Санкт-Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика
Исследование операций и принятие решений в задачах оптимизации, управления и экономики

Сверлова Юлия Валериевна

Ситуации равновесия в задачах о назначениях

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
доцент, к. ф.-м. н., доцент Наумова Н. И.

Рецензент:
доцент, к. ф.-м. н., доцент Бухвалова В. В.

Санкт-Петербург
2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Applied Mathematics and Computer Science
Operation Research and Decision Making in Optimisation, Control and Economics Problems

Sverlova Julia

Equilibrium points in assignment problems

Bachelor's Thesis

Scientific supervisor:
Associate Professor, PhD Natalia I. Naumova

Reviewer:
Associate Professor, PhD Vera V. Bukhvalova

Saint-Petersburg
2017

Оглавление

Введение

В данной работе будут рассматриваться различные модели приема абитуриентов в вузы. Начиная с 2009 года, система приема абитуриентов в вузы в Российской Федерации изменилась: абитуриенты стали поступать в вузы по результатам ЕГЭ, при этом каждый абитуриент имеет право подать документы в несколько вузов, причем прием осуществляется в несколько волн: например, в 2011 поступление производилось в три волны, но с 2012 поступление в большинство вузов стало происходить в две волны. Однако до сих пор в ряде вузов существует приемные кампании в одну волну, например, поступление в магистратуру в СПбГУ [15].

Существуют и другие модели распределения абитуриентов по вузам. Например, в советские времена при обязательном распределении выпускников по организациям, подавшим свои заявки, использовался следующий алгоритм [3]: все выпускники ранжировались по среднему баллу зачетной книжки и, в порядке убывания среднего балла, выбирали по очереди наиболее предпочтительную организацию среди тех, в которых еще остались свободные места (считалось, что каждый выпускник имеет свое линейное упорядочение на множестве всех организаций). В действительности, этот алгоритм являлся модернизированным алгоритмом Гейла-Шепли в задаче о назначении [9], который можно применять для задачи распределения абитуриентов по вузам.

В 1962 году Дэвид Гейл и Ллойд Шепли предложили алгоритм распределения мужчин и женщин на брачные пары [10]. Этот алгоритм всегда давал устойчивое распределение в том смысле, что не находилось никакой пары, которая, разорвав свои союзы, образовывала бы новую пару, в которой оба партнера были более счастливыми. Алгоритм нахождения устойчивых паросочетаний, помимо задачи распределения выпускников по организациям, применяется в задаче выбора соседей по комнате, распределении донорских органов по реципиентам и в других задачах. В дальнейшем за решение таких задач о назначениях Ллойд Шепли и Элвин Рот получили Нобелевскую премию по экономике 2012 года [1, 6].

Модернизированный алгоритм Гейла-Шепли можно также применять для случая, когда выпускники соответствуют абитуриентам, а организации — вузам [12, 13]. Поскольку истинное качество абитуриентов неизвестно, то вуз имеет предпочтение только в соответствии с формируемым вузом рейтингом, который получается благодаря результатам ЕГЭ и вступительным экзаменам, если они есть. Таким образом, вуз заинтересован в абитуриентах, находящихся как можно выше в рейтинге. При выполнении алгоритма Гейла-Шепли образуются **устойчивые пары** [10]: если поступивший в некоторый вуз абитуриент мечтал о другом вузе больше, чем о том, в который поступил, то другой вуз предпочтет абитуриента, находящегося выше в рейтинге, и наоборот, если среди непоступивших в некоторый вуз есть абитуриенты, находящиеся выше в общем рейтинге, чем последний поступивший в этот вуз, то они предпочитают другой вуз, а этого вуза нет списке приемлемых для рассматриваемых абитуриентов. Кроме того, эта процедура устойчива относительно манипулирования (никто не получает выгоды от искажения своих истинных предпочтений [2, 11]). К сожалению, в России данная процедура поступления не используется ввиду ее сложности и недостатка матобеспечения.

Для остальных описанных правил возможны варианты неустойчивости результатов приема [2, 11, 7, 8]: могут быть ситуации, когда место в более приоритетном для некоторого абитуриента вузе может быть занято другим абитуриентом, находящимся в рейтинге ниже, то есть не будет соблюдаться условие истинной устойчивости, но эти правила приема абитуриентов в вузы применяются в Российской Федерации, а алгоритм Гейла-Шепли — нет.

Цель работы состоит в исследовании различных правил распределения абитуриентов по вузам, а также в разработке квазиоптимальных стратегий поведения абитуриентов. В данной работе эталонным считается распределение по модернизированному алгоритму Гейла-Шепли, и сравнение результатов работы других алгоритмов будет производиться с ним.

Предлагается оценивать результаты рассматриваемых алгоритмов по количеству неустойчивых пар вида университет-абитуриент (то есть сравнение с результатами алгоритма Гейла-Шепли путем пересчета отличающихся пар), а также по номеру последних поступивших абитуриентов в каждый вуз или по среднеарифметическому количеству заполненных мест в каждом вузе (в зависимости от начальных данных модели). Для сравнения производится имитационное моделирование всех этих алгоритмов, начиная с построения предпочтений абитуриентов на множестве вузов, затем происходит применение каждого алгоритма к текущему построению, в конце — сравнение с алгоритмом Гейла-Шепли и получение статистических данных для различных начальных условий модели.

1. Описание системы ЕГЭ

1.1. Постановка задачи

В задаче распределения абитуриентов по вузам требуется найти устойчивые соответствия между элементами из множеств вузов и абитуриентов, при этом абитуриенты имеют свои предпочтения на множестве вузов, а для каждого вуза предпочтительны абитуриенты с более высоким местом в рейтинге этого вуза. Формально данная задача не является обобщением игры в нормальной форме, так как в играх в нормальной форме известны целевые функции всех игроков (или хотя бы их предпочтения) [5]. Единственным из рассматриваемых алгоритмов, который дает устойчивое распределение, является алгоритм Гейла-Шепли. Однако, устойчивые распределения, предложенные Гейлом и Шепли, являются обобщением ситуации равновесия.

Цель абитуриента — поступить в вуз, по возможности в тот, который находится у него как можно выше в рейтинге предпочтений. Желаемый результат приемной комиссии для вуза — минимизировать максимальный номер из поступивших абитуриентов. Однако, у каждой приемной комиссии вуза есть единственная стратегия — действовать по строгим законам приема абитуриентов в вузы в РФ [4].

В работе были промоделированы все описанные и разработанные алгоритмы, после чего были сделаны о выводы о том, какие из них демонстрируют лучшие результаты.

