для того, чтобы это условие выполнялось достаточно, чтобы сумма слагаемых, описываемых функцией gain-loss utility была не больше нуля. Очевидно, что выражения

$$m(C_1) - m(W/2) \text{ и } m(W - C_1) + m(W/2)$$

имеют противоположные знаки. Сравним их модули. Предположим, что

$$|m(C_1) - m(W/2)| > |m(W - C_1) + m(W/2)|\,, \tag{12}$$

тогда, раскрыв модули, получим следующие выражения:

$$\begin{cases} m(C_1) + m(W - C_1) > 2m(W/2), & C_1 \geq W/2 \\ m(C_1) + m(W - C_1) \leq 2m(W/2), & C_1 < W/2. \end{cases}$$

В силу вогнутости функции $m(\cdot)$ предположение (12) для $C_1 \geq W/2$ является ложным, для $C_1 < W/2$ — истинным. Отсюда можно сделать вывод, что модуль отрицательного аргумента функции gain-loss utility больше модуля положительного аргумента при любом значении C_1.

Таким образом, чтобы $W/2 \in$ PE, для функции (8) необходимо выполнение условия

$$\begin{cases} \eta(m(C_1) - m(W/2)) \leq \gamma\lambda\eta\,|m(W - C_1) - m(W/2)|\,, & C_1 \geq C_1^e, \\ \lambda\eta\,|m(C_1) - m(C_1^e)| > \gamma\eta(m(W - C_1) - m(W - C_1^e)), & C_1 < C_1^e; \end{cases} \tag{13}$$

а для функции (9) требуется выполнение условия

$$\begin{cases} \eta\sqrt[3]{m(C_1)-m(W/2)} \leq \gamma\lambda\eta\sqrt[3]{|m(W-C_1)-m(W/2)|}, & C_1 \geq C_1^e, \\ \lambda\eta\sqrt[3]{|m(C_1)-m(C_1^e)|} > \gamma\eta\sqrt[3]{m(W-C_1)-m(W-C_1^e)}, & C_1 < C_1^e. \end{cases} \tag{14}$$

Учитывая, что отрицательные значения аргумента функции gain-loss utility по модулю больше положительных, условия (13) и (14) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \eta \geq \gamma\lambda\eta \\ \lambda\eta > \gamma\eta. \end{cases}$$

Второе условие выполняется при любых допустимых значениях параметров. Таким образом, для того, чтобы $W/2 \in PE$, а следовательно являлось PPE, достаточно выполнения только одного условия:

$$\gamma\lambda \geq 1.$$

Ввиду того, что более детальный аналитический поиск PE для функции (9) требует разрешения системы нелинейных неравенств

$$\begin{cases} m(C_1^e)+m(W-C_1^e) \geq m(C_1)+m(W-C_1)+\eta\sqrt[3]{(m(C_1)-m(C_1^e))}+\gamma\lambda\eta\sqrt[3]{(m(W-C_1)-m(W-C_1^e))}, & C_1 \geq C_1^e, \\ m(C_1^e)+m(W-C_1^e) \geq m(C_1)+m(W-C_1)+\lambda\eta\sqrt[3]{(m(C_1)-m(C_1^e))}+\gamma\eta\sqrt[3]{(m(W-C_1)-m(W-C_1^e))}, & C_1 < C_1^e. \end{cases} \tag{15}$$

относительно C_1^e при всех допустимых C_1 и практически невозможен, нами был проведен численный анализ поиска PE и PPE для функций (8) и (9).

2.2. Численный поиск персонального равновесия

Опишем кратко принцип работы алгоритма поиска PE и PPE при фиксированных W и η (прил. 1). Пункты 1–4 описывают циклы, последовательно вложенные друг в друга. Каждый из них фиксирует значения определенных переменных. Пункт 5 выполняется внутри цикла 3 перед каждой новой итерацией; пункт 6 — внутри цикла 2.

1. Перебираем значения $\gamma \in (0; 1)$ с шагом $h = 0.1$.
2. Перебираем значения $\lambda \in (1; 2]$ с шагом $h = 0.1$.
3. Перебираем $C_1^e \in [0, W]$ с шагом $H = W/100$; $q = 1$.
4. Перебираем $C_1 \in [0, W]$ с шагом $H = W/100$. Если условие (10) не выполняется — q=0.

5. Если q=1 — добавляем C_1^e в множество PE.
6. Из PE выбираем PPE согласно условию (11). Очищаем PE.

Для удобства визуализации на оси абсцисс расположим произведение $\gamma\lambda$. Вдоль оси ординат расположим допустимые значения ожидаемого потребления C_1^e.

На изображениях в данном разделе используются обозначения:

- серый цвет — $C_1^e \notin$PE;
- синий цвет — $C_1^e \in$PE;
- красные точки — PPE;
- черные точки вдоль оси абсцисс — множество PE пусто.

Следуя [12], в качестве $m(x)$ принимаем функцию $m(x) = \sqrt{x}$. Сравним результаты работы алгоритма для функций (8) и (9).

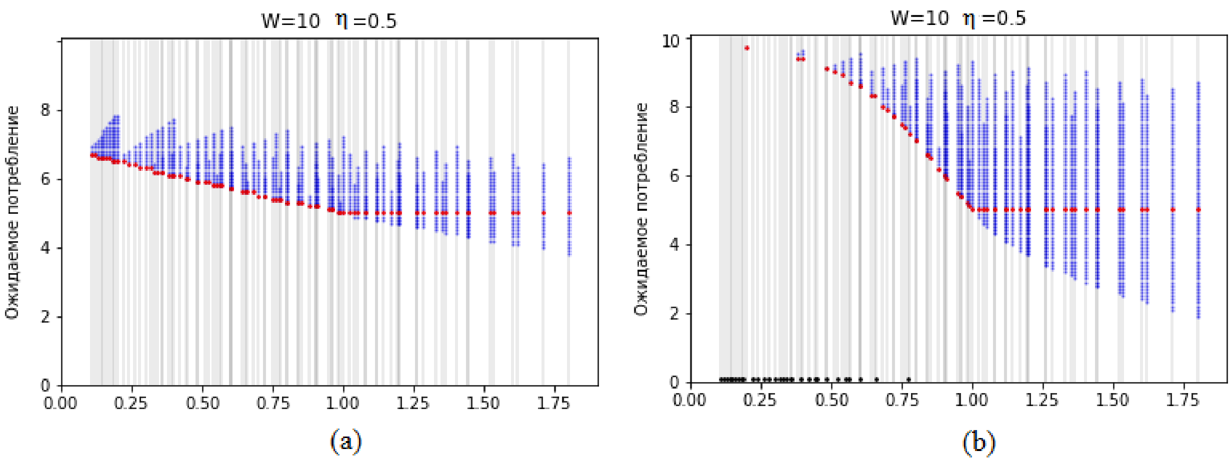

Рис. 3: Результаты работы алгоритма поиска PE и PPE при $W = 10$ и $\eta = 0.5$. (a) для функции (8); (b) для функции (9)

Результат, полученный нами в предыдущем разделе подтверждается для обеих функций: $W/2$ является PPE при $\gamma\lambda \geq 1$.

