Санкт-Петербургский Государственный Университет
Кафедра Теории систем управления электрофизической аппаратурой

Шеховцов Антон Сергеевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Анализ устойчивости уравнения ядерного распада с учетом запаздывающих нейтронов

Направление «010900»
Прикладные математика и физика

Научный руководитель:
Заслуженный работник ВШ РФ,
д. ф.-м. н.,
профессор
Жабко А. П.

Рецензент:
д. ф.-м. н.,
профессор
Смирнов Н.В.

Санкт-Петербург
2017

Оглавление

Введение

Ядерная энергетика – область энергетики, занимающаяся производством электрической и тепловой энергии путём преобразования ядерной энергии. Главная специфическая особенность этой отрасли заключается в потенциальной радиационной опасности, которая может проявиться как в ходе технологического процесса, так и спустя некоторый промежуток времени. Радиационная опасность связана с наличием естественных радионуклидов, добываемых вместе с ураном и торием, и, в большей степени, с радиоактивными продуктами деления и захвата нейтронов, образующимися в ядерных реакторах. Топливный цикл ядерной энергетики на всех этапах вызывает проблему радиационной безопасности. Эта проблема решается в соответствии со спецификой текущих производственных процессов. Наибольшую радиационную опасность во всей системе ядерной энергетики представляют непосредственно производители энергии – ядерные энергетические установки. Ядерные энергетические реакторы характеризуются высоким давлением теплоносителя, высокими температурами, высокой плотностью энерговыделения, большим количеством радиоактивных продуктов деления в топливе. В этих реакторах возникают запаздывающие нейтроны. Несмотря на то, что запаздывающие нейтроны менее 1% от всех испускаемых нейтронов, обладают большим запаздыванием чем существенно увеличивают время жизни нейтронов из одного поколения и дают возможность управлять цепной ядерной реакцией.

Определение 1. *Запаздывающие нейтроны - это нейтроны испускаемые продуктами деления через некоторое время после реакции деления тяжелых ядер.*

Определение 2. *Функция $x(t)$ являющаяся решением дифференциального уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для каждого такого $\overline{x}_0$, что $|\overline{x}_0 - x_0| < \delta$, решение $\overline{x}(t)$ с начальным условием*

$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$ *при* $t_0 \leq t < \infty$ *существует и*

$$|\overline{x}(t) - x(t)| < \varepsilon \ (t_0 \leq t < \infty)$$

Определение 3. *Областью устойчивости называется область в пространстве параметров, каждой точке которой соответствуют только левые корни характеристического уравнения.Область устойчивости выделяет из всех возможных значений параметров лишь те значения, при которых система устойчива.*

В данной работе рассматривается точечная модель ядерного распада с учётом запаздывающих нейтронов.Данная модель представлена в [1], и описывается уравнением:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_i \lambda_i C_i + S(t), \tag{1}$$

где n - плотность нейтронов; Λ - время генерации мгновенных нейтронов; $\Lambda = \frac{\Lambda'}{k_{ef}}$ (Λ' - время жизни мгновенных нейтронов в реакторе, k_{ef} - эффективный коэффициент размножения),λ_i, C_i - постоянная и концентрация распада ядер эмиттеров i-й группы, β - полная доля запаздывающих нейтронов, $\rho = \frac{k_{ef}-1}{k_{ef}}$ - реактивность, S - мощность источника нейтронов.

"Под S может подразумеваться как внешний источник нейтронов, так и источник, обусловленный вторичными ядерными реакциями с испусканием нейтронов: (γ, n), (α, n), спонтанное деление и др."[1]

Для исследования устойчивости ядерного распада с запаздывающими нейтронами будут использованы методы D-разбиения описанный в [2] и метод функционала Ляпунова изложенный в [3]. Подробнее методы будет представлен в соответствующих главах.

Постановка задачи

В данной работе ставится задача построения области устойчивости двумя методами, методом D-разбиения и методом функционала Ляпунова. Подлежит рассмотрению уравнение (1) приведенное выше.

