

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МЕХАНИКИ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ

Мастрюкова Дарья Владимировна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Управление колебаниями гиросtabilизатора

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент

Потоцкая И.Ю.

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Введение	3
Обзор литературы	4
Постановка задачи и цели работы	8
Глава 1. Математическая формулировка задачи	9
§1. Уравнения движения одноосного гироскопического стабилизатора с управлением.....	9
§2. Линеаризация СДУ движения ОГС и ее запись в векторно-матричной форме	9
1. Линеаризация СДУ	10
2. Запись СДУ в векторно-матричной форме	11
§3. Поиск собственных чисел матрицы	11
§4. Математическая формулировка задачи	13
Глава 2. Построение оптимального управления по критерию расхода топлива для ОГС	15
§1. Адаптация алгоритма для математической модели ОГС	15
1. Поиск матрицы перехода C	15
2. Разделение матрицы C и начального условия на действительные и мнимые части	16
§2. Представление формул, необходимых для дальнейшей численной реализации	17
1. Формулы для множителей Лагранжа.....	17
2. Формула для нахождения ширины ступеней управления.....	18
3. Формулы для нахождения моментов включения	19
§3. Сведения о построении оптимального управления в MATLAB	20
Выводы	22
Заключение	23
Список литературы	24
Приложение	25

Введение

В самолетах, судах и космических аппаратах используется множество чувствительных устройств и приборов, которые должны быть стабилизированы. Например, в системы управления самолетами установлены ньютометры, которые без стабилизации их платформ не могут дать точного значения.

Для стабилизации устройств в системы устанавливаются гироскопический стабилизатор. Это платформа, на которой размещаются объекты стабилизации, гироскопы и элементы автоматики [1]. Также он используется для определения угловых отклонений.

Чтобы стабилизировать систему обычно необходимо решить две задачи: определить параметры углового положения платформы прибора и построить управление — воздействия, приводящие платформу в нужное положение.

Построение управления может производиться в соответствии с заранее заданным критерием. Так как гироскопические стабилизаторы широко используются в транспортных системах, возникает задача управления их колебаниями по критерию расхода топлива.

Обзор литературы

В данной работе будет рассматриваться силовой одноосный гироскопический стабилизатор (далее ОГС). ОГС данного типа осуществляют стабилизацию при помощи гироскопа и стабилизирующего двигателя. [2]

ОГС, рассматриваемый в работе состоит из 4 компонентов: гироскопа, электрического двигателя, его усилителя, редуктора и датчика. [3]

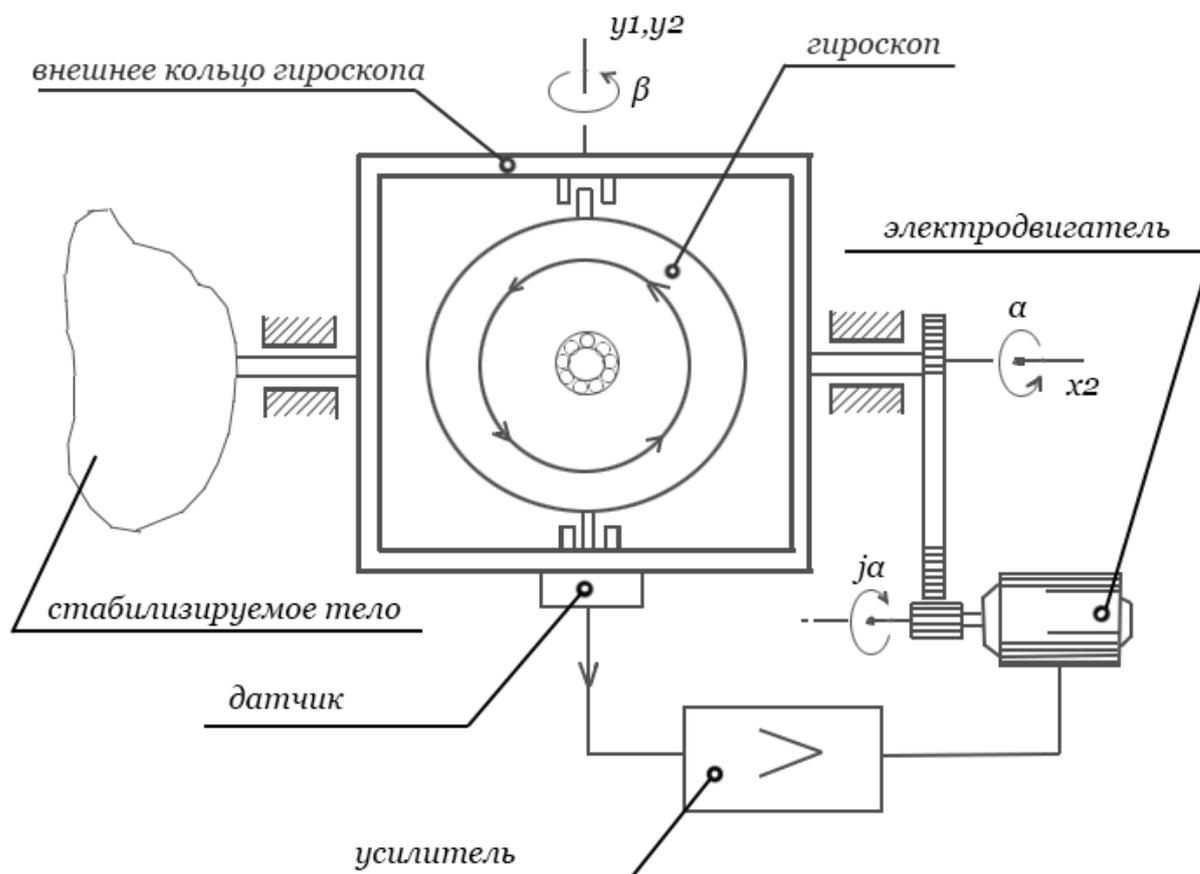


Рис.1

Гироскоп состоит из внешнего кольца, внутреннего кольца и ротора. Тело может либо иметь общую ось с внешним кольцом гироскопа, либо быть с ним одним целым.

Двигатель, он же — двигатель стабилизации, связан с внешним кольцом гироскопа посредством редуктора — механизма, преобразующего крутящий момент.

Передаточное отношение данного редуктора, которое показывает, во сколько раз вырос момент силы, будем обозначать символом j .

Датчик регистрирует угол β поворота гироскопа относительно его внешнего кольца. Усилитель получает на вход напряжение, которое снимается с датчика. На выходе усилителя образуется ЭДС V :

$$\tau \dot{V} + V = \mu \beta.$$

В данном уравнении, связывающем ЭДС и угол поворота β , символом μ обозначена крутизна характеристики усилителя, а символом τ — постоянная времени.

