

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Каменская Елизавета Александровна**

**Выпускная квалификационная работа бакалавра**

**Математическое моделирование логистических  
систем в медицине**

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,  
кандидат физ.-мат. наук,  
ассистент

Крылатов А.Ю.

Санкт-Петербург

2016

# Содержание

Введение .....	3
Обзор литературы .....	3
Глава 1. Существующие математические и вероятностные модели распределения ресурсов	
1.1. Математические модели потока пациентов и распределения ресурсов	
1.1.1. Модель потока пациентов .....	18
1.1.2. Модель распределения ресурсов .....	18
1.2. Вероятностные модели распределения больничных коек	
1.2.1. Формализация вероятностной модели .....	19
1.2.2. Сбор входных данных .....	25
Глава 2. Детерминированные модели распределения больничных коек	
2.1. Формализация детерминированной модели .....	29
2.2. Проведенные исследования на основании детерминированной модели .....	33
Заключение .....	37
Список литературы .....	38
Заключение .....	41

## Введение

Исследователи, в течение нескольких десятилетий, пытались создать эффективное планирование пропускной способности для больниц [1-3]. На данный момент появилась острая необходимость в срочности решения этой проблемы. В дополнение к многолетней борьбе между постоянно растущей стоимостью узкоспециализированных и дефицитных ресурсов и снижением государственного и частного спонсирования [4,5] спрос на стационарное лечение существенно растет. Под узкоспециализированными и дефицитными ресурсами подразумевается квалифицированный и гибкий персонал, передовая клиническая и медицинская техника и оборудование, физическое пространство и поставки.

По данным Американской Ассоциации больниц (АНА) население США в 2002 году было 285,73 млн. человек, а в 2003 290,1 млн. человек. На фоне этого увеличения приводятся следующие показатели изменения объема:

- средняя продолжительность пребывания в стационарах (ALOS) осталась без изменений – 5,7 дней;
- объем принимаемых пациентов в больницы в 2003 году увеличился в сравнении с 2002 годом;
- объем госпитализируемых увеличился на 0,9% до 34,8 млн.;
- общий объем больных на основе амбулаторных посещений увеличился на 1,2% до 563,2 млн.;
- посещения отделения неотложной помощи увеличились на 1,0% до 111,1 млн.
- корректировка среднесуточной переписи (т.е. среднее количество больных, получающих стационарную и амбулаторную помощь в сутки) увеличилась на 0,9% до 894 тыс.;
- средняя скорость стационарного размещения увеличилась от 1,9% до 66,8% [6].

Однако, наряду с этим, к 2003 году количество больниц всех типов снизилось на 30% до 5 тыс. [6].

По данным Федеральной Службы Государственной статистики Европы (EuroStat) население Европы в 2000 году было 487,3 млн. человек, а в 2014 508,2 млн. человек. На фоне этого приводятся следующие показатели изменения объема с 2000 года к 2014:

- средняя продолжительность пребывания в стационарах увеличилась с 6,2 дня до 6,4 дня;
- число больничных коек увеличилось с 2,65 млн. до 2,93 млн.;
- заполняемость больниц уменьшилась с 76% до 74%;
- число технических ресурсов в больницах уменьшилось с 1,274 тыс. до 1,166 тыс.;
- количество медицинского персонала увеличилось с 3,87 млн. до 6,1 млн.;

Наряду с этим возросла смертность в Европе с 4,875 млн. до 4,940 млн.

По данным Федеральной Службы Государственной статистики Российской Федерации (РосСтат) население России в 2000 году было 146,3 млн. человек, а в 2014 143,7 млн. человек. На фоне этого приводятся следующие показатели изменения объема с 2000 года к 2014:

- заболеваемость людей основными классами болезней увеличилась с 106,328 млн. до 114,989 млн.;
- средняя продолжительность пребывания в стационарах осталась без изменений – 8,1 дней;
- число больниц снизилось с 10,7 тыс. до 5,6 тыс.;
- число амбулаторно-поликлинических организаций снизилось с 21,3 тыс. до 17,1 тыс.;
- посещений амбулаторно-поликлинических организаций в смену увеличилось с 3533,7 тыс. до 3858,5 тыс.;
- число больничных коек уменьшилось с 1671,6 тыс. до 1266,8 тыс.;
- количество врачей увеличилось с 680,2 тыс. до 709,4 тыс.;
- количество медицинского персонала уменьшилось с 1563,6 тыс. до 1525,1 тыс.;

- объем оказания амбулаторной помощи снизился с 52,3 тыс. до 48,1 тыс.

Смертность в России уменьшилась с 2,225 млн. до 1,912 млн.

В рамках данной работы рассматривалась статистика по больницам города Санкт-Петербург. В частности, подробно использовались статистические данные Николаевской больницы Петродворцового района.

По данным Территориального фонда ОМС Санкт-Петербурга в 2015 году:

- численность населения составляла 5.354.585 человек, прикрепленных к районным амбулаторным учреждениям, оказывающим первичную медико-санитарную помощь.

- численность населения в Петродворцовом районе – 109.398 человек.

В 2015 году распределение численности населения Петродворцового района по прикреплению к государственным медицинским организациям, оказывающим первичную медико-санитарную помощь, было следующим (Таблица 1):

Медицинская организация	Численность	Взрослые	Дети
Николаевская больница	56 946	56 946	0
Поликлиника №64	14 072	11 521	2 551
Поликлиника №122	39 645	32 805	6 840
Детская поликлиника №67	11 396	0	11 396
<b>Всего по Петродворцу</b>	<b>122 059</b>	<b>101 272</b>	<b>20 787</b>

Таблица 1

В Таблице 2 приведены данные распределения уровня госпитализации пациентов, более чем на сутки в Петродворцовом районе. Диаграмма 1 отражает данные Таблицы 2 по районам Санкт-Петербурга, включая данные и по Петродворцовому району.

Район и общее значение по Санкт-Петербургу	Госпитализация более суток		
	Случаи госпитализации	Койко-дни	Показатель на 1000 прикрепленного населения
Петродворцовый	16 294	165 312	133,5
<b>Санкт-Петербург</b>	<b>579 707</b>	<b>5 351 462</b>	<b>110,9</b>

Таблица 2

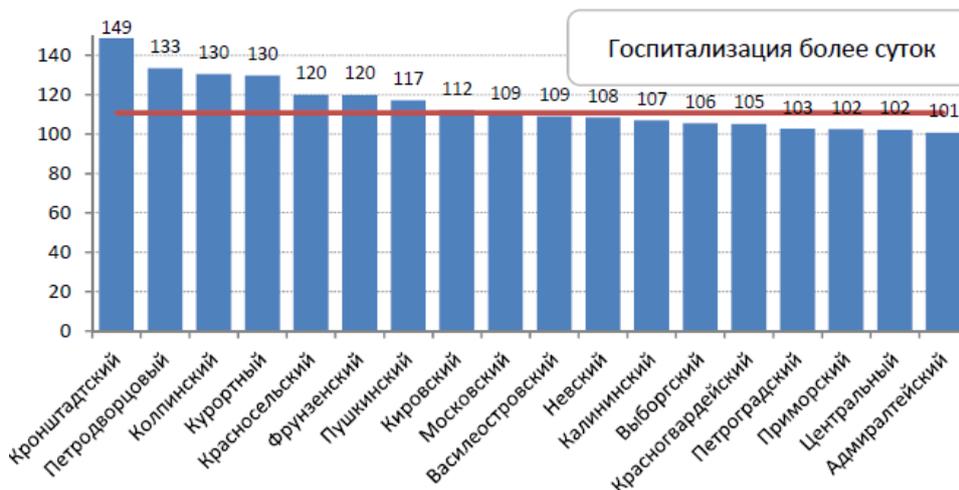


Диаграмма 1

Таблица 3 содержит информацию о распределении уровня госпитализации взрослой сети пациентов, более чем на сутки, в Николаевской больнице Петродворцового района.

Медицинская организация	Госпитализация более суток	
	Случаи госпитализации	На 1000 прикрепленного населения
Николаевская больница	8 090	142,06
<b>Всего по Петродворцу</b>	<b>14 114</b>	<b>139,37</b>

Таблица 3

По данным Таблицы 4 анализируются данные об использовании коечного фонда и о затратах на оплату специализированной медицинской помощи, которые несет Николаевская больница.

Медицинская организация	Среднее число коек	Проведено койко-дней	Работа койки	Средняя длительность	Оборот койки	Стоимость одного койко-дня	Средняя стоимость лечения
Николаевская больница	474	126 104	266	11,9	22,4	2 080,50	24 713,40

Таблица 4

Учитывая вышеперечисленные данные, возникает вопрос оптимальности использования ресурсов больниц и требует тщательного изучения, путем рассмотрения и апробации различных подходов к решению логистических задач в медицине

### **Обзор литературы.**

В наши дни, ресурсы, выделяемые больницам или имеющиеся в них, используются очень не оптимально, что приводит к нехватке больничных коек, времени в операционных и других ресурсов. Есть три основные причины этого:

1. Количество доступных ресурсов находится в дисбалансе со спросом. Из-за этого уровень обслуживания находится на очень низком уровне.
2. Неправильная синхронизация распространения ресурсов по времени. Это является причиной переизбытка или недостатка работы в рабочих отделениях. Например, если назначенные операции плохо распределены по дням недели, то это может привести к большим изменениям в спросе на больничные койки и медицинский персонал.
3. Дисбаланс количества ресурсов, требуемых для нескольких операций одновременно. Например, ресурсов может быть недостаточно или их избыток.

Основной причиной неоптимального использования ресурсов все еще остаются исторически сложившиеся правила в больницах, которые не удовлетворяют наличию нужного количества необходимых ресурсов. Это приводит к бесконтрольному потоку пациентов. Больницы не готовы

обновить распределение ресурсов на регулярной основе, что является причиной неоптимального их использования. В результате пролеченных пациентов меньше.