Но при $\gamma\lambda < 1$ результаты работы алгоритма для функций (8) и (9) качественно отличаются:

- для функции (8) на основании рис. 3(a) можно сделать предположение, что для $\forall\gamma\lambda$ множество PE не пустое;
- для функции (9) из рис. 3(b) очевидно заключить, что $\exists\gamma\lambda < 1 :$ PE$= \emptyset$.

Для того, чтобы проверить наше предположение о функции (8), исследуем ее PE и PPE при изменении параметров W и η. Оставим фиксированным только один параметр, что позволит наблюдать зависимость PE и PPE от эмоциональности индивида (рис. 4) и от его благосостояния (рис. 5).

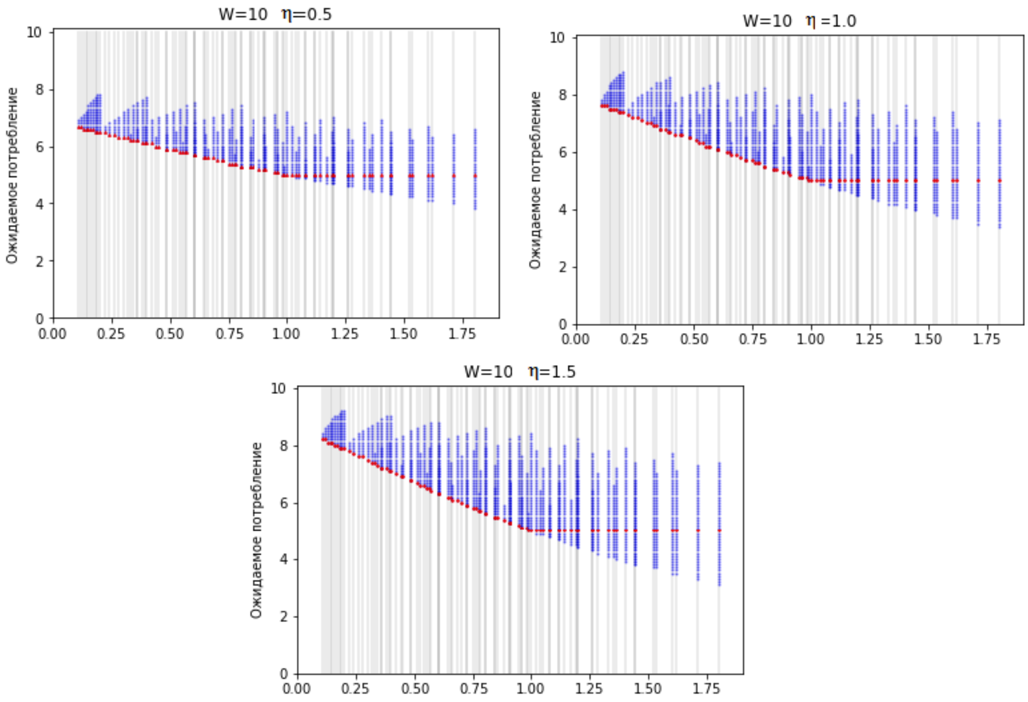

Рис. 4: Результат работы алгоритма поиска PE и PPE для функции (8) при изменении параметра эмоциональности с фиксированным значением благосостояния.

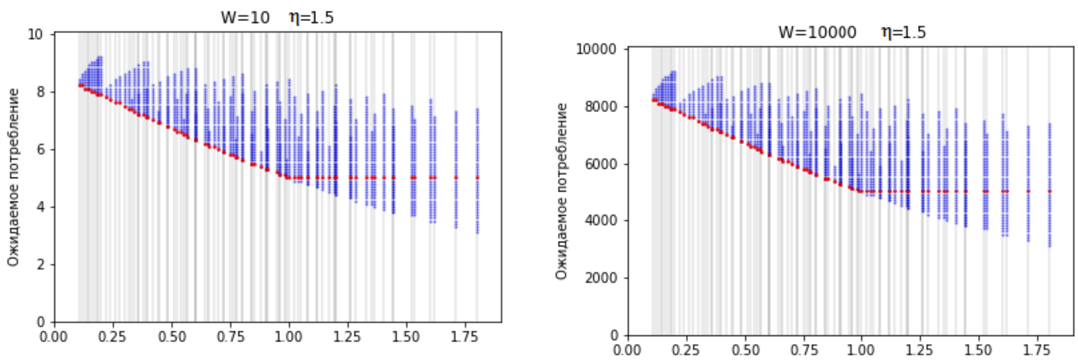

Рис. 5: Результат работы алгоритма поиска PE и PPE для функции (8) при изменении значений благосостояния с фиксированным параметром эмоциональности.

Рис. 4 и 5 подтверждают наше предположение, что для функции (8), т.е. в случае, когда $\mu(\cdot)$ задана формулой (3), равновесные ожидания существуют при любом наборе параметров W, γ, λ, η.

Проведем подобный анализ для функции (9). Исследуем зависимость PE и PPE от эмоциональности индивида η. Для этого зафиксируем значение благосостояния $W = 10$.

