

Санкт-Петербургский государственный университет  
Физический факультет  
Кафедра радиофизики

**Низкочастотное излучение заряда, движущегося вдоль оси  
круглого гофрированного волновода**

Направление 011800 - радиофизика

Бакалаврская работа студента  
дневного отделения  
\_\_\_\_\_ Ахматовой Екатерины Радиевны

Научный руководитель:  
\_\_\_\_\_ д.ф.-м.н., проф. Тюхтин А.В.

Рецензент:  
\_\_\_\_\_ к.ф.-м.н., доцент Альтмарк А.М.

Санкт – Петербург

2017

## Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи и её решение	7
1.1. Постановка задачи	7
1.2. Поле заряда в неограниченном вакууме	9
1.3. Полное поле в волноводе	13
2. Анализ решения задачи	17
2.1. Волновое поле	17
2.2. Частные случаи	19
2.3. Численный расчёт компонент поля	22
Заключение	28
Литература	29

## Введение

Эта работа посвящена исследованию излучения заряда, движущегося вдоль оси круглого волновода, имеющего периодическую гофрированную стенку. При этом период структуры предполагается малым по сравнению с рассматриваемыми длинами волн и радиусом волновода.

Периодические структуры широко используются в различных областях науки и техники. Они находят применение в задачах распространения волн СВЧ, где используются, например, широкие круглые волноводы для магистральных широкополосных линий связи [1]. Их используют в антенно-волноводной технике в качестве периодических излучающих антенн, например, рупорных антенн с гофрированными стенками, антенн бегущей волны, линий передачи на поверхностных волнах и многих других [1]. Периодические структуры также применяются в задачах ускорения заряженных частиц [1].

Свойства периодической структуры зависят от соотношения между периодом структуры и длиной волны излучения [1]. Обычно в научной литературе рассматривают длинноволновую область, где длина волны много больше периода структуры, коротковолновую область, где длина волны мала по сравнению с периодом структуры и резонансную область, где период структуры сравним с длиной волны.

При исследовании случая относительно малого периода структуры становится возможным использование так называемых “эквивалентных” граничных условий (ЭГУ) [1].

Если  $\vec{E}_\tau$  и  $\vec{H}_\tau$  – тангенциальные составляющие полного поля на некоторой поверхности раздела двух сред или областей, то общий вид таких условий:

$$\vec{E}_\tau = \check{W}\vec{H}_\tau,$$

где  $\check{W}$  – некоторый интегро-дифференциальный оператор.

Для гофры – непрозрачной периодической поверхности – величина  $\tilde{W}$  представляет собой тензор, а импедансные граничные условия имеют анизотропный характер [1].

Метод ЭГУ эффективен, в частности, при исследовании электромагнитных волн в волноводах, у которых период структуры мал по сравнению с длиной волны излучения. При этом точные граничные условия на сложной поверхности заменяются некоторыми условиями на простой поверхности. Таким образом, задача значительно упрощается.

В последние годы достаточно велик интерес к исследованию излучения пучков заряженных частиц в гофрированных волноведущих структурах. Далее будут кратко рассмотрены некоторые результаты, полученные в данной области. Нужно подчеркнуть, что в литературе слабо освещена тема относительно длинноволнового излучения – то есть излучения, длины волн которого много больше периода структуры [2–4].

В работе [2] рассматривается прямоугольный волновод, у которого две стенки имеют периодическую структуру с прямоугольной образующей, имеющей выступы малой ширины (практически речь идёт о диафрагмах). Авторы охарактеризовали зависимости частоты и амплитуды кильватерного волноводного поля от высоты диафрагм.

В работе [3] исследуется генерация терагерцевого излучения пучком ультрарелятивистских электронов в металлическом круглом волноводе с малым гофрированием (при этом ширина выступов могла быть не малой по сравнению с периодом). Авторы обнаружили, что в нём возможно создание узкополосного электромагнитного импульса излучения длиной в десятки пс с частотой около 1 ТГц и энергией в несколько мДж. Также возможно использование волновода с сужающимся вдоль его длины радиусом для дальнейшего сжатия импульса до нескольких пс и увеличения его мощности. Такие короткие импульсы терагерцевого излучения могут быть востребованы, например, в

материаловедении, телекоммуникации, исследованиях полупроводников и сверхпроводников, а также в средствах химической и биологической визуализации. Отметим, что основным методом исследования в работе [3] являлось численное моделирование.

В работе [4] отмечено, что для передачи терагерцевого излучения с небольшими потерями может быть использована круглая металлическая трубка радиуса около нескольких сантиметров с периодическим множеством ирисовых диафрагм.

В работе [5] авторы показали, что излучение заряда в круглом волноводе с периодически меняющимся радиусом и диэлектрическим заполнением может быть значительно больше излучения Вавилова–Черенкова в волноводе с постоянным радиусом из-за возникновения добавочного механизма – излучения Смита–Парселла. Подчеркнём, что длины волн такого излучения сопоставимы или меньше периода структуры, так что данная проблематика не пересекается с темой нашего исследования.

В реальном эксперименте движение заряженных частиц в волноводе может происходить на некотором расстоянии от его центральной оси. Например, это относится к большинству частиц, образующих пучок конечного размера. В работе [7] показано, что существует зависимость излученного поля от расстояния заряда до оси, причем эта зависимость оказывается разной для различных механизмов излучения: она линейна для излучения Смита–Парселла и квадратична (или имеет даже более высокую степень) для излучения Вавилова–Черенкова.

Кроме работ по излучению зарядов в гофрированных волноводах, можно отметить аналогичные задачи для волновода с сетчатой стенкой. Одна из таких задач решена в работе [8], в которой рассмотрен случай волновода, образованного мелкоячеистой сеткой с квадратными ячейками.

Цель данной работы – исследование относительно низкочастотного излучения движущегося заряда в круглом гофрированном волноводе. При этом вследствие малости периода структуры по сравнению с радиусом волновода и рассматриваемыми длинами волн мы можем воспользоваться ЭГУ. Для достижения поставленной цели решались следующие задачи: нахождение компонент поля излучения; их аналитическое исследование; получение типичных численных результатов.

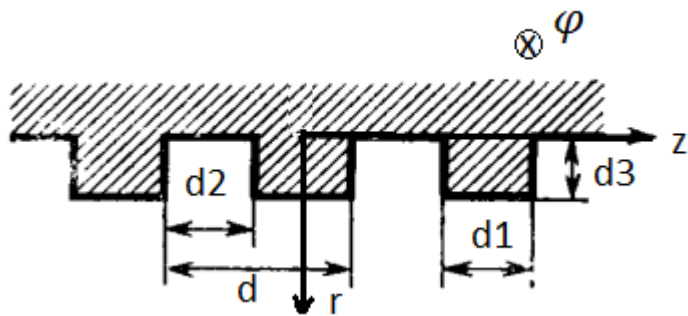
# 1. Постановка задачи и её решение

## 1.1 Постановка задачи

В работе исследуется электромагнитное поле точечного заряда, движущегося равномерно вдоль оси круглого гофрированного волновода. Будем считать, что его заполнение обладает свойствами вакуума. Пусть радиус волновода равен  $a$ .