1.2. Текущие правила поступления по ЕГЭ

1. Каждый абитуриент имеет право подать документы в не более чем в 5 вузов на 3 направления, причем только в один из вузов абитуриент может принести оригинал аттестата.

2. Существуют строго регламентированные сроки начала и конца приема документов в вузы. После окончания приема документов множество вузов у абитуриента не может меняться. Также суще-

ствуют крайние сроки приема оригинала аттестата в первую и во вторую волну.

3. При формировании рейтинга некоторые вузы, помимо баллов ЕГЭ, могут учитывать результаты собственных вступительных экзаменов.

4. Особое право при поступлении предоставляется победителям и призерам олимпиад, находящихся в утвержденном перечне Минобрнауки РФ. Особым правом является поступление без экзаменов или 100 баллов по данному предмету. Условием предоставления особого права является набор по этому предмету не менее 75 баллов по ЕГЭ.

5. Все абитуриенты, имеющие особые права при поступлении, должны принести оригиналы документов одновременно с подачей заявления в вуз.

6. После окончания приема документов каждый вуз формирует свой рейтинг абитуриентов на каждом направлении, затем по результатам этого рейтинга абитуриенты могут подать оригинал аттестата.

7. Конкурсные списки абитуриентов будут ранжированы следующим образом:

   (a) Лица, имеющие особые права при зачислении (победители олимпиад, дающих поступление в вуз без конкурса, и поступающие в пределах целевой квоты);

   (b) Лица, поступающие по общему конкурсу. Списки абитуриентов, поступающих по общему конкурсу, ранжируются по сумме баллов, набранных по результатам сдачи ЕГЭ и вступительных экзаменов, и баллов, набранных за индивидуальные достижения.

8. Затем поступление происходит следующим образом:

(a) Зачисление лиц, поступающих без вступительных испытаний; на места в пределах особой или целевой квоты, зачисление происходит до первой и второй волны;

(b) Зачисление лиц, поступающих по общему конкурсу. Зачисление происходит среди тех абитуриентов, которые принесли оригиналы аттестата до конца первой волны. Будем считать, что при подаче документов абитуриенты подают только копии, потому что при переносе оригинала аттестата с одного направления на другое, абитуриент исключается из конкурса на данное направление. В первую волну общего конкурса заполняется до 80% свободных мест с учетом округления вниз, при этом, если эта квота не была заполнена, то оставшиеся места переносят на следующую волну;

(c) После завершения первой волны обнародуются списки поступивших в первую волну. Таким образом, формируется рейтинг абитуриентов для поступления во вторую волну. Абитуриенты имеют право либо оставить оригинал аттестата на том же направлении, либо перенести его на другое направление или в другой вуз до окончания второй волны;

(d) Во вторую волну общего конкурса происходит заполнение оставшихся мест мест до 100% среди тех,кто не поступил в первую волну, причем либо у кого-то остался оригинал аттестата в данном вузе после первой волны, либо они его принесли с другого вуза.

1.3. Реальные проявления несовершенств системы поступления на примере приемной кампании в СПбГУ

Рассмотрим результаты приемной кампании в СПбГУ по направлению **Механика и математическое моделирование** в 2013-2015 годах [14]:

Год приемной кампании	Средний балл поступивших абитуриентов	Балл последнего поступившего абитуриента	Разность
2013	238,1	226	14,1
2014	237,2	201	36,2
2015	239,2	233	6,2

Из таблицы видно, что в 2014 году разность между средним баллом поступивших абитуриентов и баллом последнего поступившего абитуриента была больше 36 баллов. Данная разность является слишком большой (из эмпирических наблюдений результатов приемной кампании в СПбГУ было выяснено, что на большинстве направлений разность составляет 10-15 баллов). Чем больше разность, тем больше абитуриентов, у которых это направление было приоритетным, но они не стали рисковать и гарантированно поступили в другой вуз (направление). Таким образом, последний поступивший абитуриент попал в вуз с большой долей везения, потому что рискнул, а абитуриенты, получившие большее количество баллов — нет. Данная пара является неустойчивой (мы можем это предполагать из-за большой разности, потому что наверняка были абитуриенты, у которых было большее количество баллов и они хотели поступить в первую очередь в этот вуз на это направление, но не стали рисковать), потому что для вуза лучше абитуриенты, которые находятся выше в рейтинге, а те абитуриенты, которые были в выше в рейтинге и не рискнули, не удовлетворены результатами приемной кампании, потому что могли поступить в вуз, который находится выше в рейтинге их предпочтений.

Для вуза данный результат является плохим по нескольким причинам:

1. Для вуза лучше, чтобы качество абитуриентов было выше, а абитуриент с низким баллом понижает средний балл всех поступивших абитуриентов, соответственно, понижает престижность данного направления у вуза;

2. Если большая разность в баллах между последним и средним баллом, то это говорит о сильном различии в уровне подготовки абитуриентов, что будет усложнять учебный процесс и преподавателям будет сложнее проводить обучение.

Рассмотрим результаты приемной кампании в СПбГУ по направлению **Математическое обеспечение и администрирование информационных систем** в 2013-2015 годах:

Год приемной кампании	Средний балл поступивших абитуриентов	Балл последнего поступившего абитуриента	Разность
2013	277,4	247	30,4
2014	262,5	239	23,5
2015	266,6	255	11,6

На данном направлении также можно заметить, что в 2013-2014 годах разность между средним баллом и баллом последнего поступившего была довольно большой, что говорит о появлении неустойчивых пар. Однако интересно заметить, что в 2013-2015 годах балл последнего поступившего абитуриента на математическое обеспечение и администрирование информационных систем был выше, чем средний балл абитуриентов, поступивших на механику и математическое моделирование. Из этого можно сделать вывод, что внутри одного вуза и даже одного факультета, направления могут сильно отличаться по популярности (престижности), и если для какого-то направления некоторый абитуриент будет «сильным», то это не означает, что для другого направления он будет таковым.

Также было замечено, что с каждым годом на всех направлениях в СПбГУ разность между средним баллом и баллом последнего абитуриента стала уменьшаться и уже в 2016 году разность на редком направлении была больше 10 баллов.