Решить эти задачи можно посредством сбора и обработки статистики об использовании ресурсов в больницах. Обработанные данные применить, как входные параметры к моделям управления.

Исследователями со всего мира был предложен ряд концепций:

В 1994 году Ян Виссерс разработал подход, выделения ресурсов в соответствии со спросом и с учетом сбалансированного использования времени на утилизацию ресурсов. Данный подход использует некоторый набор компьютерных моделей, поддерживающих управление распределения ресурсов в различных частях больницы.

Спустя некоторое время, в 1998 году Виссерс провел исследование, применяющее этот подход для больницы, которая регулярно сталкивалась с нехваткой мест, что способствовало частым остановкам приема пациентов.

Итак, определим проблему точнее. Будем учитывать то, как нынешние распределения вызывают потерю мощности и анализировать, как правильная координация сможет предотвратить эти потери. [7]

В Главе 1 описываются две модели: "Потоки пациентов и ресурсов" и "Управление вместимостью". Первая модель позволяет определить потребность в ресурсах, соответствующих будущему спросу. Вторая – сбалансировать ресурсы стационарных услуг на уровне средней срочности.

Планирование ресурсов в медицинских учреждениях является одной из главных задач обеспечения пациентов качественной медицинской помощью, учитывая стоимость её предоставления. В целом, удачное планирование ресурсов должно решать целый ряд вопросов: о том на какой период можно госпитализировать пациента; какой тип помощи ему необходим (амбулаторный или стационарный); каким количеством ресурсов должна располагать больница; есть ли у неё возможности на новые ресурсы; какова стоимость ресурсов и какие их виды необходимы (под ресурсами

предполагаются: врачи, медсестры, техники, вспомогательный персонал (медицинский и клинический), сооружения, включая здания, комнаты, кровати, парковку, медицинское диагностическое и мониторинговое оборудование или любое другое оборудование, помогающее оказанию медицинской помощи); а так же вопрос о повышении качества и эффективности обслуживания клиентов.

В статье [8] создаются планирования размещения больничных коек. Разрабатывается модель, которая сводит к минимуму затраты на вместимость (включая стоимость изменения вместимости, также как и стоимость рабочей вместимости (пропускной системы/мощности)), сохраняя при этом необходимый уровень производительности (например, ограничивая ожидаемую для пациента задержку поступления в больницу и удержание расходов в рамках бюджета) над конечным горизонтом планирования. Разделяется горизонт планирования на дискретные временные периоды равной длины. Предполагается, что система достигает устойчивого состояния в каждом из этих интервалов. Это позволяет использовать массовое обслуживание для анализа производительности системы. В данном планировании это приводит к нелинейным уравнениям. Так как вместимость (пропускная система) больничных коек должна быть целочисленной, то данная модель планирования является нелинейной целочисленной оптимизационной моделью большой размерности, которая минимизирует общую стоимость при достижении целевого уровня производительности системы. Некоторые практические соображения приводят к упрощению модели и представлению её через сетевые потоки, которые могут быть решены за полиномиальное время.

Разнообразные проблемы, которые возникают в областях транспортировки, финансов, производства и сервисных систем, могут быть смоделированы в качестве моделей сетевого потока [9]. Сеть представляет собой совокупность (восстанавливаемых или невосстанавливаемых) узлов и (ориентированных/неориентированных) дуг, где дуги связывают один узел с

другим и несут поток от одного узла к другому. Известные модели сетевого потока являются кратчайшим путем. Для общей формализации максимальных и минимальных потоковых затрат существуют эффективные алгоритмы решения [9]. Модель планирования вместимости может быть преобразована в модель кратчайшего пути, где целью является найти путь наименьшей длины от исходного узла к необходимому узлу (то есть, минимальную стоимость планирования вместимости больничных коек с текущего периода до заключительного периода данного горизонта планирования).[8]

Число больничных коек, назначенных различным медицинским и хирургическим отделениям в больницах, постоянно. Правильное распределение коек важно для экономической эффективности больниц. Нехватка кроватей, назначенных определенным отделениям, может привести к размещению пациентов в отделениях с несоответствующим оборудованием и персоналом другой квалификации. Это, в свою очередь, приведет к снижению качества медицинской помощи. Кроме того, переизбыток больничных коек увеличивает затраты из-за недоиспользования ресурсов.

Основной принцип для соответствующего распределения больничных коек – это их необходимость для конкретных отделений в «большую часть времени» [10, 11, 12]. Точно такой же принцип был использован для разработки государственных систем, таких как: канализация, электричество и телефонные сети. Этот принцип широко использовался до тех пор, пока он не стал слишком дорогим. Иногда больницы могут справиться с большим количеством нагрузки, чем установлено. Они отправляют пациентов в другие медицинские или хирургические отделения, берут временные койки или откладывают операции или лечения. Конечно, такие ситуации с переполнением нежелательны, так как они подвергают стрессу персонал и могут кардинально повлиять на качество услуг [13]. Поэтому администраторы должны выделять больничные койки так, чтобы удовлетворить требованиям каждого медицинского и хирургического

отделения.

Распределение больничных коек – это задача макро-уровня, которая ставит, требующий ответа вопрос: «Сколько больничных коек необходимо для поддержки медицинского или хирургического отделения на текущий прием, лечение и выписку?». Большинство исследователей, работающих над планированием размещения коек, используют подход моделирования. Феттер и Томпсон [11] – первые, кто использовал вероятностные модели для определения потребностей вместимости. Эзогбои и Сингх [10], также используя вероятностные модели, проанализировали необходимое фиксированное значение коек среди различных отделений. Хершей др. [14] использовали модель массового обслуживания. Као и Тун [12] использовали комбинацию вероятностных моделей, теории массового обслуживания и статистического анализа для определения требований распространения больничных коек.

Последующие работы расширили модели распределения больничных коек, чтобы сконцентрировать внимание на вопросе: «Насколько эффективно мы можем использовать эти койки?». Таким образом, Харрис [15] оценил расписания операционных, учитывая требования в больничных койках. Дюма [16] сравнил то, как приёмы и передачи полисов могут повлиять на пространство, предоставленное для больничных коек. Макфадден [17] изучал новые акушерские движения пациентов и как они могут повысить общую операционную эффективность. Вассилакополос [18] включал измерения длины листа ожидания. Романин-Якур и Фачин [19] связали эффективность использования больничных коек с нагрузкой на персонал. Все вышеперечисленные ученые предлагали различные решения о распространении больничных коек, но в рамках территориальных ограничений. А что, если бы задача о распределении больничных коек была рассмотрена на мировом уровне? Као и Дун [12] пришли к выводу, что оба вопроса: о количестве больничных коек и об эффективности их распределения, изначально должны быть рассмотрены в рамках

территориальных ограничений, тогда впоследствии будет получено решение данной задачи на мировом уровне.

Все модели, процитированные выше, делают некоторое упрощение о предположении скорости прибытия пациентов и продолжительности их пребывания. В большинстве этих моделей предполагается, что скорость прибытия не меняется в зависимости от часа дня и дня недели (по распределению Пуассона). Као и Танг [12] учли эти упрощения и доказали, что они не влияют на их модель. Однако, Хэнкок и др. [20] показали, что в модели Као и Танга, огромная доля приемов пациентов выборочна (т.е. приемы запланированы) и что потребность в больничных койках ниже, чем в моделях, основанных на предположении Пуассона. Более поздние вероятностные модели Романина-Якурома и Фачини [19], а так же Лоури и Мартина [13] используют несколько предположений о времени прибытия пациентов и количестве прибывших в день. Данные модели разбивают распределения прибывших на разные группы пациентов.

Вероятностные модели стали весьма сложным, так как проблемы здравоохранения стали намного серьезнее. Упрощения, которые были уместны, когда система здравоохранения была относительно стабильной, а продолжительность пребывания длиннее, больше не действительны. Средняя продолжительность пребывания в больницах резко сократилась. Например, после длительного периода стабильности, средняя продолжительность пребывания в больнице Нортсайд (Northside Hospital) после нормальных родов снизилась с 3,8 дней в 1976 году до 1,7 дней в 1995 году. Кроме того, многие хирургические процедуры, которые требуют госпитализации, такие как: удаление катаракты (помутнение хрусталика глаза) и мастэктомии (удаление молочных желез), в настоящее время, как правило, выполняются в амбулаторных условиях. Кроме того, закрытие больниц привело к тому, что в других больницах стали появляться новые пациенты. В настоящее время полезные модели распределения больничных коек требуют свежих данных, которые можно собрать и быстро проанализировать. Однако, самые

последние вероятностные модели требуют чрезмерно много времени на накопление и анализ. Таким образом, вводится модель, с помощью которой можно облегчить трудность сбора данных и разработать модели, обеспечивающую удачные решения. [21]

### **Существующая информация и модели**

Больничные системы информации были построены на основании организационной модели: составление списка принятых пациентов в начале дня и выписанных пациентов рано утром следующего дня. В такой организационной среде, пик переписи происходит в 00:00 часов. Продолжительность пребывания рассчитывается в днях. Первый и последний дни пребывания считаются полными днями. Таким образом, больничные информационные системы, как правило, делают перепись данных в полночь. Все эти данные получены от компьютеризированной системы приема. Они учитывают день поступления пациента, причину поступления и количество дней проведенных пациентом в больнице в течение данного месяца (или года). Учитывая, что в наше время среда здравоохранения очень переменчива, продолжительность пребывания пациентов резко сокращается, а данных, хранимых информационными системами недостаточно, трудно принять эффективные решения в отношении распределения больничных коек.

Не всегда есть возможность применить предположение о том, что пик размещения приходится на 00:00 часов. На рис. 1 представлен график зависимости данных средней переписи пациентов в полночь по дням недели в отделении акушерства, в больнице Нортсайд. Мы видим, что некоторые дни нагружены сильнее других, но это не дает нам полную «картину» представления о загруженности. Как мы видим на рисунке, полуночные переписи «скрывают» самые высокие пики переписи, которые могут возникнуть в течение дня. Данное исследование показало, что неточность средней переписи в 00:00 часов иногда достигает 20%, в сравнении со средней переписью в другое время, в течение одного дня для этого

конкретного отделения. Дальнейшим осложнением в экстраполяции данных переписи в полночь с решениями распределения больничных коек является то, что процент неточности переписи в полуночное время варьируется от отделения к отделению. Таким образом, можно заключить, что переписи данных в 00:00 часов представляют недостаточную информацию для принятия решения по распределению больничных коек.