Обозначим как R — сопротивление цепи, L — коэффициент самоиндукции, \tilde{C} — коэффициент противоэлектродвижущей силы двигателя, α — угол поворота ротора двигателя относительно статора. Сила тока в электрической цепи якоря двигателя постоянного тока с независимым возбуждением изменяется согласно закону:

$$V = R\sigma + L\dot{\sigma} + \tilde{C}\dot{\alpha} = V.$$

Вращающий момент ротора равен $\tilde{C}\sigma j/g$, где $g = 9,81$ Н/кг.

Пусть к внешнему кольцу гироскопа приложен дестабилизирующий момент M^* , который постоянен по величине и направлению. Тогда гироскоп и кожух из-за его действия будут совершать вращательные движение вокруг оси y_1 .

Когда β станет отличным от нуля, на вход усилителя с помощью датчика будет подаваться растущее напряжение, увеличивая напряжение на выходе усилителя. Как следствие на валу двигателя увеличится вращающий момент его ротора. Тогда, благодаря редуктору, к внешнему кольцу гироскопа будет приложен момент, который приближенно можно считать равным $-j\tilde{C}\sigma j/g$. [4]

В приведенных выше обозначениях движение ОГС описывается с помощью системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
[J(\beta) + j^2\Phi]\ddot{\alpha} + J'(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + H\dot{\beta}\cos\beta &= -j\tilde{C}\sigma/g + M^*, \\
\Theta\ddot{\beta} - 0.5J'(\beta)\dot{\alpha}^2 - H\dot{\alpha}\cos\beta &= 0, \\
R\sigma + L\dot{\sigma} - j\tilde{C}\dot{\alpha} &= V, \\
\tau\dot{V} + V &= \mu\beta.
\end{aligned} \tag{1}$$

В уравнениях (1): $J(\beta)$ — текущее значение суммарного момента инерции внешнего и внутреннего кольца гироскопа по отношению к кожуху гироскопа, Θ — сумма моментов инерции ротора и внутреннего кольца относительно y_1 , H — постоянная, значение которой определяется начальными условиями, Φ — момент инерции ротора двигателя.

Для решения задачи построения управления будет использоваться метод, изложенный в работе Л.К. Бабаджанянца и И.Ю. Потоцкой «Управление по критерию расхода в механических системах» [5]. Он будет применяться для гашения незатухающих периодических колебаний, соответствующих чистым собственным значениям матрицы линеаризованной около положения равновесия системы ОДУ (1).

Критерием оптимальности управления является минимум функционала расхода топлива, который рассматривается в виде:

$$J = \sum_{k=1}^n \int_0^T |u_k(t)| dt.$$

Пусть $\tilde{x}(t)$ — сумма выбранных частот, а T — конечный момент времени. Управление считается допустимым и построенным верно, если оно удовлетворяет условиям допустимости:

$$\tilde{x}(T) = 0.$$

В данном методе управления задаются при помощи функции Хэвисайда $H(t)$:

$$u_k = h_k \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} H(t - t_i^k) + h_k \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i H(t - \tilde{t}_i^k),$$

где t_i^k, \tilde{t}_i^k — соответственно моменты времени, в которые происходят переключения положительных и отрицательных ступеней k -ой компоненты управления.

Функция Хэвисайда единичного скачка имеет вид:

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Метод оптимизации, используемый в данной работе и описанный в [5], применяется для задач, в которых систему необходимо удерживать в течении долгого времени около ее положения равновесия.

Постановка задачи и цели работы

Цель данной работы: найти точки переключения для задачи управления колебаниями ОГС, удовлетворяющие необходимым условиям экстремума функционала расхода топлива и условию допустимости управления. Построить кусочно-постоянное оптимальное управление по найденным точкам.

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы необходимо выполнить следующие задачи:

- изучение устройства и уравнений управляемого движения одноосного гироскопического стабилизатора;
- изучение алгоритма построения кусочно-постоянного оптимального управления по критерию расхода топлива;
- адаптация математической модели ОГС для применения изученного алгоритма;
- расчет формул, необходимых для дальнейшей численной реализации;
- составление программы в среде MATLAB для численной реализации алгоритма;
- проведение численного эксперимента, проверка полученных результатов интегрированием.

Глава 1.

Математическая формулировка задачи.

§1. Уравнение движения одноосного гироскопического стабилизатора с управлением.

В данной работе необходимо погасить колебания величин $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ одноосного гироскопического стабилизатора, движение которого описывается с помощью системы дифференциальных уравнений (1). Для решения этой задачи необходимо ввести управляющее воздействие. Введем управления u_1 и u_2 – управляющие моменты для оси внешнего кольца гироскопа и внутреннего.

Пусть основание ОГС неподвижно. Тогда запишем совокупность дифференциальных уравнений, описывающих управляемое движение ОГС, когда с помощью некоторого дестабилизирующего момента M^* постоянного направления и величины отклоняется ось внешнего кольца гироскопа:

$$\begin{aligned} [J(\beta) + j^2\Phi]\ddot{\alpha} + J'(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + H\dot{\beta}\cos\beta &= -j\tilde{C}/g\sigma + M^* + u_1, \\ \theta\ddot{\beta} - 0.5J'(\beta)\dot{\alpha}^2 - H\dot{\alpha}\cos\beta &= u_2, \\ R\sigma + L\dot{\sigma} - j\tilde{C}\alpha &\doteq V, \\ \tau V + \dot{V} &= \mu\beta. \end{aligned} \tag{2}$$

§2. Линеаризация СДУ движения ОГС и ее запись в векторно-матричной форме.

Для построения оптимального по критерию расхода управления для ОГС будет использован алгоритм, описанный в [5]. Для его применения необходимо линеаризовать систему уравнений (2) и переписать их в векторно-матричной форме.

1. Линеаризация системы дифференциальных уравнений.