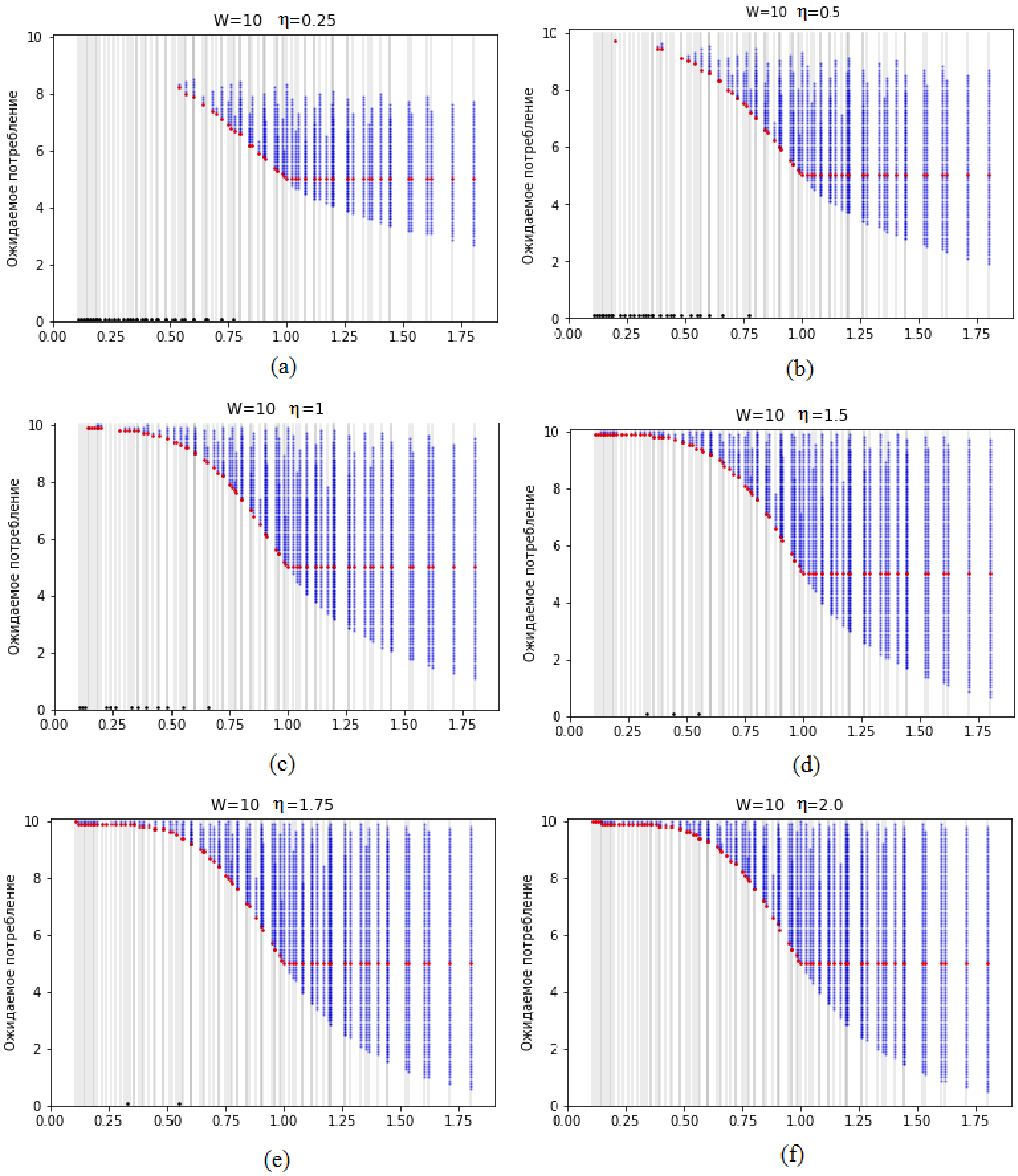

Рис. 6: Результат работы алгоритма поиска PE и PPE для функции (9) при изменении параметра эмоциональности с фиксированным значением благосостояния.

Напомним, что параметр η — вес функции $\mu(\cdot)$. На основании рис. 6 можно заключить, что чем ниже влияние «психологической» функции на общее субъективное благополучие индивида, тем в большем количестве наборов $\gamma\lambda$ не существует таких ожиданий, которые бы принадлежали множеству PE, и, как следствие, PPE.

Исследуем, влияет ли размер благосостояния W на PE и PPE функции (9). Зафиксируем $\eta = 2$, основываясь на рис. 6(f) (при $\eta = 2$ и $W = 10$ равновесные ожидания существуют для всех наборов $\gamma\lambda$).

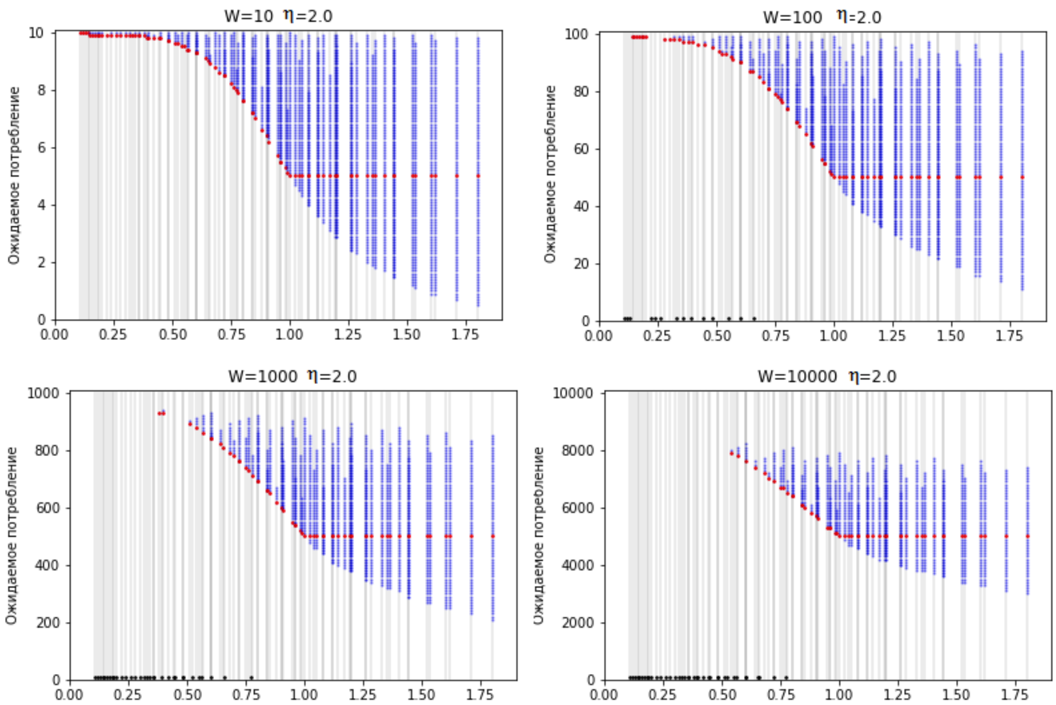

Рис. 7: результат работы алгоритма поиска PE и PPE при изменении значений благосостояния с фиксированным параметром эмоциональности.

На основании рис. 7 можно сделать вывод, что при увеличении благосостояния увеличивается количество наборов $\gamma\lambda$ таких, что для них не существует ожиданий, принадлежащих PE.

На основании полученных результатов мы делаем предположение, что концепция предпочитаемого персонального равновесия, предложенная Koszegi–Rabin, является несостоятельной без учета допущения о свойстве функции $\mu(\cdot)$ 4', которое позволяет рассматривать ее как кусочно-линейную (3). В случае использования функции $\mu(\cdot)$ вида (4), как показывают результаты проведенного нами численного анализа, для индивида, обладающего определенным набором характиристик γ, λ, η и благосостоянием W, может не существовать равновесных ожиданий, что делает данную концепцию практически не применимой.

Проведем проверку возможных ошибок в методе численного анализа для функции (9). Т.к. PPE выбирается из множества PE, далее для простоты рассматриваем только PE.

2.2.1 Проверка возможных методических ошибок

1. Точность вычислительной сетки C_1 *и* C_1^e.

В первую очередь проанализируем PE при повышении точности сетки C_1, C_1^e, по которой идет проверка выполнения условий равновесия. Напомним, что ранее для вычислений использовались значения C_1 и C_1^e из отрезка $[0, W]$ с шагом $H = W/100$. Проверим, изменятся ли результаты работы алгоритма при уменьшении шага до $H = W/1000$, т.е. при увеличении размера сетки возможных и реальных потреблений в 100 раз.