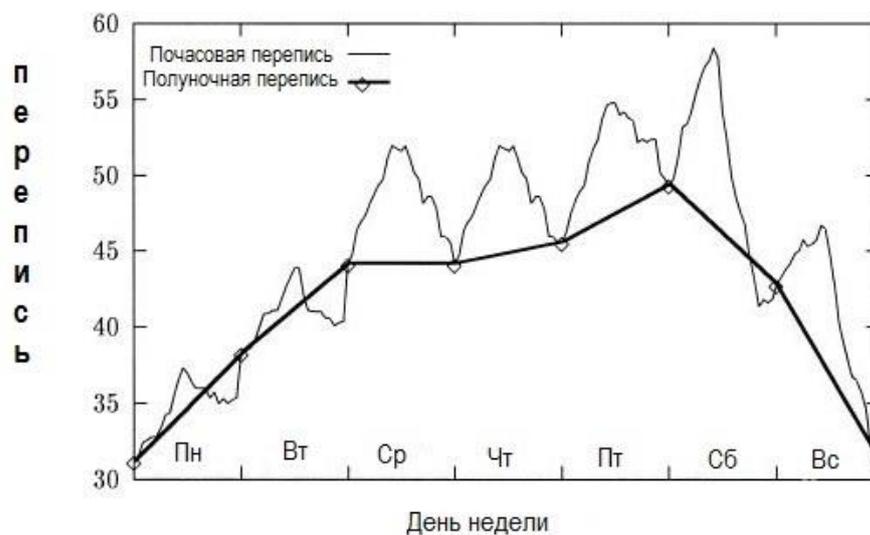


Рис.1 Амбулаторное отделение – средняя перепись.

Информация о количестве пациентов, поступающих в те или иные дни месяца, в конкретное отделение, не является достаточной для составления статистики применимой и к другим отделениям. Поэтому можно утверждать, что одинаковое количество поступивших пациентов может требовать различную вместимость в различных отделениях. Например, в отделениях, таких, как оптометрическое, где проведение хирургических операций, чаще всего, заранее запланировано, можно достаточно четко спрогнозировать количество необходимых больничных коек. Приемы и выписки пациентов могут контролироваться лучше, следовательно, меньше больничных коек требуется для какого-то заданного количества пациентов. В отличие от этого, для того же количества пациентов спрогнозировать необходимое количество больничных коек в акушерском отделении намного сложнее, так как период пребывания пациента там, чаще всего длиннее, чем в оптометрическом. Так

же велика вероятность поступления внеплановых пациентов в акушерское отделение. Поэтому, можно сделать вывод, что число больничных коек в отделении акушерства должно быть больше. Следовательно, чтобы использовать теорию массового обслуживания, для принятия решения о выделении больничных коек, необходимо, чтобы в акушерских отделениях был всплеск приема пациентов и проводилась чёткая перепись данных. Известно, что в акушерском отделении, прием и выписка не всегда случайны. Выписки редко происходят в ночное время, а прием для индуцированных (вынужденных) родов, как правило, бывает в дневное время в будние дни.

Поэтому информация о количестве пациентов, поступающих в те или иные дни месяца, должна быть дополнена информацией о госпитализации и выписке. Период пребывания, однако, часто зависит от точной назначенной процедуры пациенту. Например, «плановые» операции такие, как кесарево, планируются, в основном, по вторникам и средам и обычно требуют 3 – 4 дня пребывания в больнице. Тем не менее, различие между плановым и экстренным кесарево информационной системе не сообщается. В больницах, предоставляющих до 3000 различных услуг, отсутствие такой информации делает предоставление госпитализации и выписку крайне сложными. Единственный способ определить точные услуги, предоставляемые пациенту, (и, как следствие, прием и выписку) является специальное извлечение данных из медицинских карт пациентов. А это является очень трудоемкой задачей. Из-за необходимости сбора данных за пределами информации о количестве пациентов, стандартные вероятностные модели не являются рациональными.

Учитывая эти обстоятельства, была смоделирована почасовая перепись данных и использована ежегодная информация о количестве пациентов, поступивших в какой-то определённый день, чтобы проверить данные переписи. Модель была разработана, чтобы точно определить число больничных коек необходимых для медицинской или хирургической специальности, даже если прием пациентов меняется в зависимости от дня

недели и / или время дня. Важно отметить, что эта модель должна сочетаться с долгосрочными тенденциями, а прием и длина пребывания изменятся в течение длительных периодов времени.

Больница – это совокупность сложных систем, которая, объединяет в себе большое количество технических и гуманитарных ресурсов. В настоящее время спрос на уход в больницах растет. Следовательно, необходимо, чтобы системы здравоохранения имели большую эффективность для удовлетворения потребности в разработке новых стратегий, особенно в планировании размещения больничных коек. В самом деле, больничные койки являются одним из самых дорогостоящих ресурсов в больницах. Кроме того, вместимость (пропускная способность) в больнице, как правило, определяется вместимостью коек.

[22] Несколько подходов было предложено для развития эффективности распространения больничных коек и управления ресурсами. Некоторые исследовательские работы [8], [7], [21] были сфокусированы на математическом моделировании, описывающем проблему в терминах переменных и ограничений. Лапьер, Мюррей и другие [13] предлагали развивать модель предсказаний для оптимизации распределения ресурсов, основанных на составлении вероятностной модели.

Теория нейронных сетей была использована для оценки периода прибывания каждого пациента, прибывшего для экстренной помощи. В другой работе [23], моделирование вероятностной модели помогает понять и изучить операционную систему в госпиталях и оценить разные принятые решения по менеджменту распространения коек.

Бечар [24] предложил метод, основанный на линейном программировании объединения пациентов, прибывших для неотложной помощи (нерегламентированные пациенты) и распространения больничных коек. Метод нерегламентированных пациентов использует два алгоритма:

1. Планирование пациентов, прибывших в порядке очереди

2. Перепланировка пациентов, чей день госпитализации не был утвержден.

В связи с этим логистическими процессами в медицине необходимо управлять, при условии того, что сфера здравоохранения содержит огромный пласт оптимизационных задач, от решения которых критически зависят, прежде всего, проценты заболеваемости и смертности, а также качество оказываемых услуг. Формализация этих оптимизационных задач, в условиях огромных масштабов отрасли, необходима, в первую очередь, для поддержки процесса принятия решений.

Управлять логистическими процессами в медицине можно посредством ресурсов, в частности количеством больничных коек и вопросами их распределения.

Сосредоточимся на распространении больничных коек в госпиталях. Для того чтобы запустить процесс управления определённым количеством коек нужно собрать необходимые входные данные. Такие входные данные получаются в результате сбора и обработки статистики спроса на госпитализацию.

# Глава 1. Существующие математические и вероятностные модели распределения ресурсов

В настоящей главе мы рассмотрим существующие методы и подходы управления ресурсами, а так же сбора и обработки статистических данных спроса на госпитализацию.

## 1.1. Математические модели потока пациентов и распределения ресурсов

### 1.1.1. Модель потока пациентов

Пусть  $p_{i,j,k}(t)$  – число жителей в год  $t$  от возрастной категории  $i$  и половой категории  $j$ , проживающих в районе  $k$ , тогда  $x_{i,j,k,l,m}(t)$  – число пациентов в год  $t$  от возрастной категории  $i$ , половой категории  $j$ , живущих в районе  $k$ , были записаны в больницу  $l$ , по причине (для лечения)  $m$ . (больница  $l$  также может быть группой больниц).

Тогда число пациентов, ожидаемых в год  $t + a$  ( $a$  – параметр) в больнице  $l$  по причине  $m$ , в то время как спрос, предполагается, что остался на том же уровне, как в год  $t$ :

$PF$  – потоки пациентов

$$PF_{l,m}(t+a) = \sum_{i,j,k} p_{i,j,k}(t+a) \times \frac{x_{i,j,k,l,m}(t)}{p_{i,j,k}(t)}$$

а количество больничных коек, требуемых в год  $t + a$  в больницу  $l$ , по причине  $m$ :

$BR$  – требуемые больничные койки

$LOS$  – длина пребывания пациента

$$BR_{l,m}(t+a) = \frac{PF_{l,m}(t+a) \times LOS_{l,m}(t+a)}{365 \times \text{занятость больничных коек}}$$

### 1.1.2. Модель распределения ресурсов

Пусть  $x_{i,j}(l,t)$  – число пациентов, поступивших в день  $t$  по причине  $l$  с длиной класса пребывания  $i$  и продолжительностью операции класса  $j$ .

Тогда количество мест требуется в день  $t$  для специальности  $l$ :

$$B(l, t) = \sum_i \sum_{u=a_i}^0 \sum_j x_{i,j}(l, t - u)$$

$a_i$  — средняя продолжительность в классе  $i$ .

Количество часов, требуемых операционной в день  $t$ , по причине  $l$ :

$$O(l, t) = \sum_j \sum_i x_{i,j}(l, t - v_i) \times o_j$$

$v_i$  — день с длиной операции класса  $i$ :

$$= \begin{cases} 0, & a_i \leq 5 \\ 1, & a_i > 5 \end{cases}$$

$o_j$  — средняя продолжительность операции класса  $j$ .

Количество среднего медицинского персонала, требуемого в день  $t$  по причине  $l$ :

$$N(l, t) = \sum_i \sum_{u=a_i}^0 \sum_j x_{i,j}(l, t - u) \times n(l, u)$$

$n(l, u)$  — количество медицинского персонала, требуемого для приема по причине  $l$  в день  $u$  на период пребывания (функция нагрузки медицинского ухода).