Введём цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ . Величина  $\rho$  представляет собой плотность заряда, и в случае точечного заряда, движущегося вдоль оси  $z$  со скоростью  $\vec{v}$ , она имеет вид:  $\rho = q\delta(r, \varphi, z - vt)$ .

Рассмотрим волновод, внутренняя гофрированная поверхность которого имеет прямоугольную образующую (рис. 1). Пусть период структуры равен  $d$ , а  $d_1, d_2, d_3$  есть ширина гребня, расстояние между двумя соседними гребнями и глубина канавки соответственно.



**Рис.1.** Сечение гофрированной поверхности.

Период будем считать малым по сравнению с рассматриваемыми длинами волны  $\lambda$  и радиусом волновода:  $d \ll \lambda$ ,  $d \ll a$ . Также положим  $d_3 \ll \lambda$  (мелкая гофра) и  $d_3 \ll a$ .

Первая задача состоит в нахождении полного электромагнитного поля в волноводе, которое представляет собой сумму падающего и отражённого полей и удовлетворяет определённым граничным условиям.

Под падающим полем понимается поле заряда в неограниченном вакууме. Оно даётся решением неоднородных уравнений Максвелла. С учётом того, что  $\varepsilon = 1, \mu = 1$ , имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}^{(i)} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}^{(i)}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{E}^{(i)} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{H}^{(i)} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}^{(i)}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}, & \operatorname{div} \vec{H}^{(i)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Отражённое от стенок волновода поле является полем без источника и представляет собой решение однородных уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}^{(r)} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}^{(r)}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{E}^{(r)} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H}^{(r)} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}^{(r)}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{H}^{(r)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Символы  $i$  и  $r$  означают соответственно падающее (incident) и отражённое (reflected) поля.

Малость периода по сравнению с теми длинами волн, которые мы будем рассматривать ( $d \ll \lambda$ ) позволяет воспользоваться на поверхности ( $r = a$ ) граничными условиями Вайнштейна – Сивова (см. [1]):

$$\begin{aligned} E_z &= \eta^m H_\varphi, \\ E_\varphi &= \eta^e H_z. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Величины  $\eta^m$  и  $\eta^e$  называются импедансами и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta^m &= -ikd_3 \left( \frac{d_2}{d} - \frac{\delta \alpha_z^2}{d_3} \right), \\ \eta^e &= ik\delta. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Здесь  $k = \omega/c$  – волновое число,  $\alpha_z$  – направляющий косинус с осью  $z$ ,  $\delta$  – величина, отражающая параметры структуры:



$$\delta = d_3 - \frac{d}{2\pi} \ln\left(\frac{\sigma - 1}{\sigma}\right) + \frac{td}{2\pi} \int_0^{1/\sigma} \frac{du}{\sqrt{(1-u)(1-\sigma u)(\sqrt{(1-tu)+1})}}. \quad (1.1.5)$$

Параметры  $\sigma$  и  $t$  зависят от относительных размеров направляющей гофры и находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} \pi \frac{d_1}{d} &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} \sqrt{\frac{t-u}{\sigma-u}} du, \\ \frac{2\pi d_3}{d} &= \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} \sqrt{\frac{u-t}{\sigma-u}} du. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

## 1.2 Поле заряда в неограниченном вакууме

Нужное нам для последующего решения разложение в интеграл Фурье для поля заряда в вакууме хорошо известно из литературы (см., например, [9,11]). Тем не менее, ради последовательности в изложении приведём его вывод.

Введём векторный  $\vec{A}$  и скалярный  $\Phi$  потенциалы:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.2.1)$$

Для упрощения задачи перейдём от уравнений (1.1.1) для полей к волновым уравнениям для потенциалов:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Учитывая, что в случае вакуума для потенциалов движущегося заряда имеет место соотношение  $\vec{A} = \vec{\beta}\Phi$  ( $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ ), ограничимся рассмотрением уравнения для  $\Phi$ . Решение удобно искать в виде интеграла Фурье:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.2.3)$$

Тогда волновое уравнение для Фурье-образа  $\Phi$  примет вид

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \Phi_{\omega} = -4\pi\rho_{\omega}, \quad (1.2.4)$$

где  $\rho_{\omega}$  – Фурье-образ плотности заряда. Для решения этого уравнения представим  $\Phi_{\omega}$  в виде

$$\Phi_{\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\omega, \vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{R}} d^3k, \quad (1.2.5)$$

где  $d^3k$  - элемент объема в пространстве волновых векторов.

Аналогично для  $\rho_{\omega}$  имеем

$$\rho_{\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\omega, \vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{R}} d^3k, \quad (1.2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{\omega, \vec{k}} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dt q \delta^3(\vec{R} - \vec{v}t) e^{-i\vec{k}\vec{R} + i\omega t} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dt q e^{-i\vec{k}\vec{v}t + i\omega t} = \frac{1}{(2\pi)^3} q \delta(\omega - \vec{k}\vec{v}). \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Подставив (1.2.7) в (1.2.6), а затем (1.2.6) и (1.2.5) в (1.2.4), пронесём дифференциальный оператор за знак интеграла и подействуем на подынтегральную функцию. Приравнивая подынтегральные выражения, получаем

$$\Phi_{\omega, \vec{k}} = \frac{q}{2\pi^2} \frac{\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})}{k^2 - \omega^2/c^2}. \quad (1.2.8)$$

Используя (1.2.8) и беря интеграл по  $\omega$ , находим потенциал:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \Phi_{\omega, \vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{R} - i\omega t} = \\
&= \frac{q}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\delta(\omega - \vec{k}\vec{v})}{k^2 - \omega^2/c^2} e^{i\vec{k}\vec{R} - i\omega t} = \\
&= \frac{q}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \frac{e^{i\vec{k}\vec{R} - i\vec{k}\vec{v}t}}{k^2 - (\vec{k}\vec{\beta})^2}. \tag{1.2.9}
\end{aligned}$$

Перейдём к цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  и введём цилиндрическую систему  $(k_r, \varphi_k, k_z)$  в пространстве волновых векторов. Тогда

$$\Phi = \frac{q}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int_0^{+\infty} dk_r \int_0^{2\pi} d\varphi_k k_r \frac{e^{ik_z z + ik_r r \cos(\varphi - \varphi_k) - ik_z vt}}{k_r^2 + k_z^2 - k_z^2 \beta^2}. \tag{1.2.10}$$

В выражении присутствует табличный интеграл

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_k e^{ik_r r \cos(\varphi - \varphi_k)} = 2\pi J_0(k_r r). \tag{1.2.11}$$

С учётом (1.2.11) получаем

$$\Phi = \frac{q}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int_0^{+\infty} dk_r \frac{k_r J_0(k_r r) e^{ik_z(z - vt)}}{k_r^2 + k_z^2(1 - \beta^2)}. \tag{1.2.12}$$

