

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
Санкт-Петербургский государственный университет

Основная образовательная программа «Свободные искусства и науки»

Замарахина Мария Сергеевна

АНАЛИЗ АНАЛОГОВ ЛЯПУНОВСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ  
ЭМПИРИЧЕСКИХ МОД ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА  
ОСНОВЕ НЕЙРОСЕТЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Выпускная квалификационная работа по направлению подготовки  
035300/50.03.01 «Искусства и гуманитарные науки»

Профиль подготовки «Сложные системы»

Научный руководитель

Дмитриева Людмила Анатольевна,  
кандидат физ.-мат. наук, доцент  
кафедры высшей математики и  
математической физики СПбГУ

Санкт-Петербург  
2017

## Оглавление

Введение.....	3
1. Теоретические сведения.....	8
1.1. EMD-разложение.....	8
1.2. Динамические системы.....	11
1.2.1. Классификация динамических систем. Хаотические системы .....	12
1.3. Реконструкция динамической системы по временному ряду .....	14
1.3.1. Временная задержка (лаг).....	15
1.3.2. Размерность вложения .....	17
1.4. Корреляционная размерность .....	18
1.5. Показатели Ляпунова и локальные показатели разбегания (ЛПР) ..	20
1.5.1. Показатели Ляпунова.....	20
1.5.2. Локальные показатели разбегания .....	25
1.5.2.1. Нейросетевой метод вычисления спектров ЛПР .....	25
1.5.2.2. Критерии отбора нейросетей в комитет.....	26
1.5.2.3. Применение регрессионного анализа и алгоритм отбора регрессий для оценки ЛПР.....	27
2. Компьютерные вычисления и результаты .....	31
2.1. Предобработка данных .....	31
2.2. Построение корреляционной суммы, корреляционной размерности и проверка насыщения корреляционной размерности.....	34
2.3. Вычисление нейросетевых спектров ЛПР.....	43
2.3.1. Сумма первых удалённых мод и очищенные от первых мод данные .....	43
2.3.2. Неочищенные данные .....	50
2.3.3. Суррогатный ряд .....	52
3. Выводы.....	55
Список литературы .....	56
Благодарности.....	60

## Введение

Большое число современных научных задач сводится к необходимости описания и классификации того или иного процесса. При этом исследователь обыкновенно располагает лишь эмпирическими данными, которые являются единственной имеющейся реализацией исследуемого процесса на конечном временном отрезке. Таким образом, необходимость раскрыть общие принципы работы изучаемой системы встречает препятствие в виде ограниченности и неполноты имеющихся данных об этой системе. На помощь приходят методы теории сложности, позволяющие не только количественно, но и качественно интерпретировать данные различной природы.

Широкое распространение в последнее время получили методы нелинейной динамики. С их помощью можно выявить наличие детерминированной компоненты в изучаемой динамической системе. Исходя из факта наличия или отсутствия детерминированной динамики, можно попытаться сделать выводы о природе исследуемого процесса, и, если повезет, отнести его к одной из следующих групп: периодические, квазипериодические, случайные и хаотические процессы. Однако, подавляющее большинство процессов, окружающих нас, являются так или иначе понимаемой суперпозицией указанных выше процессов. Умение выделить отдельные "чистые" составляющие является одной из наиболее актуальных задач анализа временных рядов, которая, несмотря на многочисленные исследования, до сих пор окончательно не решена.

Настоящая работа посвящена исследованию некоторых аспектов финансовых временных рядов. Согласно классической гипотезе эффективного рынка (Efficient Market Hypothesis, EMH), движение цены есть случайное блуждание. Иными словами, логарифмы приращения цены могут быть смоделированы с помощью белого шума – некоррелированных случайных величин, распределённых по закону Гаусса. Из этого следует,

что финансовые временные ряды порождаются случайными процессами, и возможность предсказания для них отсутствует. В настоящем исследовании выдвигается гипотеза, что динамика финансовых рынков не является абсолютно случайной, а определяется также и детерминированной хаотической составляющей. Количественной мерой хаоса в динамических системах традиционно является старший показатель Ляпунова, но далеко не всегда его можно вычислить с приемлемой погрешностью. Поэтому в данном исследовании используется сравнительно новая методика, которая базируется на вычислении спектров локальных показателей разбегания (ЛПР) близких траекторий на реконструированном аттракторе [30] с помощью комитета искусственных нейронных сетей.

**Целью** настоящей работы является определение структуры исследуемых финансовых временных рядов, более конкретно – выявление детерминированной компоненты и ответ на вопрос, является ли эта компонента хаотической.

Поставленные **задачи** были таковы:

- предварительная обработка данных;
- выделение с помощью EMD-алгоритма (Empirical Mode Decomposition) компонент финансовых временных рядов, относящихся к разным типам процессов;
- определение оптимальных параметров реконструкции лагового пространства выделенных EMD-компонент;
- построение корреляционных суммы и корреляционных размерностей (реализовано в среде Matlab) реконструированных аттракторов выделенных EMD-компонент;
- вычисление методами нейросетевых технологий спектров локальных показателей разбегания на реконструированных аттракторах – характеристики, которая является аналогом старшего ляпуновского показателя выделенных EMD-компонент;

- анализ локальных показателей разбегания выделенных EMD-компонент с целью детектирования хаотической компоненты в финансовых временных рядах.

### *Обзор литературы*

В ряде современных исследований проводится анализ финансовых временных рядов с применением тех же инструментов, которые были выбраны и для данной работы. Рассмотрим несколько работ последних лет.

В [23] предлагается алгоритм предсказания стоковых индексов, предварительно очищенных EMD-разложением. Использован метод реконструкции аттрактора, прогнозирование осуществляется с помощью нейронной сети. Вычисления проводятся непосредственно для рядов значений финансовых индексов.

В [24] также предлагается предсказывать индексы с помощью нейросетей, однако архитектура сетей здесь иная, а предобработка данных заключается в их нормализации.

В [25] предлагается предсказывать каждый отдельный компонент EMD-разложения финансового ряда отдельной сетью, а затем объединять их в комитет, и от комитета получать предсказание значений исходного ряда.

В [17] предлагается нейросетевой метод для вычисления показателей Ляпунова. Анализируемые временные ряды перед погружением в лаговое пространство предлагается очищать с помощью EMD-разложения.

Стоит отметить цикл работ [26-28], посвященных поиску решения проблем вычисления старшего показателя Ляпунова и всего спектра ляпуновских экспонент по коротким временным рядам методами нейросетевого прогнозирования. В работе [29] было показано, что предложенный авторами [26-28] нейросетевой метод вычисления старшего ляпуновского показателя после некоторой его модификации хорошо работает

только для одномерных отображений, где этот показатель является единственным. В [29] так же было отмечается, что метод, предложенный в [26-28], дает положительный ляпуновский показатель на случайных временных рядах и сталкивается с серьезными проблемами при вычислении нулевого показателя на периодических рядах. Попытка преодоления указанных проблем в работе [29] показала, что идея, выдвинутая в [26-28] после ее значительной модификации имеет шанс стать рациональной основой для создания алгоритма расчета новой характеристики – локальных показателей разбегания (ЛПР) близких траекторий на реконструированном аттракторе временного ряда. В [30] предлагается нейросетевой метод вычисления ЛПР, который использован и в настоящей работе. В [30] временные ряды так же предварительно проходят процедуру EMD-разложения и погружения в лаговое пространство.

Таким образом, можно отметить актуальность настоящего исследования и вполне обоснованный выбор инструментов. Новизна настоящей работы заключается в том, что объединение алгоритмов EMD-разложения, реконструкции аттракторы и вычисления ЛПР проводится не для трендовых ценовых рядов (например, финансовых индексов), а для рядов их логарифмических доходностей. Кроме того в настоящей работе изучаются высокочастотные временные ряды (ряды с минутной нарезкой).

### *Данные*

В настоящей работе анализируются ряды значений фондовых индексов MICEX и S&P500. Индекс ММВБ (MICEX) – ценовой, «взвешенный по рыночной капитализации композитный индекс российского фондового рынка, включающий 50 наиболее ликвидных акций крупнейших российских эмитентов»[32]. Индекс Standard&Poor's 500 (S&P 500) – «фондовый индекс, в корзину которого включено 500 избранных акционерных компаний США, имеющих наибольшую капитализацию» [32]. Значения индексов взяты за

период с 1 августа 2016 года по 30 декабря 2016 года с минутной нарезкой. Это максимально высокая частота нарезки, и такие данные редко используются для исследований. Источник данных – сайт [finam.ru](http://finam.ru), где в свободном доступе можно скачать ряды котировок различных финансовых инструментов. Далее в работе для удобства данные по этим индексам будут обозначаться в соответствии с их тиккерами – MICEX и SNP.

# 1. Теоретические сведения

## 1.1. EMD-разложение

EMD (англ. Empirical Mode Decomposition) – метод разложения сигналов на определённые функции, которые получили название «эмпирических мод». Данный метод является «адаптивной итерационной вычислительной процедурой», в результате которой исходные данные, непрерывные или дискретные, раскладываются на эмпирические моды или внутренние колебания (англ. Intrinsic mode functions, IMF). Если в случае традиционного гармонического анализа модель исследуемого сигнала задаётся заранее, то эмпирические моды, наоборот, вычисляются в ходе процесса, что и подчеркивается в названии метода. Благодаря этому, данный метод может быть использован при обработке нестационарных временных рядов или процессов [5].

В основе модовой декомпозиции сигналов лежит предположение о том, что любые данные состоят из различных внутренних колебаний, иными словами, в любой момент времени имеют некоторое число таких сосуществующих внутренних колебаний. Каждое колебание может быть представлено модовой функцией, которая имеет собственные экстремумы и пересечения с нулевой линией. Согласно концепции метода, любые данные могут быть представлены в виде суммы модовых функций, наложенной на тренд сигнала [6].

Эмпирическая мода – это функция, которая обладает следующими свойствами[5]:

- количество экстремумов функции (максимумов и минимумов) и количество пересечений нуля не должны отличаться более чем на единицу;
- в любой точке функции среднее значение огибающих, определенных локальными максимумами и локальными минимумами, должно быть нулевым.



Любую функцию и любой произвольный сигнал, изначально содержащие как минимум два экстремума, можно разложить на семейство функций IMFs и остаточный тренд. Алгоритм EMD-разложения заключается в следующем.