В данном уравнении необходимо провести некоторые преобразования для того, чтобы оно стало уравнением с отклоняющимся аргументом. В первую очередь в работе [1] было отмечено, что для рассмотрения уравнения (1) можно пренебрегать членом $S(t)$. Также из уравнения (1) заменяется второй член стоящий справа, а именно происходит распад ядер-эмиттеров происходит рождение запаздывающих нейтронов:

$$\sum_i \lambda_i C_i \to cn(t-h) + b\frac{dn(t-h)}{dt}$$

Данные члены будет отвечать за группу запаздывающих нейтронов, первый член за запаздывающие нейтроны выделвшиеся при первом распаде, а второй член отвечает за изменение плотности группы запаздывающих нейтронов выделившихся при предыдущем распаде. Таким образом мы приняв некоторые допущения построили модель ядерного распада с учётом группы запаздывающих нейтронов, которая представлена в виде дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом.

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho-\beta}{\Lambda}n(t) + cn(t-h) + b\frac{dn(t-h)}{dt} \tag{2}$$

В дальнейшем в работе будет фигурировать уравнение (2). Введем обозначение для члена $\frac{\rho-\beta}{\Lambda} = a$.

Основные понятия теории уравнений с отклоняющимся аргументом

В данной работе рассматриваются дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом.

Определение 4. *Дифференциальным уравнением с отклоняющимся аргументом является уравнение относительно неизвестной функции, её производных вычисленных при некоторых значениях аргумента, отличающихся на постоянные. Примером такого уравнения является:*

$$\dot{x}(t) + \dot{x}(t-1) + x(t) = 0$$

Дифференнциальным порядком уравнения называется порядок наивысшей входящей в него производной, разностным порядком уравнения называется число на единицу меньшее числа разных значений аргумента встречающихся в уравнении.

Существует множество задач, где используются дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Приведём пару примеров которые описаны в [4]

1. Система с запаздывающей обратной связью.

В такой системе делается предположение, что величина, подводимая цепью обратной связи на её вход в момент времени t зависит от состояния системы в предыдущий момент времени $t - \tau$, где τ - постоянная величина. Элемент запаздывания τ, появляется из-за невозможности предположить, что воздействие выходной координаты предыдущего звена на вход последующего звена происходит мгновенно, а для передачи сигнала потребуется время пренебречь которым мы не можем. Схематически систему с запаздывающей обратной связью можно изобразить так:

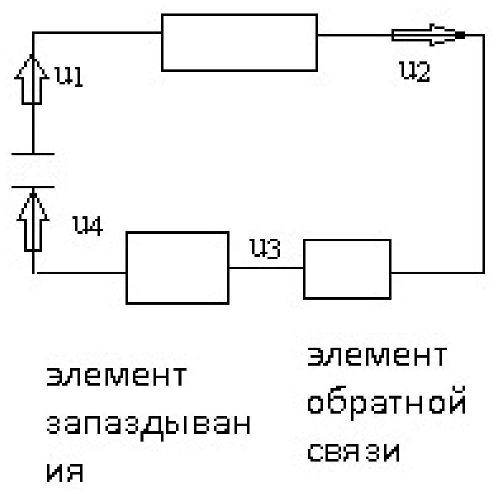


Рис. 1: Система с запаздывающей обратной связью

Дифференциальное уравнение системы можно записать в виде:

$$Q_1(D)u_2 = P_1(D)u_1 \tag{3}$$

где D - оператор дифференцирования, $Q_1(D)$ и $P_1(D)$ - полиномы оператора D. Из-за того что цепь обратной связи состоит из двух элементов обратной связи и запаздывания имеем уравнение элемента обратной связи :

$$Q_2(D)u_3 = P_2(D)u_2 \tag{4}$$

и уравнение запаздывания:

$$u_4 = u_3(t-\tau) \tag{5}$$

Исключая из уравнений (3,4,5) получим: $Q(D)u_4 = P(D)u_1(t-\tau)$, если предположить $u_4 = u_1$, то можно записать уравнение с запаздывающей обратной связью:

$$Q(D)u_1 = P(D)u_1(t-\tau)$$

если расписать полиномы $Q_1(D)$ и $P_1(D)$ уравнение примет вид:

$$a_0\frac{d^n u_1(t)}{dt^n} + \ldots + a_n\frac{du_1(t)}{dt} = b_0\frac{d^m u_1(t-\tau)}{dt^m} + \ldots + b_m\frac{du_1(t-\tau)}{dt}$$

2.Исследование реакции клеток на рентгеновское облучение.