Рассмотрим сначала в (1.2.12) отдельно интеграл по  $k_r$ , обозначив его как  $I$ :

$$I = \int_0^{+\infty} dk_r f(k_r) J_0(k_r r), \tag{1.2.13}$$

где

$$f(k_r) = \frac{k_r}{k_r^2 + k_z^2(1 - \beta^2)}. \tag{1.2.14}$$

Перейдём в (1.2.14) к интегрированию по всей вещественной оси  $k_r$ . Для этого воспользуемся связью между функцией Бесселя  $J_0(k_r r)$  и функциями Ханкеля  $H_0^{(1)}(k_r r)$  и  $H_0^{(2)}(k_r r)$ . Имеем:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(k_r) H_0^{(1)}(k_r r) dk_r + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(k_r) H_0^{(2)}(k_r r) dk_r. \quad (1.2.15)$$

Применим формулу  $H_0^{(2)}(k_r r) = -H_0^{(1)}(e^{i\pi} k_r r)$ :

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(k_r) H_0^{(1)}(k_r r) dk_r - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(k_r) H_0^{(1)}(e^{i\pi} k_r r) dk_r, \quad (1.2.16)$$

а также, учитывая, что функция  $f(k_r)$  является нечётной, заменим  $k_r$  на  $-k_r$  во втором интеграле. Получаем:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k_r) H_0^{(1)}(k_r r) dk_r. \quad (1.2.17)$$

Функция  $H_0^{(1)}$  имеет асимптотику  $H_0^{(1)}(k_r r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_r r}} e^{ik_r r - i\frac{\pi}{4}}$ ,  $|k_r r| \rightarrow \infty$ ,

т.е. убывает в верхней полуплоскости комплексной плоскости  $k_r$ , обеспечивая там сходимость интеграла (1.2.17). Дополним контур интегрирования бесконечной полуокружностью в этой области и посчитаем интеграл, используя теорему о вычетах. Подынтегральное выражение имеет в области  $Im(k_r) > 0$  единственный полюс  $k_r = i|k_z| \sqrt{1 - \beta^2}$ . Получаем:

$$I = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}\left(i|k_z| \sqrt{1 - \beta^2} r\right). \quad (1.2.18)$$

Перейдём от  $k_z$  к переменной  $\omega = vk_z$ , а также от функции Ханкеля к функции Макдональда  $K_0$  (модифицированная функция Бесселя 2 рода). Тогда

$$I = K_0\left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} r\right). \quad (1.2.19)$$

Подставляем (1.2.19) в (1.2.12) и получаем формулу для потенциала:

$$\Phi = \frac{q}{\pi v} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0\left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} r\right) e^{i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)} d\omega. \quad (1.2.20)$$

Используя (1.2.20), а также учитывая соотношение  $\vec{A} = \vec{\beta}\Phi$  ( $A_z = \beta\Phi$ ), вычислим ненулевые составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в цилиндрической системе координат по формулам

$$E_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}, E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, H_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r}. \quad (1.2.21)$$

Получаем

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{q\sqrt{1-\beta^2}}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| e^{\frac{i\omega\zeta}{v}} K_1\left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1-\beta^2} r\right) d\omega, \\ E_z &= -\frac{q(1-\beta^2)i}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega e^{\frac{i\omega\zeta}{v}} K_0\left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1-\beta^2} r\right) d\omega, \\ H_\varphi &= \frac{q\beta\sqrt{1-\beta^2}}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| e^{\frac{i\omega\zeta}{v}} K_1\left(\frac{|\omega|}{v} \sqrt{1-\beta^2} r\right) d\omega, \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

где  $\zeta = z - vt$ . Здесь была использована формула:  $K_0'(x) = -K_1(x)$ .

### 1.3 Полное поле в волноводе

Как и в предыдущем пункте перейдём от уравнений Максвелла для полей к волновому уравнению для потенциала  $\Phi$  полного поля:

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \quad (1.3.1)$$

Его решением является сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$\Phi = \Phi^{(i)} + \Phi^{(r)}. \quad (1.3.2)$$

$\Phi^{(i)}$  – потенциал падающего поля – был получен ранее (см.(1.2.20)). Решим однородное уравнение для нахождения потенциала отражённого поля. Как и в 1.2 решение будем искать для Фурье-образа, подчиняющегося уравнению

$$\Delta\Phi_\omega^{(r)} + k^2\Phi_\omega^{(r)} = 0. \quad (1.3.3)$$

Разделим переменные в этом уравнении. Будем искать его решение в виде произведения функций:

$$\Phi_{\omega}^{(r)}(r, z) = \psi(r)q(z). \quad (1.3.4)$$

После подстановки (1.3.4) в (1.3.3) последнее можно разделить на два уравнения:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \kappa^2\psi = 0, \quad \frac{d^2q}{dz^2} + h^2q = 0, \quad (1.3.5)$$

где  $\kappa$  и  $h$  – поперечное и продольное волновые числа соответственно ( $k^2 = h^2 + \kappa^2$ ). Первое уравнение, заменив в нём переменную  $x = \kappa r$ , запишем следующим образом:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\psi}{dx} + \psi = 0. \quad (1.3.6)$$

Это уравнение Бесселя, решением которого являются цилиндрические функции – функция Бесселя 1 рода  $J_0(x)$ , функция Неймана  $N_0(x)$ , функции Ханкеля 1 и 2 рода  $H_0^{(1)}(x), H_0^{(2)}(x)$ . В рассматриваемой задаче в качестве решения следует взять функцию  $J_0(x)$  – единственное решение уравнения (1.3.6), не имеющее особенности при  $x \rightarrow 0$ , т.к. начало координат входит в область определения искомой функции.

Решения второго уравнения из (1.3.5) с точностью до константы равны

$$q = C e^{\pm i h z}. \quad (1.3.7)$$

Знаки  $+$  и  $-$  относятся к волнам, распространяющимся в положительном и отрицательном направлении оси  $z$ . Для нас подходят только волны, идущие в положительном направлении, которым соответствует функция  $q = C e^{i h z}$ , где  $h \equiv k_z = \omega/v$ . Это объясняется необходимостью удовлетворить граничным условиям, вследствие чего зависимость от продольной координаты определяется падающим полем (1.2.22).

Таким образом,  $\Phi_{\omega}^{(r)}$  приобретает следующий вид:

$$\Phi_{\omega}^{(r)} = C J_0(\kappa r) e^{i h z}. \quad (1.3.8)$$

Учитывая, что  $k = \omega/c$ , и принимая во внимание соотношение  $k^2 = h^2 + \kappa^2$ , преобразуем (1.3.8) следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi_{\omega}^{(r)} &= C J_0 \left( \frac{i|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} r \right) e^{\frac{i\omega z}{v}} = \\ &= C I_0 \left( \frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} r \right) e^{\frac{i\omega z}{v}},\end{aligned}\quad (1.3.9)$$

где  $I_0$  – функция Инфельда (модифицированная функция Бесселя 1 рода).

Подставив (1.3.9) в (1.2.3) и найдя таким образом выражение для скалярного потенциала отражённого поля, сложим его с потенциалом падающего из (1.2.20) и получим следующую формулу для потенциала полного поля:

$$\Phi = \frac{q}{\pi v} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\omega z}{v}} \left[ K_0 \left( \frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} r \right) + R I_0 \left( \frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} r \right) \right] d\omega. \quad (1.3.10)$$

Здесь вместо константы  $C$  введён произвольный множитель  $R$ , который имеет смысл коэффициента отражения и будет далее найден из граничных условий.