## **1.2. Вероятностные модели распределение больничных коек**

### **1.2.1. Формализация вероятностной модели**

Пусть у нас есть данные почасовой переписи по самым оживленным временам года для данного медицинского или хирургического отделения. Почасовые данные переписи автокоррелированы, так как перепись данного дня и часа зависит от переписи предыдущего часа. Однако, перепись одной недели можно рассматривать независимо от переписи другой недели. Эта независимость вытекает из того факта, что средняя продолжительность пребывания во всех отделениях больницы Нортсайд составляет менее одной недели. Таким образом, можно рассмотреть данные переписи за каждую

неделю, а не за каждый день недели.

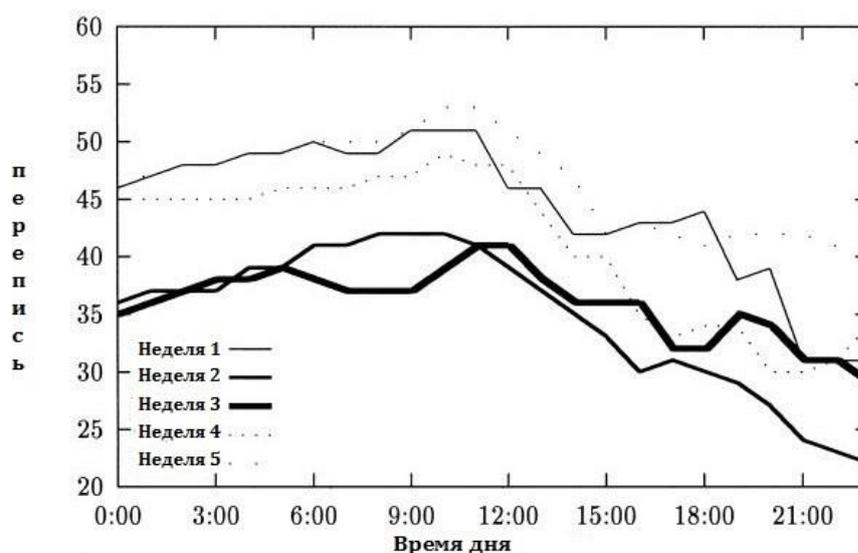


Рис.2 Акушерское отделение – реальные данные переписи по пяти неделям

На рис. 2 изображен график зависимостей данных переписи от времени суток по пяти различным неделям. Из рисунка можно заметить, что кривые зависимостей имеют сходные формы. Модель, введенная в данной статье, генерирует кривые, приведенные на рис. 3. (Обратите внимание, что рис. 2 и рис. 3 имеют схожий вид.)

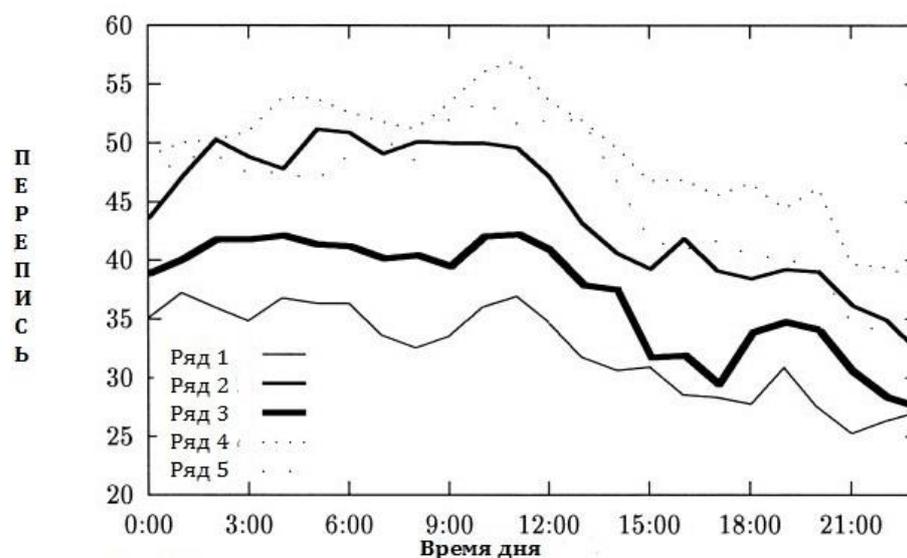


Рис.3 Акушерское отделение – смоделированные временны ряды данных переписи по пяти неделям

Основная идея в том, что вариацию необходимого количества коек на

каждый день недели разбивают на вариацию еженедельной переписи и на почасовую вариацию. Математически, модель выглядит следующим образом:

$$B_{i,j} = \mu_{i,j} + A_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad i = 1, \dots, 7; j = 1, \dots, 23,$$

где  $B_{i,j}$  – количество требуемых кроватей в день  $i$  и час  $j$  (рис. 4 -

графическое представление каждого компонента  $B_{i,j}$ ),

$\mu_{i,j}$  – среднее число коек, необходимых в день  $i$ , час  $j$ , которое мы оцениваем с помощью формулы:

$$\bar{X}_{i,j} \equiv \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n B_{i,j,k} \quad (\text{см. (9)})$$

$A_{i,j}$  – показатель изменений от недели к неделе; средняя разница изменений

между реальными и средними (смоделированными) кривыми переписи;

$A_i \sim N(0, S_i^2)$  т.е.  $A_i$  подчиняется нормальному закону распределения со значением 0 и вариацией  $S_i^2$ , где

$$S_i^2 = \frac{1}{24} \sum_{j=0}^2 3S_{i,j}^2$$

и  $S_{i,j}^2$  (см. (10) и (11)) - пример вариации дня  $i$  и часа  $j$ .

$\varepsilon_{i,j}$  – почасовые изменения; это авторегрессивный фактор шума, который будет рассмотрен ниже.

Моделируем  $\varepsilon_{i,j}$ , как процесс авторегрессии первого порядка (AR(1)) с коэффициентом  $\varphi_i$ , т.е.:

$$\varepsilon_{i,j} = \varphi_i \varepsilon_{i,j-1} + z_{i,j}$$

где

$$z_{i,j} \sim N(0, \sigma_{z_i}^2)$$

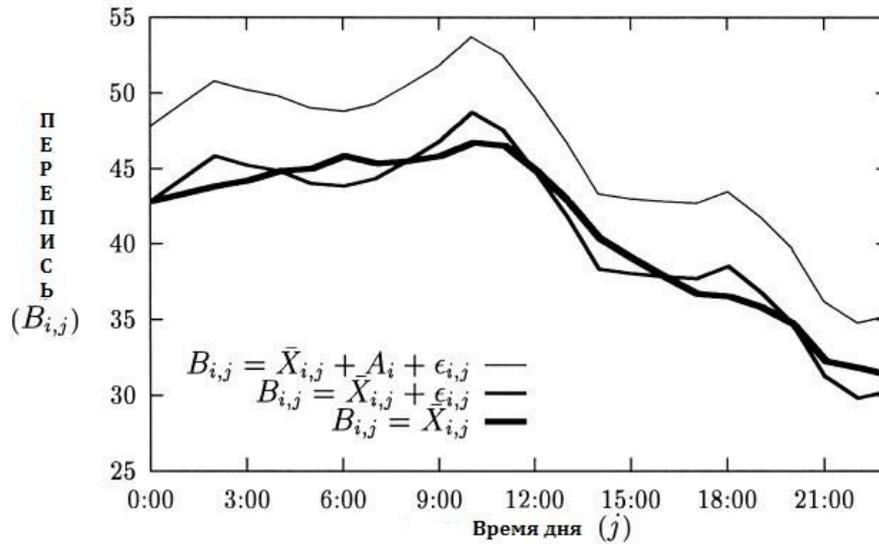


Рис.4 Данные переписи одной недели – влияние компоненты модели на перепись.

Такие AR(1) модели часто используются при моделировании элементарных автокоррелированных временных рядов.  $\epsilon_{i,j}$  обладает следующими свойствами:

$$\epsilon_{i,j} \sim N\left(0, \frac{\sigma_{z_i}^2}{1 - \phi_i^2}\right)$$

$$\text{Cov}(\epsilon_{i,1}, \epsilon_{i,1+k}) = |\phi - i|^k$$

По Фуллеру [25] можем оценить  $\phi$  и  $\sigma_{z_i}^2$  следующим образом:

$$\hat{\phi}_i = \frac{\sum_{j=0}^{n-2} \epsilon_{i,j} \epsilon_{i,j+1}}{\sum_{j=0}^{n-1} \epsilon_{i,j}^2} \quad (7)$$

$$\hat{\sigma}_{z_i}^2 = \frac{1}{n-3} \sum_{j=0}^{n-2} (\epsilon_{i,j+1} - \bar{\phi}_i \epsilon_{i,j})^2 \quad (8)$$

### Вычисление параметров

Теперь преобразуем (7) и (8) с учетом данных больницы Нортсайд. Предположим, что нам доступны данные переписи за  $n$  недель. Преобразуем

наши фактические данные следующим образом:

$$\begin{aligned} B_{i,j,k} \\ i = 1, \dots, 7 \quad (\text{день недели}) \\ j = 0, \dots, 23 \quad (\text{час дня}) \\ k = 1, \dots, n \quad (\text{неделя изучения}) \end{aligned}$$

Вычислим теперь все для  $i$  и  $j$ :

$$\hat{\mu}_{i,j} = \bar{X}_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n B_{i,j,k} \quad (9)$$

$$S_{i,j}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (B_{i,j,k} - \bar{X}_{i,j})^2 \quad (10)$$

$$S_i^2 = \frac{1}{24} \sum_{j=0}^{23} 3S_{i,j}^2 \quad (11)$$

(9) – средние данные за каждый час, показанные на рис.2.

(10) – оценивает изменения переписи каждого часа и дня недели.

(11) – показывает оценку изменений  $A_i$  от средней оценки изменений дня недели.