Пусть  $X(t)$  – анализируемый сигнал. Модовая декомпозиция заключается в последовательном вычислении эмпирических мод  $c_j$  и остатков  $r_j = r_{j-1} - c_j$ , где  $j = 1, 2, \dots, n$  и  $r_0 = X(t)$ . В результате, сигнал представляется в таком виде:

$$X(t) = \sum_{j=1}^n c_j + r_n$$

где  $n$  – количество эмпирических мод, которое устанавливается в ходе вычислений [5].

Рассмотрим алгоритм метода подробнее:

1. Определяются экстремумы сигнала.
2. Строятся две огибающие сигнала: нижняя ( $v$ ) и верхняя ( $\mu$ ). При этом можно использовать, например, кубические сплайны [5].
3. Вычисляются среднее значение  $m_l$  и разность  $h_l$  между сигналом и его средним значением:

$$X(t) - m_l = h_l$$

Если полученная разность удовлетворяет определению эмпирической моды, процесс останавливается. Получившееся среднее значение в таком случае будет эмпирической модой  $c_1$ . Если же полученная разность не удовлетворяет определению IMF, необходимо повторить те же шаги уже для полученной разности  $h_l$  (нахождение экстремумов, построение огибающих, вычисление среднего и его вычитание):

$$h_l - m_{l1} = h_{l1}$$

В результате, после выполнения некоторого числа итераций вида

$$h_{I(k-1)} - m_{Ik} = h_{Ik}$$

должна получиться функция

$$c_I = h_{Ik},$$

которая будет удовлетворять определению эмпирической моды. Как только эмпирическая мода, обозначаемая  $c_I$ , выделена, итерации прекращаются [5].

Вычисляется остаток  $r_I = X - c_I$ , и весь алгоритм повторяется снова, но уже для остатка  $r_I$ . Получение остатков происходит до тех пор, пока вновь вычисленный остаток не станет представлять собой монотонную функцию, из которой уже не будет возможности выделить эмпирическую моду.

EMD-разложение рядов успешно применяется в ряде работ [16-17, 23, 25, 30] в качестве фильтра. Несколько первых мод могут быть интерпретированы как шумовая компонента данных и вычтены из исходного анализируемого ряда. Оставшиеся моды полагаются «содержательной» частью данных, с которой проводится дальнейшее исследование. Однако, как было показано в бакалаврской ВКР Ганина Д.В., удаление первых мод из хаотических рядов, таких, например, как первая координата системы Лоренца, или временного ряда итераций логистического отображения в хаотическом режиме приводит к разрушению хаоса. Поэтому для каждого типа временных рядов природа первых EMD-мод должна быть тщательно исследована. Для финансовых данных удаление первых мод, действительно, является фильтрацией. Однако в зависимости от длины исходного ряда и его структуры количество эмпирических мод в EMD-разложении всегда получается разным, поэтому остро стоит вопрос о том, сколько же первых мод необходимо вычитать. В данной работе это решалось методом перебора, то есть из ряда последовательно вычитались первые 2,3,.. моды, и затем рассматривались некоторые характеристики, такие как корреляционная

сумма, насыщение корреляционной размерности и другие, позволяющие сказать, являются ли данные случайным шумом или в них присутствует детерминированная компонента. Эти характеристики вычислялись как для остатка, так и для вычтенной суммы первых мод. Подробнее этот процесс раскрывается в главе "Компьютерные вычисления и результаты".

## 1.2. Динамические системы

Динамической системой может считаться любая система, состояние которой изменяется во времени. Такая система может иметь произвольную природу – физическую, химическую, экономическую и т.д. и может быть описана в математической форме. Изменения состояния системы во времени называется её эволюцией. Динамические системы могут быть детерминированными или случайными. Математическое описание эволюции случайных динамических систем происходит в терминах случайных процессов и в данном разделе рассматриваться не будет.

Особое место среди детерминированных динамических систем занимают так называемые механические системы. Особенностью этих систем является тот факт, что фазовое пространство механической системы обязательно является четно-мерным. Понятие фазового пространства приводится ниже. Перейдем к краткому описанию отличных от механических детерминированных динамических систем. Каждое состояние динамической системы может быть описано  $m$ - мерным вектором  $s \in \mathbb{R}^m$ . Если время изменяется непрерывно, то есть  $t \in \mathbb{R}$ , динамическую систему можно определить с помощью дифференциального уравнения вида:

$$\frac{ds}{dt} = f(s)$$

где  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – это некое детерминированное отображение. В случае, когда время изменяется дискретно, эволюцию динамической системы можно определить так:

$$s_{t+1} = F(s_t)$$

где  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – отображение, которое задаёт изменение состояния системы за один шаг времени. Если указанные выше отображения - линейны, то получаются линейные динамические системы. Нелинейные отображения порождают нелинейные системы.

Уравнения, описывающие изменения состояния, называются уравнениями эволюции системы. Более строгое определение динамической системы можно найти, например, в [1].

Упорядоченное множество состояний системы  $s_t \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, t = 1, 2, \dots$  (в дискретном случае) или  $s(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{R}$  (в непрерывном случае) называется фазовой траекторией (в непрерывном случае) или орбитой (в дискретном случае) динамической системы. Фазовым пространством называют пространство  $\Omega$ , которому принадлежат все фазовые траектории (орбиты) с различными начальными данными.

### 1.2.1. Классификация динамических систем. Хаотические системы

Когда система имеет стохастическую динамику, точки её фазовой траектории равномерно заполняют некоторый объём фазового пространства. Для траектории детерминированной периодической системы характерна форма поверхности какой-либо симметричной фигуры. Если же система демонстрирует хаотическое поведение, точки её фазовой траектории будут расположены на некоторой ограниченной области фазового пространства, которая будет при этом обладать определёнными особенностями.

Вне зависимости от начальных условий, в процессе эволюции изучаемой системы её фазовая траектория (орбита) приходит в область фазового пространства, которое называется аттрактором. Таким образом, можно сказать, что все фазовые траектории стягиваются к аттрактору "в пределе бесконечного времени".

Существуют всего четыре типа аттракторов: аттрактор типа предельная точка, предельный цикл, квазипериодический тор и хаотический аттрактор.

Для аттракторов хаотических систем характерны следующие признаки. Во-первых, такой аттрактор представляет собой сложный геометрический объект. Если для нехаотической системы аттрактором является множество с целочисленной метрической размерностью, то аттрактор хаотической системы имеет дробную фрактальную размерность. Из-за этого аттракторы хаотических систем принято называть также странными аттракторами. Понятие фрактальной размерности или размерности Хаусдорфа-Безиковича является обобщением обычной размерности, которое позволяет более точно отразить структуру изучаемого объекта [2]. Хотя странный аттрактор занимает ограниченную область фазового пространства, траектории на нём никогда не пересекаются.

Во-вторых, траектории, имеющие очень близкие на момент начала наблюдения точки, в процессе эволюции экспоненциально отдаляются друг от друга [3]. Это является отражением того, что хаотические системы чувствительны к начальным условиям и реагируют на сколь угодно малое их изменение. Количественной мерой скорости отдаления или, как говорят, разбегания траекторий на аттракторе являются положительные показатели Ляпунова. Общее количество показателей Ляпунова равно количеству степеней свободы динамической системы [1]. Наличие у системы хотя бы одного положительного показателя Ляпунова является признаком её хаотичности.

### 1.3. Реконструкция динамической системы по временному ряду

Если известны уравнения эволюции, определяющие развитие системы в будущем, получение более глубокой информации о системе возможно аналитическим путём. Однако в большинстве случаев закономерности развития процесса неизвестны. Зачастую исследователям приходится работать с временными рядами, которые представляют собой последовательность чисел, значения некоторого процесса в дискретные моменты времени. Временной ряд понимается как одномерная проекция сложного многомерного поведения системы, или некоторая «наблюдаемая» скалярная функция от состояния  $S_t$  динамической системы  $s_{t+1} = F(s_t)$ . Чтобы исследовать систему, породившую временной ряд, необходима процедура построения аналога фазового пространства и аналога аттрактора. Такая процедура называется погружением временного ряда в лаговое пространство [4].

Чтобы перейти от значений временного ряда к лаговым векторам делается следующее. Пусть имеется временной ряд  $\{x_t\}_{t=1}^T$ . Определив размерность вложения  $m$  и временную задержку или лаг  $\tau$ , можно построить лаговый вектор  $z_t$ , который определяется соотношением

$$z_t = \left( x_t, x_{t+\tau}, \dots, x_{t+\tau(m-1)} \right)$$

Множество лаговых векторов  $\{z_t\}_{t=\tau(m-1)+1}^T$  при изменении  $t$  сформирует реконструированную траекторию, которая будет иметь реконструированный аттрактор. При правильно подобранных параметрах реконструкции  $m$  и  $\tau$ , согласно теореме Такенса [3], характеристики у реконструированной системы  $z_{t+1} = G(z_t)$  и исходной  $s_{t+1} = F(s_t)$  должны совпадать. К таким характеристикам, в частности, относятся фрактальные размерности аттрактора и все показатели Ляпунова.

Выбор параметров реконструкции – очень важный и тонкий момент в анализе хаотических процессов. С одной стороны, от этого зависит адекватная оценка структуры анализируемых данных и получение достоверной информации об исследуемой системе. С другой, верно определённые параметры позволяют получить статистически значимое предсказание хаотического процесса на реконструированном аттракторе и помогают выбрать подходящую архитектуру нейронной сети, которая реализует это предсказание.

### 1.3.1. Временная задержка (лаг)

Большое значение имеет правильный выбор временной задержки  $\tau$ . Необходимо стремиться выбрать ее так, чтобы корреляция между  $x_k$  и  $x_{k+\tau}$  была по возможности минимальной. Традиционный выбор оптимального лага  $\tau$  основывается на анализе автокорреляционной функции исследуемого временного ряда [7]. Проводится вычисление автокорреляционной функции временного ряда по формуле:

$$B(\tau) = \frac{\sum_{k=1}^m (x_k - \bar{x})(x_{k+\tau} - \bar{x})}{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2},$$

где  $m = N - \tau$ ,  $\bar{x}$  – выборочное среднее для исходного временного ряда  $x(t)$ .

Задержка или лаг выбирается близким к первому нулю автокорреляционной функции. Рассмотренный метод базируется на идее того, что компоненты, образующие лаговый вектор, не будут зависеть друг от друга, и таким образом лаговые вектора будут содержать наибольшее количество информации о системе [1].