Используя формулы (1.2.21), получим выражения для компонент полного поля:

$$\begin{aligned}E_r &= \frac{q\sqrt{1 - \beta^2}}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| e^{\frac{i\omega z}{v}} [K_1(\kappa r) - R I_1(\kappa r)] d\omega, \\ E_z &= -\frac{q(1 - \beta^2)i}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega e^{\frac{i\omega z}{v}} [K_0(\kappa r) + R I_0(\kappa r)] d\omega, \\ H_{\varphi} &= \frac{q\beta\sqrt{1 - \beta^2}}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| e^{\frac{i\omega z}{v}} [K_1(\kappa r) - R I_1(\kappa r)] d\omega.\end{aligned}\quad (1.3.11)$$

Здесь  $\kappa = \frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2}$ . Также было учтено:  $I_0'(x) = I_1(x)$ .

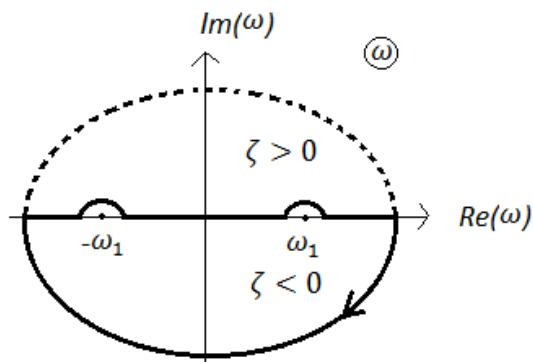
Применим теперь граничные условия (1.1.3). Видно, что для найденных компонент поля, требуется только первое из условий. Подставляя в него формулы для  $E_z$  и  $H_{\varphi}$  из (1.3.11), выразим из полученного соотношения

коэффициент  $R$ :

$$R = \frac{K_0(\kappa a) - i\eta^m \beta \gamma \operatorname{sign}(\omega) K_1(\kappa a)}{-I_0(\kappa a) - i\eta^m \beta \gamma \operatorname{sign}(\omega) I_1(\kappa a)}. \quad (1.3.12)$$

Здесь  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  – Лоренц-фактор.

Уравнение, определяющее полюса функции (1.3.12) (т. е. корни ее знаменателя) является дисперсионным уравнением. Отметим, что эти полюса могут лежать на вещественной оси. Обозначим один из таких полюсов как  $\omega_1$ . В такой ситуации возникает неопределённость в полученном решении: оно будет удовлетворять уравнениям и граничным условиям при любом обходе этих полюсов. Для того, чтобы получить физически верное решение, можно воспользоваться методом введения бесконечно малого затухания [12]. В его простейшем варианте достаточно заменить  $\omega_1$  на  $\omega_1 - i\delta$ , где  $\delta \rightarrow +0$ . Это условие обеспечивает экспоненциальное убывание вклада данного полюса с ростом времени  $t$ . Отсюда очевидно, что полюс располагается ниже контура интегрирования. Таким образом, все полюсы, расположенные на вещественной оси, обходятся контуром интегрирования сверху, как показано на рис. 2.



**Рис.2.** Расположение корней дисперсионного уравнения на комплексной плоскости.



## 2. Анализ решения задачи

### 2.1 Волновое поле

Из (1.3.11) видно, что интегральные представления компонент поля имеют вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{\frac{i\omega\zeta}{v}} d\omega, \quad (2.1.1)$$

где  $\zeta = z - vt$ .

Вычисление интегралов типа (2.1.1) сводится к расчёту вычетов в полюсах функции  $f$  и интегралов по разрезам в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной  $\omega$ . Наличие разрезов вызвано тем, что специальные функции, присутствующие в подынтегральных выражениях, имеют точки ветвления при  $\omega = \pm i0$ . Разрезы могут быть проведены на бесконечность вдоль мнимой оси. Полюсами являются нули знаменателя в выражении (1.3.12) – решения дисперсионного уравнения.

Будем интересоваться волновым полем, т.е. той частью полного поля, которая даёт вклад в излучение. Для того чтобы поле было волновым, полюса функции  $f$  должны лежать на вещественной оси. В противном случае имеем экспоненциально убывающее по мере удаления от заряда поле.

Рассмотрим дисперсионное уравнение:

$$I_0(\kappa a) + i\eta^m \beta \gamma \operatorname{sign}(\omega) I_1(\kappa a) = 0. \quad (2.1.2)$$

С учётом того, что  $\alpha_z \equiv \cos\theta_z = k_z/k$ ,  $k_z = \omega/v$  и, следовательно,  $\alpha_z = 1/\beta$ , импеданс  $\eta^m$  (1.1.4) принимает вид

$$\eta^m = -i \frac{\omega}{c} \left( \frac{d_3 d_2}{d} - \frac{\delta}{\beta^2} \right). \quad (2.1.3)$$

Подставив (2.1.3) в (2.1.2), получаем

$$I_0(\kappa a) + \frac{|\omega|}{c} \left( \frac{d_3 d_2}{d} - \frac{\delta}{\beta^2} \right) \beta \gamma I_1(\kappa a) = 0. \quad (2.1.4)$$

Приведём это уравнение к более удобному для дальнейшего анализа и численного решения виду:

$$I_0(x) - gxI_1(x) = 0. \quad (2.1.5)$$

Здесь введён безразмерный коэффициент  $g$ :

$$g = \frac{\gamma^2}{a} \left( \delta - \frac{d_2 d_3}{d} \beta^2 \right) \quad (2.1.6)$$

и безразмерная переменная  $x \equiv \kappa a$ .

Так как  $I_0(x) > 0$  и  $xI_1(x) > 0$ , то вещественные решения (2.1.5) возможны только при  $g > 0$ . При этом, в силу чётности обоих слагаемых (2.1.5), это уравнение должно иметь одинаковые по величине положительное и отрицательное решения  $\pm x_1$ .

Таким образом, излучение генерируется при

$$\beta < \beta_{max} = \sqrt{\frac{\delta d}{d_2 d_3}}. \quad (2.1.7)$$

Разумеется, это ограничение значимо, только если  $\beta_{max} < 1$ .

Численный расчёт решений дисперсионного уравнения, а также аналитическое нахождение его корней в частных случаях будут рассмотрены далее, а пока предположим, что  $\pm \omega_1 = \pm \nu \gamma x_1 / a$  – искомые вещественные решения и возьмём интегралы (1.3.11), применяя теорему о вычетах.

Для того, чтобы вычислить интеграл по теореме о вычетах, необходимо обеспечить замкнутость контура. Для этого контур интегрирования дополняем полуокружностью с неограниченно увеличивающимся радиусом, интеграл по которой равен нулю (рис.2). Иначе говоря, замыкаем контур той полуокружностью, на которой подынтегральная функция экспоненциально мала.