Если дестабилизирующий момент $M^* = const$ и его направление не изменяется, то система дифференциальных уравнений (2) имеет частное решение:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha^0 = const, \\ \beta &= \beta^* = \frac{Rg}{\mu j \tilde{C}} M^*, \\ \sigma &= \sigma^* = \frac{g}{j \tilde{C}} M^*, \\ V &= V^* = \frac{Rg}{j \tilde{C}} M^*.\end{aligned}$$

Для линеаризации далее в СДУ положим:

$$\alpha = \alpha^0 + x, \beta = \beta^* + y, \sigma = \sigma^* + z, V = V^* + v.$$

Подставляя α, β, σ, V в (2), оставим только члены первого порядка относительно x, y, z, v и их производных. В итоге получим систему, состоящую из линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned}I\ddot{x} + H\dot{y} \cos \beta^* &= -zjg^{-1}\tilde{C} + u_1(t), & I &= J(\beta^*) + j^2\Phi \\ \theta\ddot{y} - H\dot{x} \cos \beta^* &= u_2(t), \\ L\dot{z} + Rz - j\tilde{C}\dot{x} &= v, \\ \tau\dot{v} + v &= \mu y,\end{aligned}\tag{3}$$

В уравнениях (3) мы имеем возможность положить $\tau = 0$. Это пренебрежение позволяет получить систему относительно трех переменных, вместо четырех:

$$\begin{aligned}I\ddot{x} + H\dot{y} \cos \beta^* &= -zjg^{-1}\tilde{C} + u_1(t) \\ \theta\ddot{y} - H\dot{x} \cos \beta^* &= u_2(t), \\ L\dot{z} + Rz - j\tilde{C}\dot{x} &= \mu y.\end{aligned}$$

Осталось ввести новые переменные $\xi_1 = \dot{x}, \xi_2 = y, \xi_3 = \dot{y}, \xi_4 = z$ и, в конечном итоге, переписать СДУ в линеаризованном виде:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -HI^{-1}\xi_3 \cos \beta^* - (gI)^{-1}\tilde{C}j\xi_4 + I^{-1}u_1(t), \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 = \Theta^{-1}H\xi_1 \cos \beta^* + \Theta^{-1}u_2(t), \\ \dot{\xi}_4 = j\tilde{C}L^{-1}\xi_1 + \mu L^{-1}\xi_2 - RL^{-1}\xi_4. \end{cases} \quad (4)$$

2. Приведение СДУ к векторно-матричной форме.

Систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (4) для использования алгоритма, описанного в [5] целесообразно представить в векторно-матричной форме:

$$\dot{\xi} = A\xi + BU \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -HI^{-1} \cos \beta^* & -j\tilde{C}(Ig)^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ H\Theta^{-1} \cos \beta^* & 0 & 0 & 0 \\ j\tilde{C}L^{-1} & \mu L^{-1} & 0 & -RL^{-1} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} I^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \Theta^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

В итоге получим систему линейных дифференциальных уравнений (5) и начальными условиями

$$\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, \xi_4^0) = (\dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0, z_0). \quad (6)$$

§3. Поиск собственных чисел матрицы.

Двигаясь согласно алгоритму, описанному в [5], для того, чтобы построить управление для системы (5), для начала необходимо выбрать колебания, амплитуды которых предстоит гасить. Алгоритм построения управления отличается в зависимости от вида корней характеристического уравнения матрицы A [6] и вида самого уравнения.

В моей работе рассматривается случай гашения незатухающих колебаний, соответствующих чисто мнимым значениям матрицы A .

Для того, чтобы найти собственные числа матрицы A , определяющей уравнения (5), составим её характеристическое уравнение:

$$k(a_0 k^4 + a_1 k^3 + a_2 k^2 + a_3 k + a_4) = 0,$$

$$a_0 = I\theta L, \quad a_1 = I\theta R, \quad a_2 = H^2 L \cos^2 \beta^* + j^2 \tilde{C}^2 g^{-1} \theta,$$

$$a_3 = H^2 R \cos^2 \beta^*, \quad a_4 = \mu j \tilde{C} g^{-1} H \cos^2 \beta^*.$$

Используя критерий Рауса-Гурвица [7], замечаем, что данная система устойчива, если выполняется условие:

$$\frac{j\tilde{C}}{I} \geq \frac{\mu}{H \cos \beta^*}.$$

Причем, при условии $j\tilde{C}/I = \mu/H \cos \beta^*$ характеристическое уравнение будет иметь чисто мнимые корни:

$$k_{1,2} = \pm \frac{H \cos \beta^*}{\sqrt{I\theta}} i.$$

При подстановке $k_{1,2}$ в характеристическое уравнение, получим:

$$k_{3,4} = \frac{-IR \pm \sqrt{I^2 R^2 - 4ILj^2 \tilde{C}^2 / g}}{2IL},$$

В зависимости от знака подкоренного выражения корни $k_{3,4}$ будут либо действительными, либо комплексно сопряженными, но в обоих случаях их действительная часть будет меньше нуля.

В моей работе для механической системы (5) будет построено управление, с помощью которого будут погашены амплитуды частот, соответствующих чисто мнимым собственным значениям $k_{1,2}$, то есть колебания с частотой:

$$\omega = \frac{H \cos \beta^*}{\sqrt{I\theta}}.$$

§4. Математическая постановка задачи.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (5) с начальными условиями (6), которая описывает управляемое движение одноосного гироскопического стабилизатора.

Полагаем управление кусочно-постоянным, имеющим конечное число точек переключения. Компоненты управления задаются при помощи функции Хэвисайда $H(t)$:

$$u_k = h_k \sum_{i=1}^{2r_k} (-1)^{i+1} H(t - t_i^k) + h_k \sum_{i=1}^{2q_k} (-1)^i H(t - \tilde{t}_i^k), \quad k = 1, 2 \quad (7)$$

где t_i^k, \tilde{t}_i^k — соответственно моменты времени, в которые происходит переключение положительных и отрицательных ступеней k -ой компоненты управления, h_k — высота ступеней k -ой компоненты управления, r_k и q_k — число положительных и отрицательных ступеней этой компоненты соответственно.

Функция Хэвисайда единичного скачка имеет вид:

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Решение СДУ можно представить в виде суммы слагаемых, отвечающих собственным числам матрицы A . Иначе говоря, в виде суммы частотных компонент решения. Частотную компоненту решения, отвечающую собственным числам $k_{1,2}$, обозначим $\tilde{x}(T)$. Если амплитуда колебаний с выбранной частотой будет погашена, то выполняется равенство

$$\tilde{x}(T) = 0. \quad (8)$$

Управление, удовлетворяющее (8) будем называть допустимым.

Управление будем считать оптимальным в случае, если оно удовлетворяет необходимым условиям минимума критерия расхода топлива, который имеет вид:

$$J = \sum_{k=1}^2 \int_0^T |u_1(t) + u_2(t)| dt. \quad (9)$$

Постановка задачи: для гашения частоты ω , соответствующей чисто мнимым значениям матрицы A , найти точки переключения t_i^k, \tilde{t}_i^k , удовлетворяющие необходимым условиям экстремума функционала расхода топлива (9) и условию допустимости управления(8). По этим точкам построить оптимальное управление, минимизирующее расход топлива.

