Санкт-Петербургский государственный университет
Механика и математическое моделирование
Теоретическая механика

Фазлыева Камилла Маратовна

Управление движением двухмассовой системы с пружиной

Бакалаврская работа

Научный руководитель:
профессор, доктор физ.-мат. наук Юшков М.П.

Рецензент:
доцент, к.ф.м.н. Наумова Н.В.

Санкт-Петербург
2017г.

Saint Petersburg State University
Mechanics and Mathematical modeling
Theoretical Mechanics

Fazlyeva Kamilla Maratovna

Control of motion of a two-mass system with a spring

Bachelor's Thesis

Scientific supervisor:
professor, doctor of science (math) Mikhail P. Yushkov

Reviewer:
associate professor, PhD Nataliya V. Naumova

Saint Petersburg
2017г.

Содержание

1 Введение

Одной из важнейших задач теории управления является задача нахождения оптимальной силы, переводящей механическую систему за требуемое время из одного фазового состояния, в котором заданы начальные обобщенные координаты и скорости, в конечное фазовое состояние с наперед заданными обобщенными координатами и скоростями. Если конечное фазовое состояние является состоянием покоя, то подобную задачу обычно называют задачей о гашении колебаний.

В данной работе для решения задачи гашения колебаний двухмассовой системы с пружиной используется новый метод, опирающийся на применение обобщенного принципа Гаусса [5]. Его результаты будут сравниваться с применением принципа максимума Понтрягина [1].

2 Постановка задачи и уравнения движения

Рассматривается задача горизонтального движения вдоль оси x двух точек с массами m и m_1, соединенных между собой пружиной жесткости c. Движение механической системы происходит под действием управляющей горизонтальной силы F, приложенной к правой массе m. Требуется подобрать управляющую силу F таким образом, чтобы система из начального состояния покоя за время $\widetilde{T}$ переместилась на расстояние S в новое состояние покоя.

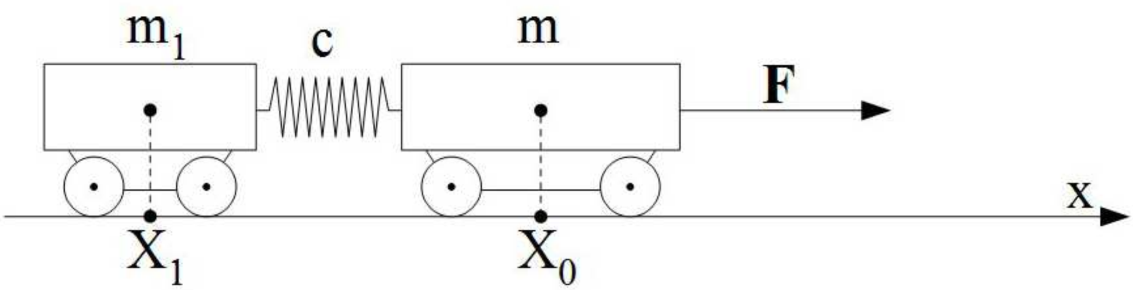

Рис. 1: Двухмассовая система с пружиной

В качестве обобщенных координат примем горизонтальные смещения тележек. Пусть X_0 — перемещение первой тележки, X_1 — второй. Имеют место граничные условия:

$$\begin{gathered} X_0(0)=0, \quad X_1(0)=0, \quad \dot X_0(0)=0, \quad \dot X_1(0)=0, \\ X_0(\widetilde{T})=S, \quad X_1(\widetilde{T})=S\,, \quad \dot X_0(\widetilde{T})=0, \quad \dot X_1(\widetilde{T})=0\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Составим выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T=\frac{m\dot X_0^2}{2}+\frac{m_1\dot X_1^2}{2}\,, \quad \Pi=\frac{c}{2}\,(X_0-X_1)^2\,.$$

Запишем уравнения Лагранжа 2 рода:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot X_i}\Big)-\frac{\partial T}{\partial X_i}=Q_i-\frac{\partial \Pi}{\partial X_i}\,, \quad Q_0=0\,, \quad Q_1=F\,, \quad i=0,1\,.$$