До сих пор, были оценены все параметры модели, кроме тех, которые лежат в основе модели AR(1). Определяем параметры переписи данных каждого дня (12) – (15), путем усреднения оценок параметров через  $n$  повторов (16) и (17):

$$A_{i,2,k} \equiv B_{i,0,k} - \bar{X}_{i,0} \quad (12)$$

$$\varepsilon_{i,j,k} \equiv B_{i,j,k} - \bar{X}_{i,j} - A_{i,0,k} \quad (13)$$

$$\hat{\varphi}_{i,j} \equiv \frac{\sum_{j=0}^{22} \varepsilon_{i,j,k} \varepsilon_{i,j+1,k}}{\sum_{j=0}^{23} \varepsilon_{i,j,k}^2} \quad (14)$$

$$\hat{\sigma}_{z_i,k}^2 \equiv \frac{1}{21} \sum_{j=0}^{22} (\varepsilon_{i,j+1,k} - \hat{\varphi}_{i,k} \varepsilon_{i,j,k})^2 \quad (15)$$

$$\hat{\phi}_i \equiv \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \hat{\phi}_{i,k} \quad (16)$$

$$\hat{\sigma}_{z_i}^2 \equiv \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{\sigma}_{z_i,k}^2 \quad (17)$$

Заметим, что в уравнении (13) используется только вариация еженедельной переписи в 0:00 часов –  $A_{i,0,k}$ . Это делается для того, что бы как можно меньше вмешиваться в моделирование шума –  $\varepsilon_{i,j+1,k}$ .

Альтернативой было бы вычислять еженедельные изменения для каждого часа, а затем взять среднее (для того, чтобы сгенерировать параметры необходимые для уравнений (7) и (8)). Однако, поскольку не ясна разница между вариацией еженедельной переписи и шумом моделирования AR(1), то достаточно сложно определить, будет ли это добавлять значительный вклад в точность модели. Уравнения (16) и (17), таким образом, рассматривать как приближения уравнений (7) и (8).

### Моделирование

Теперь, после того, как модель и ее параметры были установлены, мы используем эту информацию для моделирования почасовой переписи. За каждый день  $i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ),  $n$  раз заново проводится следующее ( $n$  – наибольшее число повторений (по крайней мере, 1000)):

- Создание  $A_i \sim S_i N(0,1)$ . (Существуют некоторые методы создания стандартной нормальной случайной переменной. [26])
- Создание независимых переменных:  
 $Z_{i,j} \sim \hat{\sigma}_{z_i} N(0,1) \quad j = 0, \dots, 23$
- Вычисление  $\varepsilon_{i,j} = \hat{\varepsilon}_i \varepsilon_{i,j} + Z_{i,j} \quad j = 0, \dots, 23$  (берем  $\varepsilon_{i,0} = 0$ )
- Вычисление  $B_{i,j} = \mu_{i,j} + A_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad j = 0, \dots, 23$

Чтобы определить, а в дальнейшем выделить, необходимое количество больничных коек, покрывающих наибольший спрос, нужно знать функцию распределения частоты переписи. Больничные койки могут быть выделены на основе данных переписи самого занятого дня, самой занятой недели или комбинации из самых занятых дня и недели. Следующие три способа

помогают принять решения по распределению больничных коек формально:

1. Кроватей должно быть выделено достаточно, чтобы удовлетворить суточную потребность на  $(1 - \alpha_d)$  уровне ( $0 \leq \alpha_d \leq 1$ ), где:

$$\alpha_d = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{23} d_{i,j,k}}{n \times 24} \quad (18)$$

и

$$d_{i,j,k} = \begin{cases} 1, & \text{если } B_{i,j,k} > [\text{Количества выделенных мест}] \\ 0, & \text{в противном случае (} k - \text{изменяемый коэффициент моделирования)} \end{cases}$$

2. Кроватей должно быть выделено достаточно, чтобы удовлетворить недельную потребность на  $(1 - \alpha_w)$  уровне ( $0 \leq \alpha_w \leq 1$ ), где:

$$\alpha_w = \frac{\sum_{i=1}^7 \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{23} d_{i,j,k}}{n \times 7 \times 24}$$

3. Кроватей должно быть выделено достаточно, чтобы удовлетворить суточную потребность на  $(1 - \alpha_d)$  уровне ( $0 \leq \alpha_d \leq 1$ ) и кроватей должно быть выделено достаточно, чтобы удовлетворить недельную потребность на  $(1 - \alpha_w)$  уровне ( $0 \leq \alpha_w \leq 1$ ).

### **1.2.2. Сбор входных данных**

Качество собранных данных очень важно для получения достоверных результатов. В самом деле, это может быть даже более важно, чем сама математическая модель. Далее рассмотрим проблемы получения данных переписи и их проверку.

Используем два метода для получения почасовой переписи.

Первый – регенерировать данные переписи из записей о выписанных пациентов. Этот метод требует качественного программирования, но обладает преимуществом доступа к данным в течение длительного периода времени. Проблемы: из-за того, что записи о некоторых пациентах не были

вовремя перенесены в систему, результат переписи оказался ниже реального.

Второй метод – сохранение данных переписи каждого пациента в каждый час. Преимущество этого метода в том, что его легко осуществить. Недостаток – требует специального сбора данных (так, в настоящее время, в больницах производится только полуночная перепись). Кроме того, невозможно сделать анализ данных, пока не будет завершён их сбор.

В текущем исследовании, было собрано шесть недель данных почасовой переписи. В этот период данные переписи отражают стандартную деятельность больницы. Точные данные, собранные за период в шесть недель намного предпочтительнее ненадежных данных, собранных давно и за более длительный период времени. Кроме того, данные, которые были собраны давно, возможно, уже не отражают тенденции нового времени.

### **Проверка данных**

Качество полученных данных заставляет задуматься над вопросом об их проверке. Используется основной результат теории очередей – формула Литтла [27]. Она сообщает, что в течение длительного периода времени, среднее число новых пациентов в день, умноженное на средний период пребывания пациента в больнице равно среднему количеству людей в больнице. Итак, используя формулу Литтла, сравниваются данные, полученные в ходе исследования с данными, собранными в административной системе:

$$\frac{\sum_{k=1}^7 \sum_{j=0}^{23} \bar{X}_{i,j}}{7 \times 24} (\text{Среднее число новых пациентов в день}) \times (\text{Среднее время пребывания}) = \quad (19)$$

$$= \frac{\text{Пациентов в год}}{365} \times \frac{\text{Дней пациентов в год}}{\text{Пациентов в год}} \quad (20)$$

Различия между обеими сторонами уравнения могут появиться по нескольким причинам:

- **Сезонность:** данные исследования, могли быть получены во время напряженного сезона или тихого. Графики последних данных переписи о количестве пациентов, поступивших в те или иные дни за последние месяцы в течение года или больше, показывают есть ли сезонность или нет.
- **Тренд:** бизнес-нагрузки и оказываемые услуги могут изменяться с течением времени. «Сглаживающее среднее» может показать тенденции не учитывая влияние сезонности [28].
- **Другие причины:** есть еще некоторые факторы, которые могут способствовать расхождению между данными исследования, административными данными, и реальностью. Например, если данные переписи извлекались из определенного отделения, то они не будут включать в себя данные о пациенте, который находится в их отделении, из-за недостатка коек в отделении, которое ему необходимо. Интересным фактом является то, что существует огромная разница, в предоставляемой информации о количестве пациентов, поступающих в те или иные дни в течение года между информацией, извлечённой из медицинской документации и информации, извлечённой из административных данных.

### **Результаты**

В статье [21] были проанализированы шесть недель почасовой переписи в определенном отделении больницы. А точнее, вычислена кривая средней еженедельной почасовой переписи, как показано на рис.1, для каждого медицинского и хирургического отделения, а затем применена модель временных рядов, но только для отдела акушерских услуг.

Рассмотрена проблема распределения больничных коек и ресурсов. Данные почасовой переписи предоставляют информацию, которой будет достаточно для принятия решений, касающихся распространения и выделения коек в различных медицинских и хирургических отделениях в больнице. Рассмотрены временные ряды AR(1) модели со средней кривой

переписи с целью имитации этой переписи. С такой моделью, можно предсказать вероятность того, что данных переписи будет больше, чем число, предоставленных больничных коек. Администраторы здравоохранения в дальнейшем могут использовать эту модель, чтобы выделить кровати таким образом, чтобы переполнения в больницах были в пределах нормы.

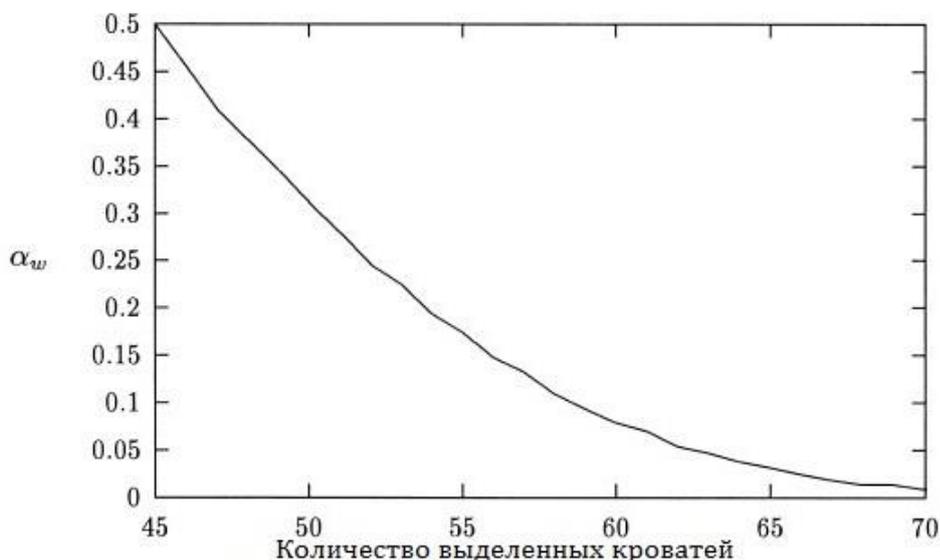


Рис.5 Перинатальное подразделение – выделенные койки vs  $\alpha_w$ .