Пусть клетки подвергнуты рентгеновскому облучению, и мы ставим перед собой задачу описать химические реакции в клетках уравнениями. Предположим что время T, $x(t)$ - концентрация вещества, подвергнутого облучению, x_0 - нормальная равновесная концентрация этого же вещества при отсутствии облучения. Пусть облучение начинается в момент времени $t = 0$ и продолжается в течение времени t_0,затем прекращается. Допустим, также что клетки обладают способностью восполнить недостаток или устранить лишнее время, но их реакция происходит с запаздыванием равным ξ. Тогда $x(t_0) = x_0$, $t \leq 0$.Согласно Зиверту процессы описываются уравнениями:

$$\dot{x}(t) + kx(t) + Rx(t-\xi) = Rx_0, 0 \leq t \leq t_0$$

$$\dot{x}(t) + Rx(t-\xi) = Rx_0, t \geq t_0,$$

где k - постоянная облучения зависящая от степени облучения, R - постоянная, характеризующая реакцию клетки на отклонение от нормальной равновесной концентрации x_0.

1. Построение области устойчивости методом D-разбиения

1.1. Метод D-разбиения

Рассмотрим один из методов анализа устойчивости дифференциально-разностных систем. Метод D-разбиения. «Корни характеристического квазиполинома $\phi(z)$ при фиксированном отклонении τ являются непрерывными функциями его коэффициентов(предполагается неравенство нулю коэффициента при главном члене что всегда выполнено для уравнений с запаздывающим аргументом)».Необходимо разбить пространство коэффициентов на области гиперповерхностями, точкам которых соответствуют квазиполиномы, имеющие хотя бы один нуль на мнимой оси (случай $z = 0$ не исключается). Данное разбиение называется D-разбиением.

Точкам каждой области D-разбиения соответствуют квазиполиномы с одинаковым числом корней с положительной вещественной частью (под числом корней здесь подразумевается сумма из кратностей), изменение числа корней с положительной вещественной частью может произойти при непрерывном изменении коэффициентов лишь при переходе через границу области нашего разбиения. Среди областей разбиения находятся области u_0 которым соответствуют квазиполиномы, не имеющие ни одного корня с положительной вещественной частью. Эти области называются областями асимптотической устойчивости для решений соответствующих рассматриваемым квазиполиномам стационарных линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.»[2]

Исследование устойчивости методом D-разбиения в пространстве коэффициентов проводится по следующему алгоритму: находим D-разбиение и выделяем из него области u_0. Для того чтобы выделить область u_0, если она связна, достаточно убедиться, что хотя бы одна её точка соответствует полиному, все нули которого имеют отрицательную вещественную часть. Для определения того как меняется число корней с положи-