Уравнения движения рассматриваемой системы:

$$\begin{cases} m\ddot X_0+c(X_0-X_1)=F\,, \\ m_1\ddot X_1+c(X_1-X_0)=0\,. \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что два уравнения (2) содержат три неизвестных функции времени X_0, X_1, F. В монографии [2] эта неопределенность устраняется требованием минимизации функционала

$$J = \int_0^{\widetilde{T}} F^2(t)dt\,. \tag{3}$$

Для удобства дальнейших исследований запишем уравнения движения системы в главных координатах [4]. Для этого рассмотрим однородную систему, соответствующую неоднородной системе дифференциальных уравнений (2):

$$A\ddot{X} + CX = 0, \tag{4}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m_1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}.$$

Будем искать решение системы в виде

$$X = U\sin(\Omega\ t + \alpha)\,.$$

Подставим выражение для X в (4):

$$(C - \Omega^2 A)U = 0\,. \tag{5}$$

У системы существуют нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$-\Omega^2 c(m + m_1) + \Omega^4 m m_1 = 0\,.$$

Решив это характеристическое уравнение, получим размерные собственные частоты:

$$\Omega_0 = 0, \quad \Omega_1 = \sqrt{\frac{c(m + m_1)}{m m_1}}\,.$$

Подставляя выражения для частот в (5), получим главные формы колебаний:

$$U_0 = (1, 1)\,, \quad U_1 = (1, -\frac{m}{m_1})\,. \tag{6}$$

Опираясь на главные формы (6), построим общее решение рассматриваемой однородной системы дифференциальных уравнений:

$$X_0 = D_0 + D_1 t + D_3 \sin(\Omega_1 t + \alpha)\,, \quad X_1 = D_0 + D_1 t - D_3 \frac{m}{m_1} \sin(\Omega_1 t + \alpha)\,. \quad (7)$$

Выберем в качестве новых обобщенных координат главные координаты q_0, q_1. Хотим, чтобы главные координаты изменялись по законам:

$$q_0 = D_0 + D_1 t\,, \quad q_1 = D_3 \sin(\Omega_1 t + \alpha)\,.$$

Из решения (7) получаем преобразование координат:

$$X_0 = q_0 + q_1\,, \quad X_1 = q_0 - \frac{m}{m_1} q_1\,. \quad (8)$$

Это преобразование позволяет записать систему уравнений Лагранжа второго рода в главных размерных координатах q_0 и q_1 в виде независимой системы двух уравнений:

$$M \ddot{q}_0 = F\,, \quad \ddot{q}_1 + \frac{cM}{mm_1} q_1 = \frac{Fm_1}{Mm}\,, \quad M = m + m_1\,. \quad (9)$$

Согласно преобразованию (8):

$$q_0 = \frac{mX_0 + m_1 X_1}{M}\,.$$

Поэтому первое уравнение в (9) отражает теорему о движении центра масс рассматриваемой механической системы.

Введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} &u = \frac{Fm_1^2}{cM^2 S}\,, \quad x_0 = \frac{m_1 q_0}{mS}\,, \quad x_1 = \frac{q_1}{S}\,, \\ &\tau = \Omega_1 t\,, \quad T = \Omega_1 \widetilde{T}\,, \quad \omega_1 = \frac{\Omega_1}{\Omega_1} = 1\,. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя обозначения (10), формулы (9), (1), (3) перепишем в виде:

$$\begin{cases} x_0'' = u\,, \\ x_1'' + x_1 = u\,. \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &x_0(0) = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_0'(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0\,, \\ &x_0(T) = 1, \quad x_1(T) = 0, \quad x_0'(T) = 0, \quad x_1'(T) = 0\,. \end{aligned} \quad (12)$$

$$J = \int_0^T u^2(\tau) d\tau \,. \tag{13}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ. Так как решается линейная задача, то без умаления общности принято, что массы смещаются на безразмерное расстояние, равное единице.