Приемная кампания 2016 года

Название направления	Разность
Прикладная математика и информатика	4,8
Механика и математическое моделирование	9,6
Математическое обеспечение и администрирование информационных систем	7,6
Фундаментальная механика	8,3
Математика	12,6

Разность уменьшилась не только на математико-механическом факультете факультете, но и на других факультетах в СПбГУ (чем меньше разность, тем более удачными можно считать результаты приемной кампании). Возможные причины, почему так могло произойти:

1. Изменение принципов процентного соотношения распределения квот в первую и вторую волну в 2015-2016 годах (текущие правила поступления) по сравнению с 2014 годом и ранее. В предыдущих правилах после опубликования рейтинга абитуриентов в вузе на некотором направлении рекомендовались к поступлению к первую волну только первые q абитуриентов, где q — квота на данном направлении. Любой абитуриент, находящийся среди первых q мест мог поступить, однако не все относили документы в этот вуз, кто-то предпочитал другой, в который также был рекомендован. Таким образом, в первую волну обычно зачислялось не более $20-25\%$ абитуриентов, остальные абитуриенты, которые не были в числе первых q мест, исключались из конкурса и не могли претендовать на места во второй волне. Следовательно, во

вторую волну распределялась большая часть мест и абитуриентам приходилось больше рисковать, чем при текущих правилах поступления;

2. Улучшение системы оповещения абитуриентов при появлении гарантированного места для поступления;

3. Накопление абитуриентами опыта на основе предыдущих приемных кампаний и выбор более оптимальной стратегии поведения при выборе вузов и направлений.

Из таблиц, описанных выше, видно, что результаты приемных кампаний стали лучше, однако поступление по ЕГЭ неустойчиво к манипулированию, то есть некоторым абитуриентам, не имеющим высоких результатов по ЕГЭ, выгоднее искажать свои истинные предпочтения, чтобы поступить куда-нибудь.

Причина, по которой поступают абитуриенты с существенно меньшими баллами, чем средний балл на направлении, очень проста. В среднем абитуриенты боятся рисковать, особенно если они имеют неплохие баллы и могут гарантированно поступить в другой хороший вуз. Большинство абитуриентов предпочтет точно поступить, чем рискнуть и не поступить.

Однако абитуриенты совсем сводят к минимуму степень риска, когда не принимают во внимание тот факт, что каждый абитуриент может подать документы в 5 вузов на 3 направления, то есть в сумме на 15 направлений. Конечно, большинство абитуриентов не использует всех возможностей приемной кампании, но мало кто подает документы только в один вуз на одно направление. Соответственно, если абитуриент с высоким баллом подаст в максимально возможное количество мест, то поступит он только в один вуз на одно направление, а 14 других направлений у него останутся невостребованными, хотя абитуриенты этих 14 направлений будут принимать его во внимание. Таким образом, часто абитуриенты переоценивают степень риска и не учитывают тот факт, что большая часть заявлений являются невостребованными.

2. Алгоритмы

2.1. Трактовка текущих правил поступления по ЕГЭ для сравнения работы различных алгоритмов поступления в вузы

Будем рассматривать только поступление абитуриентов по общему конкурсу, то есть уберем из рассмотрения лица, поступающие по олимпиаде или на целевые места. Будем считать, что поступающих по олимпиаде настолько мало, что их количеством можно пренебречь.

В данной работе мы будем рассматривать упрощенную задачу: абитуриенты хотят поступить на одно конкретное направление, которое есть в нескольких вузах. Считается, что абитуриенты уверены в своем решении и после того, как приносят оригинал в вуз, не меняют свое решение в течение одной волны, а также не меняют своих предпочтений в течение всей приемной кампании. Будем считать, что возможны случаи, когда абитуриент не подает документы во все 5 вузов, а подает лишь в некоторые из 5. После окончания приема документов каждый вуз публикует рейтинг абитуриентов, после этого мы можем получить общий рейтинг абитуриентов всех рассматриваемых вузов.

2.1.1. Алгоритм распределения абитуриентов по вузам по текущим правилам поступления с помощью математического ожидания в одну волну

Рассмотрим следующий эвристический метод. Постановка задачи: $M = \{1, \ldots, w\}$ — множество абитуриентов и $N = \{1, \ldots, v\}$ — множество вузов. У каждого вуза $j \in N$ есть целое положительное число q_j, которое означает количество свободных мест для поступления в данный год в вуз j по общему конкурсу.

Рейтинги вузов с расположением абитуриентов в них являются открытой информацией, соответственно, любой абитуриент может посмотреть не только свое место в них, но и информацию о других абитуриентах, например, a_i — количество вузов, в которые подал документы абитуриент i, где $i \in \{1, \dots, w\}$. Однако абитуриенты не владеют информацией о предпочтениях других абитуриентов, только о своих.

В том случае, когда абитуриент уверен, что его место в рейтинге гарантирует поступление в его первый по приоритету вуз, он подает оригинал аттестата в этот вуз. Остается попытаться промоделировать поведение абитуриентов, которым не гарантированно поступление в желаемый им вуз. Если место в рейтинге вуза близко к необходимому для зачисления, то существует достаточно большая вероятность того, что некоторые из абитуриентов, которые будут наверняка зачислены, предпочтут другой вуз, и данный абитуриент, рискнув, будет зачислен в желаемое место.

Поведение абитуриентов непредсказуемо с точки зрения их склонности к риску, характеризующейся величиной $k_j(q_j)$, варианты которой будут описаны ниже в разделе 2.1.4. Ввиду неизвестности истинных предпочтений абитуриентов, предложим вариант вероятностной стратегии абитуриента:

1. Генерируем общий рейтинг абитуриентов.

2. Формируем рейтинг абитуриентов в каждом вузе.

3. Начинаем идти сверху по общему рейтингу всех абитуриентов. Для каждого абитуриента сначала берем первый вуз в его рейтинге. Пусть ℓ_j — место абитуриента в рейтинге вуза j .

   Если $\ell_j \leq q_j$, то абитуриент подает оригинал аттестата в вуз j .

4. Если $\ell_j > q_j$ и $k_j(q_j)$ — зависит от склонности абитуриента к риску, а также популярности или престижности вуза j, то:

   (a) Если выполняется $\ell_j \leq q_j + \lfloor k_j(q_j) \rfloor$, то абитуриент подает документы в текущий вуз. Естественно предполагать, что $k_j(q_j) = \lambda_j \cdot q_j$, где λ_j — некоторый параметр. Варианты выбора этого параметра будут описаны ниже в разделе 2.1.4 .

   (b) Если выполняется $\ell_j > q_j + \lfloor k_j(q_j) \rfloor$, то абитуриент переходит к следующему вузу в своем рейтинге.