Интегралы (1.3.11) по теореме о вычетах равны умноженной на  $-2\pi i$  сумме вычетов их подынтегральных выражений. Получаем:

$$E_r = -\frac{4q\omega_1}{av} W I_1 \left( \frac{\omega_1}{v} \sqrt{1 - \beta^2} r \right) \sin \left( \frac{\omega_1 \zeta}{v} \right),$$

$$\begin{aligned}
E_z &= -\frac{4q\omega_1}{av\gamma} W I_0\left(\frac{\omega_1}{v}\sqrt{1-\beta^2}r\right) \cos\left(\frac{\omega_1\zeta}{v}\right), \\
H_\varphi &= -\frac{4q\omega_1}{ac} W I_1\left(\frac{\omega_1}{v}\sqrt{1-\beta^2}r\right) \sin\left(\frac{\omega_1\zeta}{v}\right),
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

где

$$W \equiv \frac{a}{c\beta\gamma} \operatorname{res}_{\omega=\omega_1} R = \frac{K_0\left(\frac{\omega_1 a}{c\beta\gamma}\right) + g \frac{\omega_1 a}{c\beta\gamma} K_0\left(\frac{\omega_1 a}{c\beta\gamma}\right)}{g \frac{\omega_1 a}{c\beta\gamma} I_0\left(\frac{\omega_1 a}{c\beta\gamma}\right) - I_1\left(\frac{\omega_1 a}{c\beta\gamma}\right)}. \tag{2.1.9}$$

## 2.2 Частные случаи

Как было установлено в предыдущем пункте, дисперсионное уравнение (2.1.7) имеет вещественные корни только при условии, что  $g > 0$ . Для нахождения его решений при произвольных параметрах необходим численный расчёт, однако можно получить аналитические приближения в некоторых частных случаях.

1. Случай  $|x| \ll 1$  ( $|ka| \ll 1$ ).

Подставим асимптотические выражения для  $I_0$  и  $I_1$ :

$$\begin{aligned}
I_0(x) &= 1 + \frac{x^2}{4} + O(x^3), \\
I_1(x) &= \frac{x}{2} + O(x^3)
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

в (2.1.7) и выразим отсюда  $x_1$  – корень уравнения:

$$x_1 \approx \sqrt{\frac{2}{g}}. \tag{2.2.2}$$

Тогда для модуля частоты получаем

$$\omega_1 \approx \frac{c\beta\gamma}{a} \sqrt{\frac{2}{g}}. \tag{2.2.3}$$

Видно, что этот случай реализуется при условии  $g \gg 1$ .

В выражении для (2.2.3) можно положить  $\beta = 1$ , т.к. из (2.1.6) условие  $g \gg 1$  удовлетворяется только при  $\gamma^2 \gg 1$ , т.е. при  $\beta \approx 1$ .

Найдём приближенные выражения для компонент поля в этом случае. Подставим асимптотические выражения

$$\begin{aligned} I_0(x) &= 1 + O(x^2), \\ I_1(x) &= \frac{x}{2} + O(x^2), \\ K_0(x) &= -C - \ln \frac{x}{2} + O(x^2), \\ K_1(x) &= \frac{1}{x} + O(x^2) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

в (2.1.8), учитывая, что  $\omega_1 a / c \beta \gamma \equiv x_1$  и принимая во внимание выражение (2.2.2). Получаем

$$W \approx \sqrt{\frac{g}{2}}. \quad (2.2.5)$$

Подставив (2.2.5) и (2.2.4) в выражения для компонент поля (2.1.7), имеем

$$\begin{aligned} E_r &\approx -\frac{2q\gamma}{a^3} \sqrt{\frac{2}{g}} r \sin\left(\frac{\omega_1 \zeta}{v}\right), \\ E_z &\approx -\frac{4q}{a^2} \cos\left(\frac{\omega_1 \zeta}{v}\right), \\ H_\varphi &\approx -\frac{2q\gamma}{a^3} \sqrt{\frac{2}{g}} r \sin\left(\frac{\omega_1 \zeta}{v}\right). \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

2. Случай  $|x| \gg 1$  ( $|ka| \gg 1$ ).

В этом приближении асимптотики имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} I_0(x) &= \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \\ I_1(x) &= \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Аналогично находим  $x_1$  и соответствующую ему  $\omega_1$ :

$$\begin{aligned}x_1 &\approx \frac{1}{g}, \\ \omega_1 &\approx \frac{c\beta\gamma}{ga}.\end{aligned}\tag{2.2.8}$$

Как видим, это приближение верно при  $g \ll 1$ .

Найдём приближенные выражения для компонент поля. Используем следующие асимптотики:

$$\begin{aligned}I_0(x) &= \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left( 1 + \frac{1}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right), \\ I_1(x) &= \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left( 1 - \frac{3}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right), \\ K_0(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left( 1 - \frac{1}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right), \\ K_1(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left( 1 + \frac{3}{8x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right).\end{aligned}\tag{2.2.9}$$

Находим приближение для  $W$ :

$$W \approx \frac{16\pi}{3g} e^{-\frac{2}{g}}.\tag{2.2.10}$$

Для компонент поля имеем:

$$\begin{aligned}E_r &\approx -\frac{64\pi q\gamma}{3a^2 g^2} e^{-\frac{2}{g}} I_1\left(\frac{r}{ag}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 \zeta}{v}\right), \\ E_z &\approx -\frac{64\pi q}{3a^2 g^2} e^{-\frac{2}{g}} I_0\left(\frac{r}{ag}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 \zeta}{v}\right), \\ H_\varphi &\approx -\frac{64\pi q\gamma\beta}{3a^2 g^2} e^{-\frac{2}{g}} I_1\left(\frac{r}{ag}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 \zeta}{v}\right).\end{aligned}\tag{2.2.11}$$