Глава 2. Построение оптимального управления по критерию расхода топлива для ОГС.

С помощью метода, описанного в работе [5], для задачи (5) с начальными условиями (6) возможно аналитически построить кусочно-постоянное управление, доставляющее минимум функционалу расхода топлива (9). Следуя данному алгоритму погасим амплитуды периодических незатухающих колебаний с частотой

$$\omega = \frac{H \cos \beta^*}{\sqrt{I\theta}}.$$

§1. Адаптация алгоритма для математической модели одноосного гироскопического стабилизатора.

1. Поиск матрицы перехода C .

Двигаясь, согласно алгоритму из [5], первым шагом необходимо в системе (6) сделать линейную замену $\xi = D\gamma$. Это делается с целью разделения имеющейся задачи на две меньшие задачи Коши. D — неособая матрица, подбирается таким образом, чтобы

$$D^{-1}AD = Y = \begin{pmatrix} Y_k & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}, \quad Y_k = \begin{pmatrix} \omega i & 0 \\ 0 & -\omega i \end{pmatrix},$$

Z — матрица размерности 2×2 , в которой по диагонали стоят собственные значения матрицы A — $k_{3,4}$. После замены система (5) и начальные условия (6) разделятся на следующие задачи:

$$\dot{\gamma} = Y_k \gamma + \bar{U}, \quad \gamma(0) = \gamma_0 = C \xi_0 = (\gamma_1^0, \gamma_2^0), \quad \bar{U} = CBU = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \quad (10)$$

$$\dot{z} = Z\gamma + W, \quad z(0) = z_0 = C_Z \xi_0 = (z_1^0, z_2^0), \quad W = C_Z BU = (w_1, w_2)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}, \quad C_Z = \begin{pmatrix} c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}.$$

Так как в дальнейшем можно ограничиться задачей (10) необходимо найти лишь матрицу C , то есть первые две строки матрицы D^{-1} . Однако в дальнейших вычислениях участвует лишь первая строка матрицы C , ее коэффициенты должны быть вычислены для нахождения множителя Лагранжа λ .

Коэффициенты $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$ найдем из системы:

$$\begin{cases} c_{11}\omega i = H\theta^{-1} \cos \beta^* c_{13} + j\tilde{C}L^{-1}c_{14}, \\ c_{12}\omega i = \mu L^{-1}c_{14}, \\ c_{13}\omega i = -HI^{-1} \cos \beta^* c_{11} + c_{12}, \\ c_{14}\omega i = -j\tilde{C}(Ig)^{-1}c_{11} - RL^{-1}c_{14}. \end{cases}$$

Пусть $c_{14} = -j\tilde{C}H(Ig\theta)^{-1} \cos \beta^*$, тогда остальные коэффициенты будут равны:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{RH \cos \beta^*}{\theta L} + \frac{H^2 \cos^2 \beta^*}{\theta \sqrt{I\theta}} i, \\ c_{12} &= \frac{j\tilde{C}\mu}{gL\sqrt{I\theta}} i, \\ c_{13} &= \frac{j^2\tilde{C}^2\theta - gLH^2 \cos^2 \beta^*}{I\theta Lg} + \frac{RH \cos \beta^*}{L\sqrt{I\theta}} i. \end{aligned}$$

Тогда, если ограничиваться первой строкой, начальные условия преобразуются в следующие:

$$\zeta = \gamma_1^0 = c_{11}\dot{x}_0 + c_{12}y_0 + c_{13}\dot{y}_0 + c_{14}z_0.$$

2. Разделение матрицы C и начального условия на действительные и мнимые части

Для дальнейших расчетов, согласно [5], целесообразно разделить коэффициенты $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$ и начальное условие ζ :

$$\begin{aligned} C' &= \left(\frac{RH \cos \beta^*}{\theta L}, 0, \frac{j^2\tilde{C}^2\theta - gLH^2 \cos^2 \beta^*}{I\theta Lg}, -\frac{j\tilde{C}H \cos \beta^*}{Ig\theta} \right), \\ C^* &= \left(\frac{H^2 \cos^2 \beta^*}{\theta \sqrt{I\theta}}, \frac{j\tilde{C}\mu}{gL\sqrt{I\theta}}, \frac{RH \cos \beta^*}{L\sqrt{I\theta}}, 0 \right), \\ \zeta' &= \frac{RH \cos \beta^*}{\theta L} \dot{x}_0 + \frac{j^2\tilde{C}^2\theta - gLH^2 \cos^2 \beta^*}{I\theta Lg} \dot{y}_0 - \frac{j\tilde{C}H \cos \beta^*}{Ig\theta} z_0, \\ \zeta^* &= \frac{H^2 \cos^2 \beta^*}{\theta \sqrt{I\theta}} \dot{x}_0 + \frac{j\tilde{C}\mu}{gL\sqrt{I\theta}} y_0 + \frac{RH \cos \beta^*}{L\sqrt{I\theta}} \dot{y}_0. \end{aligned}$$

Здесь как C' и ζ' обозначены вещественные части, а как C^* и ζ^* – мнимые.

§2. Представление формул, необходимых для дальнейшей численной реализации

1. Формулы для нахождения множителей Лагранжа.

При поиске множителей Лагранжа необходимо учитывать, что возможны три случая: если переключаются обе компоненты управления, если обе но $\eta_1 = \eta_2$ и, если переключается одна компонента.

В первом случае множитель λ будет найден из уравнения:

$$(\zeta'^2 + \zeta^{*2})\lambda = \pm \frac{2\sqrt{I\Theta}}{H \cos \beta^*} \sum_{k=1}^2 \eta_k \sqrt{(\zeta'^2 + \zeta^{*2})N_k \lambda^2 - \zeta'^2}, \eta_k = h_k(r_k + q_k),$$

$$N_1 = \frac{H^2 \cos^2 \beta^* (I\Theta R^2 + L^2 H^2 \cos^2 \beta^*)}{I^3 \Theta^3 L^3},$$

$$N_2 = \frac{I\Theta g^2 R^2 H^2 \cos^2 \beta^* + (j^2 \tilde{C}^2 \Theta - gLH^2 \cos^2 \beta^*)^2}{I^2 \Theta^4 L^2 g^2}.$$