5. Если у абитуриента закончились все вузы в своем рейтинге предпочтений, то абитуриент подает документы не по правилу математического ожидания, а по следующему алгоритму:

   (a) Для абитуриентов, которые не подали документы по правилу математического ожидания, высчитываются некоторые числа для всех вузов, в которые абитуриент подал документы: $\frac{\ell_j - q_j}{q_j}$, где ℓ_j — место абитуриента в рейтинге n_j вуза, q_j — квота n_j вуза.

   (b) Абитуриент подает оригинал аттестата в вуз, на номере которого достигается
$$\min_{j \in 1 \ldots t} \frac{\ell_j - q_j}{q_j},$$
где $j \in 1 \ldots t$ — номера вузов, которые находятся рейтинге абитуриента.

   (c) После выполнения данного алгоритма каждый абитуриент подаст документы в какой-нибудь из вузов, чтобы увеличить свои шансы на поступление.

6. После того, как все подали оригиналы аттестата до указанного срока, в фиксированный день обнародуются списки поступивших абитуриентов в каждом вузе, отранжированные по порядку.

Данный алгоритм позволяет сгенерировать различные модели поведения абитуриента. Например, при $k_j(q_j) \longrightarrow 0$ мы можем промоделировать ситуацию, когда абитуриент не желает рисковать и подает документы максимально осторожно, только в том случае, если уверен, что поступит. Если же абитуриент не подает по правилу математического ожидания при некоторой стратегии поведения и заданных параметрах, то выбирает не самый предпочтительный, а тот вуз, в который наибольшее количество шансов поступить (вторая часть алгоритма).

Аналогично, можем посмотреть более рискованную стратегию абитуриента, где чем больше $k_j(q_j)$, тем более рискованно ведет себя абитуриент.

2.1.2. Алгоритм поступления в две волны по правилу математического ожидания

Постановка задачи остается та же: $M = \{1, \ldots, w\}$ — множество абитуриентов и $N = \{1, \ldots, v\}$ — множество вузов. У каждого вуза $j \in N$ есть целое положительное число q_j, которое означает количество свободных мест для поступления в данный год в вуз j по общему конкурсу. В первую волну проходит $\lfloor \alpha \cdot q_j \rfloor$, где $\alpha = 0,8$. Во вторую волну проходят $\lceil (1-\alpha) \cdot q_j \rceil$ абитуриентов.

В том случае, когда абитуриент уверен, что его место в рейтинге гарантирует поступление в первый по приоритету вуз в течение двух волн, он подает подлинник аттестата в первую волну и оставляет его там. Остается попытаться промоделировать поведение абитуриентов, которым не гарантированно поступление в желаемый им вуз.

1. Генерируем общий рейтинг абитуриентов.

2. Формируем рейтинг абитуриентов в каждом вузе.

3. Начинаем идти сверху по общему рейтингу всех абитуриентов. Для каждого абитуриента сначала берем первый вуз в его рейтинге. Пусть ℓ_j — место абитуриента в рейтинге вуза j.

   Если $\ell_j \leq q_j$, то абитуриент подает оригинал аттестата в вуз j.

4. Если $\ell_j > q_j$, то:

   (a) Если выполняется $\ell_j \leq \lfloor q_j \cdot \alpha \rfloor + \lfloor k_j(q_j) \rfloor$, то абитуриент подает документы в текущий вуз. Естественно предполагать, что $k_j(q_j) = \lambda_j \cdot q_j \cdot \alpha$, где λ_j — некоторый параметр, α — заполняемая квота в волну.

   (b) Если выполняется $\ell_j > \lfloor q_j \cdot \alpha \rfloor + \lfloor k_j(q_j) \rfloor$, то абитуриент переходит к следующему вузу в своем рейтинге.

5. Если у абитуриента закончились все вузы в своем рейтинге предпочтений, то абитуриент подает документы не по правилу математического ожидания, а по следующему алгоритму:

(a) Для абитуриентов, которые не подали документы по правилу математического ожидания, высчитываются некоторые числа для всех вузов, в которые абитуриент подал документы: $\dfrac{\ell_j - \lfloor q_j \cdot \alpha \rfloor}{\lfloor q_j \cdot \alpha \rfloor}$, где ℓ_j — место абитуриента в рейтинге вуза j, q_j — квота вуза j.

(b) Абитуриент подает оригинал аттестата в вуз, на номере которого достигается

$$\min_{j \in 1 \dots t} \frac{\ell_j - \lfloor q_j \cdot \alpha \rfloor}{\lfloor q_j \cdot \alpha \rfloor},$$

где $j \in 1 \dots t$ — номера вузов, которые находятся в рейтинге абитуриента.

(c) После выполнения данного алгоритма каждый абитуриент подаст документы в какой-нибудь из вузов, чтобы увеличить свои шансы на поступление.

6. После того, как все подали оригиналы аттестата до указанного срока, в каждый из вузов поступает первые $\lfloor \alpha \cdot q_j \rfloor$ абитуриентов среди тех, кто принес оригинал в вуз j.

7. Если в вузе j абитуриенты не заняли всю квоту $\lfloor q_j \cdot \alpha \rfloor$, рассчитанную на одну волну, то незаполненные места переходят на следующую волну.

8. Всех поступивших мы убираем из общего рейтинга абитуриентов, с оставшимися происходит вторая волна, которая аналогична первой, кроме того, что оставшаяся квота в каждый вуз будет $\lceil (1-\alpha) \cdot q_j \rceil$ (а также незаполненная квота с первой волны, если она есть).

9. После прохождения второй волны формируются окончательные списки поступивших в каждый вуз.

2.1.3. Алгоритм поступления в три волны по правилу математического ожидания

Алгоритм аналогичен поступлению в две и три волны, за исключением того, что у нас есть некоторые числа, которые показывают количество мест для поступления в каждую из трех волн соответственно, $\alpha, \beta, \gamma : \alpha + \beta + \gamma = 1$, и в первую волну зачисляется $\lfloor \alpha \cdot q_j \rfloor$, во вторую волну — $\lfloor \beta \cdot q_j \rfloor$, а также места, которые не заполнили абитуриенты во время первой волны, если они есть, в третью — $(q_j - \lfloor \alpha \cdot q_j \rfloor - \lfloor \beta \cdot q_j \rfloor)$, а также места, которые не заполнили абитуриенты во время второй волны, если они есть. В нашем случае пусть будет $\alpha = 0.5, \beta = 0.3, \gamma = 0.2$.