3 Решение задачи с помощью принципа максимума Понтрягина

Будем искать оптимальное управление с помощью минимизации функционала (13), применяя принцип максимума Понтрягина [1]. Согласно общей теории записываем уравнения (11) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$z_k{}' = f_k\,, \quad k = \overline{1,4}\,, \quad f_1 = z_2\,, \quad f_2 = u\,, \quad f_3 = z_4\,, \quad f_4 = u - z_3\,.$$

Формируем функцию Гамильтона:

$$H = -u^2 + \lambda_1 z_2 + \lambda_2 u + \lambda_3 z_4 + \lambda_4 (u - z_3)\,.$$

Система уравнений для отыскания множителей Лагранжа λ_k и управления u:

$$\begin{cases} \lambda_k{}' = -\dfrac{\partial H}{\partial z_k}\,, \quad k = \overline{1,4}\,, \\ \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0\,. \end{cases}$$

В нашем случае эта система запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \lambda_2{}'' = 0\,, \\ \lambda_4{}'' + \lambda_4 = 0\,, \\ 2u = \lambda_2 + \lambda_4\,. \end{cases} \tag{14}$$

Из системы (14) следует, что управление имеет вид:

$$u(\tau) = C_1 + C_2\tau + C_3 \sin\tau + C_4 \cos\tau\,, \tag{15}$$

где $C_k, \quad k=\overline{1,4}$, являются произвольными постоянными.

В рассматриваемой задаче изучается движение из состояния покоя. Поэтому частные решения уравнений (11), удовлетворяющие нулевым начальным условиям (в нашем случае краевым условиям (12)), могут быть представлены интегралами Дюамеля:

$$x_0(\tau) = \int_0^\tau u(\tau_1)(\tau - \tau_1)d\tau_1\,,$$

$$x_1(\tau) = \frac{1}{\omega_1}\int_0^\tau u(\tau_1)\sin(\omega_1(\tau - \tau_1))d\tau_1\,,$$

Подставляя (15) в интегралы Дюамеля и удовлетворяя граничные условия (12) на правом конце, получим систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно искомых постоянных $C_k, \quad k = \overline{1,4}$. Для четырех случаев движения имеем:

$$T = 2\pi\,,\ C_1 = 0.387637\,,\ C_2 = -0.123389\,,\ C_3 = -0.246777\,,\ C_4 = 0\,.$$

$$T = 8\pi\,,\ C_1 = 0.009874\,,\ C_2 = -0.000785\,,\ C_3 = -0.001571\,,\ C_4 = 0\,.$$

$$T = 16\pi\,,\ C_1 = 0.002397\,,\ C_2 = -0.000095\,,\ C_3 = 0.00019\,,\ C_4 = 0\,.$$

$$T = 32\pi\,,\ C_1 = 0.000595\,,\ C_2 = -0.000011\,,\ C_3 = -0.000023\,,\ C_4 = 0\,.$$

4 Связь полученного решения с неголономной механикой

Рассмотрим теперь с совершенно новой точки зрения решение, полученное с помощью принципа максимума Понтрягина, минимизирующего функционал (13). С этой целью обратим внимание на то, что полученное с помощью принципа максимума Понтрягина управление (15) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Big(\frac{d^2}{d\tau^2} + {\omega_1}^2\Big)u = 0\,, \quad {\omega_1}^2 = 1\,. \tag{16}$$

Возвращаясь в уравнении (16) от безразмерных переменных к размерным, получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{d^2}{dt^2} + {\Omega_1}^2\Big)F = 0\,. \tag{17}$$

Если в уравнение (17) подставить выражение F, взятое из первого уравнения системы (2), то будем иметь:

$$m\frac{d^6X_0}{dt^6}+(c+m{\Omega_1}^2)\frac{d^4X_0}{dt^4}-c\frac{d^4X_1}{dt^4}+c{\Omega_1}^2\frac{d^2X_0}{dt^2}-c{\Omega_1}^2\frac{d^2X_1}{dt^2}=0\,. \qquad (18)$$

Полученное дифференциальное уравнение (18) можно рассматривать как неголономную связь шестого порядка, которая непрерывно выполняется при движении под действием управления, найденного при минимизации функционала (3). Таким образом, при управлении, найденном с помощью принципа максимума Понтрягина, непрерывно выполняется неголономная связь высокого порядка, а в этом случае можно пытаться решать поставленную задачу управления с помощью теории движения неголономных систем со связями высокого порядка, разработанную в монографии [3]. Это обстоятельство наталкивает на мысль применить для решения поставленной задачи вместо принципа максимума Понтрягина обобщенный принцип Гаусса, свойственный теории движения неголономных систем со связями высокого порядка.