Фиксируем W и η опираясь на полученные ранее результаты:
рис. 6(d): $W = 10$, $\eta = 1.5$: количество наборов $\gamma\lambda$, для которых PE$= \emptyset$ легко определяется визуально;
рис. 6(f): $W = 10$, $\eta = 2$: всегда существуют $C_1^e \in$ PE.

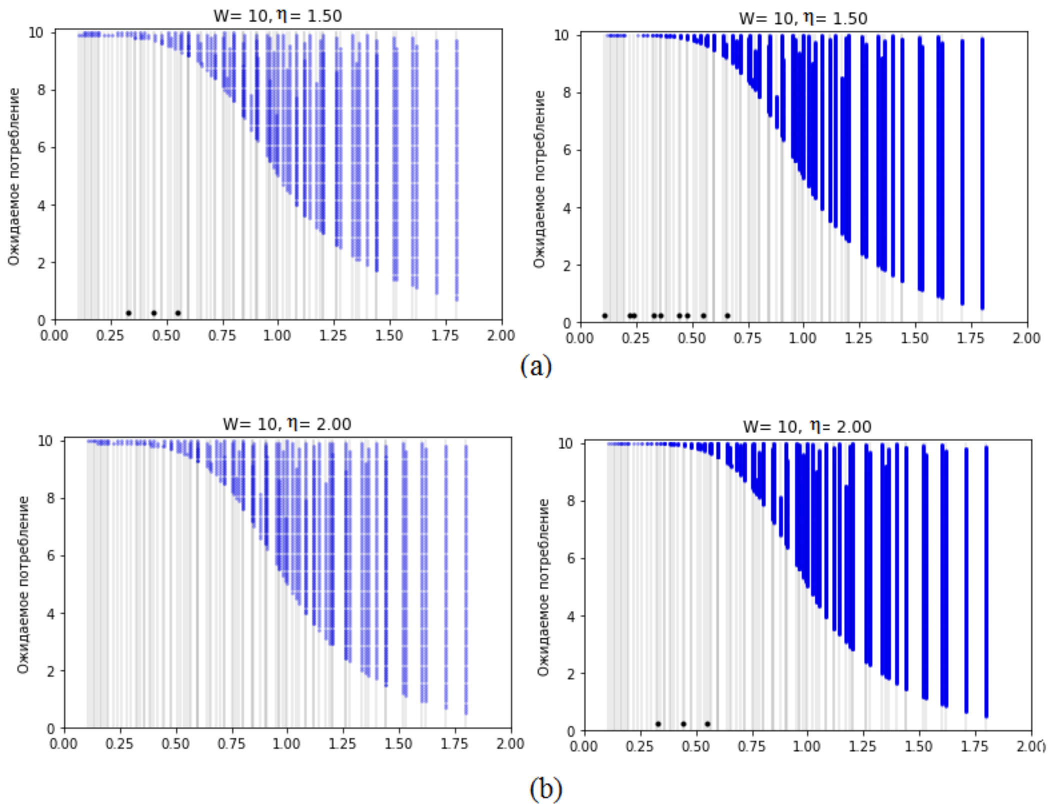

Рис. 8: Изменение результатов при повышении точности вычислительной сетки.

При повышении точности сетки значений C_1, C_1^e

- рис. 8(a): увеличивается количество наборов $\gamma\lambda$, для которых не существует $C_1^e \in$ PE;
- рис. 8(b): появляются $\gamma\lambda$, для которых не существует $C_1^e \in$ PE.

Это объясняется тем, что $C_1^e \in$ PE если условие (15) выполнено для всех допустимых значений C_1. При повышении точности сетки значений, по которой ведется проверка условий, могут находиться C_1 такие, которые ранее были пропущены, но именно для них условие (15) не выпоняется.

Таким образом, мы имеем основание заключить, что факт несуществования равновесных ожиданий для некоторых наборов $\gamma\lambda$ не связан с точностью вычислительной сетки C_1, C_1^e.

2. Погрешность вычислений

В процессе работы алгоритма необходимо вычислять функции $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$, в результате чего возникает необходимость хранить и обрабатывать вещественные числа. В памяти компьютера они представлены как числа с плавающей запятой, хранение и выполнение математических операций с которыми увеличивает вычислительную погрешность. Устранить вычислительную погрешность полностью невозможно, однако мы можем повысить точность вычислений засчет обработки и хранения только целых чисел. Для этого примем $k = 10^{100}$ и преобразуем условие (10) следующим образом:

$$\sqrt{kC_1^e}+\sqrt{k(W-C_1^e)} \geq \sqrt{kC_1}+\sqrt{k(W-C_1)}+\sqrt{k}\mu\left(\frac{\sqrt{kC_1}-\sqrt{kC_1^e}}{\sqrt{k}}\right)+\sqrt{k}\gamma\mu\left(\frac{\sqrt{k(W-C_1)}-\sqrt{k(W-C_1^e)}}{\sqrt{k}}\right)$$

Это усовершенствование позволяет хранить и обрабатывать значения 50 знаков после запятой в формате целых чисел, что теоретически повышает точность вычислений. Проверим результаты работы алгоритма с целыми числами при $\eta = 2$ и различных W:

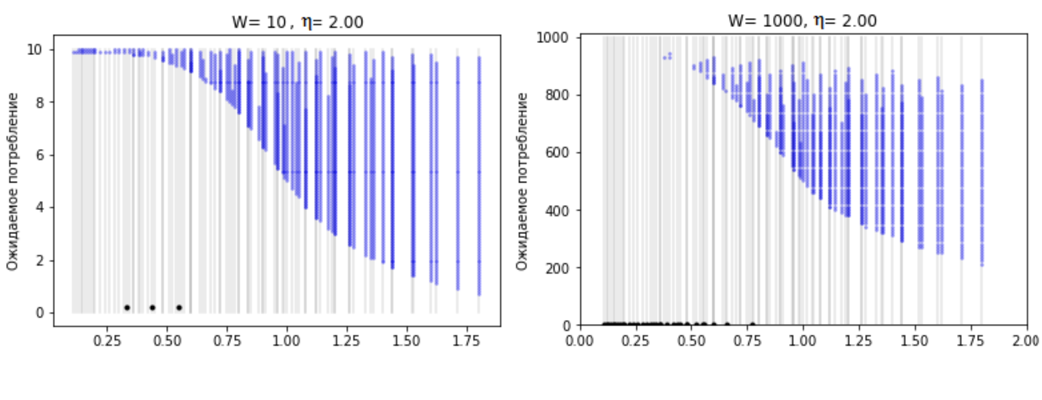

Рис. 9: Результаты работы алгоритма с целыми числами.

Результаты на рис. 9 идентичны полученным ранее (рис. 7). На основании этого делаем вывод, что погрешность вычислений принципиально не влияет на результаты работы алгоритма.