Отсюда получим выражение множителя Лагранжа:

$$\lambda = \pm \frac{2\zeta' \sqrt{-B_1 \pm \sqrt{Q}}}{\sqrt{(\zeta'^2 + \zeta^{*2})M}}, \quad (11)$$

$$B_1 = (\zeta'^2 + \zeta^{*2})\omega^2(\eta_1^2 + \eta_2^2) - 4(\eta_1^2 - \eta_2^2)(\eta_1^2 N_1 - \eta_2^2 N_2),$$

$$Q = 4\omega^2 \eta_1^2 \eta_2^2 \left[(\zeta'^2 + \zeta^{*2})^2 \omega^2 - 4(\zeta'^2 + \zeta^{*2})(\eta_1^2 - \eta_2^2)(N_1 - N_2) \right],$$

$$M = (\zeta'^2 + \zeta^{*2})^2 \omega^4 + 16(\eta_1^2 N_1 - \eta_2^2 N_2)^2 - 8(\zeta'^2 + \zeta^{*2})\omega^2(\eta_1^2 N_1 + \eta_2^2 N_2).$$

Из уравнения (11) видим, что λ действителен при условиях: $Q \geq 0$, $\sqrt{Q} > B_1$. Причем, если $\eta_1 = \eta_2$, то множитель Лагранжа действителен лишь в случае, когда $M < 0$.

В третьем случае, когда переключается лишь одна компонента управления, множитель Лагранжа находится из уравнения:

$$\lambda = \frac{2\zeta' \eta_k}{\sqrt{(\zeta'^2 + \zeta^{*2})(4\eta_k^2 N_k - (\zeta'^2 + \zeta^{*2})\omega^2)}}.$$

2. Формулы для нахождения ширины ступеней управления.

Ширина ступени управления зависит от значения множителя Лагранжа, поэтому при построении управления возможны три случая. В случае, если переключаются обе компоненты вектора управления, то половины ширин ступеней Δ_1 и Δ_2 для u_1 и u_2 вычисляются по формулам:

$$\cos \omega \Delta_1 = \pm \frac{\sqrt{M}}{2\sqrt{N_1(-B_1 \pm \sqrt{Q})}},$$

$$\cos \omega \Delta_2 = \pm \frac{\sqrt{M}}{2\sqrt{N_2(-B_1 \pm \sqrt{Q})}}.$$

Если при этом $\eta_1 = \eta_2$, то половины ширин ступеней Δ_1 и Δ_2 изменятся на следующие:

$$\cos \omega \Delta_1 = \pm \frac{\sqrt{|M|}}{2\sqrt{2N_1 B_1}},$$

$$\cos \omega \Delta_2 = \pm \frac{\sqrt{|M|}}{2\sqrt{2N_2 B_1}}.$$

В том случае, когда переключается лишь одна из компонент управления, половина ширины ступени Δ_k находится из следующего выражения:

$$\cos \omega \Delta_k = \pm \frac{\sqrt{4\eta_k^2 N_k - (\zeta'^2 + \zeta^{*2})\omega^2}}{2\eta_k \sqrt{N_k}}.$$

3. Формулы для нахождения моментов включения.

При гашении колебаний частот, соответствующих чисто мнимым собственным значениям, точки переключения находятся следующим образом: высчитывается момент включения первой ступени, а остальные моменты вычисляются относительно него, т.к. возможно рассчитать ширину ступени и известно, что положительные и отрицательные ступени имеют одну ширину и сменяются каждую половину периода колебаний $\frac{\pi}{2\omega}$.

Середина момента включения первой ступени управления для его k – ой компоненты рассчитывается независимо от λ по формулам:

$$\cos \omega t_1 = \mp \frac{R\sqrt{I\Theta}\zeta' + LH\zeta^* \cos \beta^*}{\sqrt{(\zeta'^2 + \zeta^{*2})(I\Theta R^2 + L^2 H^2 \cos^2 \beta^*)}},$$

$$\cos \omega t_2 = \mp \frac{Rg\sqrt{I\Theta}H \cos \beta^* \zeta^* + j^2 \tilde{C}^2 \Theta \zeta' - gLH^2 \zeta' \cos^2 \beta^*}{\sqrt{(\zeta'^2 + \zeta^{*2})(I\Theta R^2 g^2 H^2 \cos^2 \beta^* + (j^2 \tilde{C}^2 \Theta - gLH^2 \cos^2 \beta^*)^2)}}.$$

Момент первого включения и выключения находятся соответственно по формулам:

$$t_1^k = t_k - \Delta_k, \quad t_2^k = t_k + \Delta_k, \quad k = 1, 2.$$

Остальные моменты включения положительных ступеней находятся по формуле:

$$t_{i+2}^k = t_i^k \pm \frac{2\pi}{\omega} \pm \frac{2\pi l}{\omega}, \quad k = 1, 2; l \in Z.$$

Остальные моменты выключения считаются относительно моментов включения по формуле:

$$\tilde{t}_i^k = t_i^k \pm \frac{\pi}{\omega} \pm \frac{2\pi l}{\omega}, \quad k = 1, 2; l \in Z.$$

§3. Сведения о построении оптимального управления в MATLAB.

Для решения поставленной задачи нахождения оптимального по критерию расхода управления для ОГС была написана программа в среде MATLAB.

На вход программы подаются:

- коэффициенты системы (5): $H, I, \theta, \mu, \tilde{C}, \beta^*, g, j, L, R$;
- начальные условия задачи (6): $\dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0, z_0$;
- число верхних и нижних ступеней для каждой компоненты вектора управления: $r_k, q_k, k = 1, 2$;
- высота ступеней для каждой компоненты вектора управления: h_1, h_2 .

В результате работы программы получены точки переключения. По ним построено оптимальное управление и выведен его график. Численный эксперимент был проведен для модельного примера.

Подадим на вход данные, которые удовлетворяют условиям устойчивости:

$$\begin{aligned} H &= 2, & I &= 4, & \theta &= 10, \\ \mu &= 4, & \tilde{C} &= 2, & \beta^* &= 0, \\ g &= 9.8, & j &= 4, & L &= 15, & R &= 20, \\ \dot{x}_0 &= 10, & y_0 &= 5, & \dot{y}_0 &= 3, & z_0 &= 3, \\ r_1 &= 10, & q_1 &= 9, & r_2 &= 5, & q_2 &= 4, \\ h_1 &= 4, & h_2 &= 2. \end{aligned}$$

В результате работы программы получим следующее значение функционала расхода топлива: $J = 843,5$.

График управления приведен ниже. Красными линиями изображено управление для первой компоненты, черными — для второй.