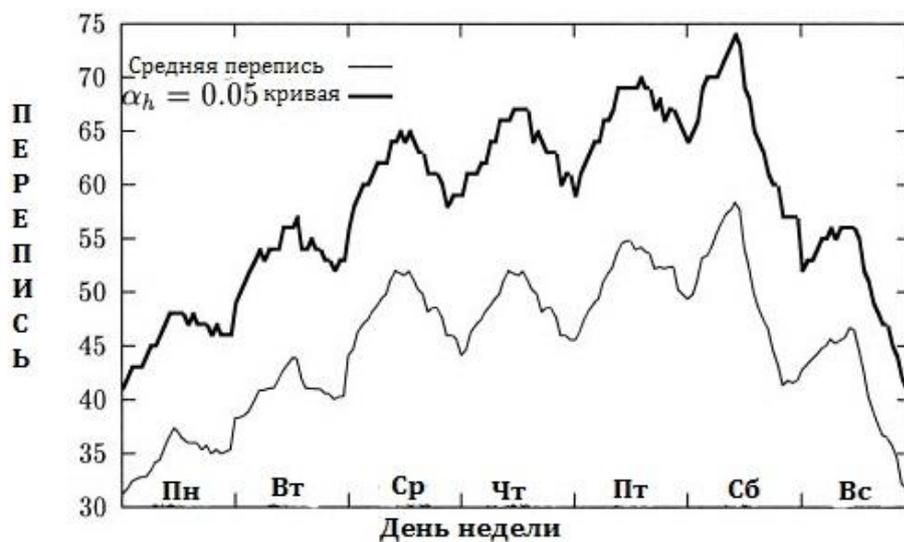


Рис.6 Перинатальное подразделение – кривая переписи с  $\alpha_h = 0.05$ .

В больницах, как правило, хранятся только данные полуночной переписи. Вероятностные модели требуют некоторую работу, чтобы получить почасовую перепись. Таким образом, должен быть организован

почасовой сбор данных для получения наиболее точных результатов.

Итак, благодаря собранной статистике могут быть реализованы модели управления распределения больничных коек.

## **Глава 2. Детерминированные модели распределения больничных коек**

В настоящей главе рассмотрим модель управления количеством больничных коек, основанную на критерии минимизации совокупности затрат на госпитализацию пациента.

### **2.1 Формализация детерминированной модели**

Ниже рассматривается планирование распределения больничных коек. План действий по техническому обслуживанию не рассматривается. Модель Бечара состоит в представлении задачи распределения больничных коек в двух программах. Первая программа состоит в том, чтобы спланировать размещение регламентированных и нерегламентированных пациентов на имеющихся кроватях. Даты ранней и поздней госпитализации должны задаваться для каждого пациента. Цель модели заключается в оптимизации затрат отказавшихся пациентов. После каждого назначения, матрица наличия кроватей обновляется.

Вторая программа заключается в том, чтобы найти наличие отказавшихся плановых пациентов из первого назначения и сделать возможным, обсуждение и изменение дат самых ранних и поздних сроков госпитализации.

Бен Бачоч [29] использует эту модель и вводит новые ограничения: несмешиваемые пациенты (женщины и мужчины не могут быть в одной палате во время лечения) и палаты с двумя койками.

Отметим, что модель данной статьи обобщает модель, построенную в [29], путем ввода ограничений, связанных с:

- заданным периодом пребывания пациентов;
- необходимостью изоляции конкретных пациентов;
- запретом на занятие более одной койки одним пациентом;

- заданными датами ранней и поздней госпитализации;
- выделением двухместных и одноместных палат;
- запретом на смешанные палаты.

Таким образом, основная задача состоит в том, чтобы распределить максимум текущих пациентов. Распределение должно удовлетворять ограничениям и не должно беспокоить текущее планирование. Возможности (пустые и занятые койки) определяются и обновляются после каждого распределения (назначения). Если пациент отказывается, то он может быть переопределен в другое учреждение. Такое решение зависит от многих параметров (возраст пациента, уровень необходимой помощи, распределение в другом учреждении). Если это регламентированный пациент, то решение о перенаправлении пациента принимается после обсуждения и определение дат госпитализации, подходящих ему.

В настоящей статье данная модель расширена на случай наличия не только одноместных и двухместных палат, но и палат с количеством коек больше двух.

### **Модель**

Математическое моделирование распределения больничных коек основывается на линейном программировании со смешанными переменными. Вводятся следующие обозначения:

$N$  – количество пациентов,

$T$  – горизонт планирования,

$L$  – количество коек,

$D_i$  – дата самой ранней госпитализации для пациента  $i$ ,

$T_i$  – дата самой поздней госпитализации для пациента  $i$ ,

$S_i$  – пол пациента  $i$ ,

$H$  – стоимость госпитализации за сутки,

$LOS_i$  – длина пребывания пациента  $i$ ,

$M$  – положительная константа,

$NC$  – количество комнат,

$t$  – время элементарного периода (1 день),

$B_{l,t} = 1$ , если кровать  $l$  свободна в течение периода  $t$ , 0 в обратном случае,

$M_{j,k,l} = 1$ , если кровати  $j$  и  $k$  в одной комнате, 0 в обратном случае,

$S_i = -1$ , если пациент  $i$  – мужчина, 1 – женщина,

$SP_{l,t} = -1$ , если кровать  $l$  занята мужчиной в течение времени  $t$ , 1 – если занята женщиной и 0 – если свободна,

$I_i = 0$ , если пациент  $i$  нуждается в изоляции, 1 в обратном случае,

$R_i = 0$ , если комната  $i$  одноместная, 1 – если в палате более двух коек,

$X_{i,l,t} = 1$ , если пациент  $i$  назначен на кровать  $l$  в течение дня  $t$ , 0 в обратном случае,  $X = \{X_{i,l,t}\}$ ,

$F_i = 0$ , если пациента  $i$  госпитализируют, 1 в обратном случае,

$F = \{F_i\}$ ,

$A_{i,l} = 1$ , если пациент  $i$  назначен на кровать  $l$ , 0 в обратном случае,

$A = \{A_{i,l}\}$ ,

$J_i$  – реальная дата госпитализации,  $J = \{J_i\}$ ,

$End_i$  – последний госпитализационный день: ( $End_i = J_i + LOS_i - 1$ )

В качестве целевой функции разрабатываемой оптимизационной задачи будем использовать

$$\text{Min}_{F,J,A} \left( H \sum_{i=1}^N [(J_i - D_i) + (F_i LOS_i)] \right) \quad (21)$$

Первая часть данной функции минимизирует затраты на задержку, связанную с удаленностью даты госпитализации от самого раннего варианта. Вторая часть минимизирует затраты, связанные с отказом пациенту в госпитализации.

Введем множество ограничений:

$$\sum_{l=1}^L X_{i,l,t} \leq 1 \quad (22)$$

Ограничение (22) гарантирует, что пациент не может занять более одной кровати в течение периода  $t$ .

$$\sum_{i=1}^N X_{i,l,t} \leq 1 \quad (23)$$

Ограничение (23) гарантирует, что койка предназначена только для одного пациента в течение периода  $t$ .

$$\sum_{l=1}^L \sum_{t=D_i}^T X_{i,l,t} + F_i LOS_i = LOS_i \quad (24)$$

Ограничение (24) гарантирует, что для каждого пациента период его пребывания в госпитале эквивалентен продолжительности лечения.

$$\sum_{l=1}^L A_{i,l} \leq 1 \quad (25)$$

$$LOS_i A_{i,l} = \sum_{t=D_i}^{T_i} X_{i,l,t} \quad (26)$$

Ограничения (25) и (26) гарантируют, что пациент может занимать только одну койку в период своего пребывания.

$$J_i \leq (tX_{i,l,t} + (-X_{i,l,t} + 1))M \quad (27)$$

Ограничение (27) гарантирует, что дата госпитализации пациента  $i$  не может следовать после периода, в который была назначена койка для этого пациента.

$$J_i \geq D_i \quad (28)$$

$$J_i \leq T_i \quad (29)$$

Ограничения (28) и (29) гарантируют, что реальная дата госпитализации пациента находится между самой ранней и самой поздней датами госпитализации.

$$\sum_{t=D_i}^T X_{i,l,t} B_{l,t} = A_{i,l} LOS_i \quad (30)$$

Ограничение (30) гарантирует, что кровать, распределенная для

пациента, свободна в течение всего срока его лечения.

$$R_i M_{j,k,l} \left( \sum_{i=1}^N S_i (X_{i,j,t} - X_{i,k,t}) \right) \leq 1 \quad (31)$$

$$R_i M_{j,k,l} \left( \sum_{i=1}^N S_i (X_{i,j,t} - X_{i,k,t}) \right) \geq -1 \quad (32)$$

$$R_i M_{j,k,l} \left( SP_{j,t} - \sum_{i=1}^N X_{i,k,t} S_i \right) \leq 1 \quad (33)$$

$$R_i M_{j,k,l} \left( SP_{j,t} - \sum_{i=1}^N X_{i,k,t} S_i \right) \geq -1 \quad (34)$$

Ограничения (31)-(34) выполняются для любых  $(j,k) \in l$  (попарно) и гарантируют несмешанные палаты.

$$X_{i,j,t} \sum_{k=1}^{NC} R_k M_{j,j,k} \leq I_i \quad (35)$$

Ограничение (35) гарантирует, что пациент, нуждающийся в изоляции, должен быть размещен в одноместную палату.

При этом:

$X_{i,j,t}, F_i, A_{i,l}$  – булевы переменные.