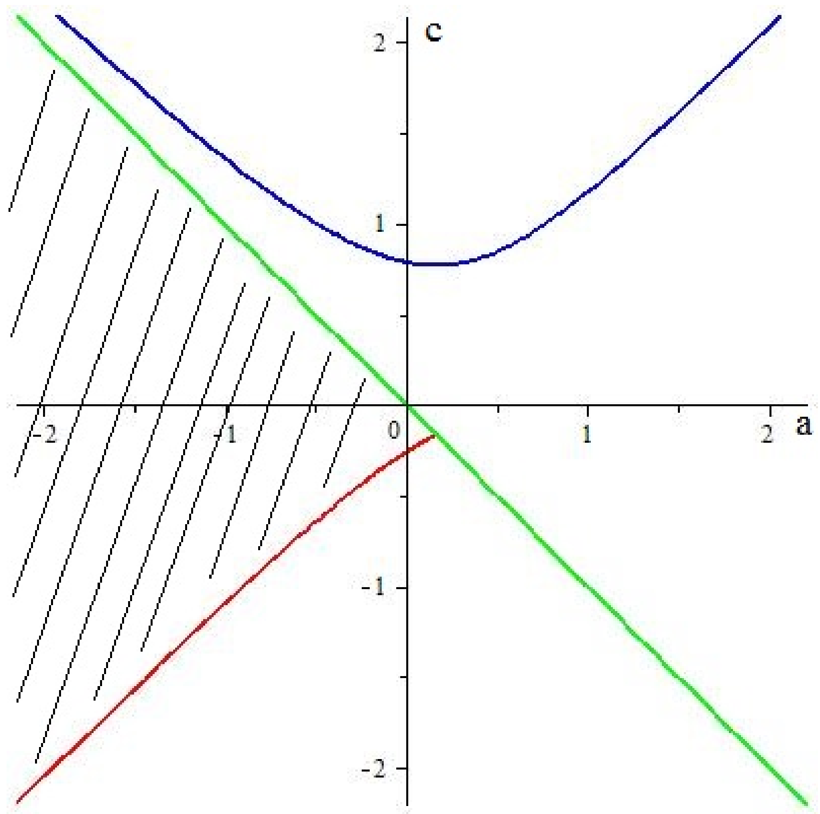


Рис. 2: Случай $b = 0$

тельно определенной вещественной частью при переходе через любую границу D-разбиения, необходимо вычислить дифференциал действительной части корня и по его знаку судят об уменьшении или увеличении корней с положительной вещественной частью. Рассмотрим два случая уравнения (2).

1.Случай $b = 0$, который соответствует выделению запаздывающих нейтронов при первом распаде:

$$\frac{dn(t)}{dt} = an(t) + cn(t - \tau),$$

данному случаю соответствует характеристический полином $\phi(x) = -x + a + ce^{-\tau x}$, в данном полиноме произведем замену $x = i\omega$ при $\phi(0) = 0$, $\phi(i\omega) = 0$.Разделяя вещественную и мнимую части получим систему уравнений, решением которой является:

$$a = \omega\ ctg(\tau\omega),\ c = \frac{-\omega}{sin(\tau\omega)}$$

При произвольном выборе τ, возьмем $\tau = 6$, и получим D-разбиение представленное на (Рис. 2), область выделенная на рисунке является областью устойчивости. (Рис. 2) построен с помщью языка MAPLE код приведён в приложении.

2.Случай $c = 0$, соответствующий изменению плотности запаздывающих нейтронов выделившихся при предыдущем распаде.

$$\frac{dn(t)}{dt} = an(t) + b\frac{dn(t-\tau)}{dt},$$

характеристический полином $\phi(x) = -x + a + bxe^{-\tau x}$, при замене $x = i\omega$ при $\phi(0) = 0$, $\phi(i\omega) = 0$. Решение системы уравнений:

$$a = -\omega tg(\tau\omega),\ b = \frac{1}{cos(\tau\omega)}$$

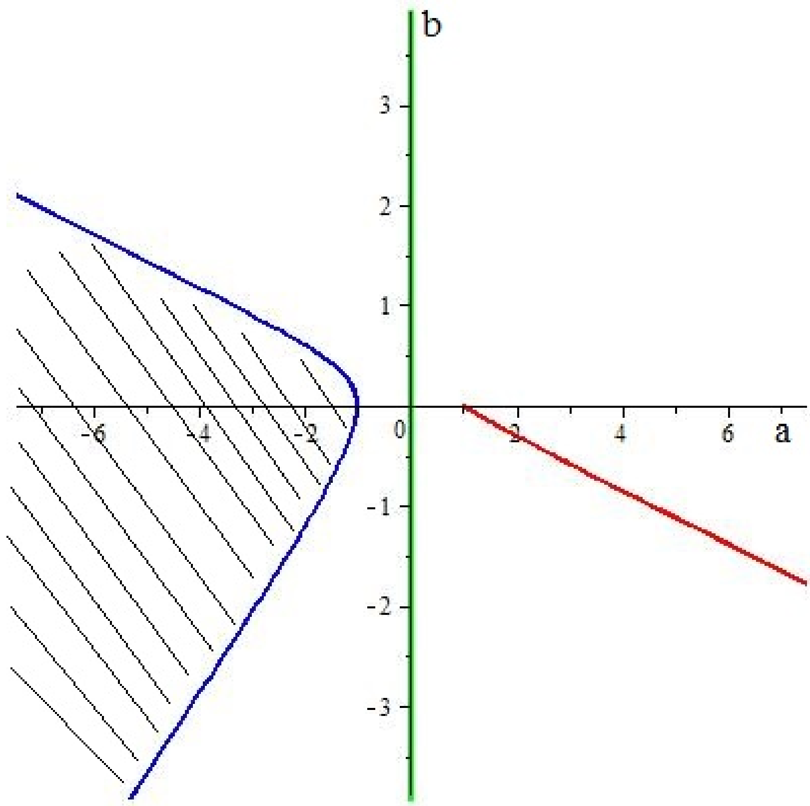


Рис. 3: Случай $c = 0$

Заштрихованная на (Рис. 3) область является областью устойчивости.(Рис. 3) построен с помщью языка MAPLE код приведён в приложении.