5 Принцип Гаусса и обобщенный принцип Гаусса

Пусть кинетическая энергия T механической системы в криволинейных координатах $q=(q^1,...,q^s)$ имеет вид:

$$T=T^{(2)}+T^{(1)}+T^{(0)}=\frac{M}{2}\mathrm{g}_{\sigma\tau}\dot q^{\,\sigma}\dot q^{\tau}+M\mathrm{g}_{\alpha\sigma}\dot q^{\,\sigma}+\frac{M}{2}\mathrm{g}_{00}\,, \qquad (19)$$

$$\sigma,\tau=\overline{1,s}\,,\alpha=\overline{0,s}\,,q^0=t\,,\dot q^0=1\,.$$

Здесь M — масса всей системы. Введем в рассмотрение многообразие всех положений механической системы, которые она может иметь в данный момент времени t. Тогда уравнения Лагранжа второго рода в касательном пространстве [6], построенном для момента t в выделенной точке $q=(q^1,...,q^s)$, можно представить векторным равенством, напоминающим второй закон Ньютона:

$$M\overrightarrow{W}=\overrightarrow{Y}\,. \qquad (20)$$

Здесь ускорение системы $\overrightarrow{W}$ и вектор активных сил $\overrightarrow{Y}$ имеют вид:

$$\overrightarrow{W} = \frac{1}{M}\Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma}\Big)\overrightarrow{e^\sigma}\,, \quad \overrightarrow{Y} = Q_\sigma \overrightarrow{e^\sigma}\,.$$

Здесь векторы $\overrightarrow{e^\sigma}$, $\sigma = \overline{1,s}$, являются векторами взаимного базиса, введенного в касательном пространстве. Основной метрический тензор $\mathrm{g}_{\sigma\tau}$, $\sigma, \tau = \overline{1,s}$, задается коэффициентами положительно определенной квадратичной формы $T^{(2)}$.

Если на движение системы наложены неголономные связи второго порядка (к такому виду можно привести после дифференцирования по времени и голономные, и неголономные связи $f_0^\varkappa(t,q) = 0$, $f_1^\varkappa(t,q,\dot{q}) = 0$)

$$f_2^\varkappa = a_{2,\sigma}^\varkappa(t,q,\dot{q})\ddot{q}^{\,\sigma} + a_{2,0}^\varkappa(t,q,\dot{q}) = 0\,, \quad \varkappa = \overline{1,k}\,, \tag{21}$$

то в случае идеальных связей (21) уравнение (20) перепишется в виде:

$$M\overrightarrow{W} = \overrightarrow{Y} + \Lambda_\varkappa \overrightarrow{\varepsilon}^{\,l+\varkappa}\,, \quad \overrightarrow{\varepsilon}^{\,l+\varkappa} = a_{2,\sigma}^\varkappa \overrightarrow{e^\sigma}\,, \quad l = s - k\,. \tag{22}$$

Коэффициенты Лагранжа $\Lambda_\varkappa$, $\varkappa = \overline{1,k}$, могут быть найдены как функции от $t, q, \dot{q}$ [3]. Уравнению (22) соответствует принцип Гаусса (δ'' означает, что варьируются лишь переменные $\ddot{q}^{\,\sigma}$):

$$\delta'' Z = 0\,, \quad Z = \frac{M}{2}\Big(\overrightarrow{W} - \frac{\overrightarrow{Y}}{2}\Big)^2\,. \tag{23}$$

Формулы (23) утверждают, что реакция $\overrightarrow{R} = M\overrightarrow{W} - \overrightarrow{Y}$ идеальных неголономных связей (21) имеет минимальное значение.