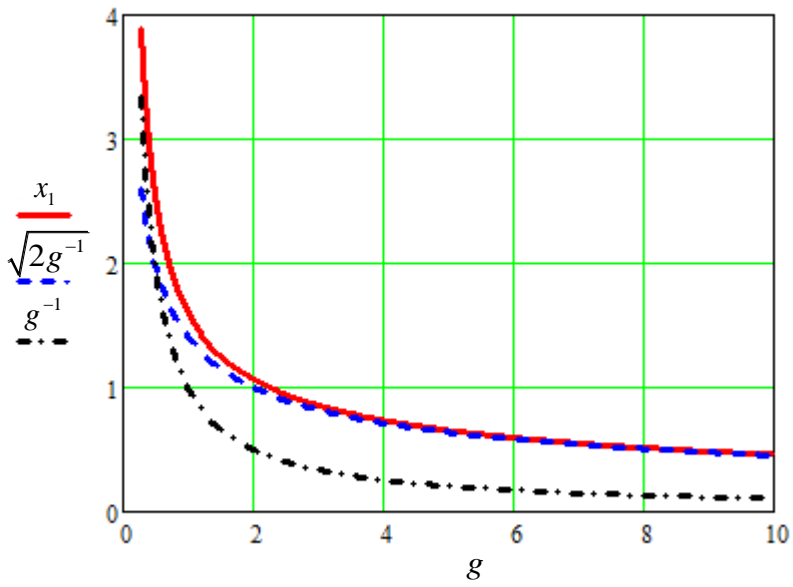
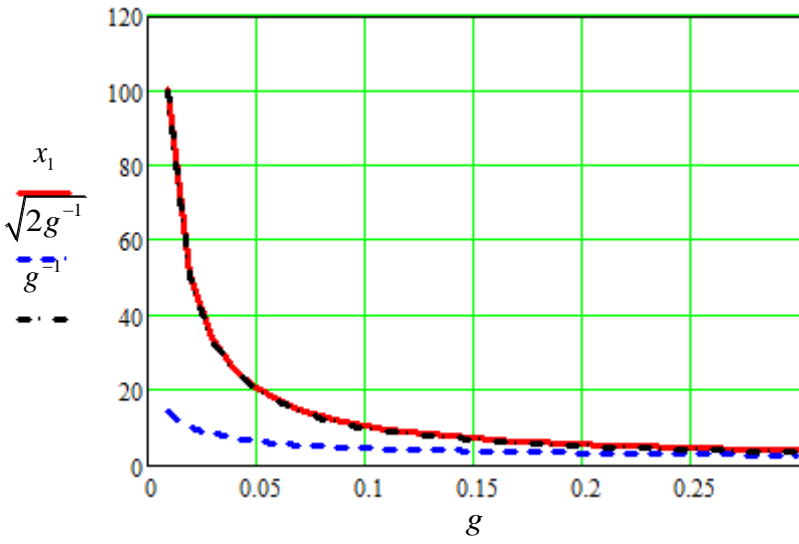
Поскольку в рассматриваемом приближении  $g \ll 1$ , то в данном случае возбуждаемое поле оказывается экспоненциально малым.

## 2.3 Численный расчёт компонент поля

Далее будут приведены результаты численного расчёта, выполненные в среде Mathcad. Разработанная программа расчёта состоит из следующих этапов:

- Определение (с помощью средств Mathcad) параметров  $t$  и  $\sigma$  из системы уравнений, проверка получаемого результата и последующее вычисление параметра  $\delta$  по формуле (1.1.5);
- Решение дисперсионного уравнения (2.1.5) и определение частоты возбуждаемой волноводной моды;
- Вычисление компонент поля излучения (2.1.8).

На рис. 3 приведены зависимости решения  $x_1$  уравнения (2.1.5) от параметра  $g$ , а также приближенные решения (2.2.2) и (2.2.8) для случаев  $g \gg 1$  и  $g \ll 1$ . Из графиков видно, что полученная зависимость  $x_1$  от коэффициента  $g$  (красная сплошная линия) при  $g < 1$  близка к асимптотике для случая  $g \ll 1$ , а при  $g > 1$  она близка к асимптотике для  $g \gg 1$ . Это подтверждает правильность приведённого численного решения дисперсионного уравнения.



**Рис.3.** Зависимость  $x_1$  от  $g$ . Красная сплошная кривая – решение дисперсионного уравнения, синий пунктир – асимптотика для случая  $g \gg 1$ , чёрный штрих-пунктир – асимптотика для случая  $g \ll 1$ .

Рассмотрим несколько примеров, задав конкретные значения параметров гофры. Пусть  $d = 0.1a$  во всех случаях. Получим зависимости частоты  $\omega_1$ , а также компонент электрического поля  $E_r$  и  $E_z$  от скорости заряда  $\beta$  для некоторых соотношений между параметрами  $d_1$  и  $d_3$  (рис. 4–6). Отметим, что во всех примерах нет ограничения для скорости частицы ( $\beta_{max} > 1$ ). Во всех рассмотренных случаях частота удовлетворяет условию применимости метода ЭГУ  $d\omega/c\beta \ll 1$  (данный параметр не более нескольких десятых). Из графиков можно сделать следующие выводы.

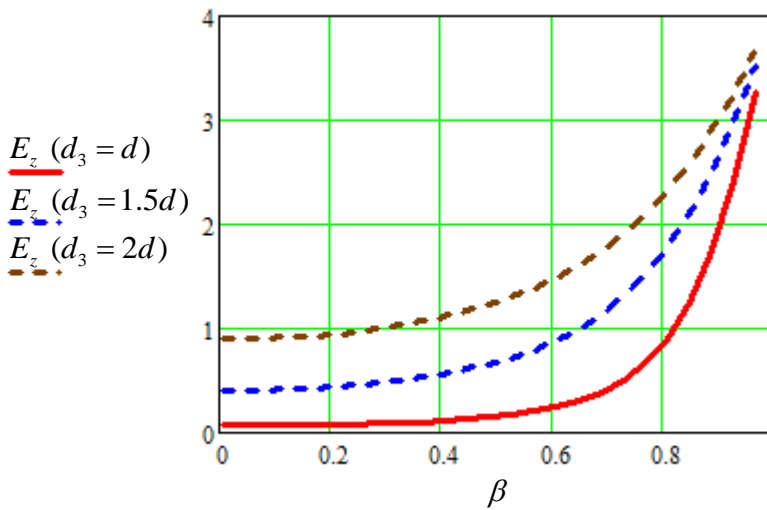
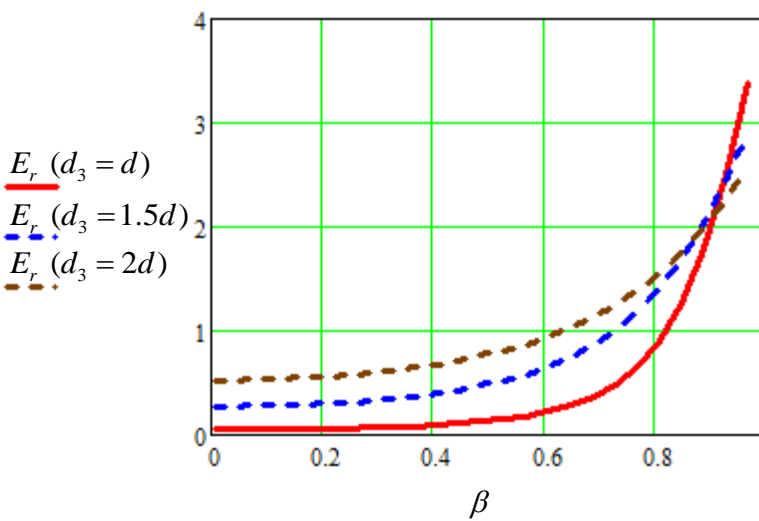
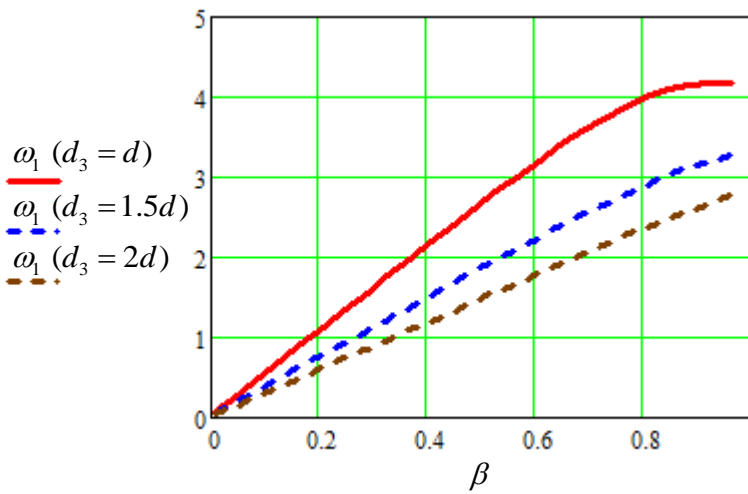
- Частота возбуждаемой моды, как правило, растёт с ростом скорости заряда от нуля (при  $\beta \rightarrow 0$ ) до некоторого конечного значения (при  $\beta \rightarrow 1$ ). Однако иногда имеет место иное поведение: максимум частоты достигается при скорости заряда, меньшей скорости света, а при дальнейшем увеличении скорости частота уменьшается.