3. Произведение параметров $\gamma\lambda$.

Напомним, что ранее для удобства визуализации на графиках вдоль оси абсцисс рассматривалось произведение параметров $\gamma\lambda$. В результате точки, где множество PE пусто, располагались неравномерно вдоль $\gamma\lambda$.

Обратимся, например, к рис. 6(c) и рассмотрим PE из промежутка $\gamma\lambda \in [0, 0.25]$: между наборами $\gamma\lambda$, для которых PE$= \emptyset$, находятся $\gamma\lambda$, для которых существуют $C_1^e \in$ PE. Можно предположить, что модель неустойчива к изменению γ и λ: при небольших отклоненях в измерении значений параметров могут быть получены принципиально разные результаты.

Проведем анализ PE отдельно для параметра γ и отдельно для λ. Ранее для перебора возможных значений параметров γ и λ из множества их допустимых значений использовался шаг $h = 0.1$. Для повышения точности анализа уменьшим шаг перебора до $h = 0.02$.

Зафиксируем $W = 10, \eta = 1$ на основании рис.6(c). Зафиксируем различные возможные значения параметра γ. Проанализируем зависимость PE от λ:

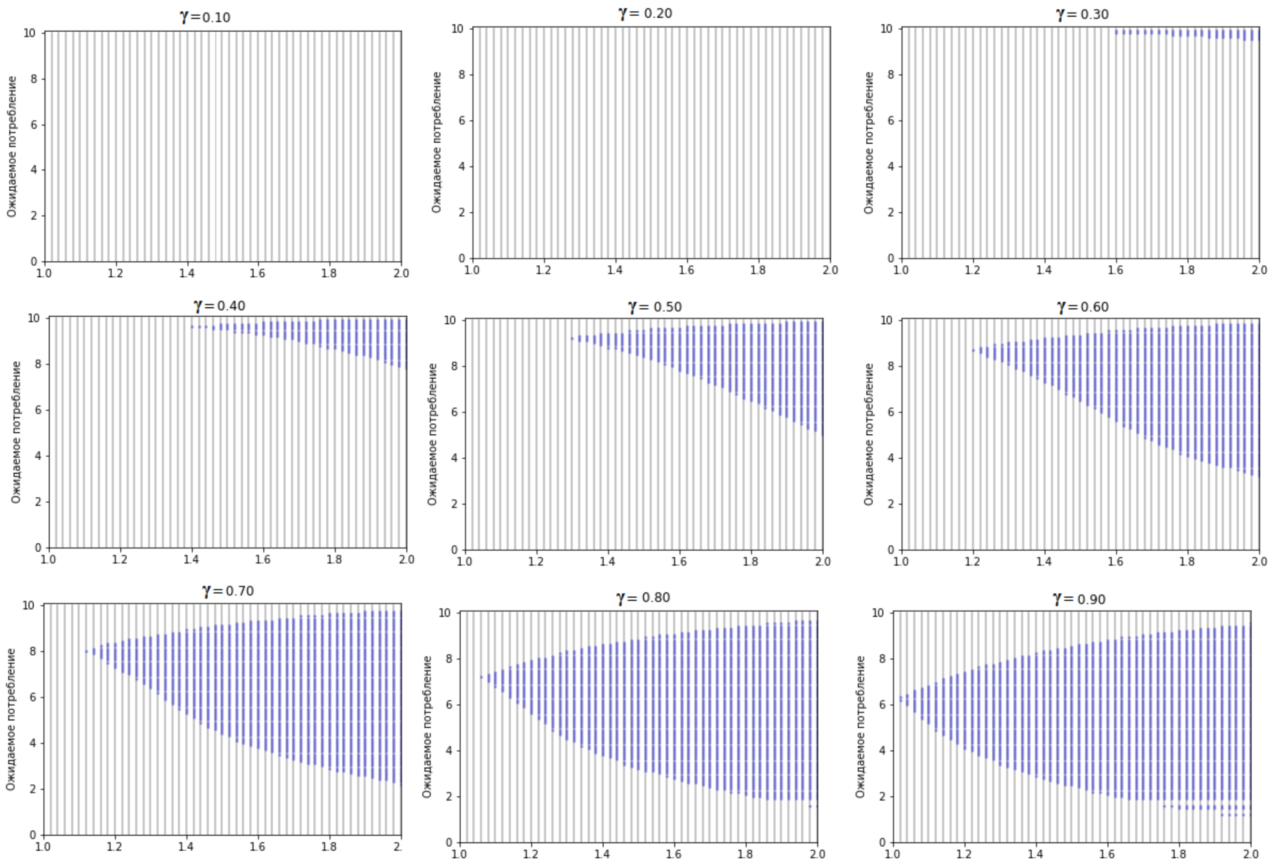

Рис. 10: Зависимость PE от $\lambda \in (1; 2)$ при различных фиксированных γ. $W = 10, \eta = 1$

Запишем выводы, сделанные нами на основании рис. 10:

1. для некоторых малых γ множество PE пусто вне зависимости от λ;
2. если при данном значении γ существуют $C_1^e \in$ PE, то при увеличении значений λ их количество увеличивается;
3. с увеличением значений γ повышается количество λ, для которых множество PE не является пустым.

Теперь проанализируем зависимость PE от γ. Для этого зафиксируем $W = 10$ и $\eta = 1$. Фиксируем различные возможные значения λ.