Пусть теперь на движение системы наложены линейные неголономные связи высокого порядка (цифры, стоящие в степенях в скобках, указывают порядок производных по времени):

$$f_{n+2}^\varkappa = a_{n+2,\sigma}^\varkappa(t,q,\dot{q},...,q^{(n+1)})q^{(n+2)} + a_{n+2,0}^\varkappa(t,q,\dot{q},...,q^{(n+1)}) = 0\,, \tag{24}$$

$$\varkappa = \overline{1,k}\,, \sigma = \overline{1,s}\,, n \geq 1\,.$$

Тогда можно ввести обобщенный принцип Гаусса:

$$\delta^{(n+2)} Z_{(n)} = 0\,, \quad Z_{(n)} = \frac{M}{2}\Big(\overrightarrow{W}^{(n)} - \frac{\overrightarrow{Y}^{(n)}}{M}\Big)^2\,. \tag{25}$$

В формуле (25) символ $\delta^{(n+2)}$ означает, что варьируются лишь $(n+2)$-ые производные от обобщенных координат. Из формул (25) следует минимальность вектора

$$\overrightarrow{R}_{(n)} = M\frac{d^n\overrightarrow{W}}{dt^n} - \frac{d^n\overrightarrow{Y}}{dt^n}\,. \tag{26}$$

На уравнения (24) следует смотреть как на программу движения, заданную в виде дополнительной системы дифференциальных уравнений, которая должна непрерывно выполняться в процессе движения механической системы. Поэтому в неголономной механике связи высокого порядка, заданные в виде (24), обычно называются программными связями. Формируемый ими вектор реакции $\overrightarrow{R}$ играет роль управления, обеспечивающего выполнение заданной программы, в свою очередь вектор (26) можно условно назвать "реакцией"этих связей высокого порядка. Отметим еще, что в силу необходимости формировать реакцию техническими средствами, следует учитывать [3], что искомая реакция представляется в виде $\overrightarrow{R} = \Lambda_{\varkappa}\overrightarrow{b}^{\varkappa}$, $\overrightarrow{b}^{\varkappa} = b^{\varkappa}_{\sigma}\overrightarrow{e}^{\sigma}$, где $\Lambda_{\varkappa}$ отыскиваются наряду с обобщенными координатами как неизвестные функции времени, а коэффициенты $b^{\varkappa}_{\sigma}$ системой управления обычно задаются в виде постоянных величин.

6 Решение задачи при помощи обобщенного принципа Гаусса

Решаемую задачу можно рассматривать как механическую задачу, на движение которой наложена неголономная связь шестого порядка (18). В монографии [3] показано, что для нахождения реакции такой связи можно составить дифференциальное уравнение четвертого порядка. Поэтому, если рассматривать связь (18) как некоторую программу движения, которую должна выполнять механическая система, то реакция этой связи оказывается управляющей силой, обеспечивающей выполнение этой программы. Поэтому уравнение (18) относительно управления можно трактовать как дифференциальное уравнение относительно реакции связи. В нашем случае реакцию можно представить в виде:

$$\overrightarrow{R} = u(t)\,\overrightarrow{b}\,, \quad \overrightarrow{b} = \sum_{\sigma=1}^{2} b_\sigma \overrightarrow{e}^{\,\sigma}\,. \tag{27}$$

При наложении связи шестого порядка обобщенный принцип Гаусса шестого порядка утверждает, что минимальной должна быть "реакция"этой связи, то есть минимальной должна быть величина

$$(\overrightarrow{R}_{(4)})^2 = \Big(M\frac{d^4\overrightarrow{W}}{dt^4} - \frac{d^4\overrightarrow{Y}}{dt^4}\Big)^2. \tag{28}$$