- Увеличение глубины гофры приводит к понижению частоты моды.

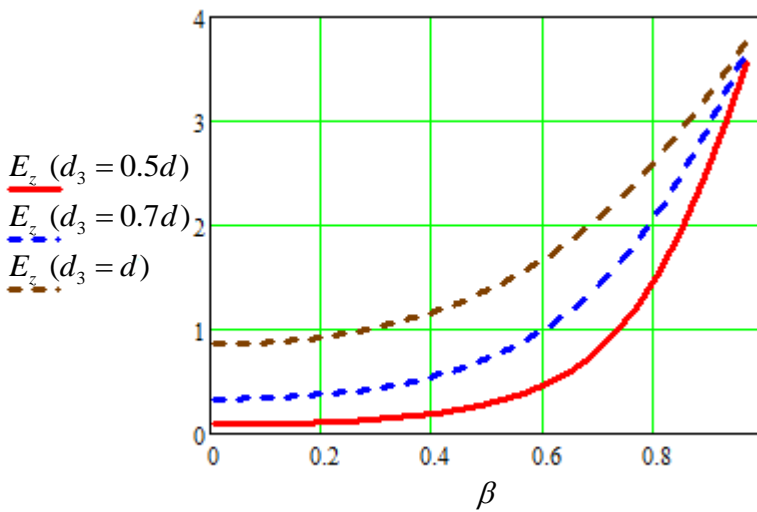
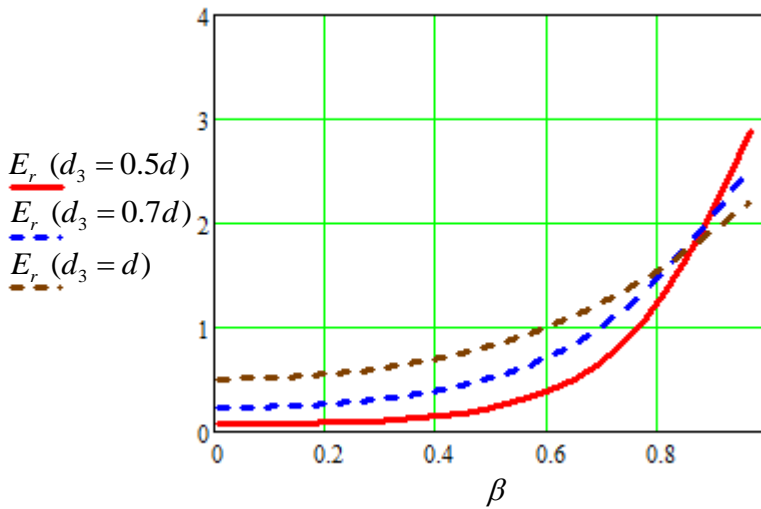
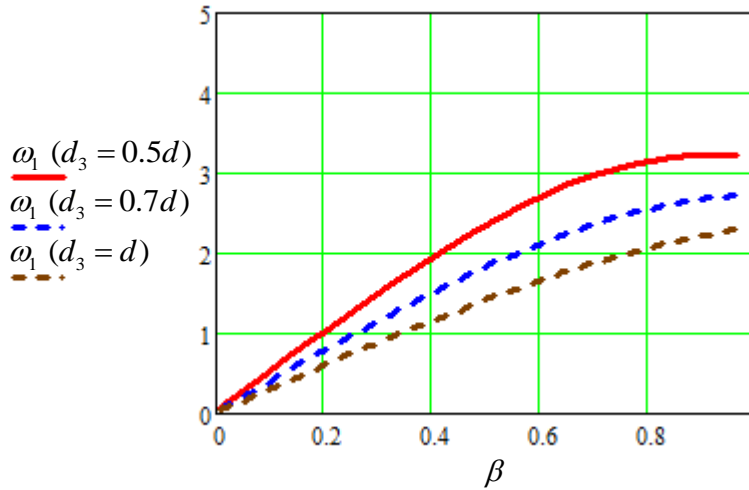
- Величина компонент поля излучения растёт с ростом скорости заряда.

- Увеличение глубины гофры обычно приводит к росту обеих компонент электрического поля, однако при скорости, близкой к скорости света, для радиальной компоненты может иметь место обратная закономерность.

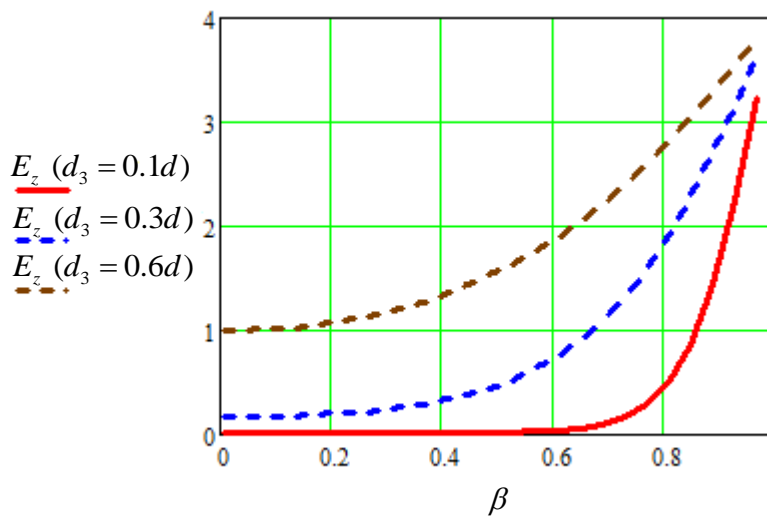
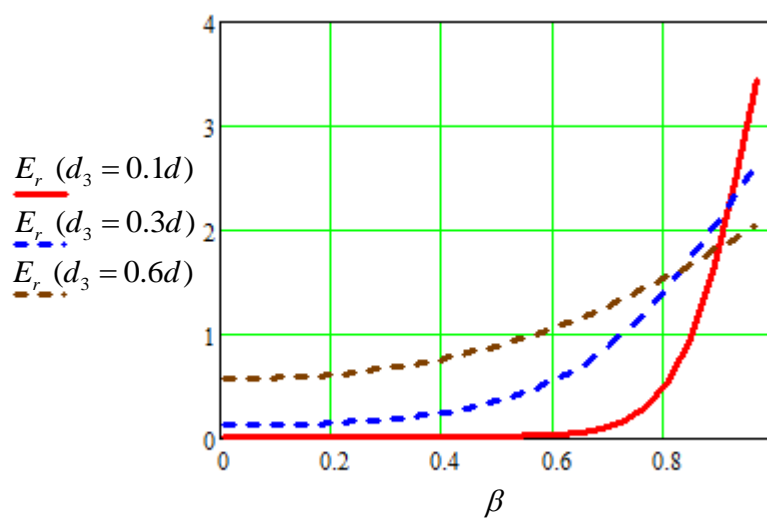
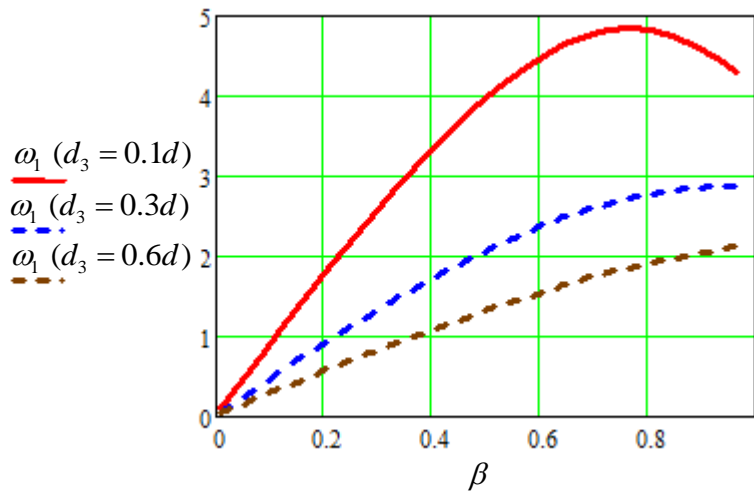