2. Метод функционалов Ляпунова-Красовского

Этот метод в отличие от метода D-разбиения позволяет учитывать нелинейность, нестационарность уравнения и неопределённость параметров процесса. Общий подход заключается в следующем. Для номинальной системы (2) строим функционал Ляпунова-Красовского $v(x_t)$. Затем мы ищем производную этого функционала вдоль решений исходной нелинейной и нестационарной системы $(*)$, а именно

$$\left.\frac{dv(x_t)}{dt}\right|_{(*)} = w(t, x_t),$$

где $(*)$

$$\frac{dn(t)}{dt} = f(t, n(t), n(t-h))$$

мы считаем, что номиальная система (2) является системой линейного приближения системы $(*)$. Далее анализируем отрицательную определенность функционала w.

2.1. Вспомогательные сведения

Для построения функционала необходимо привести некоторые вспомогательные сведения из [5], для систем линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием.

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + A_1 x(t-h),\ t \geq 0 \tag{6}$$

Теорема 1. *Система уравнений (6) экспоненциально устойчива, если существует функционал $v : PC([-h, 0], R^n) \to R$ такой, что выполняются следующие условия:*

1. Для любых положительных α_1 и α_2

$$\alpha_1 ||\phi(0)||^2 \leq v(\phi) \leq \alpha_2 ||\phi||_h^2,\ \phi \in PC([-h, 0], R^n)$$

2. Для любого β выполняется неравенство

$$\frac{dv(x_t)}{dt} \leq -\beta||x(t)||^2,\ t \geq 0$$

вдоль решений системы.

Метод функционала Ляпунова является одним из основных способов исследования систем с запаздывающим аргументом. Одной из главных проблем данного метода является то что функционал $v(\phi)$ не связан с системой (6).

Предположим, что система (6) экспоненциально устойчива. Выберем квадратичную форму $w_0(x) = x^T W x$ с заданной матрицей W и построим функционал $v_0(\phi)$, удовлетворяющий условию:

$$\frac{dv_0(x_t)}{dt} = -w_0(x),\ t \geq 0$$

Используя формулу Коши и экспоненциальную устойчивость системы (6), запишем выражение функционала:

$$v(\phi) = \phi^T(0)U(0)\phi(0) + 2\phi^T(0)\int\limits_{-h}^{0} U(-h-\theta)A_1\phi(\theta)d\theta +$$

$$+\int\limits_{-h}^{0} \phi^T(\theta_1)A_1^T\left[\int\limits_{-h}^{0} U(\theta_1-\theta_2)A_1\phi(\theta_2)d\theta_2\right]d\theta_1,$$

где матрицу

$$U(\tau) = \int_0^\infty K^T(t)WK(t)dt$$

называют матрицей Ляпунова, с ассоциированной матрицей W. Матрица $K(t)$ - фундаментальная матрица системы (6). Далее будут приведены некоторые свойства матрицы Ляпунова.

Определение 5. *Система называется экспоненциально устойчивой, если существуют $\gamma \geq 1$ и $\sigma > 0$, такие что, любое решение $x(t,\phi)$ системы удовлетворяет неравенству*

$$||x(t,\phi)|| \leq \gamma e^{\sigma t}||\phi||_h,\ t \geq 0$$

***Лемма* 1.** *Матрица Ляпунова $U(\tau)$ удовлетворяет динамическому свойству:*

$$\frac{dU(\tau)}{dt} = A_0U(\tau) + A_1U(\tau - h), \tau \geq 0$$

***Лемма* 2.** *Матрица Ляпунова обладает свойством симметричности:*

$$U(-\tau) = U^T(\tau), \tau \geq 0$$

***Лемма* 3.** *Матрица Ляпунова удовлетворяет алгебраическому свойству:*

$$U(0)A_0 + U(-h)A_1 + A_0^TU(0) + A_1^TU(h) = -W$$

2.2. Построение матрицы Ляпунова для уравнения ЯР с запаздывающим аргументом (случай $b = 0$)

Рассмотрим наиболее интересный случай уравнения (2). Случай $b = 0$.

$$\frac{dn}{dt} = an(t) + cn(t - h)$$

Пусть w_0, w_1, w_2 - положительно определенные числа, $w = w_0 + w_1 + hw_2$ и $u(\tau)$ - является матрицей Ляпунова. Известно, что матрица Ляпунова удовлетворяет свойствам из лемм 1-3.