Из всех возможных неголономных связей шестого порядка выделим такое подмножество, для элементов которого величина $(\overrightarrow{R}_{(4)})^2$ равна своей нижней границе, равной нулю. Всем этим элементам, как это следует из формул (27), (28), соответствует единственное уравнение

$$\frac{d^4u}{dt^4} = 0\,.$$

Общее решение которого имеет вид:

$$u(\tau) = C_1 + C_2\tau + C_3\tau^2 + C_4\tau^3\,. \tag{29}$$

Произвольные постоянные $C_k, k=\overline{1,4}$, в управлении (29) находятся с помощью (12) и интегралов Дюамеля аналогично тому, как это делалось в предыдущем пункте. В результате получим:

$$T = 2\pi,\ C_1 = 0.444357,\ C_2 = -0.606773,\ C_3 = 0.222178,\ C_4 = -0.023573.$$

$$T = 8\pi,\ C_1 = -0.000997,\ C_2 = 0.004255,\ C_3 = -0.000498,\ C_4 = 0.000013.$$

$$T = 16\pi,\ C_1 = -0.000058,\ C_2 = 0.000486,\ C_3 = -0.000029,\ C_4 = 0.0000004.$$

$$T = 32\pi,\ C_1 = -0.000003,\ C_2 = -0.00005,\ C_3 = -0.000001,\ C_4 = 0.00000001.$$

Результаты расчетов представлены на рисунках сплошными кривыми.