$J_i, End_i$  находятся в интервале  $[1, T]$

## 2.2. Проведенные исследования на основании детерминированной модели

В таблицах (Таблица 5, Таблица 6) приведены исходные данные о доступности больничных коек на изучаемый горизонт планирования. В таблицах (Таблица 7, Таблица 8, Таблица 9) приведены данные размещения и поступления пациентов, учитывая заданный период пребывания пациента, необходимость изоляции конкретных пациентов, запрет на занятие более одной койки одним пациентом, заданные даты ранней и поздней госпитализации и запретом на смешанные палаты.

	Кровати	Горизонт планирования													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Палата 1	1						Ж	Ж	М	М					
	2										Ж	Ж			
Палата 2	3														
	4						Ж	Ж	М	М					
Палата 3	5										Ж	Ж			
	6			М	М	М	М	Ж	Ж	Ж	Ж	Ж	Ж		
Палата 4	7					Ж	Ж	М	М						
	8										Ж	Ж			
Палата 5	9														
Палата 6	10						Ж	Ж	М	М					

Таблица 5

	Кровати	Горизонт планирования													
		15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Палата 1	1				Ж			М	Ж	Ж				М	М
	2														
Палата 2	3														
	4				Ж			М	Ж	Ж				М	М
Палата 3	5														
	6	Ж	Ж							М	М	Ж	Ж	Ж	Ж
Палата 4	7				Ж			М	Ж	Ж				М	М
	8	Ж	Ж	Ж	Ж							М	М		
Палата 5	9														
Палата 6	10				Ж			М	Ж	Ж				М	М

Таблица 6

Пациент $i$	Характеристика $i$	$l(i)$	$D(i)$	$T(i)$	$S(i)$	$LOS(i)$	$J(i)$	$End(i)$	$Bed(i)$	$F(i)$
1	не запланирован	Да	1	2	Ж	4	1	4	10	Принят
2	не запланирован	Нет	3	6	Ж	5	3	7	3	Принят
3	не запланирован	Нет	2	3	М	3	2	4	7	Принят
4	не запланирован	Нет	3	4	М	2	3	6	5	Принят
5	не запланирован	Нет	1	4	Ж	7	1	7	2	Принят
6	запланирован	Нет	4	4	М	6	4	9	0	Отказался
7	запланирован	Да	4	4	Ж	4	4	7	0	Отказался
8	не запланирован	Нет	6	7	М	4	6	9	0	Отказался
9	не запланирован	Нет	1	5	М	3	1	3	8	Принят
10	не запланирован	Нет	3	6	Ж	6	3	8	9	Принят
11	не запланирован	Да	9	10	М	3	10	12	10	Принят
12	не запланирован	Нет	7	11	М	4	8	11	3	Принят

13	не запланирован	Нет	8	11	Ж	5	8	12	0	Отказался
14	запланирован	Нет	11	11	М	5	11	15	4	Принят
15	запланирован	Нет	11	11	Ж	6	11	16	1	Принят
16	не запланирован	Да	12	14	М	4	12	15	0	Отказался
17	не запланирован	Нет	8	12	М	2	8	9	8	Принят
18	не запланирован	Нет	10	13	Ж	6	12	17	5	Принят
19	запланирован	Нет	12	12	М	3	12	14	8	Принят
20	не запланирован	Нет	12	13	Ж	2	12	13	2	Принят
21	не запланирован	Да	1	2	Ж	4	1	4	10	Принят
22	не запланирован	Нет	3	6	Ж	5	3	7	3	Принят
23	не запланирован	Нет	2	3	М	3	2	4	7	Принят
24	не запланирован	Нет	3	4	М	2	3	6	5	Принят
25	не запланирован	Нет	1	4	Ж	7	1	7	2	Принят
26	запланирован	Нет	4	4	М	6	4	9	0	Отказался
27	запланирован	Да	4	4	Ж	4	4	7	0	Отказался
28	не запланирован	Нет	6	7	М	4	6	9	0	Отказался
29	не запланирован	Нет	1	5	М	3	1	3	8	Принят
30	не запланирован	Нет	3	6	Ж	6	3	8	9	Принят
31	не запланирован	Да	9	10	М	3	10	12	10	Принят
32	не запланирован	Нет	7	11	М	4	8	11	3	Принят
33	не запланирован	Нет	8	11	Ж	5	8	12	0	Отказался
34	запланирован	Нет	11	11	М	5	11	15	4	Принят
35	запланирован	Нет	11	11	Ж	6	11	16	1	Принят

Таблица 7

	Кровати	Горизонт планирования													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Палата 1	1						Ж	Ж	М	М		15	15	15	15
	2	5	5	5	5	5	5	5			Ж	Ж	18	18	18
Палата 2	3			2	2	2	2	2	12	12	12		24	24	24
	4						Ж	Ж	М	М		14	14	14	14
Палата 3	5			4	4	4	4				Ж	Ж	20	20	23
	6			М	М	М	М	Ж	Ж	Ж	Ж	Ж	Ж		
Палата 4	7		3	3	3	Ж	Ж	М	М				19	19	19
	8	9	9	9					17	17	Ж	Ж	25	25	25
Палата 5	9			10	10	10	10	10	10	21	21	21	21	26	26
Палата 6	10	1	1	1	1		Ж	Ж	М	М	11	11	11		32

Таблица 8

	Кровати	Горизонт планирования													
		15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Палата 1	1	15	15		Ж			М	Ж	Ж				М	М
	2	18	18	18											
Палата 2	3	24													
	4	14			Ж			М	Ж	Ж				М	М
Палата 3	5	23			27	27	27	27	27	27					
	6	Ж	Ж	30	30	30	30			М	М	Ж	Ж	Ж	Ж
Палата 4	7				Ж			М	Ж	Ж				М	М
	8	Ж	Ж	Ж	Ж							М	М		
Палата 5	9	26	26	26	26	26	33	33	33	33	33				
Палата 6	10	32	32	32	Ж			М	Ж	Ж				М	М

Таблица 9

Изучив и проанализировав статистические данные по Ленинградской области, сделан важный вывод: сбор необходимой для предложенной модели информации в городе Санкт-Петербург не ведётся. Как итог, был взят максимум из той статистики, которая имеется.

В результате минимизации был получено предполагаемое решение равное 128000 у.е., при горизонте планирования равном 28 и стоимости госпитализации 2000 у.е. Из 35 пациентов были отклонены 11.

В среде Matlab для реализации программного модуля была использована функция `intlinprog`, разрешающая задачу линейного программирования со смешанными переменными. Для апробации модели использовались экспериментальные данные.

## Заключение

Больничные койки являются одним из самых дорогостоящих ресурсов в больницах. При этом вместимость больниц, как правило, определяется именно их количеством. Таким образом, благодаря сбору статистики, построению математических и вероятностных моделей распределения ресурсов, могут быть разработаны интеллектуальные системы управления количеством больничных коек, которые будут способствовать минимизации затрат на обслуживание пациентов.

Задачу управления ресурсами в больницах можно развить и в связи с этим получить возможность исследовать несколько других интересных проблем:

- Выбор среди альтернатив.

Больницы часто сталкиваются с проблемой выбора среди множества альтернатив. Например, как следует распределить кровати между подразделениями отдела педиатрии? Естественно спросить, какой из этих альтернативных распределений лучший. Такие проблемы попадают в сферу ранжирования и отбора, для которого существует обширная литература [30]. Открытой областью исследования является применение ранжирования и процедур отбора в контексте проблем больничного ухода.

- Прогноз сотрудников.

Учитывая весьма колеблющийся спрос в медицинском персонале, больницы составляют плавающие расписания для своих работников. Например, медсестры с фиксированным графиком, но с работой в разных отделениях, временные медсестры и сверхурочные. Составление таких расписаний должно совершаться задолго до того, как может произойти какой-либо внеплановый сдвиг. Таким образом, хорошая модель прогнозирования может помочь в создании более эффективных решений по распределению персонала. В связи с этим, исследовательская деятельность будет заключаться в определении точности прогнозов на основе предложенной вероятностной модели.

## Список литературы

- [1] Pierskalla WP, Brailer D (1994) Applications of operations research in health care delivery. In: Pollock S, Barnett A, Rothkopf M (eds) Beyond the profit motive: public sector Health Care Manage Sci (2006), 9, 391–404, 403 applications and methodology. Handbooks in OR&MS, vol 6. North-Holland, New York
- [2] Pierskalla WP, Wilson D (1989) Review of operations research improvements in patient care delivery systems. Working paper, University of Pennsylvania, Philadelphia.
- [3] Smith-Daniels VL, Schweikhart SB, Smith-Daniels DE (1988) Capacity management in health care services: review and future research directions. Decis Sci, 19, 899–918.
- [4] Pierskalla WP (2001) Health care delivery. Presented at the National Science Foundation Workshop on Engineering the Service Sector, Atlanta.
- [5] Sainfort F (2001) Where is OR/MS in the present crises in health care delivery. Presented at the Institute for Operations Research and the Management Sciences 2001 Annual Meeting, Miami.
- [6] American Hospital Association (2005) Hospital Statistics 2005 edn. Health Forum, Chicago.
- [7] Jan M.H. Vissers (1998). Patient flow-based allocation of inpatient resources: A case study. European Journal of Operational Research, 105, 356-370.
- [8] Elif Akcali & Murray J Cote´ & Chin Lin (2006). A network flow approach to optimizing hospital bed capacity decisions. Health Care Manage Sci, 9, 391–404.
- [9] Ahuja RK, Magnanti TL, Orlin JB (1993) Network flows: theory, algorithms, and applications. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- [10] Esogbue AO, Singh JA (1976). A stochastic model for an optimal bed distribution in a hospital ward. Operations Research, 24, 884-98.
- [11] Fetter RB, Thompson JD (1965). The simulation of hospital systems. Operations Research, 13, 689-711.