Произведём замену переменных в уравнении (6):

$$\begin{aligned} Y(\tau) &= u(\tau) \\ Z(\tau) &= u(\tau - h) \end{aligned}$$

Получим систему:

$$\begin{aligned} \tfrac{dY(\tau)}{d\tau} &= aY(\tau) + bZ(\tau) \\ \tfrac{dZ(\tau)}{d\tau} &= -bY(\tau) - aZ(\tau) \end{aligned}$$

Из леммы 3:

$$aY(0) + Y(0)a + bY(h) + Z(0)b = -W, \; Y(0) = Z(h)$$

Таким образом система примет вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} \tag{7}$$

С начальным условием:

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b & 0 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} h}]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -w \end{pmatrix} \tag{8}$$

Решением системы (7) с начальным условием (8) является:

$$\begin{pmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \tau} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b & 0 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} h} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -w \end{pmatrix} \tag{9}$$

Таким образом вычислив выражение стоящее справа от знака равенства в выражении (9) получим:

$$\begin{pmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \tau} \begin{pmatrix} \frac{-we^{bh}}{b+2e^{bh}a+e^{bh}be^{-bh}} \\ \frac{-w}{b+2e^{bh}a+e^{bh}be^{-bh}} \end{pmatrix}$$

Для того чтобы вернуться к изначальным переменным воспользуемся некоторыми утверждениями приведёнными в [5].

Лемма 4. *Если задача (7) с условием (8) имеет единственное решение $Y(\tau)$, $Z(\tau)$, то*

$$U(\tau) = Y(\tau),\ \tau \in [0, h]$$

является единственной матрицей Ляпунова с ассоциированной матрицей W.

Теорема 2. *Система (6) допускает единственную матрицу Ляпунова связанную с заданной симметричной матрицей Ляпунова W тогда и только тогда, когда система удовлетворяет условию Ляпунова.*

Теорема 3. *Система (6) удовлетворяет условию Ляпунова тогда и только тогда, когда выполняется*

$$det(M + Ne^{Lh}) \neq 0$$

Замечание 1. *Условие теоремы (3) выполнено для уравнения (2), если параметры находятся в области устойчивости (см.(Рис. 2,Рис. 3)).*

Заключение

В данной работе была рассмотрена задача устойчивости ядерного распада методами D-разбиения и функционала Ляпунова. Методом D-разбиения была получена область устойчивости в пространстве коэффициентов номинальной системы. Был построен функционал Ляпунова-Красовского для системы (2). На основе которого можно оценить устойчивость процесса ядерного распада для реальной модели.

Список литературы

[1] Наумов В.И., Смирнов В.Е. Моделирование нестационарных и аварийных процессов в ядерных энергетических установках: лабораторный практикум. *М.: МИФИ*, 2007.

[2] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию уравнений с отклоняющимися аргументами. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.—М.: Наука*, 1971.

[3] Харитонов В.Л. Функционалы Ляпунова с заданной производной. ii. Матрицы Ляпунова. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, (1-2), 2005.

[4] Штокало И. З. Операционное исчисление: обобщения и приложения. 1972.

[5] Kharitonov Vladimir. *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*. Springer Science & Business Media, 2012.