Однако не всегда корреляция между близкими значениями ряда бывает линейной. Альтернативный один способ определения оптимального лага [9] основан на вычислении средней взаимной информации (mutual information) между двумя измерениями. В отличие от автокорреляционной функции, взаимная информация учитывает нелинейные корреляции [9,10]. В данной работе для вычисления оптимального лага использован именно этот метод.

Суть метода состоит в следующем. Пусть даны два множества измерений  $A$  и  $B$ . Взаимная информация между элементом  $a_i$  множества  $A$  и элементом  $b_j$  множества  $B$  определяется как количество информации, которое имеют измерения  $a_i$  и  $b_j$  по отношению друг к другу:

$$I_{a,b} = \ln \left[ \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right]$$

Если измерения независимы, то есть  $P_{AB}(a_i, b_j) = P_A(a_i)P_B(b_j)$ , то взаимная информация равна нулю. Усреднив по всем измерениям, получим:

$$I_{AB} = \sum_{a,b} P_{AB}(a_i, b_j) \ln \left[ \frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right]$$

Заменяя  $a_i$  и  $b_j$  на  $x_k$  соответственно, получаем среднюю взаимную информацию как функцию временной задержки. Т.е.

$$S(\tau) = - \sum_{ij} p_{ij}(\tau) \ln \frac{p_{ij}(\tau)}{p_i p_j},$$

где  $p_i$  – вероятность найти данные из временного ряда в  $i$ -том интервале,  $p_{ij}$  – совместная вероятность того, что наблюдение попадет в  $i$ -й интервал, а за время наблюдения  $\tau$  позже наблюдение попадет в  $j$ -й интервал.

Теоретически, это выражение не зависит от длины интервала. Доказано, что можно считать  $\tau$  разумным выбором временной задержки,



если взаимная информация достигает явного минимума именно в точке  $\tau$  [10]. Таким образом,  $\tau$  выбирается равной времени первого минимума взаимной информации.

### 1.3.2. Размерность вложения

Размерность вложения  $m$  имеет простую геометрическую интерпретацию – она показывает, какую размерность будет иметь реконструированное фазовое пространство системы. Если её значение слишком мало – теряется возможность раскрыть геометрию аттрактора; если же оно велико – то большинство численных методов, позволяющих охарактеризовать основные свойства динамики системы, дадут неправильные результаты.

Теоретически размерность вложения  $m$  определяется по формуле  $m \geq 2[d] + 1$ , где  $d$  – фрактальная размерность аттрактора,  $[d]$  – обозначает целую часть фрактальной размерности. Но поскольку теоретическое описание системы известно далеко не всегда, на практике размерность вложения зачастую вычисляют на основе алгоритма ложных ближайших соседей (falsenearestneighbors, FNN).

Идея алгоритма ложных ближайших соседей заключается в следующем [11].

Для каждой точки  $\vec{x}_i$  временного ряда ищем ее ближайшего соседа  $\vec{x}_j$  в  $m$ -мерном пространстве. Вычисляем расстояние  $\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|_m$  в  $m$ -мерном пространстве. Повторяем итерацию для обеих точек и вычисляем отношение расстояний в  $m$ -мерном и  $(m+1)$ -мерном пространстве:

$$R_i = \frac{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|_{m+1}}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|_m}$$

Если  $R_i$  превышает заданный порог  $R_t$ , то считаем рассмотренную точку имеющей ложного ближайшего соседа. Критерием того, что размерность вложения оптимальна, является тот факт, что доля точек, в которых  $R_i > R_t$  равна нулю, или достаточно мала [10,11].

#### 1.4. Корреляционная размерность

Существуют разные способы оценки размерности реконструированного аттрактора. Наиболее популярным является вычисление корреляционной размерности.

Обозначим корреляционную размерность аттрактора как  $D_2$ . Вычисление  $D_2$  основано на методе box-counting, при котором всё  $m$ -мерное пространство, занимаемое аттрактором, разбивается на равные  $m$ -мерные кубики со стороной размера  $\varepsilon$ . Корреляционная размерность вычисляется по формуле [2]:

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2}{\ln \varepsilon},$$

где  $N$  – число кубиков,  $p_i$  – вероятность того, что в кубике находится одна точка аттрактора, соответственно,  $p_i^2$  – вероятность того, что в кубике находится две точки аттрактора.

Введём понятие корреляционного интеграла. Считается количество точек реконструированного аттрактора  $x_i$ , находящихся на расстоянии, не превышающем некоторую величину  $\varepsilon$ . Эта процедура повторяется для всех точек, в результате чего можно записать выражение [7]:

$$C_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \Theta(\varepsilon - \|\vec{x}(i) - \vec{x}(j)\|),$$

где  $N$  – количество точек,  $\Theta(x)$  - функция Хевисайда:  $\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ .

Убрав предел, получим формулу для вычисления корреляционной суммы – оценки корреляционного интеграла для конечной временной последовательности длиной  $N$ . Очевидно, что  $C(\varepsilon)$  растёт с увеличением  $\varepsilon$ . При этом, если реконструированный аттрактор одномерен, то  $C(\varepsilon) \sim \varepsilon$ , а если двумерен, то  $C(\varepsilon) \sim \varepsilon^2$ . В общем случае можно записать

$$C(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D_2},$$

где  $D_2$  – корреляционная размерность аттрактора. Данное равенство выполняется только при сравнительно малых  $\varepsilon$ . Прологарифмировав обе части полученного выражения, мы сможем записать его в виде:

$$\ln C(\varepsilon) = D_2 \ln \varepsilon \quad \text{или} \quad D_2 = \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}$$

Таким образом, размерность восстановленного аттрактора можно определить, как наклон линейного участка графика зависимости  $\ln C(\varepsilon)$  от  $\ln \varepsilon$ .

В идеале расчёты должны проводиться для бесконечных временных последовательностей, однако в реальности мы имеем дело с конечными рядами, что приводит к определённым сложностям. Если длина ряда слишком мала, появляются ошибки в вычислении, если же ряд слишком длинный – мощности имеющейся техники зачастую не хватает для его обработки. Эту проблему можно решить, используя достаточно длинный ряд. Существуют различные критерии, устанавливающие минимальную длину ряда, при которой можно избежать систематических вычислительных ошибок. В данной работе это критерий Цониса [31]. Он определяет минимальную длину ряда как  $N > 10^{0.4D}$ , где  $D$  – предполагаемая размерность восстановленного аттрактора.

## 1.5. Показатели Ляпунова и локальные показатели разбегания (ЛПР)

### 1.5.1. Показатели Ляпунова

Характеристикой хаотических процессов являются положительные показатели Ляпунова ( $\lambda$ ). Как известно, для хаотической системы даже очень малые изменения начальных условий могут повлечь значительные последствия в эволюции системы. Показатель Ляпунова может интерпретироваться как мера того, насколько сильны будут эти последствия: чем чувствительнее система к начальным условиям, тем он больше. Поскольку в  $n$ -мерном фазовом пространстве есть  $n$  независимых направлений, то систему характеризуют  $n$  ляпуновских показателей, которые иногда называют спектром Ляпунова. Иными словами, количество показателей Ляпунова совпадает с количеством степеней свободы системы [3,4]. Показатели Ляпунова могут быть как положительными, так и отрицательными, а также нулевыми. Наличие у динамической системы положительного ляпуновского показателя является одним из признаков хаотичности этой системы [1].

Рассмотрим динамическую систему с дискретным временем:

$$z_{t+1} = F(z_t)$$

где  $z_t$  – точки траектории динамической системы,  $t = 1, 2, \dots$  – нумерация точек траектории,  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – некое отображение, определяющее эволюцию системы. Малое возмущение  $\varepsilon_t$  траектории меняется с течением времени  $t$ . Построив ряд Тейлора для данного отображения и пренебрегая старшими степенями в нём, получим такую оценку динамики возмущения  $\varepsilon_t$  [17]:

$$z_{t+1} + \varepsilon_{t+1} = F(z_t + \varepsilon_t) \approx F(z_t) + DF(z_t)\varepsilon_t = z_{t+1} + DF(z_t)\varepsilon_t$$

$$\varepsilon_{t+1} = DF(z_t)\varepsilon_t$$

где  $DF(z_t)$  – матрица Якоби.

Последовательно применяя полученную формулу снова и снова, получим соотношение [17]:

$$\varepsilon_{t+L} = DF^{(L)}(z_t) \varepsilon_t$$

$$DF^{(L)}(z_t) = DF(z_{t+L-1})DF(z_{t+L-2}) \dots DF(z_{t+1})DF(z_t)$$

Введённая матрица  $DF^{(L)}(z_t)$  здесь описывает возмущения  $\varepsilon_t$  за  $L$  шагов.

Если  $z_t$  лежит на аттракторе динамической системы, то при определённых условиях, согласно теореме Оселедеца [14], при  $L \rightarrow \infty$  собственные числа  $\{\mu_j\}_{j=1}^m$  матрицы

$$S(L, z_t) = ([DF^{(L)}(z_t)]^T DF^{(L)}(z_t))^{1/2L}$$

не зависят от начальной точки  $z_t$  и позволяют определить Глобальные Показатели Ляпунова (ГПЛ) следующим образом [17]:

$$\{\lambda_j = \log(\mu_j)\}_{j=1}^m .$$

При конечном  $L$  и определённой  $z_t$  собственные числа матрицы  $S(L, z_t)$  зависят от  $L$  и  $z_t$ , что определяет Локальные Показатели Ляпунова (ЛПЛ) таким образом [17]:

$$\{\lambda_j(L, z_t) = \log(\mu_j(L, z_t))\}_{j=1}^m$$

На качественном уровне показатель Ляпунова является величиной, отражающей экспоненциальную скорость разбегания близких траекторий на аттракторе. Пусть  $x(t_0)$  – точка, принадлежащая аттрактору динамической системы в начальный момент времени  $t_0$ . Возьмём другую точку  $\tilde{x}(t_0)$  на аттракторе, находящуюся на малом расстоянии  $\varepsilon(t_0)$ , так что

$\|\tilde{x}(t_0) - x(t_0)\| = \varepsilon(t_0)$ . Спустя время  $\Delta t$ , точки траектории  $x(t_0)$  и  $\tilde{x}(t_0)$  эволюционируют соответственно в  $x(t)$  и  $\tilde{x}(t)$ , а расстояние между ними в  $\varepsilon(t)$ , где  $t = t_0 + \Delta t$  (см. рисунок 1).