2.1.4. Принцип выбора $k_j(q_j)$

Напомним, что $k_j(q_j)$ — величина, характеризующая степень склонности абитуриентов к риску в некотором вузе j. Очевидно, что чем популярнее и престижнее вуз, тем выше он будет находиться в рейтинге абитуриентов, соответственно, отказов в пользу другого вуза будет меньше. И наоборот, чем более непопулярный вуз, тем больше невостребованных мест будет этом вузе будет. Абитуриенты не знают предпочтений других абитуриентов, только свои, поэтому могут ориентироваться на престижность и популярность только на словах или результатах предыдущих приемных кампаний.

Можно было бы предположить, что чем больше абитуриентов подало документы в данный вуз, тем более он популярный, однако в текущих реалиях приемной кампании в России данная гипотеза не работает. Сейчас абитуриенты имеют право подавать документы в 5 вузов на 3 направления, то есть максимально на 15 различных направлений. Именно поэтому многие из абитуриентов, набравшие довольное большое количество баллов, перестраховываются и подают документы в не самые престижные вузы, тем самым увеличивая ажиотаж (конкурс на место) в этом вузе. Таким образом, может создаться ситуация, когда в престижный вуз на некоторое направление подали документы меньшее количество абитуриентов, чем в некоторый непопулярный вуз, где большая часть заявлений — «мертвые».

$k_j(q_j)$ зависит от следующих факторов:

1. престижность;

2. квота в вузе j;

3. суммарная квота во всех вузах;

4. в какое количество вузов абитуриенты в среднем подали документы (каждый абитуриент может подать документы от 1 до 5 вузов в упрощенной постановке задачи, однако поступить может только в один, соответственно, мы можем оценить количество невостребованных заявлений в вузы);

5. число абитуриентов;

6. число абитуриентов, поступающих в вуз j;

Престижность вуза можно оценить, ориентируясь на следующие объективные показатели: конкурс на место и процент абитуриентов, поступивших в этот вуз из числа абитуриентов, находящихся высоко в рейтинге. В силу того, что вузы не хранят весь ход приемной кампании в открытом доступе, а только урезанную статистику, такую как списки поступивших и их баллы, то объективно оценить престижность нельзя, поэтому будем считать, что в модели распределения абитуриентов по вузам по текущим правилам поступления с помощью математического ожидания все вузы одинаковы по престижности, то есть $\lambda_j = \lambda_i, \forall i, j \in \{1 \ldots v\}$, где v — число вузов.

Результаты при различных параметрах λ_j будут сравниваться по количеству неустойчивых пар и среднеарифметическому для всех вузов номеру последнего поступившего абитуриента. Даже без учета популярности точно оценить $k_j(q_j)$ нельзя, поэтому было выдвинуто несколько гипотез относительно выбора параметра λ_j, которые были проверены для различных исследований.

Рассмотрим следующие вероятностные модели нахождения величины $k_j(q_j)$:

1. Пусть $k_j(q_j)$ — математическое ожидание количества невостребованных мест в вузе j среди абитуриентов, участвующих в данной волне. Если все вузы имеют одинаковые квоты и предполагается, что популярность вузов одинаковая, то предположим вероятность отказа для всех вузов равной $\lambda_j = \frac{v-1}{v}$, где v — количество вузов. Если квоты у вузов разные, то из условия одинаковой популярности вузов следует, что

$$\lambda_j = \frac{\sum\limits_{i:i\neq j}^{v} q_i}{\sum\limits_{i}^{v} q_i}.$$

2. Следующая модель учитывает вероятность нежелания абитуриентов поступать в вуз j. Пусть $S = \dfrac{1}{w} \cdot \sum\limits_{i=1}^{w} a_i$, где a_i — количество вузов, в которые i абитуриент подает документы, w — количество абитуриентов, то есть S — это среднее количество вузов, в которые абитуриенты подают документы, тогда $\dfrac{1}{S}$ — вероятность того, что вуз j является первым по приоритету. Если ℓ_j — номер абитуриента в рейтинге вуза j, то математическое ожидание числа абитуриентов среди первых ℓ_j, желающих поступить в вуз j, равно $\dfrac{\ell_j}{S}$. Если считать, что выполняется $\dfrac{\ell_j}{S} \leq q_j$, то абитуриент, находящийся на ℓ_j-ом месте проходит в вуз j. То есть выполняется

$$\ell_j \leq S \cdot q_j = q_j + (S-1) \cdot q_j.$$

Следовательно, исходя из раздела 2.1.1, в данном случае $\lambda_j = S-1$.

3. В силу того, что мы не знаем склонности абитуриентов к риску, попробуем рассмотреть некоторые параметры λ_j, с помощью которых попробуем оценить, какая степень риска является более выигрышной стратегией поведения абитуриента. Сравним с результаты с параметрами $\lambda_j = \frac{S-1}{2}$ и $\lambda_j = \frac{S}{2}$, а затем сделаем вывод о том, как следует себя вести абитуриенту во время приемной кампании при различных вариантах ее развития.

2.2. Другие алгоритмы поступления абитуриентов в вузы

2.2.1. Алгоритм Гейла-Шепли

Оригинальный алгоритм Алгоритм Гейла-Шепли решает задачу о разбиении множества мужчин и множества женщин на устойчивые пары. Девид Гейл и Ллойд Шепли ввели понятие устойчивости и предложили алгоритм, решающий данную задачу, в 1962 году [10].

Постановка задачи для оригинального алгоритма Гейла-Шепли

Рассмотрим два конечных непересекающихся множества индивидов: $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ – мужчины и $W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ – женщины. Каждый мужчина имеет свои предпочтения среди женщин, и каждая женщина имеет свои предпочтения среди мужчин. Эти предпочтения линейны. Дополнительно к этому мужчина m может предпочесть остаться одиноким, чем сочетаться браком с некоторой женщиной w.

Суть задачи сводится к разбиению $M \cup W$ на коалиции, состоящие из одного или двух человек. При этом, в каждую пару берется по одному элементу из M и из W. В результате мы должны получить не просто разбиение, а устойчивое разбиение.

Устойчивость в данном случае означает, что никто не образует пары с неприемлемыми кандидатами, и не существует пары вне паросочетания, в котором участник более счастлив, чем в рассматриваемом паросочетании.

Оригинальный алгоритм Гейла-Шепли

1. Если некоторые предпочтения не строгие, то произвольным образом разбиваем связки (если, например, $w_i \sim_m w_j$, упорядочим w_i и w_j в предпочтении m лексикографически; но можно и в случайном порядке). Таким образом, нелинейные предпочтения превратим в линейные.

2. (a) Каждый мужчина делает предложение первому номеру в своем списке (если у него есть приемлемые кандидатуры).