**Рис.4.** Зависимости от  $\beta$  частоты  $\omega_1$  (верхний график), амплитуды  $E_r$  (средний график) и амплитуды  $E_z$  (нижний график) в единицах  $q/a^2$  при  $d_1 = 0.1d$  для случаев  $d_3 = d$ ,  $d_3 = 1.5d$ ,  $d_3 = 2d$ . Расстояние от оси  $r = 0.5$ . Расстояния указаны в единицах  $a$ , частота - в единицах  $c/a$ , величина поля - в единицах  $q/a^2$ .



**Рис.5.** Зависимости от  $\beta$  частоты  $\omega_1$  (верхний график), амплитуды  $E_r$  (средний график) и амплитуды  $E_z$  (нижний график) в единицах  $q/a^2$  при  $d_1 = 0.5d$  для случаев  $d_3 = 0.5d$ ,  $d_3 = 0.7d$ ,  $d_3 = d$ . Расстояние от оси  $r = 0.5$ . Расстояния указаны в единицах  $a$ , частота - в единицах  $c/a$ , величина поля - в единицах  $q/a^2$ .



**Рис.6.** Зависимости от  $\beta$  частоты  $\omega_1$  (верхний график), амплитуды  $E_r$  (средний график) и амплитуды  $E_z$  (нижний график) в единицах  $q/a^2$  при  $d_1 = 0.7d$  для случаев  $d_3 = 0.1d$ ,  $d_3 = 0.3d$ ,  $d_3 = 0.6d$ . Расстояние от оси  $r = 0.5$ . Расстояния указаны в единицах  $a$ , частота - в единицах  $c/a$ , величина поля - в единицах  $q/a^2$ .

## Заключение

В настоящей работе было проанализировано излучение точечного заряда, движущегося равномерно вдоль оси круглого гофрированного волновода. При этом период и глубина структуры полагались малыми по сравнению с рассматриваемыми длинами волн и с радиусом волновода, что позволило использовать метод эквивалентных граничных условий. Были найдены интегральные представления для компонент полного поля в волноводе, проанализированы решения дисперсионного уравнения, получены выражения для компонент волнового поля, разработан алгоритм их расчёта и приведены типичные численные результаты.

Показано, что поле излучения содержит только одну волноводную моду ТМ-типа. Аналитически рассмотрены частные случаи  $g \ll 1$  и  $g \gg 1$ , где  $g$  – коэффициент, определяемый формулой (2.1.6). Оказалось, что при  $g \ll 1$  излучение экспоненциально мало, но при  $g > 1$  амплитуда излучаемой моды достаточно велика. Стоит отметить, что в этом случае она сопоставима с амплитудами мод черенковского излучения в заполненном диэлектриком волноводе.

Численный анализ показал, в частности, что частота возбуждаемой моды обычно растёт с ростом скорости заряда, хотя при высоких скоростях возможна ситуация, когда частота падает с ростом скорости. Величина компонент поля излучения растёт с ростом скорости заряда. Увеличение глубины гофры приводит к уменьшению частоты и, как правило, увеличению амплитуды компонент поля, хотя возможен и обратный эффект при достаточно большой скорости.

## Литература

1. Нефедов Е.И., Сивов А.Н. Электродинамика периодических структур. М., “Наука”, 1977, 208 с.
2. A. Mostacci, F. Ruggiero, M. Angelici, M. Migliorati, L. Palumbo, S. Ugoli. Wakefields due to surface waves in a beam pipe with a periodic rough surface // Physical review special topics –accelerators and beams, volume 5, 044401 (2002).
3. K. Bane, G. Stupakov. Terahertz radiation from a pipe with small corrugations // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 677 (2012) 67–73.
4. G. Geloni, V. Kocharyan, E. Saldin. Scheme for Generating and Transporting THz Radiation to the X-ray Experimental Floor at the LCLS Baseline, // DESY 11- 134, DESY, 2011.
5. A.A. Ponomarenko, M.I. Ryazanov, M.N. Strikhanov, A.A. Tishchenko. Terahertz radiation from electrons moving through a waveguide with variable radius, based on Smith–Purcell and Cherenkov mechanisms // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B 309 (2013) 223–225.
6. A.A. Ponomarenko , K.V. Lekomtsev , A.A. Tishchenko , M.N. Strikhanov, J. Urakawa. CST simulation of THz radiation from a channel with periodically variable radius // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B 355 (2015) 160–163.
7. A.A. Ponomarenko, A.A. Tishchenko , M.N. Strikhanov. THz polarization radiation from electrons passing corrugated dielectric tube under non-central propagation // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B (2017).
8. A.V. Tyukhtin. Method of particle energy determination based on measurement of waveguide mode frequencies // Journal of Physics: Conference Series, 357 (2012) 012003.

9. Болотовский Б.М. Теория эффекта Вавилова-Черенкова. УФН 75, 2 (1961), с. 295-350.
10. Зрелов В.П. Излучение Вавилова-Черенкова и его применение в физике высоких энергий. М., “Атомиздат”, 1969, 274 с.
11. Тюхтин А.В. Электромагнитное излучение заряженной частицы, движущейся в изотропной среде. СПб, изд-во СПбГУ, 2004, 48 с.
12. Болотовский Б.М., Столяров С.Н. О принципах излучения в среде с дисперсией // Проблемы теоретической физики. Сборник памяти И.Е. Тамма. М., “Наука”, 1972. С.267-280.