Приложение

```
> restart;
h := 6;
with(plots) :
```

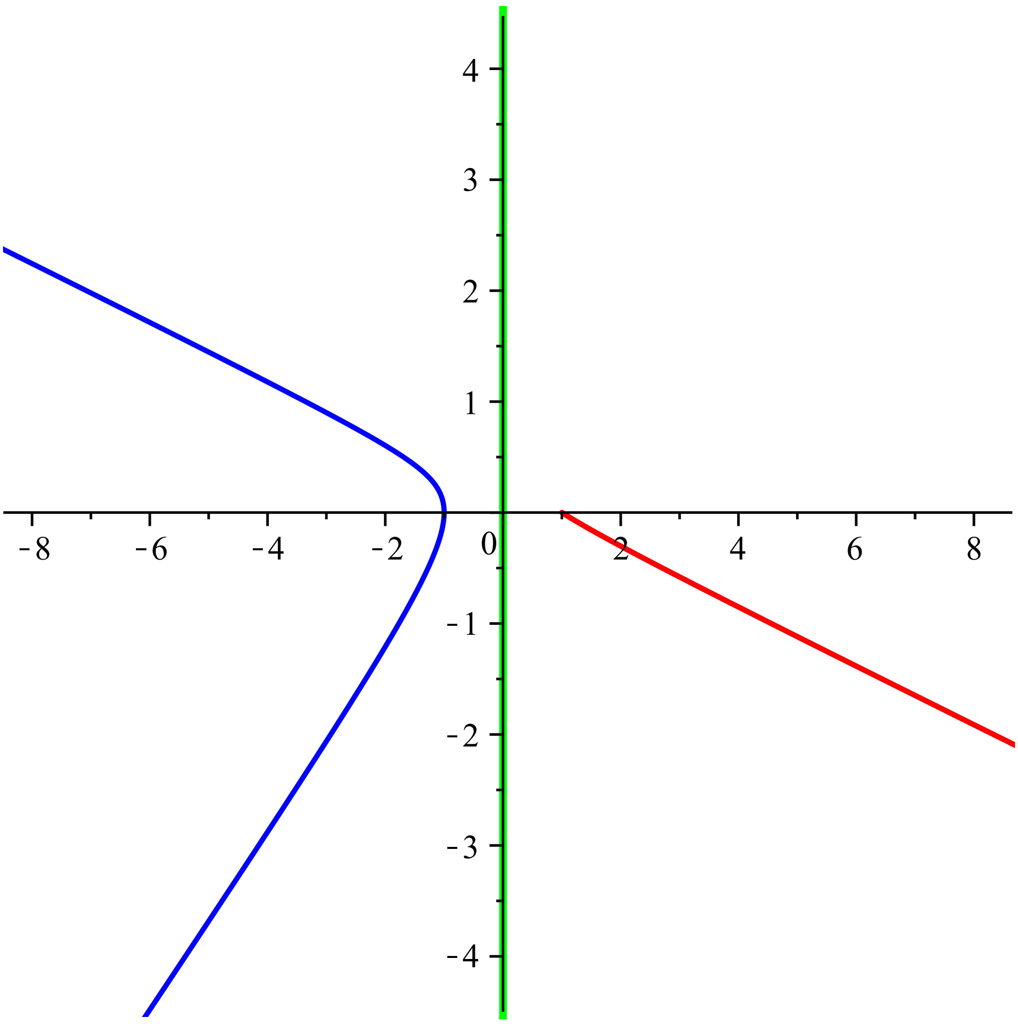
$$p1 := plot\left(\left[\frac{1}{\cos(h\cdot w)}, -w\cdot\tan(h\cdot w), w = \left(-\frac{Pi}{2\cdot h} + 0.00001\right)..\left(\frac{Pi}{2\cdot h} - 0.00001\right)\right], color = red, thickness = 2\right);$$

$$p2 := plot\left(\left[\frac{1}{\cos(h\cdot w)}, -w\cdot\tan(h\cdot w), w = \left(\frac{Pi}{2\cdot h} + 0.00001\right)..\left(\frac{3\cdot Pi}{2\cdot h} - 0.00001\right)\right], color = blue, thickness = 2\right);$$

$$p3 := plot([0, w, w = (-10 + 0.00001)..(10 - 0.00001)], color = green, thickness = 3);$$