   (b) Каждая женщина отвергает сразу всех неприемлемых кандидатов, и, если она получила хотя бы одно приемлемое предложения, говорит «может быть» наиболее предпочтительному, а остальных отвергает.

3. Мужчины, получившие отказ, обращаются к следующей женщине из своего списка предпочтений, мужчины, получившие ответ «может быть», ничего не делают.

4. Если женщине пришло самое лучшее предложение, то она прежнему претенденту (которому ранее сказала «может быть») говорит «нет», а новому претенденту говорит «да» и далее предложения не принимает.

5. Шаги повторяются, пока у всех мужчин не исчерпается список предложений, в этот момент женщины отвечают «да» на те предложения «может быть», которые у них есть в настоящий момент.

Процесс заведомо конечен, так как ни один мужчина не делает предложения дважды одной и той же женщине, количество шагов алгоритма не должно превышать $n \cdot m$, где $n = |M|$, $m = |W|$.

Модернизированный алгоритм алгоритм Гейла-Шепли для распределения абитуриентов по вузам

Алгоритм Гейла-Шепли для устойчивого распределения абитуриентов по вузам выглядит следующим образом [9]:

1. Начиная с первого абитуриента в общем рейтинге и по возрастанию номеров в нем, i-й абитуриент узнает, остались ли незанятые абитуриентами с лучшим рейтингом места в первом вузе в списке своих предпочтений:

   (a) Если остались, то он зачисляется в этот вуз, количество свободных мест в вузе уменьшается на 1.

(b) Если не осталось свободных мест, то абитуриент узнает, остались ли свободные места в следующем по своим предпочтениям вузе и так далее.

2. Алгоритм продолжается, пока, либо не закончатся свободные места во всех вузах, либо не попробует поступить последний абитуриент в общем рейтинге.

2.2.2. Алгоритм поступления в одну волну с одним приоритетом

Данный алгоритм отличается от алгоритма поступления в одну волну по правилу матожидания, так как в нем каждый абитуриент учитывает только свое первое предпочтение и подает оригинал сразу, без учета того, как высоко или низко абитуриент окажется в рейтинге приоритетного вуза.

Алгоритм демонстрирует рискованное поведение абитуриентов, ведь в этом случае абитуриенты действуют по принципу «все или ничего», то есть, если они не поступают в самый желанный вуз, то предпочитают нигде не учиться, чем учиться в другом неприемлемом вузе.

3. Исследование результатов

Описание модели

Моделирование предпочтений абитуриентов происходит следующим образом:

1. Сначала для каждого абитуриента случайным образом генерируется число d от 1 до 5, которое означает количество приемлемых для абитуриента вузов, то есть то количество вузов, в которое он подает документы;

2. Затем для абитуриента с числом d определяем, какой из вузов будет идти с каким приоритетом: случайно выбираем число от 1 до 5, чтобы определить первый приоритет у абитуриента, переходим ко второму приоритету, если он есть, генерируем число от 1 до 5, кроме того, что уже стоит в первом приоритете и так далее, до тех пор, пока не дойдем до d;

3. После выполнения данных действий получили таблицу предпочтений всех абитуриентов, после чего можем применять все описанные в разделе 2 алгоритмы.

3.1. Результаты при одинаковых квотах у вузов

3.1.1. Абитуриентов в два раза больше, чем суммарная квота во всех вузах

Рассмотрим результаты алгоритмов при следующих начальных данных:

Количество абитуриентов: $w = 1000$

Номер вуза	1	2	3	4	5
Квота	100	100	100	100	100

Проведем $n = 10$ испытаний со случайными данными при фиксированных квотах и количестве абитуриентов, чтобы промоделировать работу различных алгоритмов. Для сравнения будем использовать такие показатели, как среднеарифметическое (по n испытаниям) количество неустойчивых пар и среднеарифметический номер (по n испытаниям) последнего поступившего абитуриента (сначала берем среднеарифметический номер последнего поступившего абитуриента у пяти вузов, затем берем среднеарифметическое по данному показателю при десяти испытаниях). Ввиду того, что вузы одинаковы по популярности, а абитуриентов существенно больше, чем суммарная квота, то квота в каждом вузе заполнится целиком, и в данном случае мы не будем рассматривать такой показатель, как процент заполненных мест в вузе.

Среднеарифметический номер последнего поступившего абитуриента по алгоритму Гейла-Шепли $= 480{,}6$

Среднеарифметический номер последнего поступившего абитуриента по алгоритму в одну волну с одним приоритетом $= 600{,}4$

Среднеарифметический номер последнего поступившего абитуриента при различных λ и разном количестве волн в алгоритме поступления по правилу математического ожидания :

λ	Одна волна	Две волны	Три волны
$\lambda = \frac{v-1}{v}$	783,6	684,3	621,7
$\lambda = S - 1$	543,2	500,3	498,8
$\lambda = \frac{S-1}{2}$	627,3	575,2	530,6
$\lambda = \frac{S}{2}$	579,3	533,2	510,2

Из результатов видно, что лучшие результаты при $\lambda = S - 1$, потому что чем меньше номер последнего поступившего абитуриента, тем лучше данный результат для вуза. Также можно заметить, что во всех алгоритмах результаты оказались лучше, когда проводится большее количество волн.

Процент неустойчивых пар при различных λ и разном количестве волн в алгоритме поступления по правилу математического ожидания:

λ	Одна волна	Две волны	Три волны
$\lambda = \frac{v-1}{v}$	28,6%	25,9%	24,8%
$\lambda = S-1$	3,6%	3,2%	3,8%
$\lambda = \frac{S-1}{2}$	25,2%	21,6%	19,5%
$\lambda = \frac{S}{2}$	14%	9,8%	10,2%

Из результатов видно, что лучше всего себя показывает алгоритм с $\lambda = S - 1$. При данном λ результат работы алгоритма поступления по ЕГЭ отличается от результата работы алгоритма Гейла-Шепли всего на $3 - 4\%$. В отличие от среднеарифметического номера последнего поступившего абитуриента, при определении процента неустойчивых пар нет прямой зависимости от количества волн. Нельзя без конкретного распределения точно сказать, при каком количестве волн процент неустойчивых пар будет меньше.