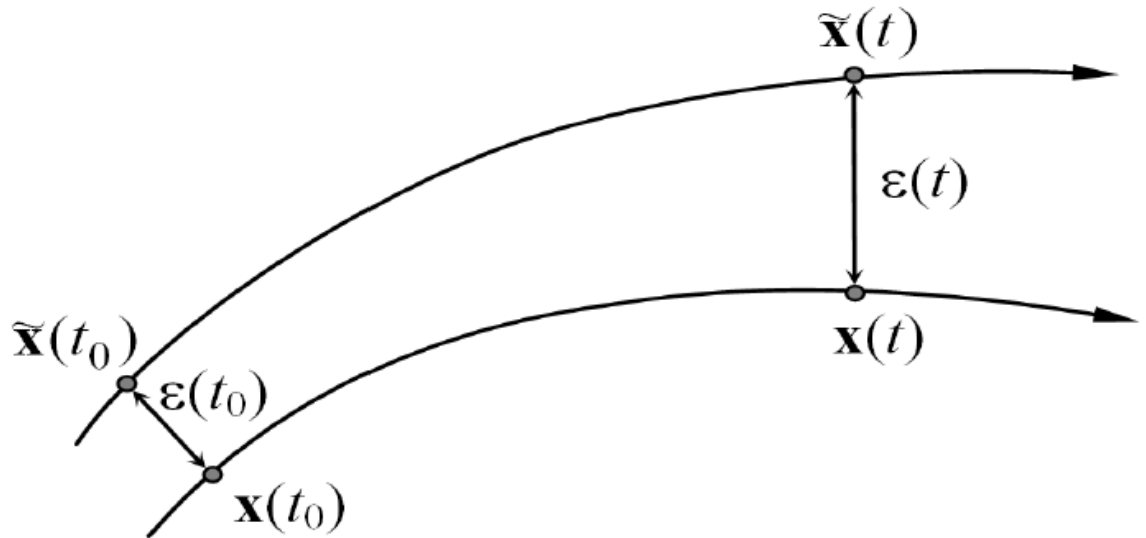


Рисунок 1. К определению показателя Ляпунова [26].

Упрощённо говоря,  $\varepsilon(t) \cong \varepsilon(t_0)e^{\lambda \Delta t}$ , где  $\lambda$  есть параметр, называемый показателем или экспонентой Ляпунова. Проведя ряд преобразований, получим [26]:

$$\lambda \cong \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t_0)}$$

Учитывая то, что расстояние  $\varepsilon(t)$  не должно превышать размеры аттрактора  $diam A$  и то, что значение  $\lambda$  следует рассматривать как усреднённое по всем начальным точкам  $x(t_0)$  аттрактора, можно привести строгое определение старшего показателя Ляпунова [26]:

$$\lambda = E_{\mathbf{x}(t_0) \in A} \left\{ \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow \infty \\ \varepsilon(t) < diam A}} \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t_0)} \right\}.$$

Существует стандартный алгоритм для вычисления старшего ляпуновского показателя по реконструированной траектории – алгоритм Бенеттина [18]. Для таких расчетов необходимо наличие множества фазовых траекторий на аттракторе, которые в определенные моменты времени локализованы в достаточно малых фазовых объемах. Однако в работе с короткими временными рядами аналог вышеупомянутого метода не даёт удовлетворительных результатов [17].

Также необходимо отметить и другие методы вычисления характеристик системы и, в частности, старшего ляпуновского показателя непосредственно по временному ряду. Например, метод Кантца, описанный в [13,15], алгоритм Вольфа [19], алгоритм Сано и Савада [20] и алгоритм Экмана [21]. Как показали современные исследования [16,17], эти методы и их модификации неустойчивы, а старший показатель Ляпунова для финансовых данных вычисляется с неприемлемой погрешностью и потому не может служить «количественной мерой присутствия хаоса» в финансовых данных.

Особого внимания заслуживает цикл работ под авторством В. А. Головки [26-28], посвященных поиску решения проблем вычисления старшего показателя Ляпунова и всего спектра ляпуновских экспонент по коротким временным рядам методами нейросетевого прогнозирования. Основная идея оценки старшего показателя Ляпунова была такова.

1. Создавалась нейронная сеть, имеющая архитектуру многослойного персептрона с  $k$  входами и одним выходом. Эта сеть обучалась прогнозированию по методу скользящего окна:

$$x(t+i\tau) = F(x(t+(i-1)\tau), x(t+(i-2)\tau), \dots, x(t+(i-k)\tau)), i = \overline{1, n}$$

где  $k \geq m-1$  размер окна ( $m$  - размерность вложения).

2. Для любой точки обучающей выборки  $x(t)$  формировался набор данных  $\{x(t), x(t-\tau), \dots, x(t-(k-1)\tau)\}$ .

3. С помощью вышеуказанной нейронной сети совершался  $n$  - шаговый прогноз (то есть "прогноз по прогнозу"), а именно вычислялся вектор  $\{\hat{x}(t + \tau), \hat{x}(t + 2\tau), \dots, \hat{x}(t + n\tau)\}$ .
4. Строилась возмущенная точка ряда  $x'(t) = x(t) + d_0$ , где  $d_0 \approx 10^{-8}$ . Затем на обученную сеть подавался вектор  $\{x'(t), x(t - \tau), \dots, x(t - (k - 1)\tau)\}$  и, аналогично шагу 3, вычислялись  $n$  - шаговые прогнозы  $\hat{x}'(t + i\tau), i = \overline{1, n}$ .
5. Оценивался  $\ln d_i = \ln |x'(t + i\tau) - x(t + i\tau)|, i = \overline{1, n}$  и выбирались только те точки, где  $\ln d < 0$ .
6. Строился график  $\ln(d_n)$  от  $n$ .
7. Строилась регрессионная прямая для выбранных точек и вычислялся её наклон, который предполагался равным старшему показателю Ляпунова.

Результаты в [26-28] были проверены лишь на двух хаотических рядах: порожденных системой Лоренца и системой Хенона, находящихся в хаотических режимах. Позднее в работе [29] было показано, что данный алгоритм имеет ряд недостатков, например, даёт положительный ляпуновский показатель на случайных рядах. Однако после существенных модификаций приведённого алгоритма вычисления старшего ляпуновского показателя авторами [30] была введена новая нейросетевая характеристика временного ряда – спектр локальных показателей разбегания (ЛПР) близких траекторий на реконструированном аттракторе этого ряда. Набор правильно подобранных статистик спектра ЛПР отражает свойства ляпуновских показателей реконструированной динамической системы. В работе [30] также был построен нейросетевой алгоритм вычисления спектра ЛПР.



## 1.5.2. Локальные показатели разбегания

В анализе коротких временных рядов спектр "нейросетевых" *локальных показателей разбегания* (ЛПР, или local rates of divergence, LDR) [30] (как уже отмечалось в конце раздела 1.5.1) может служить адекватной характеристикой свойств реконструированного аттрактора. ЛПР не характеризуют систему в целом, а описывают разбегание траекторий лишь на том «срезе» истинного аттрактора, который возможно реконструировать по обрабатываемому временному ряду.

Изучение спектров ЛПР дает возможность надежно классифицировать короткие временные ряды с точки зрения их динамического происхождения. В случае одномерных динамических систем усреднение этих характеристик дает старший показатель Ляпунова. В случае многомерных – характер распределения ЛПР показывает, в каком режиме находится система – в хаотическом или в регулярном периодическом. Если мы имеем дело со случайными рядами, характер распределения ЛПР также имеет свою специфику и указывает на случайную природу ряда. После нескольких усреднений ЛПР получается характеристика, аналогичная показателю Ляпунова, но с ним (за исключением одномерных отображений) не совпадающая.

### 1.5.2.1. Нейросетевой метод вычисления спектров ЛПР

Для рассматриваемого алгоритма использование комитета нейронных сетей является решающим аспектом. Это основано на том, что статистическая значимость прогноза, осуществлённого комитетом сетей, существенно выше, чем прогноза отдельной сети. Обоснование этого эффекта рассматривается, например, в [22].

На первом шаге алгоритма осуществляется обучение нескольких нейронных сетей, каждая из которых является, например, 4-слойным

персептроном. При обучении используется алгоритм Левенберга-Марквардта, который, как известно, хорошо работает на коротких временных рядах.

### 1.5.2.2. Критерии отбора нейросетей в комитет

В комитет включаются только те нейронные сети, множественный коэффициент регрессии  $R^2$  у которых оказывается больше некоторого порога и ошибка обучения сети меньше фиксированного порогового значения MSE (MeanSquareError). Каждая сеть имеет  $m$  входов и  $m$  выходов, где  $m$  – размерность пространства вложения изучаемого временного ряда.

Каждая сеть обучалась аппроксимировать отображение  $X_{t+1}^{(m)} = F(X_t^{(m)})$ . Здесь  $X_t^{(m)} = (x_t, x_{t-\tau}, \dots, x_{t-(m-1)\tau})$  – точка на реконструированном аттракторе в  $m$ -мерном лаговом пространстве с лагом  $\tau$ . Отображение  $F$  интерпретируется как нейросетевой предиктор [30].

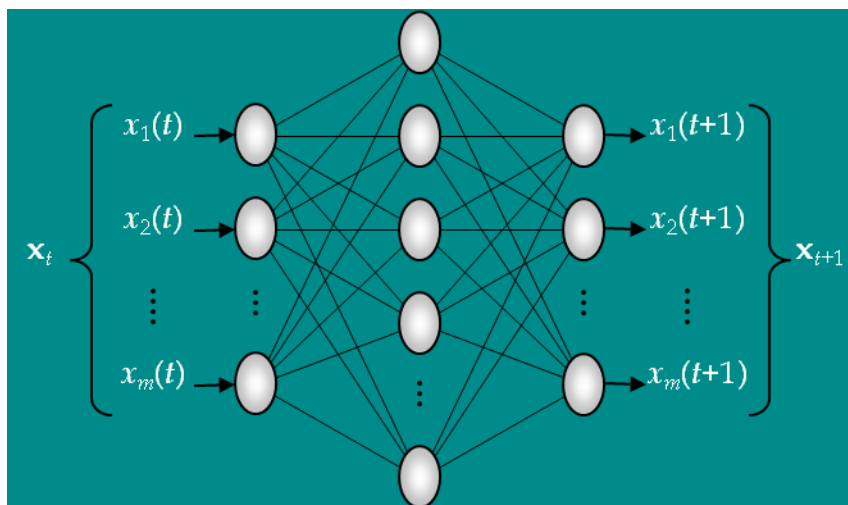


Рисунок 2. Архитектура нейронной сети [30].