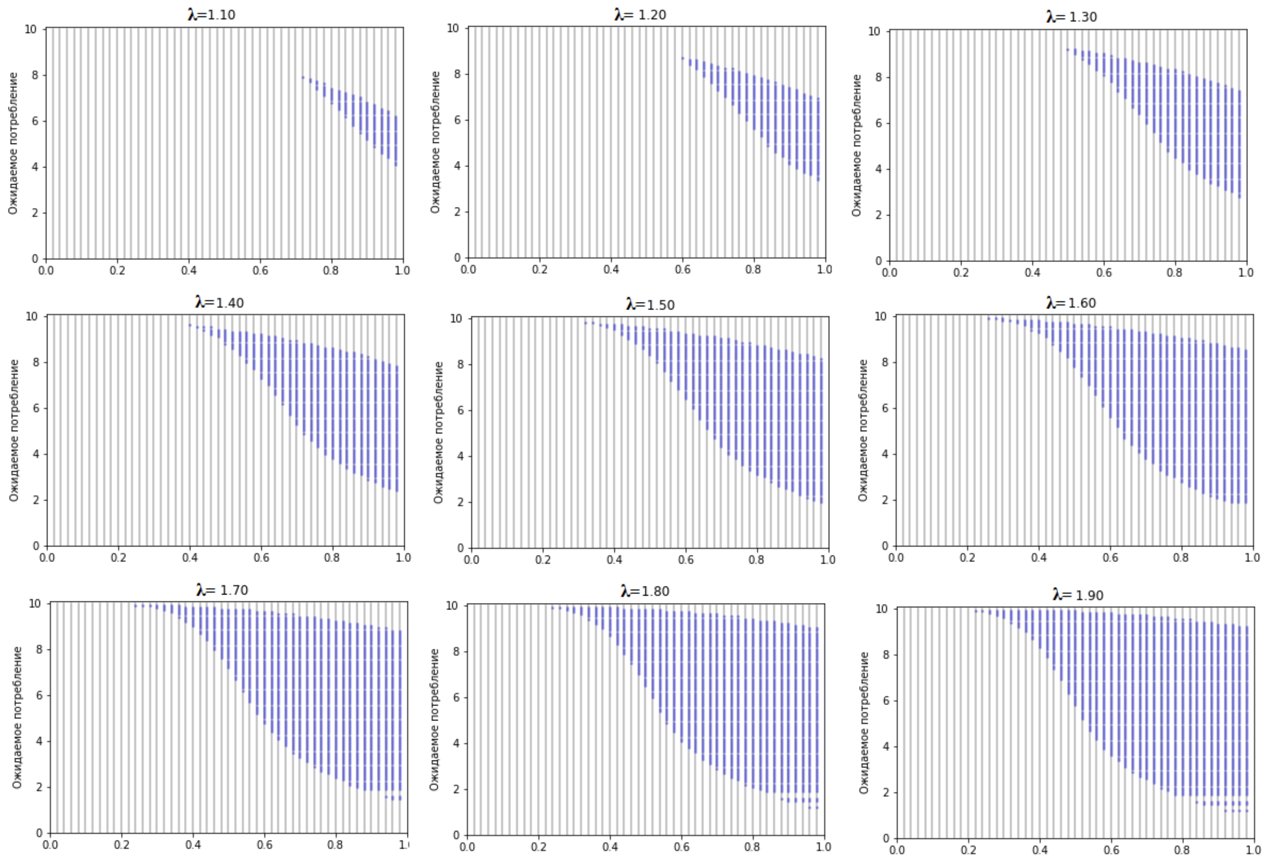

Рис. 11: Зависимость PE от $\gamma \in (0; 1)$ при различных фиксированных λ. $W = 10, \eta = 1$

На основании рис.11 получаем аналогичные выводы:

1. для некоторых малых γ множество PE пусто вне зависимости от λ;
2. с увеличением значения γ увеличивается количество $C_1^e \in$ PE;
3. с увеличением λ увеличивается и количество γ, для которых множество PE не является пустым.

Проведенный анализ опровергает предположение, что модель не устойчива к небольшим отклонениям в измерении параметров γ и λ. Это значит, что если при измерении значений этих параметров на практике будет допущена неточность — это не сильно повлияет на результаты. Неравномерность расположения точек несуществования равновесных ожиданий для функции (9) связана только с методом визуализации, и не влияет на тот факт, что для некоторых наборов параметров может не существовать равновесных ожиданий.

Делаем вывод, что в выбранном нами изначально методе визуализации результатов численного анализа РЕ и РРЕ (относительно произведения параметров $\gamma\lambda$) ошибки, принципиально влияющей на результат, не содержится.

2.2.2 Проверка полученных результатов

Проверим, действительно ли для функции (9) при определенных наборах значений W, γ, λ, η может не существовать равновесных ожиданий. Параллельно проверим сделанные нами ранее выводы о зависимости РЕ от различных параметров.

Визуализация результатов дальнейшего численного анализа будет происходить следующим образом:

- ось абсцисс — ожидаемое потребление $C_1^e \in [0, W]$;
- ось ординат — реальное потребление $C_1 \in [0, W]$;
- синие точки — при данных C_1^e и C_1 условие (15) выполняется;
- красные точки — при данных C_1^e и C_1 условие (15) не выполняется.

Для того, чтобы множество РЕ не было пустым, должно существовать хотя бы одно ожидание C_1^e такое, что алгоритм проверки условия (15) в результате работы выдаст для него только синие точки при всех значениях C_1 (т.е. множество РЕ не пусто, если найдется хоть одна вертикаль, состоящая исключительно из синих точек). Но если для всех C_1^e найдутся C_1 такие, что условие (15) не выполняется (т.е. на каждой вертикали найдутся красные точки), это позволит сделать вывод, что множество РЕ действительно является пустым.

Фиксируем $W = 10, \eta = 0.25, \lambda = 1.6$ (значения параметров подобраны нами эксперементально для повышения наглядности результатов).

Проверим, существуют ли C_1^e $\in$PE при $\gamma = 0.2$ и $\gamma = 0.6$:

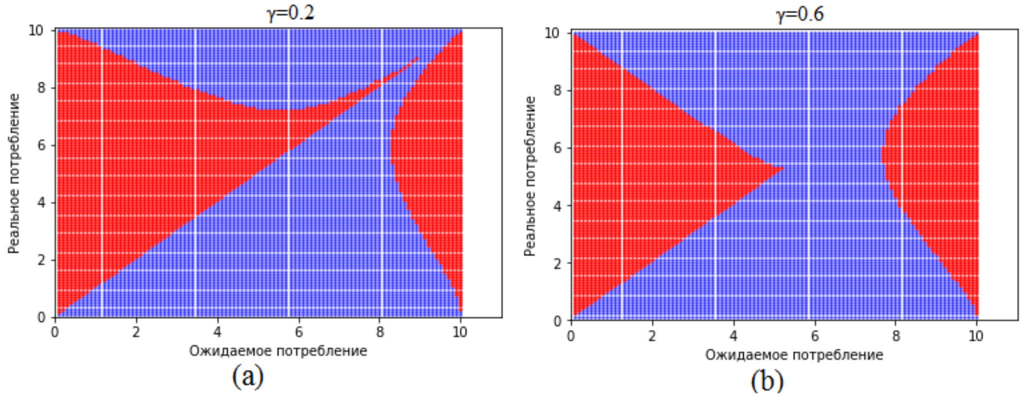

Рис. 12: Проверка условия (15) при $W = 10, \eta = 0.2, \lambda = 1.6$. (a) PE$= \emptyset$; (b)$\exists$ $C_1^e \in$ PE.

На рис. 12(a) видно, что для всех C_1^e существуют C_1, при которых условие (15) не выполняется. Это подтверждает результаты, полученные нами ранее: действительно сущестуют такие наборы параметров, для которых не существует равновесных ожиданий.

При увеличении значения γ (рис. 12(b)) были найдены C_1^e $\in$PE, что подтверждает наш выводы о влиянии γ на PE.