3.1.2. Абитуриентов столько же, сколько суммарная квота во всех вузах

Рассмотрим результаты алгоритмов при следующих начальных данных:

Количество абитуриентов: $w = 500$

Номер вуза	1	2	3	4	5
Квота	100	100	100	100	100

Проведем $n = 10$ испытаний со случайными данными при фиксированных квотах и количестве абитуриентов, чтобы промоделировать работу различных алгоритмов. Для сравнения будем использовать такие показатели, как среднеарифметический процент заполненных мест в вузе и среднеарифметическое количество неустойчивых пар. Ввиду того, что вузы одинаковы по популярности, а абитуриентов столько же, сколько и суммарная квота в вузах, то среднеарифметический номер последнего абитуриента рассматривать не будем, так как этот показатель не будет нести в себе никакой полезной информации.

Среднеарифметический процент заполненных мест в каждом вузе по алгоритму Гейла-Шепли = 98,4 %

Среднеарифметический процент заполненных мест в каждом вузе по алгоритму поступления в одну волну с одним приоритетом = 86,4 %

Среднеарифметический процент заполненных мест в каждом вузе при различных λ и разном количестве волн в алгоритме поступления по правилу математического ожидания:

λ	Одна волна	Две волны	Три волны
$\lambda = \frac{v-1}{v}$	87,4%	92,2%	97,6%
$\lambda = S - 1$	96,2%	97,4%	98%
$\lambda = \frac{S-1}{2}$	89,8%	94,2%	98,2%
$\lambda = \frac{S}{2}$	94,2%	96,6%	97,6%

Из результатов видно, что в одну и две волны лучше себя показывает алгоритм с $\lambda = S - 1$, однако при трех волнах все λ показывают примерно одинаковый процент заполнения квот в вузах, и этот процент близок к результату, показанному алгоритмом Гейла-Шепли.

Процент неустойчивых пар при различных λ и разном количестве волн в алгоритме поступления по правилу математического ожидания:

λ	Одна волна	Две волны	Три волны
$\lambda = \frac{v-1}{v}$	15,1%	18,8%	23,8%
$\lambda = S-1$	1,5%	2,8%	3,9%
$\lambda = \frac{S-1}{2}$	13,8%	18,6%	21,5%
$\lambda = \frac{S}{2}$	7,3%	9,5%	14,2%

Процент неустойчивых пар вычислялся следующим образом: в некотором вузе брали количество неустойчивых пар, делили на количество заполненных мест в данном вузе, зачем брали среднеарифметическое значение по всем вузам. Лучше всего себя показывает алгоритм с $\lambda = S - 1$, причем во всех волнах. Из результатов видно, что чем больше волн, тем больше количество неустойчивых пар.

3.2. Результаты при разных квотах у вузов

3.2.1. Абитуриентов в два раза больше, чем суммарная квота во всех вузах

Рассмотрим результаты алгоритмов при следующих начальных данных:

Количество абитуриентов: $w = 700$

Номер вуза	1	2	3	4	5
Квота	50	60	70	80	90

Проведем $n = 10$ испытаний со случайными данными при заданных квотах и количестве абитуриентов, чтобы промоделировать работу различных алгоритмов. Для сравнения будем использовать такие показатели, как среднеарифметическое количество неустойчивых пар и среднеарифметический номер последнего поступившего абитуриента (сначала берем среднеарифметический номер последнего поступившего абитуриента у пяти вузов, затем берем среднеарифметическое по данному показателю при десяти испытаниях). Ввиду того, что вузы одинаковы по популярности, а абитуриентов существенно больше чем суммарная квота, то квота в каждом вузе заполнится целиком, и в данном случае мы не будем рассматривать такой показатель, как процент заполненных мест в вузе.

Среднеарифметический номер последнего поступившего абитуриента по алгоритму Гейла-Шепли $= 310$

Среднеарифметический номер последнего поступившего абитуриента по алгоритму в одну волну с одним приоритетом $= 380{,}4$

Среднеарифметический номер последнего поступившего абитуриента при различных λ и разном количестве волн в алгоритме поступления по правилу математического ожидания:

λ	Одна волна	Две волны	Три волны
$\lambda_j = \dfrac{\sum\limits_{i:i\neq j}^{v} q_i}{\sum\limits_{i}^{v} q_i}$	411,2	399,3	372,3
$\lambda = S - 1$	341,6	338.6	335,8
$\lambda = \dfrac{S-1}{2}$	431,8	416,8	383,6
$\lambda = \dfrac{S}{2}$	381,4	371,4	348,5

Из результатов видно, что лучшие показатели при $\lambda = S - 1$. Также можно заметить, что во всех алгоритмах результаты лучше, когда проводится большее количество волн.

Процент неустойчивых пар при различных λ и разном количестве волн в алгоритме поступления по правилу математического ожидания:

λ	Одна волна	Две волны	Три волны
$\lambda_j = \dfrac{\sum\limits_{i:i\neq j}^{v} q_i}{\sum\limits_{i}^{v} q_i}$	23,7%	27,4%	24,3%
$\lambda = S - 1$	1,8%	12,8%	13,7%
$\lambda = \dfrac{S-1}{2}$	24,2%	27,4%	25,5%
$\lambda = \dfrac{S}{2}$	11,7%	19,4%	17,4%

Из результатов видно, что лучше всего показывает себя алгоритм с $\lambda = S - 1$. В отличие от среднеарифметического номера последнего поступившего абитуриента, при определении процента неустойчивых пар в большинстве исследований алгоритмы в одну волну показывают себя лучше, чем алгоритмы в две и в три волны. Это обусловлено тем, что вузы одинаковы по популярности, а квоты у них разные. В две и три волны абитуриенты чаще подают документы в вуз (просто из-за большего количества волн) по условию, которое максимизирует шансы на поступление, не учитывая предпочтений абитуриентов.

3.2.2. Абитуриентов столько же, сколько суммарная квота во всех вузах

Рассмотрим результаты алгоритмов при следующих начальных данных:

Количество абитуриентов: $w = 350$

Номер вуза	1	2	3	4	5
Квота	50	60	70	80	90

Проведем $n = 10$ испытаний со случайными данными при фиксированных квотах и количестве абитуриентов, чтобы промоделировать работу различных алгоритмов. Для сравнения будем использовать такие показатели, как среднеарифметический процент заполненных мест в вузе и среднеарифметическое количество неустойчивых пар. Ввиду того, что вузы одинаковы по популярности, а абитуриентов столько же, сколько и суммарная квота в вузах, то среднеарифметический номер последнего абитуриента рассматривать не будем, так как этот показатель не будет нести в себе никакой полезной информации.