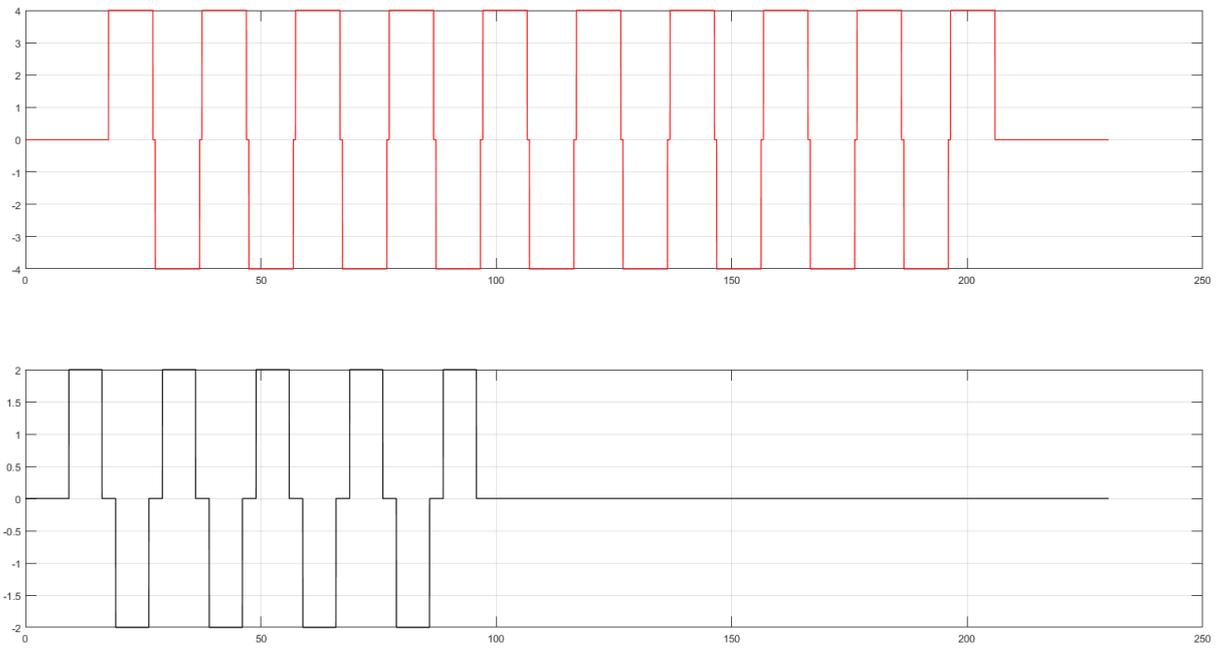


Рис 2.

При увеличении количества ступеней до $r_1 = 60$, $q_1 = 59$, $r_2 = 40$, $q_2 = 40$ значение функционала уменьшается до величины: $J = 498,2$.

Чтобы убедиться, что данное управление допустимо, необходимо показать, что выполняется условие $\tilde{x}(T) = 0$. На следующем графике представлено решение СДУ без управляемых воздействий. На нем изображены периодические незатухающие колебания:

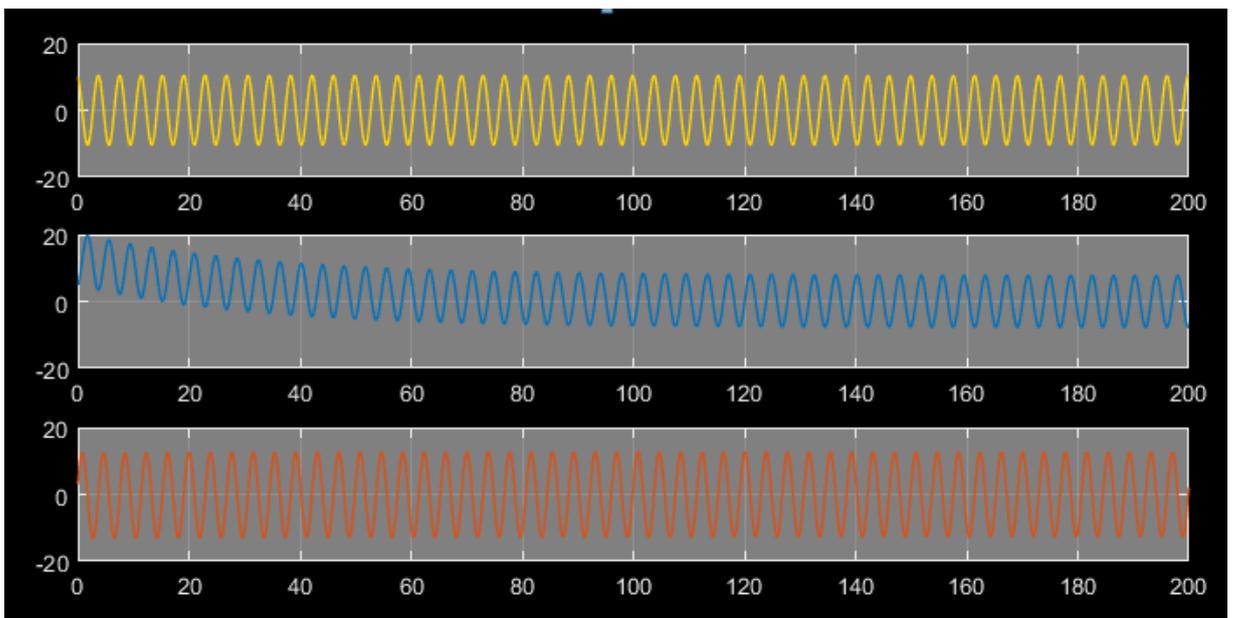


Рис.3

На рисунках 3 и 4 кривая желтого цвета соответствует колебаниям $\dot{\alpha}$, голубого — колебаниям угла β , красного — $\dot{\beta}$.

Для того, чтобы проинтегрировать систему с управлением, используем Simulink. Получим следующий график, на котором видно, что колебания действительно погашены:

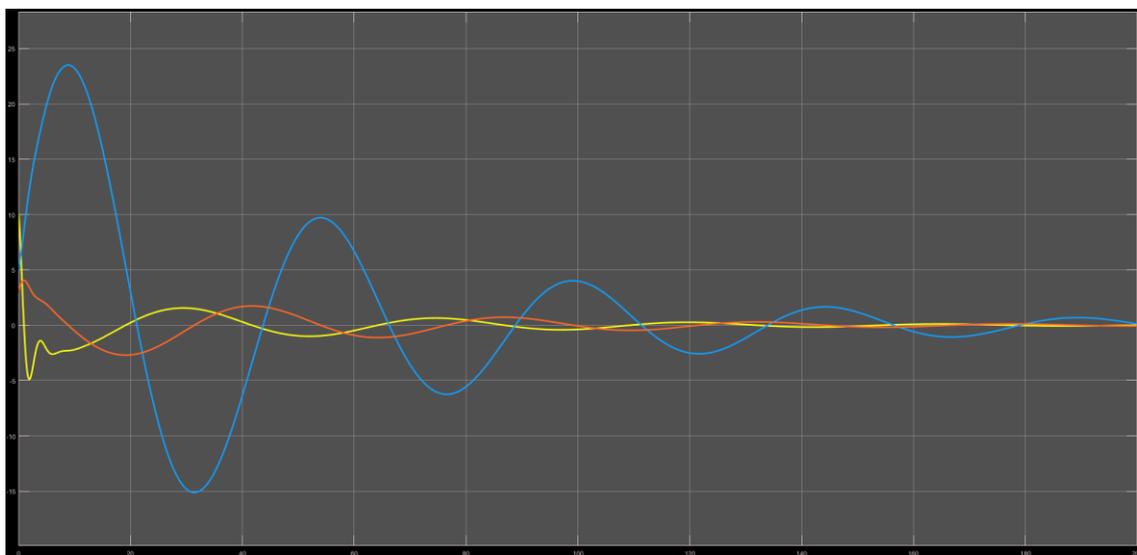


Рис.4

Вывод

Применяя алгоритм, описанный в [5], удалось получить оптимальное по критерию расхода топлива управление и с помощью него, используя пакеты MATLAB и Simulink, были получены значения функционала и соответствующие графики. При увеличении количества ступеней значение функционала уменьшается, что соответствует теоретическим результатам, полученным для этого критерия качества. Также, на рисунке 4 видно, что полученное управление гасит колебания заданной частоты, что подтверждает правильность численных результатов.

Заключение

В ходе работы были выполнены следующие задачи:

- изучены устройство и уравнения управляемого движения одноосного гироскопического стабилизатора;
- изучен алгоритм построения кусочно-постоянного оптимального управления по критерию расхода топлива;
- математическая модель ОГС адаптирована для применения изученного алгоритма, получены уравнения для расчета точек переключения для дальнейшей численной реализации;
- составлена программа в среде MATLAB для численной реализации алгоритма;
- проведен численный эксперимент по модельным данным, по результатам которого построено оптимальное управление и соответствующие графики.
- полученные результаты проверены интегрированием в пакете Simulink.

Список литературы

1. Лысов А. Н., Лысова А. А. Теория гироскопических стабилизаторов. Челябинск Издательский центр ЮУрГУ, 2009. 3 с.
2. Лысов А. Н., Лысова А. А. Теория гироскопических стабилизаторов. Челябинск Издательский центр ЮУрГУ, 2009. 4 с.
3. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 484 с.
4. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 485 с.
5. Бабаджанянц Л.К., Потоцкая И.Ю. Управление по критерию расхода в механических системах. СПб.: С.-Петерб.гос.ун-т, 2003. С. 13-20, 63-72.
6. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984. 141 с.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 459 с.

Приложение

Приложение 1.

```
clc;
%Необходимые для вычисления величины:
H=2;
I=4;
tetaB=10;
mu=4;
Cwave=2;
betaStar=0;
g=9.8;
j=4;
L=15;
R=20;
%Начальные условия:
xDot0=10;
y0=5;
yDot0=3;
z0=3;
%Задаю число ступеней и высоту для каждой компоненты вектора
управления:
Up1=10; Down1=9; h1=4;
Up2=5; Down2=4; h2=2;
nu1=h1*(Up1+Down1);
nu2=h2*(Up2+Down2);
%Матрицы из уравнения движения одноосного гиросtabilизатора:
A = [0, 0, -H*cos(betaStar)/I, -j*Cwave/(I*g);...
     0, 0, 1, 0;...
     H*cos(betaStar)/tetaB, 0, 0, 0;...
     j*Cwave/L, mu/L, 0, -R/L];
%Найдем собственные значения матрицы A:
SC = eig(A);
r=SC(imag(SC)~=0);
if (isempty(r) == 1)
    disp('Нет чисто мнимых собственных чисел');
else
    disp('Получены чисто мнимые собственные числа: '), disp(r);
end;
%Новые начальные условия, полученные после деления:
ZetaReal = R*H*cos(betaStar)*xDot0/(tetaB*L) + ...
(j^2*Cwave^2*tetaB - g*L*H^2*(cos(betaStar))^2)*yDot0/(I*L*tetaB*g) - ...
j*Cwave*H*cos(betaStar)*z0/(g*I*tetaB);
```

```

ZetaImag = H^2*(cos(betaStar))^2*xDot0/(tetaB*(I*tetaB)^0.5) + ...
    j*Cwave*mu*y0/(g*L*(I*tetaB)^0.5) + ...
    R*H*cos(betaStar)*yDot0/(L*(I*tetaB)^0.5);
%РасчетмножителяЛагранжа:
N1 = H^2*(cos(betaStar))^2*(I*tetaB*R^2 + L^2*H^2*(cos(betaStar))^2)/ ...
    (I^3*tetaB^3*L^3);
N2 = (I*tetaB*g^2*R^2*H^2*(cos(betaStar))^2 + ...
    (j^2*Cwave^2*tetaB - j*L*H^2*(cos(betaStar))^2)/(I^2*tetaB^4*L^2*g^2));

B1 = (ZetaReal^2+ZetaImag^2)*(imag(r(1)))^2*(nu1^2+nu2^2) - ...
    4*(nu1^2-nu2^2)*(nu1^2*N1-nu2^2*N2);

D = 4*(imag(r(1)))^2*nu1^2*nu2^2*((ZetaReal^2+ZetaImag^2)^2*(imag(r(1)))^2
- ...
    4*(ZetaReal^2+ZetaImag^2)*(nu1^2-nu2^2)*(N1-N2));

M = (ZetaReal^2+ZetaImag^2)^2*(imag(r(1)))^4 + ...
    16*(nu1^2*N1-nu2^2*N2)^2 - ...
    8*(ZetaReal^2+ZetaImag^2)*(imag(r(1)))^2*(nu1^2*N1+nu2^2*N2);
%МножительЛагранжа
MnLag1 = (-2*ZetaReal*(-
B1+D^0.5)^0.5)/(M*(ZetaReal^2+ZetaImag^2)^0.5)^0.5;
MnLag2 = ZetaImag*MnLag1/ZetaReal;
if sqrt(D)>B1
disp('Множитель Лагранжа действительный.')
else
    disp('Множитель Лагранжа не действительный.')
end;
%Разделенная строка матрицы перехода:
CREAL=[R*H*cos(betaStar)/(tetaB*L), ...
    0, ...
    (j^2*Cwave^2*tetaB - g*L*H^2*(cos(betaStar))^2)/(I*L*tetaB*g),...
    -j*Cwave*H*cos(betaStar)/I*g*tetaB];
CIMAG=[H^2*(cos(betaStar))^2/tetaB*(I*tetaB)^0.5, ...
    j*Cwave*mu/g*L*(I*tetaB)^0.5, ...
    R*H*cos(tetaB)/L*(I*tetaB)^0.5,0];
%Считаем ak bk
a=MnLag1*CREAL+MnLag2*CIMAG;
b=MnLag1*CIMAG-MnLag2*CREAL;
%Частота
Fr=imag(r(1));
%Вычисление времени включения каждой ступени:
DLYAT1 = (ZetaReal*CREAL(1)+ZetaImag*CIMAG(1))/...