Проверим наши выводы о влиянии η на PE, сделанные на основании рис. 6. Оставиим значения W и λ без изменений, зафиксируем $\gamma = 0.2$, т.к. при этом значении (рис.12(a)) множество PE пусто. Увеличим значение η:

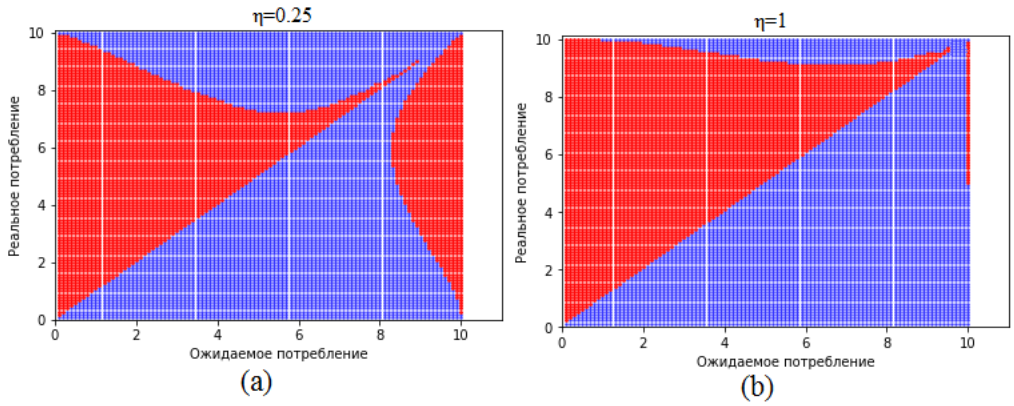

Рис. 13: Проверка условия (15) при $W = 10, \gamma = 0.2, \lambda = 1.6$. (a) PE$= \emptyset$; (b)$\exists$ $C_1^e \in$ PE.

При увеличении η (рис. 14(b)) нашлись ожидания $C_1^e \in$ PE, что подтверждает сделанный ранее вывод: от веса функции $\mu(\cdot)$, интерпретируемого как эмоциональность индивида, зависит влияние «психологической» функции на общее субъективное благополучие, поэтому при повышении значения η увеличивается количество наборов $\gamma\lambda$, для которых существуют равновесные ожидания.

Проверим наше заключение о негативном влиянии увеличения значения W на существование равновесных ожиданий. Фиксируем η, γ, λ следуя рис. 14(b), т.к. при этом наборе значений параметров множество PE не является пустым. Увеличим значение W:

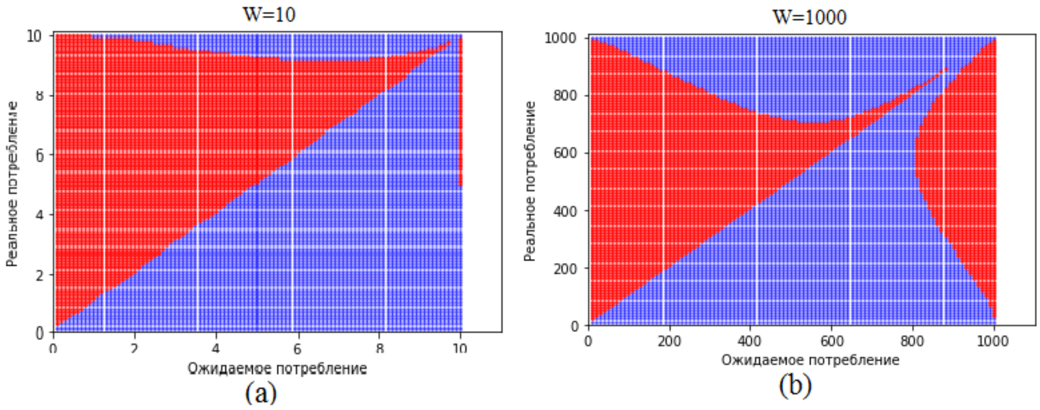

Рис. 14: Проверка условия (15) при $\eta = 1, \gamma = 0.2, \lambda = 1.6$. (a) $\exists\ C_1^e \in$ PE; (b)PE= $\emptyset$.

Напомним, что на основании рис. 7 мы сделали вывод, что при увеличении благосостояния уменьшается количество наборов $\gamma\lambda$, для которых множество PE не пусто. Результат, полученный на рис. 14, подтверждает сделанный ранее вывод.

2.3. Выводы

Подведем итоги проведенного нами анализа поиска равновесных ожиданий (PE) и предпочитаемых персональных равновесий (PPE) для двухпериодной модели субъективного благополучия с использованием функции $\mu(\cdot)$ кусочно-линейного вида (3) и специального вида (4). Кратко изложим основные выводы.

- *Аналитический поиск PPE.*

В связи с тем, что аналитический поиск проводился нами в общем виде (7), для функций (8) и (9) получены идентичные результаты: план потребления $(W/2; W/2)$ является PPE при $\gamma\lambda \geq 1$. Это потверждает результат, полученый для функции (8) Koszegi и Rabin [12].

- *Численный анализ PPE.*

Нами было показано, что если существуют ожидания, принадлежащие множеству PE, то при $\gamma\lambda < 1$ PPE определяется как минимальное ожидание $C_1^e \in$ PE. Для $\gamma\lambda \geq 1$ численный анализ подтвердил результаты, полученные нами аналитически: PPE$= W/2$.

- *Численный анализ PE для функции (8).*

Проведенный нами численный анализ PE для функции (8) показал существование равновесных ожиданий при любых наборах параметров. Это потверждает результат, полученый Koszegi и Rabin [12].

- *Численный анализ PE для функции (9).*

Нами было показано, что для функции (9) при некоторых наборах параметров не существует ожиданий, принадлежащих PE. Более детальный анализ позволил нам сделать выводы о влиянии каждого из параметров модели на PE.

Количество точек несуществования равновесных ожиданий:

- при увеличении η — уменьшается;
- при увеличении W — увеличивается;
- при увеличении γ — уменьшается;
- при увеличении λ — уменьшается.

Так как PPE выбирается из множества PE, то несуществование в некоторых случаях равновесных ожиданий является серьезным недостатком концепции предпочитаемого персонального равновевсия: не всякий индивид, следуя данной концепции, сможет формировать свои ожидания относительно потребления рациональным образом. Обладание определенным набором персональных характеристик обрекает его на пожизненную нерациональность в формировании ожиданий.

Нами было показано, что для двухпериодной модели субъективного благополучия при использовании функции $\mu(\cdot)$ специального вида (4), концепция PPE, предложенная Koszegi–Rabin, является не состоятельной.

Заключение

В данной выпускной квалификационной работе рассматривался вопрос моделирования персонального экономического благополучия и его влияния на экономические решения, принимаемые индивидом. На основании проведенного обзора литературы по данной тематике было принято решение выбрать для дальнейшего исследования модель субъективного благополучия с эндогенными базисными точками, предложенную Koszegi и Rabin [12]. В рамках выбранной модели рассмотрена задача формирования рациональных ожиданий относительно потребления, которые являются базисными точками. Авторы модели для решения данной задачи предлагают концепцию *Preferred Personal Equilibrium* (PPE), следуя которой, индивид максимизирует свое субъективное благополучие.