Среднеарифметический процент заполненных мест в каждом вузе по алгоритму Гейла-Шепли = 97,7 %

Среднеарифметический процент заполненных мест в каждом вузе по алгоритму поступления в одну волну с одним приоритетом = 85,4 %

Среднеарифметический процент заполненных мест в каждом вузе при различных λ и разном количестве волн в алгоритме поступления по правилу математического ожидания:

λ	Одна волна	Две волны	Три волны
$\lambda_j = \frac{\sum\limits_{i:i\neq j}^{v} q_i}{\sum\limits_{i}^{v} q_i}$	89,3%	92,2%	94,8%
$\lambda = S - 1$	97%	97,3%	97,6%
$\lambda = \frac{S-1}{2}$	90,2%	93,3%	93,9%
$\lambda = \frac{S}{2}$	95,1%	96,2%	96,9%

Из результатов видно, что лучше всего себя показывает алгоритм с $\lambda = S - 1$, и при трех волнах процент заполненных мест близок к проценту, полученному по алгоритму Гейла-Шепли. Также следует заметить, что при любом алгоритме чем больше волн, тем больше заполнено мест. Если сравнить с результатами при одинаковых квотах и количестве мест, равном суммарной квоте, то становится видно, что результаты приблизительно равны, то есть для данного показателя алгоритм работает одинаково при разных показателях квот.

Процент неустойчивых пар при различных λ и разном количестве волн в алгоритме поступления по правилу математического ожидания:

λ	Одна волна	Две волны	Три волны
$\lambda_j = \frac{\sum\limits_{i:i \neq j}^{v} q_i}{\sum\limits_{i}^{v} q_i}$	16,4%	17,5%	16,9%
$\lambda = S - 1$	2,1%	10,8%	9,9%
$\lambda = \frac{S-1}{2}$	16,5%	17,8%	16,8%
$\lambda = \frac{S}{2}$	9,5%	17,2%	12,8%

Процент неустойчивых пар вычислялся следующим образом: в некотором вузе брали количество неустойчивых пар, делили на количество заполненных мест в данном вузе, зачем брали среднеарифметическое значение по всем вузам. Лучше всего себя показывает алгоритм с $\lambda = S - 1$, причем во всех волнах. Из результатов видно, что лучше себя показывают алгоритмы в одну волну, чем в две или три. Однако не имея конкретного распределения, нельзя точно сказать, в какое количество волн будет меньшее количество нестабильных пар при одинаковых λ.

Заключение

В данной работе были рассмотрены различные алгоритмы распределения абитуриентов по вузам, а также проведено сравнение с эталонным — алгоритмом Гэйла-Шепли. Разработан новый алгоритм поведения абитуриентов, который дает приемлемые результаты при некоторых параметрах.

Исходя из полученных результатов, сделаны следующие выводы:

1. При моделировании различных вариантов приемной кампании (количество квот, абитуриентов) наиболее близким по результатам к алгоритму Гейла-Шепли во всех случаях является алгоритм поступления по правилу математического ожидания с $\lambda = S - 1$.

2. Нельзя определенно сказать, какое количество волн является наиболее оптимальным. Чем больше волн, тем среднеарифметический номер последнего поступившего абитуриента меньше, однако количество неустойчивых пар меньше при поступлении в одну волну. Поступление в три волны не дает значительного преимущества по сравнению с поступлением в одну и две волны, поэтому отказ от приема в три волны в РФ можно считать правильным, ввиду сложности и необходимости дополнительных расходов на проведение дополнительной волны.

3. Стратегии абитуриентов с небольшой степенью степенью риска ($\lambda = \frac{S-1}{2}, \lambda = \frac{v-1}{v}$) ведут к неприемлемому результату как для абитуриентов (поступление в вузы, которые не являются наиболее приоритетными, а поступление по принципу хотя бы куда-нибудь из множества приемлемых вузов), так и для вузов (высокое среднеарифметическое места последнего поступившего абитуриента по сравнению с алгоритмом Гейла-Шепли, как следствие — сильно различающийся уровень абитуриентов).

4. Однако и стратегии с высокой степенью риска (поступление в одну волну с одним приоритетом) неприемлемы. Данный алгоритм

является частным случаем модифицированного алгоритма Гейла-Шепли, где абитуриенты хотят поступить только в один вуз. Оба алгоритма моделировались на одинаковых данных, однако полученные результаты у алгоритма Гейла-Шепли существенно лучше.

Список литературы

[1] Алескеров Ф.Т. Кисельгоф С.Г. Лауреаты Нобелевской премии — 2012: Ллойд Шепли и Элвин Рот // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2012. no. 4. — С. 433–443.

[2] Кисельгоф, С. Г. Обобщенные паросочетания при предпочтениях, не являющихся линейными порядками: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Кисельгоф Софья Геннадьевна. — Москва, 2013. — 165 л.

[3] Конохова А. С. Система распределения выпускников вузов в СССР // Новейшая история России. 2012. Т. 5. — С. 233–242.

[4] О порядке приема на обучение по образовательным программам высшего образования на 2016-2017: приказ Минобрнауки России от 14 октября 2015 г. no. 1147.

[5] Оуэн, Г. Теория игр / Г. Оуэн. — М. : Мир, 1971. — 230 с.

[6] Теория и практика двусторонних рынков (Нобелевская премия по экономике 2012 года) / Е.Б. Железова, С.Б. Измалков, К.И. Сонин [и др.] // Вопросы экономики. 2013. Т. 1. — С. 4–26.

[7] A.E. Roth, M.O. Sotomayor. College admission problem revisited // Econometrica. 1989. V. 57, no. 3. — P. 559–570.

[8] Blair C. The lattice structure of the set of stable matchings with multiple partners // Mathematics of Operations Research. 1988. November. Vol. 13.

[9] F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss [и др.]. Matching under Preferences. In B. Klausa, D. F. Manloveb, F. Rossi, editors, Handbook of Computational Social Choice, chapter 14. Cambridge University Press, 2016.

[10] Gale D., Shapley L.S. College admissions and the stability of marriage // American Mathematical Monthly. 1962. Vol. 69. — P. 9–16.

[11] Roth A.E. Common and Conflicting Interests in Two-Sided Matching Markets // European Economic Review. 1985. Vol. 27. — P. 75–96.

[12] Roth A.E. The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem // Journal of Economic Theory. 1985. August. Vol. 36. — P. 277–288.

[13] Roth A.E. The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory // Journal of Political Economy. 1984. Vol. 92. — P. 991–1016.

[14] URL: https://abiturient.spbu.ru/arkhiv-dokumentov-4.html

[15] URL: https://abiturient.spbu.ru/files/2017/pravila_priema_2017.pdf

Приложение

https://yadi.sk/d/pstEP6aB3JRUdY/2017