После обучения для каждой сети, включенной в комитет, делалось следующее. Для каждой точки ряда  $x_t$  формировался многошаговый прогноз лагового вектора  $X_t^{(m)} = (x_t, x_{t-\tau}, \dots, x_{t-(m-1)\tau})$  на определенный горизонт  $h$

вперед:  $\{X_t^{(m)}\}_{t+1}^{t+h}$ . Этот прогноз рассматривался как часть опорной

траектории на реконструированном аттракторе. Строились  $N$  возмущённых точек – случайных возмущений  $\tilde{X}_t^{(m)} = (\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t-\tau}, \dots, \tilde{x}_{t-(m-1)\tau})$  вектора  $X_t^{(m)}$ . Для них также с помощью обученной сети делался многошаговый прогноз на  $h$  шагов вперед, в результате чего получался пучок возмущенных траекторий в лаговом пространстве [30]. Количество возмущенных точек  $\tilde{X}_t^{(m)}$  в лаговом пространстве выбиралось исходя из соображений представительности статистики. Для полученных в настоящем исследовании результатов это число составило 250.

Возмущения для формирования точек  $\tilde{X}_t^{(m)}$  задавались с помощью генератора случайных чисел, по модулю не превышающих  $10^{-7}$ . Это делалось для того, чтобы возмущенные вектора  $\tilde{X}_t^{(m)}$  не совпадали с точками реконструированного аттрактора. Для каждого номера итераций прогнозы усреднялись по всем нейронным сетям комитета [30]. В каждый комитет отбиралось по 10 нейронных сетей.

### 1.5.2.3. Применение регрессионного анализа и алгоритм отбора регрессий для оценки ЛПР

Далее для каждого шага итерационного прогноза  $n$  вычислялись  $m$ -мерные расстояния между точками на опорной и на усредненных по комитету нейронных сетей возмущенных траекториях:

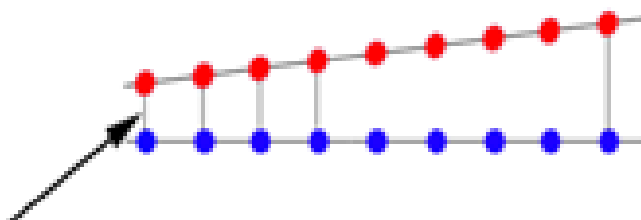


Рисунок 3. Синие – точки  $X_t^{(m)}$  опорной траектории, красные – точки  $\tilde{X}_t^{(m)}$  возмущённой траектории, стрелка указывает на расстояние  $d_t$  между ними. (Рисунок предоставлен автору научным руководителем Дмитриевой Л.А.)

$$d_t^{(k)}(n) = \left\| X_t^{(m)}(n) - \tilde{X}_t^{(m,k)}(n) \right\|,$$

где  $k$  – номер возмущённой точки. Затем строились линейные регрессии логарифмов этих расстояний относительно номеров прогнозов:

$$d_t^{(k)}(n) \sim \exp(\lambda_t^{(k)} n)$$

или

$$\ln d_t^{(k)}(n) \sim \lambda_t^{(k)} n$$

Для каждой точки ряда, принадлежащей опорной траектории, число построенных регрессий совпадало с количеством возмущённых траекторий в пучке.

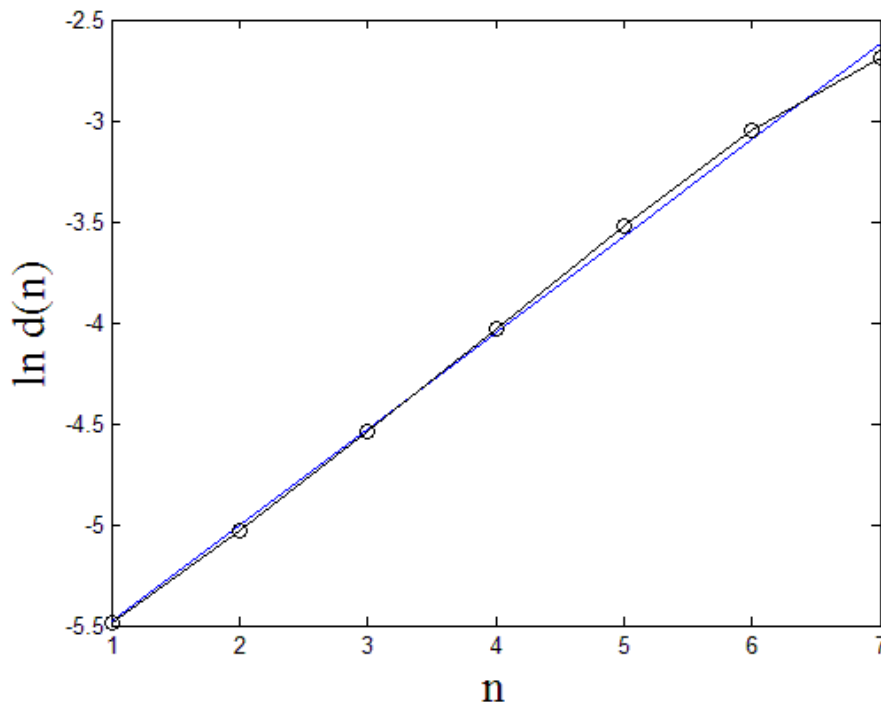


Рисунок 4. Линейная регрессия, показывающая зависимость логарифма модуля расстояния  $d(n)$  между точками на опорной и возмущённых

траекториях от номера  $n$  многошагового прогноза. (Рисунок предоставлен автору научным руководителем Дмитриевой Л.А.)

Локальными показателями разбегания являлись значения наклонов  $\lambda$  отобранных «хороших» регрессионных прямых для всех точек опорной траектории и всех возмущений. Эти значения объединялись в общую выборку, характеризующую изучаемый «срез» аттрактора, и по ней строилась гистограмма распределения ЛПР  $\lambda$  исследуемого временного ряда [30].

Алгоритм отбора «хороших» регрессионных прямых заключался в следующем. Необходимо учитывать надежные регрессионные прямые любого наклона, в том числе и нулевого, поэтому стандартная мера качества регрессии, коэффициент детерминации  $R^2$ , здесь не подходит. В самом деле, чем меньше наклон регрессионной прямой, тем меньше коэффициент детерминации:  $R^2 = 1 - \text{var}(e) / \text{var}(y)$ . Причина в том, что в пределе нулевого наклона дисперсия  $\text{var}(e)$  регрессионной ошибки  $e$  становится равной дисперсии  $\text{var}(y)$  зависимой переменной  $y$ , хотя сама дисперсия регрессионной ошибки  $\text{var}(e)$  при этом может оставаться очень малой. Ввиду этого факта, для качественной оценки регрессионной прямой представлялось удобным использовать собственно среднеквадратичное отклонение регрессии [30].

Описанный алгоритм был реализован в программе NeuroSLDE, созданной магистром физического факультета СПбГУ Чепилко С.С. под руководством Дмитриевой Л. А.

Было разработано два варианта отбора «хороших» регрессий с использованием среднеквадратичного отклонения. Соответственно, было создано две версии программы: NeuroSLDE 7.3 и NeuroSLDE 7.4. В версии NeuroSLDE 7.3 оставляются только те регрессии, стандартное отклонение  $std$  которых удовлетворяет соотношению  $std < stdMin(1 + LogTol)$ , где  $LogTol$  –

значение, задаваемое пользователем вручную, а  $stdMin$  – минимальное стандартное отклонение среди всех построенных регрессий. В версии NeuroSLDE 7.4 оставляются только те регрессии, у которых стандартное отклонение  $std$  удовлетворяет соотношению  $std < LogTool\sqrt{(1+\lambda^2)}$ , где  $\lambda$  – вычисленный коэффициент наклона регрессии..

Чтобы производить классификацию временных рядов, предполагается оценивать совокупность следующих параметров [30]:

- Характер спектра локальных показателей разбегания;
- Характер спектра мощности временного ряда;
- Качество обучения нейронных сетей ( $R^2$  и MSE);
- Количество нейронных сетей, определивших среднее значение ЛПР положительным/отрицательным.

## 2. Компьютерные вычисления и результаты

### 2.1. Предобработка данных

Исходные данные представляли собой временные ряды длиной более 40 тысяч отсчётов (см. Рисунок 5).

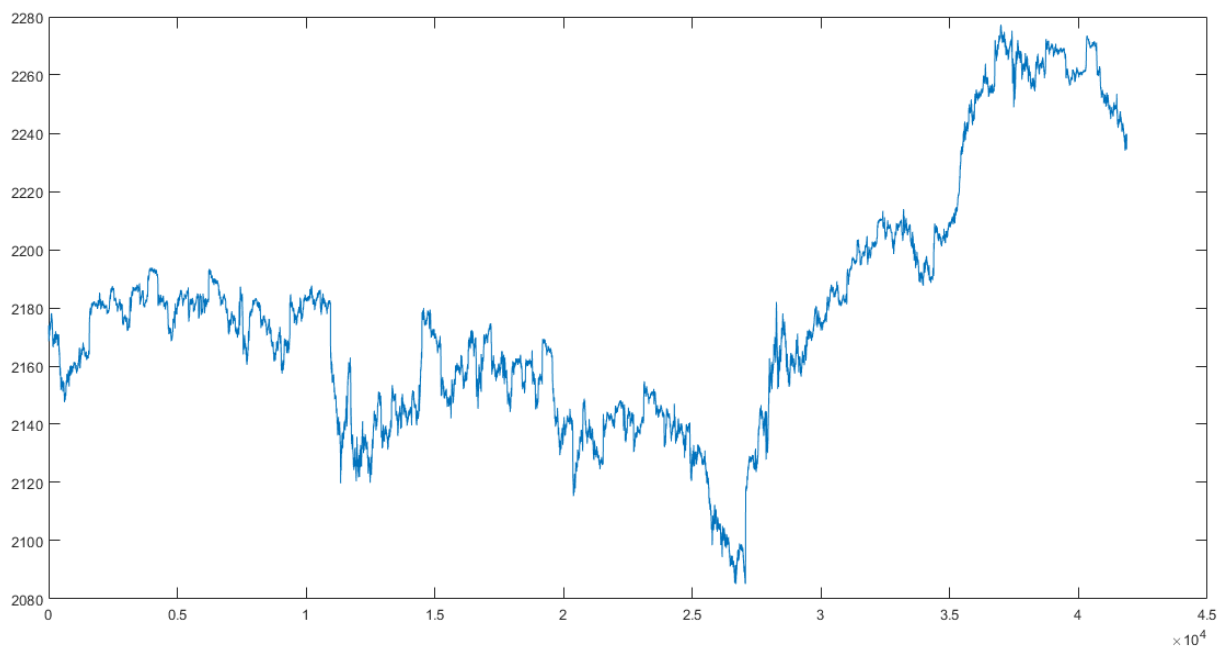


Рисунок 5. Исходный ряд значений индекса SNP.