В своих исследованиях [12] Koszegi и Rabin применяли функцию отношения к отклонениям от точки отсчета в предположении о ее кусочной линейности. Это является сильным допущением и сильно упрощает модель. Поэтому нами было принято решение для дальнейших исследований выбрать специальный вид функции, удовлетворяющий всем требуемым свойствам без предположения о ее кусочной линейности.

В данной работе было проведено исследование изменений решений задачи формирования рациональных ожиданий согласно концепции PPE для двухпериодной модели субъективного благополучия при изменении значений каждого параметра модели. Анализ модели производился для обоих видов функции отношения к отклонениям от точки отсчета.

Анализ решений задачи PPE при использовании кусочно-линейного вида функции подтвердил результаты, полученные Koszegi и Rabin в работе [12].

Проведенный нами численный анализ решений задачи формирования рациональных ожиданий на основе концепции PPE показал, что при использовании специального вида функции для некоторых наборов параметров модели не существует ожиданий PPE. Т.е. индивид, обладающий определенным набором характеристик, не сможет сформировать рациональные ожидания относительно своего потребления, следуя концепции PPE. Это позволило сделать предположение о несостоятельности концепции PPE.

Для проверки сделанного предположения было решено провести анализ возможных методических ошибок, однако он не выявил нарушений в ходе численных исследований.

Для проверки полученных выводов были проведены дополнительные численные исследования, результаты которых подтвердили наше предположение о том, что для некоторых наборов параметров модели не существует решений PPE, а также позволили сделать выводы о зависимости существования PPE от значений каждого из параметров.

Таким образом в данной работе впервые было показано, что концепция формирования рациональных ожиданий PPE является несостоятельной без предположения о кусочной линейности функции отношения к отклонениям от точки отсчета.

Список литературы

[1] Bowman D., Minehart D., Rabin M. Loss aversion in a consumption–savings model //Journal of Economic Behavior & Organization. – 1999. – T. 38. – №. 2. – P. 155–178.

[2] Easterlin R. A. Does economic growth improve the human lot? Some empirical evidence //Nations and households in economic growth. – 1974. – T. 89. – P. 89–125.

[3] Easterlin R. A. Income and happiness: Towards a unified theory //The economic journal. – 2001. – T. 111. – №. 473. – P. 465–484.

[4] Edwards W. Recent research on pain perception //Psychological bulletin. – 1950. – T. 47. – №. 6. – C. 449.

[5] Ellsberg D. Risk, ambiguity, and the Savage axioms //The quarterly journal of economics. – 1961. – P. 643–669.

[6] Fehr E., Schmidt K. M. A theory of fairness, competition, and cooperation //The quarterly journal of economics. – 1999. – T. 114. – №. 3. – P. 817–868.

[7] Gilboa I., Schmeidler D. Maxmin expected utility with non-unique prior //Journal of mathematical economics. – 1989. – T. 18. – №. 2. – C. 141–153.

[8] Hsee C. K., Tsai C. I. Hedonics in consumer behavior. – 2007.

[9] Kahneman D., Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk //Econometrica: Journal of the econometric society. – 1979. – P. 263–291.

[10] Kimball M., Willis R. Utility and happiness //University of Michigan. – 2006. – P. 1–67.

[11] Koszegi B., Rabin M. A model of reference-dependent preferences //The Quarterly Journal of Economics. – 2006. – T. 121. – №. 4. – P. 1133–1165.

[12] Koszegi B., Rabin M. Reference-dependent consumption plans //The American Economic Review. – 2009. – T. 99. – №. 3. – P. 909–936.

[13] Laibson D. Golden eggs and hyperbolic discounting //The Quarterly Journal of Economics. – 1997. – T. 112. – №. 2. – C. 443—478.

[14] Mahalanobis P. C. The foundations of Statistics //Dialectica. – 1954. – T. 8. – №. 2. – P. 95–111.

[15] Matthey A. Getting used to risks: reference dependence and risk inclusion. – SFB 649 discussion paper, 2005. – №. 2005, 036.

[16] Savage Leonard J. The foundations of statistics //NY, John Wiley. – 1954. – C. 188—190.

[17] Stutzer A. The role of income aspirations in individual happiness //Journal of Economic Behavior & Organization. – 2004. – T. 54. – №. 1. – P. 89–109.

[18] Von Neumann J., Morgenstern O. Theory of games and economic behavior //Bull. Amer. Math. Soc. – 1945. – T. 51. – №. 7. – P. 498–504.

[19] Морис А. Поведение рационального человека в условиях риска: критика постулатов и аксиом американской школы //Econometrica. – 1953. – T. 21. – №. 2. – C. 503–549.

[20] Плаус С. Психология оценки и принятия решений / Перевод с англ. — М.: Информацион-но-издательский дом «Филинъ», 1998. -— 368 с.

[21] Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г., Неравенства, ИЛ, М., 1948. 91с.

Приложения

Приложение 1

```
import math as m
import matplotlib.pyplot as plt

def PE (c1e):
    sc1e=m.sqrt(c1e)
    sc2e=m.sqrt(w-c1e)
    c1=0.01*w
    while c1<w:
        A1=m.sqrt(c1)-sc1e
        A2=m.sqrt(w-c1)-sc2e
        gl1=m.pow(m.fabs(A1),(h))
        gl2=m.pow(m.fabs(A2),(h))
        if A1>=0:
            u=A1+A2+n*gl1-l*g*n*gl2
        else:
            u=(A1+A2-n*l*gl1+g*n*gl2)
        if u>0:
            return(1)
        c1=c1+w*0.01
    return(0)

def gainloss ():
    pe=[]
    c1e=w*0.01
    i=0
    area = np.pi
    while c1e < w :
        if PE(c1e)==0:
            plt.scatter(g*l, c1e, s=area, c='b', alpha=0.4)
            pe.append((c1e))
            i=i+1
```

```
        c1e=c1e+0.01*w
    if i==0: pe=[-1]
    return(pe)

def PPE(c1e,pe):
    for c1 in pe:
        if (m.sqrt(c1e)+m.sqrt(w-c1e))<(m.sqrt(c1)+m.sqrt(w-c1
            return(1)
    return(0)

w=10
n=1.2
h=1/3
fig = plt.figure()
for i in range(1, 10):
    g=0.1*i
    for j in range(1,11):
        l=j*0.1+1
        gl=g*l
        plt.plot([gl,gl],[0,w], c='black', alpha=0.1)#PE
        a=gainloss()
        if a[0]==-1:
            area=np.pi*3
            plt.scatter(gl,0.2,s=area, c='black', alpha=1)
        else:
            for c1e in a:
                if PPE(c1e,a)==0:
                    plt.scatter(gl, c1e, s=area, c='r', alpha=

plt.ylabel('Ожидаемое потребление')
s='%s %i, %s %.2f' % ('W=', w, 'n=', n)
plt.title(s)
plt.axis([0, 2, 0, w+0.01*w])
plt.show()
```