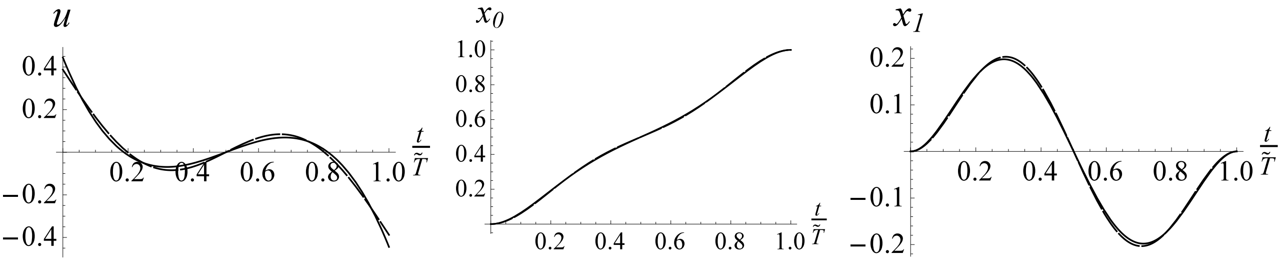

Рис. 2: $T = 2\pi$

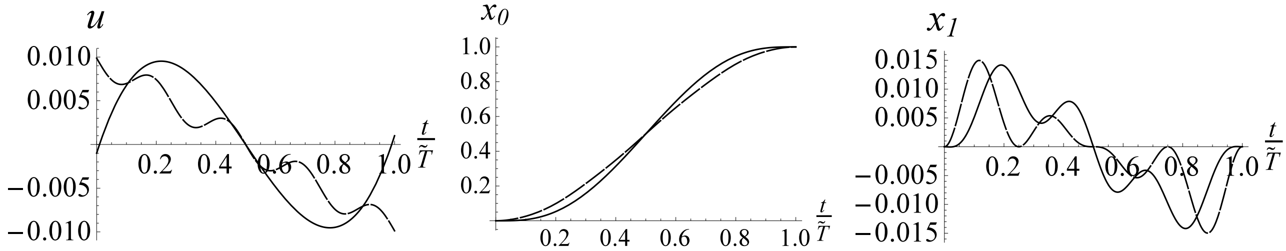

Рис. 3: $T = 8\pi$

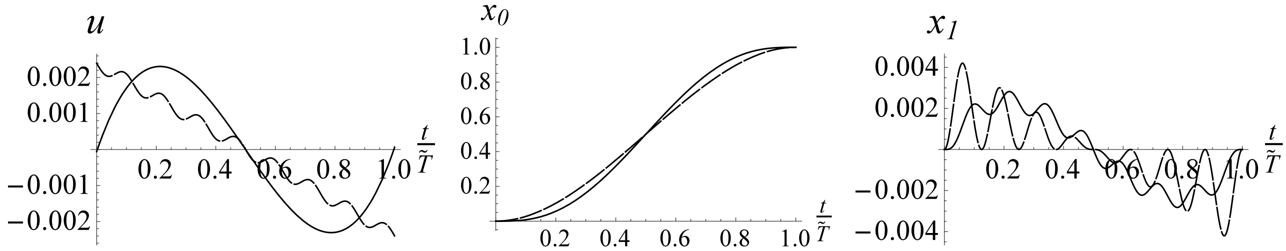

Рис. 4: $T = 16\pi$

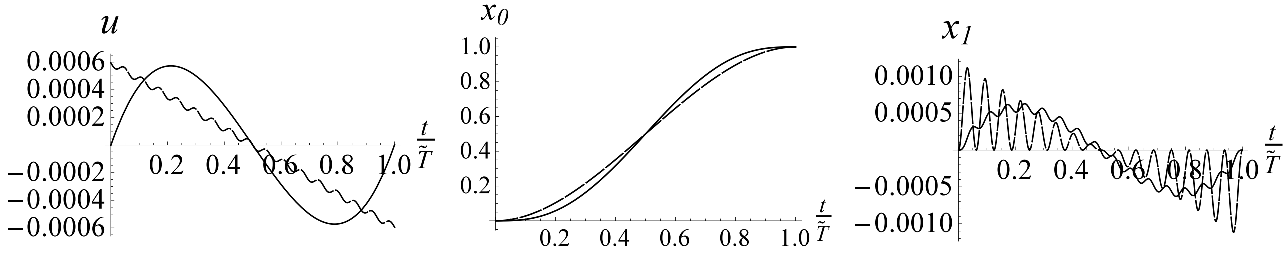

Рис. 5: $T = 32\pi$

7 Заключение

В данной работе найдено управление, переводящее двухмассовую систему с пружиной за заданное время в горизонтальном направлении на указанное расстояние из начального состояния покоя в конечное состояние покоя. Решение проводилось с помощью применения двух различных принципов, относящихся к разным областям механики — к теории управления и к неголономной механике. В первом случае применялся принцип максимума Понтрягина (первый метод), а во втором — обобщенный принцип Гаусса (второй метод).

Заметим, что при кратковременном движении оба метода дают практически одинаковые результаты (см. графики на рис.1), а в случае продолжительного движения результаты значительно различаются. Совпадение при кратковременном движении оправдывает применение метода из теории неголономной механики со связями высокого порядка для поставленных задач теории управления, так как результаты совпадают со значениями, полученными классическим путем на основе применения принципа максимума Понтрягина.

Если же движение оказывается длительным, то второй метод оказывается предпочтительнее первого, так как найденное управление раскачивает механическую систему меньше, чем при управлении, найденном классическим способом. Это можно объяснить тем, что в первом методе находится управление, содержащее гармоники с собственной частотой системы (безрамерная собственная частота системы $\omega_1 = 1$), что стремится ввести систему в резонанс. В отличие от этого во втором методе управление отыскивается в виде полинома по времени, что обеспечивает сравнительно плавное движение системы.

Первый метод всегда находит управление, имеющее скачки в начале и в конце движения. Такие же скачки управления дает и второй метод при кратковременном движении, но при длительном движении при использовании обобщенного принципа Гаусса подобные скачки исчезают.

Список литературы

[1] Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. — 4-е изд., стер. — М. : Наука, 1983. — 392 с.

[2] Управление колебаниями / Ф. Л. Черноусько, Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов. — М. : Наука, 1980. — 383 с.

[3] Неголономная механика: теория и приложения / С. А. Зегжда, Ш. Х. Солтаханов, М. П. Юшков. — Москва : Физматлит, 2009. — 343 с.

[4] Теоретическая механика [Текст] / Н. Н. Поляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков; под ред. Н. Н. Поляхова. — Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1985. — 536 с.:

[5] Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков / Н.Н.Поляхов, С.А.Зегжда, М.П.Юшков. // Доклады АН СССР. 1983. Т. 269. №6. С. 1328-1330

[6] Современная геометрия / Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. — М.: Наука. 1979. — 760 с.