По исходным данным были построены логарифмические доходности по следующей формуле. Пусть  $S(t)$  – исходный ряд значений индекса, тогда его логарифмические доходности вычисляются как  $\ln \frac{S(t+1)}{S(t)}$ .

В первую очередь стояла необходимость очистки данных от артефактов – сильных выбросов неясной природы. Для этого были выбраны максимальное и минимальное значения, ограничивающие временной ряд сверху и снизу. В обоих случаях доля удалённых значений составила менее 0.02%.

	MICEX	SNP
Количество отсчётов изначально	49394	41869
Количество удалённых значений (выбросов)	70	49
Верхняя и нижняя граница	$\pm 0.002$	$\pm 0.002$

Таблица 1. Результаты предобработки данных.

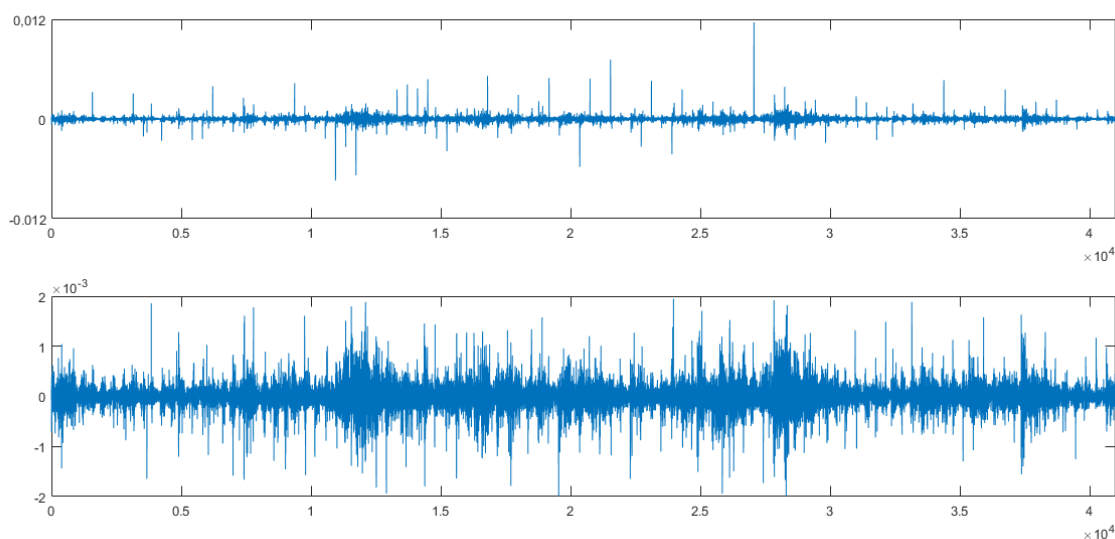


Рисунок 6. Ряд логарифмических доходностей индекса SNP: сверху – логарифмические доходности, снизу – логарифмические доходности, очищенные от выбросов.

Ряды очищенных логарифмических доходностей для удобства вычислений были обрезаны до 41000 значений. Затем по этим рядам с помощью реализованной в Matlab функции `emd` (находится в свободном доступе, URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/21409-empirical-mode-decomposition>, последняя дата обращения 17.05.2017) были вычислены моды. Всего для каждого ряда получилось 20 мод. Вопрос о том, какую информацию несёт в себе каждая конкретная мода, до сих пор остаётся открытым. Тем не менее, принято полагать, что несколько первых



мод являются высокочастотными колебаниями невыясненной природы, то есть шумом, а последняя мода и остаток – трендом. Поскольку логарифмические доходности имеют смысл приращения исходного ряда, тренда в них нет, и в настоящем исследовании временной ряд очищался только от нескольких первых мод.

Рассмотрим пример удаления из ряда суммы первых трёх мод. Для наглядности графики построены для первых 100 отсчётов ряда SNP.

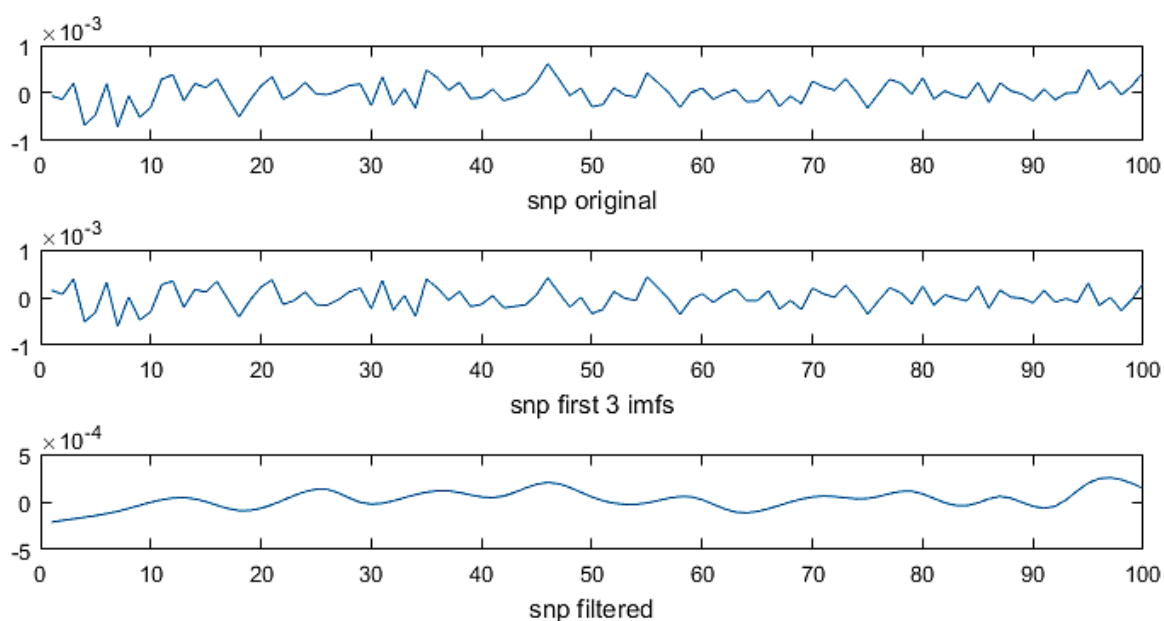


Рисунок 7. Сверху – ряд очищенных от выбросов логарифмических доходностей; по центру – сумма первых трёх мод; снизу – сумма мод с четвёртой по двадцатую. Стоит отметить, что сумма первых трёх мод представляет собой некие высокочастотные колебания, в то время как сумма последних мод имеет более гладкий график.

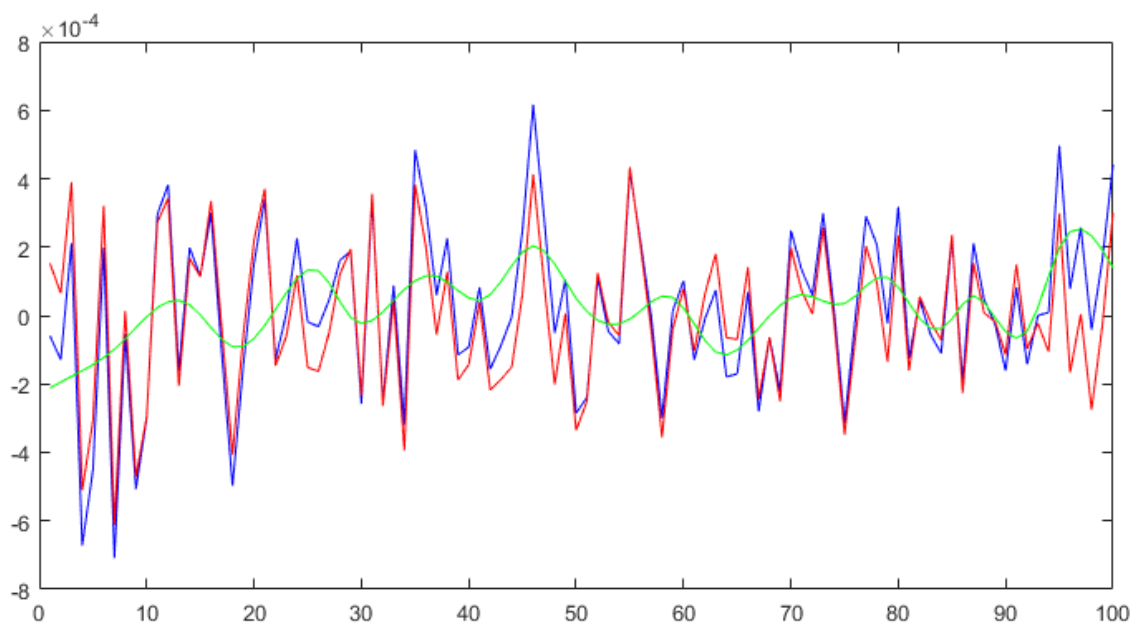


Рисунок 8. Синим цветом выведен ряд очищенных от выбросов логарифмических доходностей; красным – сумма первых трёх мод; зелёным – сумма мод с четвёртой по двадцатую.

Отметим, что зелёная линия имеет существенно меньшую амплитуду. Вопрос о соотношении амплитуд первых мод и оставшейся суммы мод не является ключевым для данной работы, однако определённо требует дальнейшего осмысления и обсуждения.