$display(p1, p2, p3)$

$$h := 6$$
$$p1 := PLOT(\ldots)$$
$$p2 := PLOT(\ldots)$$
$$p3 := PLOT(\ldots)$$




```
> h := 6;
with(plots) :
```

$$p1 := plot\left(\left[w\cdot\cot(h\cdot w), -\frac{w}{\sin(h\cdot w)}, w = (0 + 0.00001)\,..\left(\frac{\mathrm{Pi}}{h} - 0.00001\right)\right], color = red, thickness = 2\right);$$

$$p2 := plot\left(\left[w\cdot\cot(h\cdot w), -\frac{w}{\sin(h\cdot w)}, w = \left(\frac{\mathrm{Pi}}{h} + 0.00001\right)..\left(\frac{2\cdot\mathrm{Pi}}{h} - 0.00001\right)\right], color = blue, thickness = 2\right);$$

$$p3 := plot([-w, w, w = (-10 + 0.00001)\,..(10 - 0.00001)], color = green, thickness = 2);$$

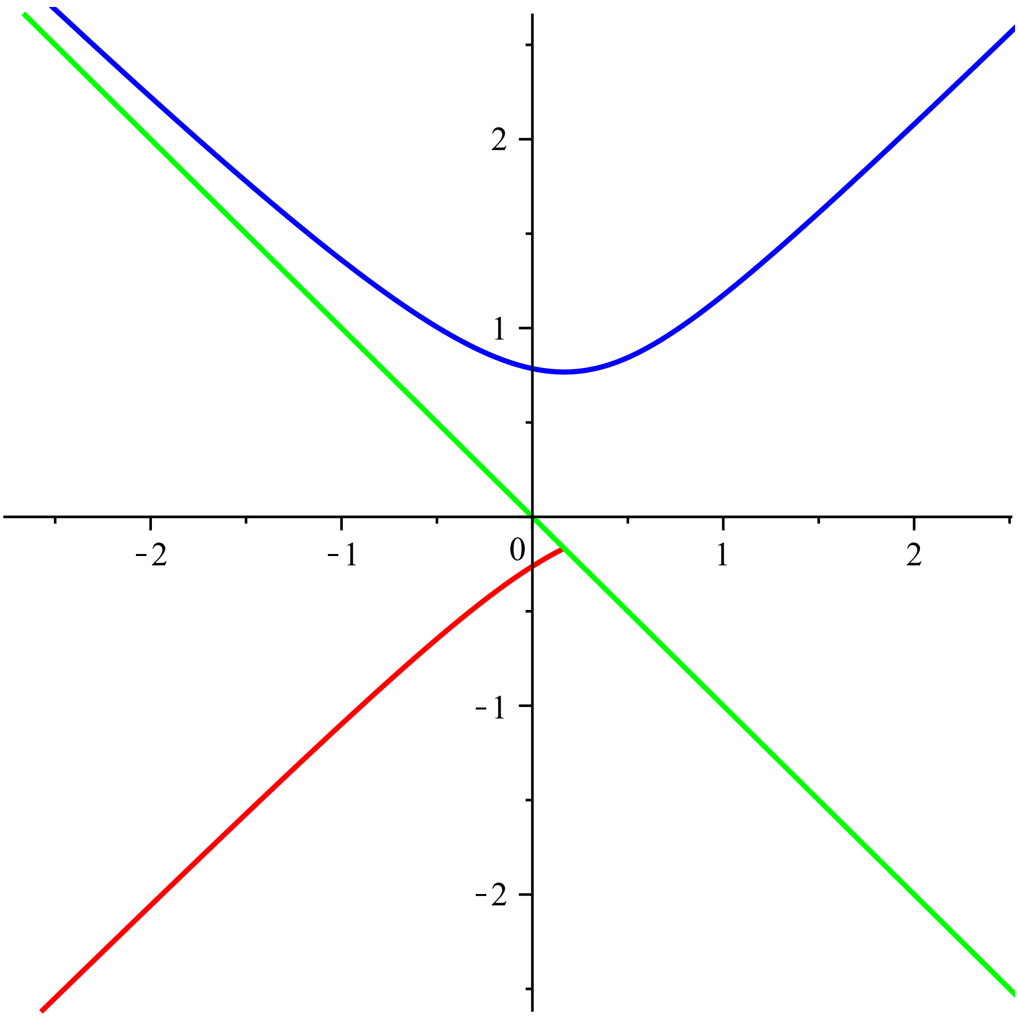
$$display(p1, p2, p3)$$

$$h := 6$$

$$p1 := PLOT(\ldots)$$

$$p2 := PLOT(\ldots)$$

$$p3 := PLOT(\ldots)$$



>

>