```

```

    (sign(ZetaReal*CIMAG(1)-
ZetaImag*CREAL(1))*((ZetaReal^2+ZetaImag^2)*(CREAL(1)^2+CIMAG(1)^2)
)^0.5);
DLYAT2 = (ZetaReal*CREAL(3)+ZetaImag*CIMAG(3))/...
    (sign(ZetaReal*CIMAG(3)-
ZetaImag*CREAL(3))*((ZetaReal^2+ZetaImag^2)*(CREAL(3)^2+CIMAG(3)^2)
)^0.5);
T1=acos(DLYAT1)/Fr;
T2=acos(DLYAT2)/Fr;
%Вычислениешириныступениуправления:
DLYAW1=(sign(ZetaReal*CIMAG(1)-ZetaImag*CREAL(1))*ZetaReal)/...
    abs(MnLag1)*((ZetaReal^2+ZetaImag^2)*(CREAL(1)^2+CIMAG(1)^2))^0.5;
DLYAW2=(sign(ZetaReal*CIMAG(3)-ZetaImag*CREAL(3))*ZetaReal)/...
    abs(MnLag1)*((ZetaReal^2+ZetaImag^2)*(CREAL(3)^2+CIMAG(3)^2))^0.5;
if DLYAW1<0
    DLYAW1=-DLYAW1;
    T1=T1+pi/Fr;
end;
if DLYAW2<0
    DLYAW2=-DLYAW2;
    T2=T2+pi/Fr;
end;
%Ширина
Wide1 = (acos(DLYAW1))/Fr;
Wide2 = (acos(DLYAW2))/Fr;
while (T1-Wide1<0)
    T1 = T1 + 2*pi/Fr;
end;
while (T2-Wide2<0)
    T2 = T2 + 2*pi/Fr;
end;
%Расчет всех точек переключения первой компоненты
TPOL1=zeros;
TPOL1(1)=T1-Wide1; TPOL1(2)=T1+Wide1;
for j=3:1:2*Up1
    TPOL1(j)=TPOL1(j-2)+2*pi/Fr;
end;
TOTR1=zeros;
for j=1:2*Down1
    TOTR1(j)=TPOL1(j)+pi/Fr;
end;
%Второй
TPOL2=zeros;
TPOL2(1)=T2-Wide2; TPOL2(2)=T2+Wide2;

```

```

for j=3:2*Up2
    TPOL2(j)=TPOL2(j-2)+2*pi/Fr;
end;
TOTR2=zeros;
for j=1:2*Down2
    TOTR2(j)=TPOL2(j)+pi/Fr;
end;
if (imag(Wide1)~=0)
    disp('Мнимаяширина 1');
else
    disp('Ширина 1 Ок'); disp(Wide1);
end;

if (imag(Wide2)~=0)
    disp('Мнимаяширина 2');
else
    disp('Ширина 2 Ок'); disp(Wide2);
end;
%Проверка времени
if (abs(imag(T1))~=0)
    disp('Попробуйте другие данные, T1 не действительный. ');
else
    disp('T1 Ок');
end;

if (abs(imag(T2))~=0)
    disp('Попробуйте другие данные, T2 не действительный. ');
else
    disp('T2 Ок');
end;
%Какое управление дольше строится?
if TOTR1(2*Down1)>TOTR2(2*Down2)
tEnd=TOTR1(2*Down2)+10;
else
    tEnd=TOTR2(2*Down2)+10;
end;
%Считаю управление для первой компоненты
%Построение управления 1 компоненты.
x=0:0.01:1200;
u1=0;
for i=1:1:2*Up1
    u1=u1+(-1)^(i+1)*h1*heaviside(x-TPOL1(i));
end;

for i=1:1:2*Down1

```

```

    u1=u1+(-1)^(i)*h1*heaviside(x-TOTR1(i));
end;
% Считаю управление для второй компоненты
u2=0; tmp=1;
for i=1:1:2*Up2
    u2=u2+(-1)^(i+1)*h2*heaviside(x-TPOL2(i));
end;

for i=1:1:2*Down2
    u2=u2+(-1)^(i)*h2*heaviside(x-TOTR2(i));
end;
% Построение графиков управлений:
subplot(2,1,1)
plot(x,u1,'r','LineWidth',1);
hold on;
grid on;
subplot(2,1,2)
plot(x,u2,'k','LineWidth',1);
hold on;
grid on;
% Расчет значения функционала
J1=0; J2=0; J3=0; J4=0;
for i=1:2*Up1;
    J1=J1+h1*(-1)^i*TPOL1(i);
end;
for i=1:2*Up2;
    J2=J2+h2*(-1)^i*TPOL2(i);
end;
for i=1:2*Down1;
    J3=J3+h1*(-1)^i*TOTR1(i);
end;
for i=1:2*Down2;
    J4=J4+h2*(-1)^i*TOTR2(i);
end;
% Интегрирование системы без управления:
[T,Y]=ode45('newfun1', [0, 200], [xDot0 y0 yDot0 z0]);
figure
subplot(3,1,1)
plot(T,Y(:,1),'y','LineWidth',1);
hold on
grid on
subplot(3,1,2)
plot(T,Y(:,2),'b','LineWidth',1);
hold on
grid on

```

```

subplot(3,1,3)
plot(T,Y(:,3),'r','LineWidth',1);
grid on
grid on
%Интегрирование системы с управлением:
UPR1=[x; u1; u2];
Ko1=-H*H*cos(betaStar)/I;
Ko2=-j*Cwave/(I*g);
Ko3=1/I;
Ko4=H*cos(betaStar)/tetaB;
Ko5=1/tetaB;
Ko6=j*Cwave/L;
Ko7=mu/L;
Ko8=-R/L;
TO=zeros;
PL=zeros(1,4);

```

Приложение 2.