## 2.2. Построение корреляционной суммы, корреляционной размерности и проверка насыщения корреляционной размерности

В данном исследовании из временных рядов по очереди удалялись первые 2, 3, 4, 5 мод и результаты сравнивались. Эмпирическим путём было установлено, что оптимальным вариантом очищения от шума будет удаление первых 4 мод. Чтобы проверить правильность действий, для каждого варианта разложения строились корреляционная сумма  $C_2$ , корреляционная размерность  $D_2$  и график насыщения корреляционной размерности в зависимости от размерности вложения  $m$ . Вычисления производились в Matlab.

Для оценки корреляционной суммы и корреляционной размерности использовалась программа  $d2e$  ( $D_2$  estimator), написанная магистрантом физического факультета СПбГУ Сметаниным Н. под руководством Дмитриевой Л. А. В этой программе лаг  $\tau$  автоматически вычисляется как минимальный из двух оценок для оптимального лага: вычисленный с помощью автокорреляционной функции и вычисленный с помощью функции взаимной информации. Значение максимальной размерности вложения  $m$  вычисляется как рекомендованное по критерию Цониса. Поскольку критерий Цониса основан на длине исследуемого временного ряда, в наших вычислениях это  $m=7$ . Количество рассматриваемых масштабов  $\varepsilon$  по умолчанию выбрано равным 100.

При построении графика насыщения корреляционной размерности, который интересовал нас в первую очередь, по сути происходит переход от величины  $D_2(\varepsilon, m)$  к величине  $\tilde{D}_2(m)$ , которые связаны соотношением:

$$\tilde{D}_2(m) = \langle D_2(\varepsilon, m) \rangle \left| \begin{array}{l} \varepsilon > \varepsilon_{Left} \\ \varepsilon < \varepsilon_{Right} \end{array} \right.$$

Такой переход осуществляется путём усреднения по  $\varepsilon$  в заданном диапазоне. Минимальное и максимальное значение  $\varepsilon$  выбирались вручную. Это очень тонкий момент, поскольку при разных выбранных значениях можно получить разную форму графика  $\tilde{D}_2(m)$ . Для определения  $D_2(\varepsilon, m)$  необходимо, чтобы для каждого значения  $m$  корреляционная сумма  $C_2(\varepsilon, m)$  вела себя линейно по  $\varepsilon$ . Однако с возрастанием  $m$  зависимости становятся всё менее линейными. Помимо того, почти для всех  $m$  имеются отклонения от линейности при больших  $\varepsilon$ , обусловленные тем, что обрабатываемые данные конечны (41000 отсчетов) и при малых  $\varepsilon$ , обусловленные тем, что данные дискретны. Поэтому для определения  $\tilde{D}_2(m)$  имеет смысл рассматривать только средний участок графика.

Задавая значения  $\varepsilon$ , мы ориентировались на форму графиков  $C_2$  (чтобы все участки графиков на выбранном интервале  $\varepsilon$  были приблизительно линейны) и на форму графиков  $D_2$  (чтобы все участки графиков на выбранном интервале  $\varepsilon$  были более-менее ровными или хотя бы похожими).

Предположения были такими. Если насыщение корреляционной размерности не происходит – данные имеют случайную природу, эта картина ожидалась для суммы первых удалённых мод. Если происходит насыщение – значит, данные детерминированы, такую картину предполагалось наблюдать для очищенных от первых мод данных.

Как упоминалось выше, оптимальным вариантом оказалось удаление суммы первых четырёх мод. Приведём графики для этого варианта очищения данных.

#### **МІСЕХ, очищенные данные (сумма мод с 5-й по 20-ю).**

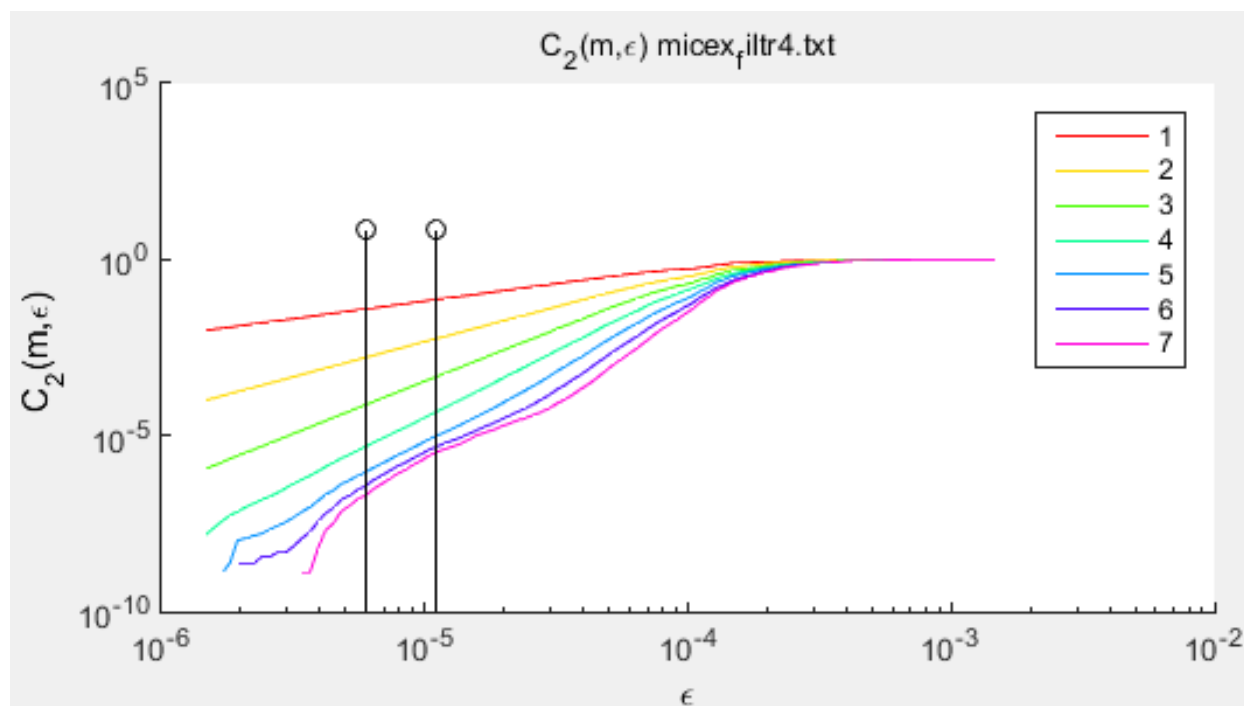


Рисунок 9. График  $C_2(m, \varepsilon)$ . По оси абсцисс значения  $\varepsilon$ , по оси ординат значения  $C_2$ , разным цветом отмечены графики для разного значения  $m$  (указано в легенде).

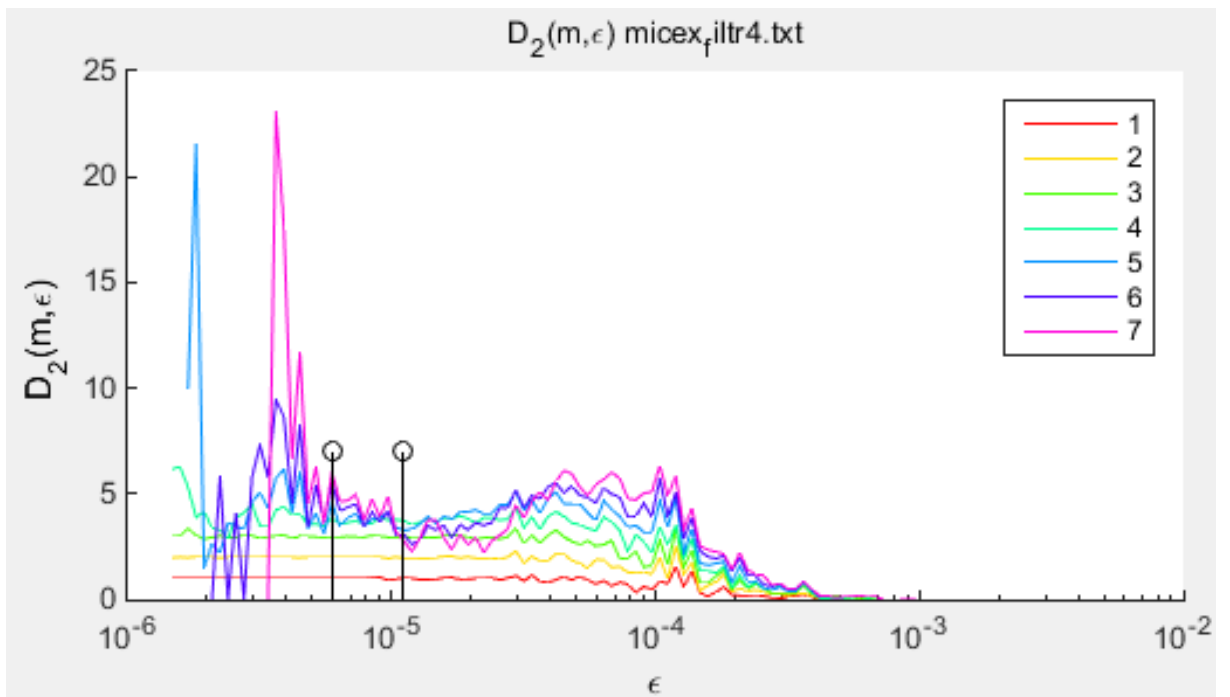


Рисунок 10. График  $D_2(m, \epsilon)$ . По оси абсцисс значения  $\epsilon$ , по оси ординат значения  $D_2$ , разным цветом отмечены графики для разного значения  $m$  (указано в легенде).

Выбранные значения  $\epsilon$  составили  $0.6e-05$  и  $1.1e-05$ .