- [12] Kao EPC, Tung GC (1981). Bed allocation in a public health delivery system. *Management Science* 27, 507-20.
- [13] Lowery JC, Martin JB (1992). Design and validation of a critical care simulation model. *Journal of the Society for Health Systems*, 3, 15-36.
- [14] Hershey JC, Weiss EN, Cohen MA (1981). A stochastic service network model with application to hospital facilities. *Operations Research*, 29, 1-22.
- [15] Harris RA (1986). Hospital bed requirements planning. *European Journal of Operational Research*, 25, 121-6.
- [16] Dumas MB (1984). Simulation modeling for hospital bed planning. *Simulation*, 43, 69-78.
- [17] McFadden KL (1996). Hospital policy changes in obstetric patient movement. *International Journal of Operations and Production Management*, 16, 28-41.
- [18] Vassilacopoulos G (1985). A simulation model for bed allocation to hospital inpatient departments. *Simulation*, 45, 233-41.
- [19] Romanin-Jacur G, Facchin P (1987). Optimal planning for a pediatric semi-intensive care unit via simulation. *European Journal of Operational Research*, 29, 192-8.
- [20] Hancock WM, Martin JB, Storer RH (1978). Simulation-based occupancy recommendations for adult medical/surgical units using admissions scheduling systems. *Inquiry*, 15, 25-32.
- [21] Sophie D. Lapierre, David Goldsman, Roger Cochran, Janice DuBow (1999). Bed allocation techniques based on census data. *Socio-Economic Planning Sciences*, 33, 25-38.
- [22] Wajih Ezzeddine, Jeremie Schutz, and Nidhal Rezg (2015). Modeling of a Management and Maintenance Plan for Hospital Beds.
- [23] Wang, T. (2008) Organisation et pilotage des services sur le trajet des urgences. In: *Computer Science*. INSA de Lyon.
- [24] Bechar, S., Guinet, A. (2006) Planification des lits d'un etablissement

de soins. In: Proceedings of Conference GISEH, Luxembourg.

[25] Fuller W. A. Introduction to statistical time series. New York: Wiley, 1976.

[26] Law A. M. Kelton W. D. Simulation modeling and analysis. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1991

[27] Gross D., Harris C. M. Fundamentals of queueing theory. 2nd ed. ed. New York: Wiley, 1985.

[28] Makridakis S. G., Wheelwright S. C. Forecasting, methods and applications. 5th ed. ed. New York: Wiley, 1989

[29] Ben Bachouch,R., Guinet, A. Gestion des lits mutualises d`un etablissement hospitalier. In Proceedings of 7e Congres International de Genie Industriel, Trois-Rivieres, Quebec (2008)

[30] Bechhofer R.E., Santner T.J., Goldsman D. Design and analysis of experiments for statistical selection, screening, and multiple comparisons. New York: Wiley, 1995.

# Приложение

## Публикации

Каменская Е.А., Крылатов А.Ю. Оптимальное распределение больничных коек // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 647-651.

Каменская Е.А., Крылатов А.Ю. Моделирование логистических систем // Транспорт России: Проблемы и перспективы – 2016 материалы Международной научно-практической конференции. 2016. С. 348-351.

Каменская Е.А., Шихова К.А. Задача распределения акторов по геополитическим проектам на основе алгоритма Гейла – Шепли // Процессы управления и устойчивость. 2017.

## Программная реализация

```
% Data.
data = importdata('data.dat'); %данные по пациентам
data1 = importdata('data1.dat'); %данные по свободным койкам B[l,t]
%данные по кроватям в комнатах M[j,k,l]
room1 = importdata('room1.dat');
room2 = importdata('room2.dat');
room3 = importdata('room3.dat');
room4 = importdata('room4.dat');
room5 = importdata('room5.dat');
room6 = importdata('room6.dat');
%данные о комнатах (одномест или нет)
about_room = importdata('aboutroom.dat');
%свободна кровать, занята м ли ж
data2 = importdata('data2.dat');

%SP[l,t]
SP = data2;

%about room
R = about_room;

%bed j and k in one room M[j,k,l]
M1=room1;
M2=room2;
M3=room3;
M4=room4;
M5=room5;
M6=room6;

M = zeros(10,10,6);

%matrix M[j,k,l]
for j=1:10,
for i=1:10,
    M(i,j,1)= M1(i,j);
```

```

end;
end;

for j=1:10,
for i=1:10,
    M (i,j,2)= M2(i,j);
end;
end;

for j=1:10,
for i=1:10,
    M (i,j,3)= M3(i,j);
end;
end;

for j=1:10,
for i=1:10,
    M (i,j,4)= M4(i,j);
end;
end;

for j=1:10,
for i=1:10,
    M (i,j,5)= M5(i,j);
end;
end;

for j=1:10,
for i=1:10,
    M (i,j,6)= M6(i,j);
end;
end;

% Gender
S = data(:,4);

% Patients count.
N = size(data, 1);

% Beds count.
L = 10;

% Horizon.
T = 28;

% Earliest hospitalization dates D[i].
earliest_hosp_dates = data(:,2);

% Latest hospitalization date T[i].
latest_hosp_dates = data(:, 3);

%Length of stay LOS[i]
length_of_stay = data(:, 5);

%isolation I[i]
isolation = data(:, 1);
J = ones(N, 1);
X = zeros(N, L, T);

%B[l,t]
B = data1;

```

```

% Vector c.
J = ones(N, 1);
X = zeros(N, L, T);

for i = 1:N,
for l = 1:L,
for t = 1:T,
if t >= earliest_hosp_dates(i),
X(i, l, t) = 1;
end;
end;
end;
end;

c = [J; -X(:)]';

% Low bound.
jlb = earliest_hosp_dates';
xlb = zeros(length(X(:)), 1)';
lb = [jlb xlb]';

% Upper bound.
jub = latest_hosp_dates';
xub = ones(length(X(:)), 1)';
ub = [jub xub];

% Matrix A.

%(1)
X = zeros(N, L, T);
J = zeros(N, 1);

k = 1;
for i = 1:N,
for t = 1:T,
for l = 1:L,
X(i, l, t) = 1;
end;
A1(k, :) = [J; X(:)]';
k = k + 1;
X = zeros(N, L, T);
end;
end;

%(2)
X = zeros(N, L, T);
J = zeros(N, 1);

k = 1;
for l = 1:L,
for t = 1:T,
for i = 1:N,
X(i, l, t) = 1;
end;
A2(k, :) = [J; X(:)]';
k = k + 1;
X = zeros(N, L, T);
end;
end;

%(3)

```

```

X = zeros(N, L, T);
J = zeros(N, 1);

k = 1;
for i = 1:N,
for l = 1:L,
for t = 1:T,
    if t >= earliest_hosp_dates(i),
X(i, l, t) = B(l,t);
    end;
end;
end;
A3(k, :) = [J; X(:)]';
k = k + 1;
X = zeros(N, L, T);
end;

%(4)
X = zeros(N, L, T);
J = zeros(N, 1);

m = 100;
for i = 1:N,
for l = 1:L,
for t = 1:T,
J(i,1) = 1;
X(i, l, t) = m*(1 - t);
end;
end;
end;
A4 = [J; X(:)]';

%(5)
X = zeros(N, L, T);
J = zeros(N, 1);
k = 1;

for i = 1:N,
for l = 1:L,
for t = 1:T,
temp=0;
for p = 1:length(R),
X(i, l, t) = R(p)*M(l,l,p)+temp;
temp = X(i,l,t);
end;
end;
end;
A5(k, :) = [J; X(:)]';
end;
end;
k = k + 1;
X = zeros(N, L, T);
end;

%(6)
X = zeros(N, L, T);
J = zeros(N, 1);
k = 1;

for j = 1:L,
for t = 1:T,
for p = 1:length(R),
for l = 1:L,
for i = 1:N,
X(i, j, t) = R(p)*M(l,j,p)*S(i);

```

```

end;
A6(k, :) = [J; -X(:)]';
X = zeros(N, L, T);
end;
end;
k = k + 1;
end;
end;

% (7)
X = zeros(N, L, T);
J = zeros(N, 1);
k = 1;

for j = 1:L,
for t = 1:T,
for p = 1:length(R),
for l = 1:L,
for i = 1:N,
X(i, j, t) = R(p)*M(l,j,p)*S(i);
end;
A7(k, :) = [J; X(:)]';
X = zeros(N, L, T);
end;
end;
k = k + 1;
end;
end;

% (8)
X = zeros(N, L, T);
J = zeros(N, 1);

k = 1;
for i = 1:N,
for t = 1:T,
for l = 1:L,
J(i,1) = 1;
X(i, l, t) = 1;
end;
A8(k, :) = [-J; X(:)]';
X = zeros(N, L, T);
k = k + 1;
end;
end;

AA=[A1;A2];
A = [A1; A2; A3; A4; A5; A6; A7; A8];

% Vector b.
%b = ones(1, size(A, 1));
b1 = ones(1, size(AA, 1));
b2 = zeros(1, size(A3,1)-length(length_of_stay));
b3 = ones(1,size(A4,1)) * m;
b4= zeros(1, size(A5,1)-length(isolation));
b5 = ones(1,size(A6,1)-length(SP(:)));
b6 = ones(1,size(A7,1)-length(SP(:)));
b7 = ones(1,size(A8,1)-length(length_of_stay));
%b = vertcat(b1', length_of_stay, b2',b3');
%b = vertcat(b1', length_of_stay, b2',b3',isolation,b4',2-SP(:),b5');
b = vertcat(b1', length_of_stay, b2',b3',isolation,b4',2-
SP(:),b5',2+SP(:),b6',length_of_stay-1,b7');

```

```

% Constraint type.
ctype = blanks(length(b));
for i = 1:length(b),
    ctype(i) = 'U';
end;

% Variable type.
vartype = blanks(length(c));
for i = 1:length(c),
    vartype(i) = 'I';
end;

s = 1;
param.msglev = 1;
param.itlim = 100

intcon=2;
[x,fval] = intlinprog(c,intcon,A,b,[],[],lb,ub);

LOS=0;
for i=1:N,
    LOS = length_of_stay(i) + LOS;
end;

D =0;
for i=1:N,
    D = earliest_hosp_dates(i)+ D;
end;

H=2000;
f=H*(fval+LOS-D);

```