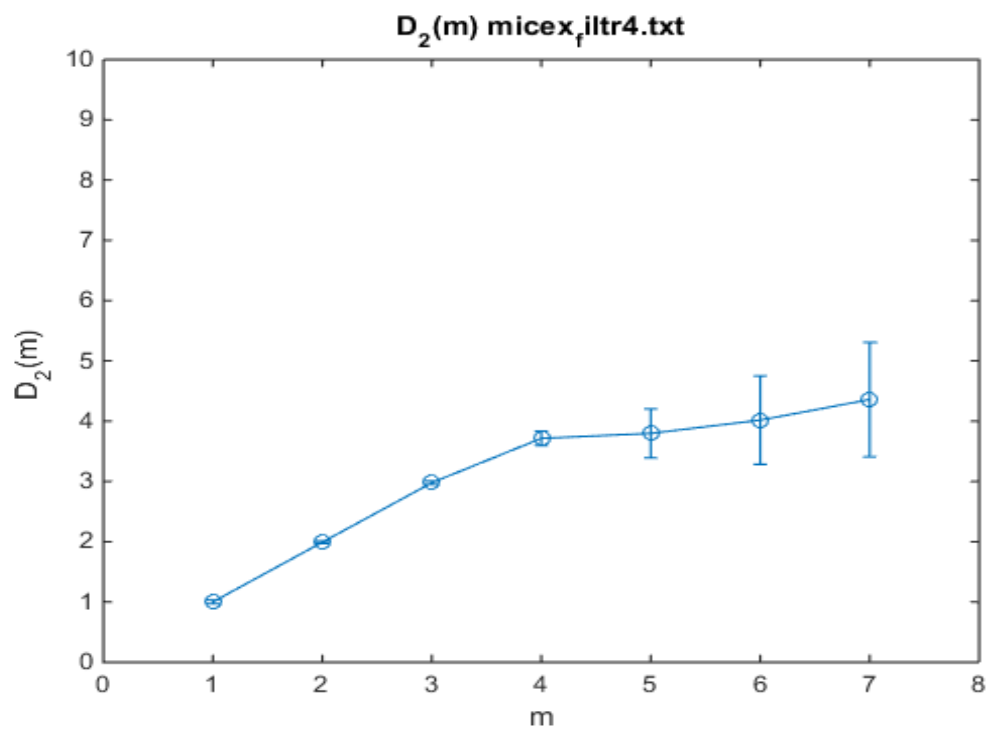


Рисунок 11. Зависимость  $\tilde{D}_2(m)$ . По оси абсцисс значения  $m$ , по оси ординат значения  $\tilde{D}_2$ .

Отметим, что насыщение происходит при  $m=4$ , а при больших значениях  $m$  увеличивается ошибка. Из этого можно заключить, что данные скорее всего детерминированы.

### МІСЕХ, удалённая сумма мод с 1-й по 4-ю.

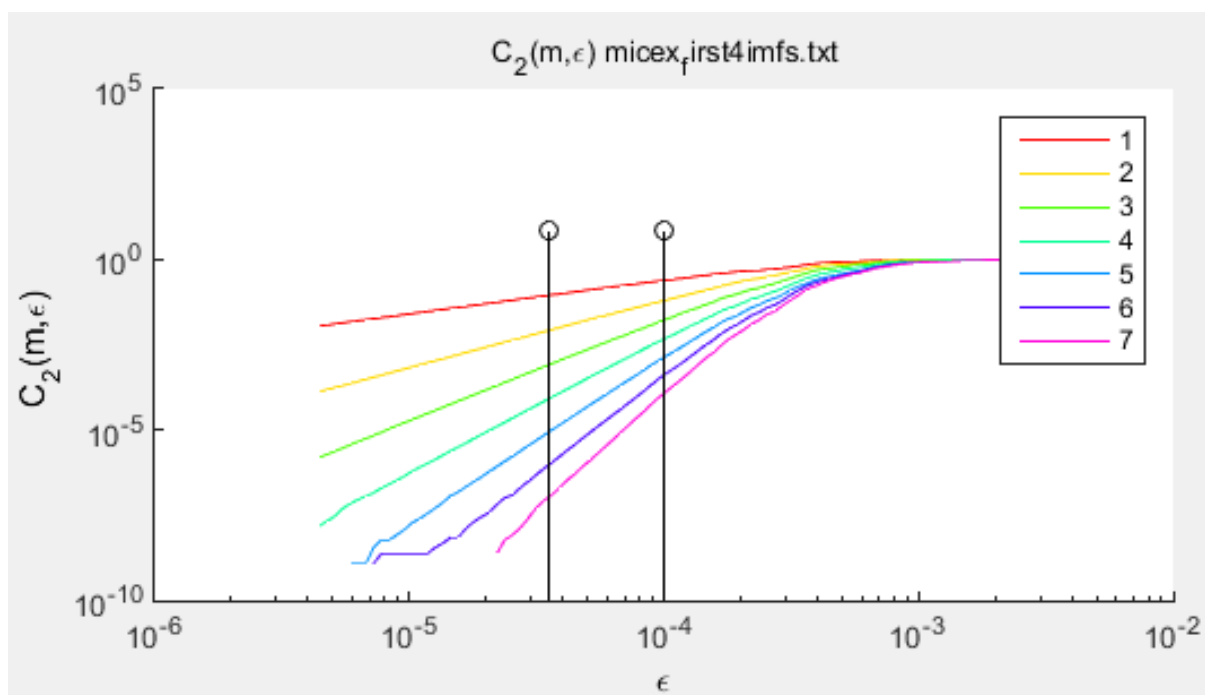


Рисунок 12. График  $C_2(m, \epsilon)$ . По оси абсцисс значения  $\epsilon$ , по оси ординат значения  $C_2$ , разным цветом отмечены графики для разного значения  $m$  (указано в легенде).

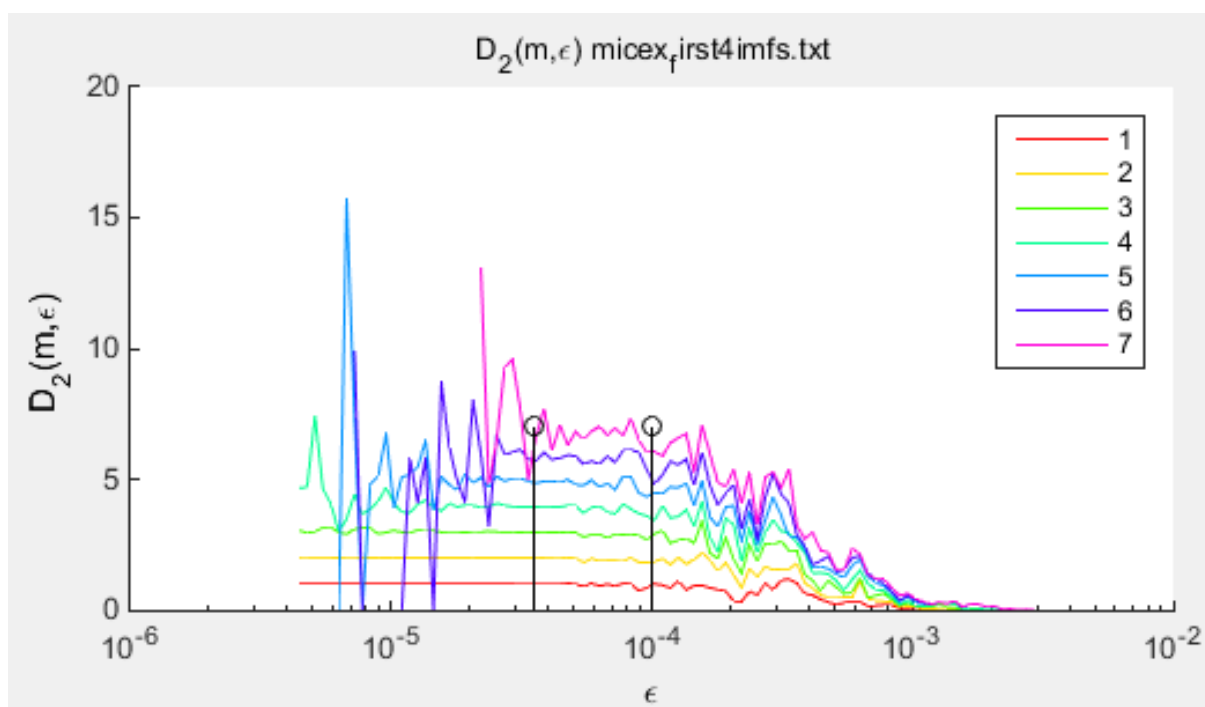


Рисунок 13. График  $D_2(m, \varepsilon)$ . По оси абсцисс значения  $\varepsilon$ , по оси ординат значения  $D_2$ , разным цветом отмечены графики для разного значения  $m$  (указано в легенде).

Выбранные значения  $\varepsilon$  составили  $3.5e-05$  и  $1e-04$ .

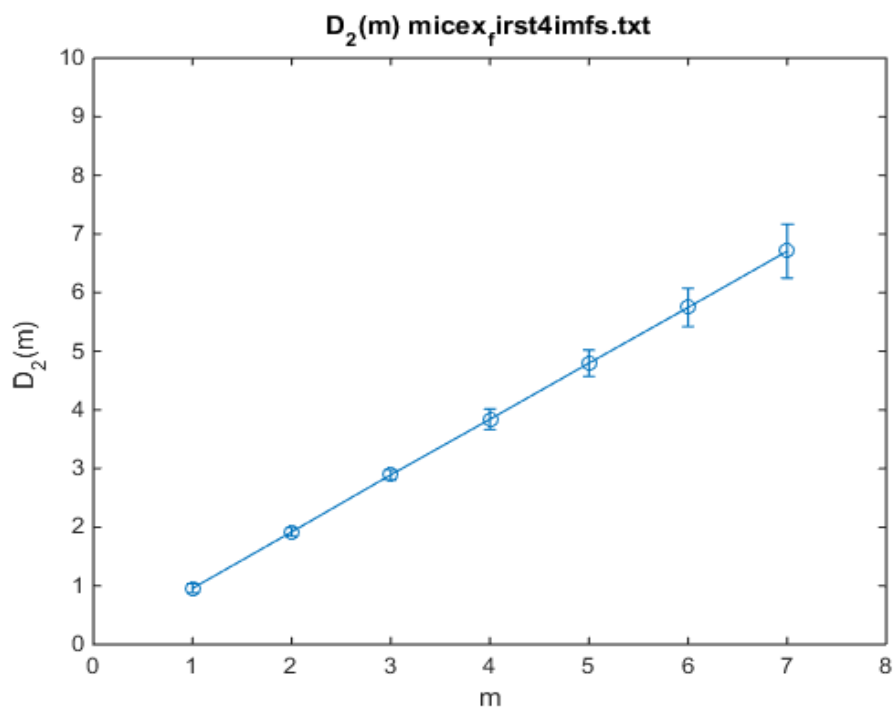


Рисунок 14. Зависимость  $\tilde{D}_2(m)$ . По оси абсцисс значения  $m$ , по оси ординат значения  $\tilde{D}_2$ .

Как видно, насыщения корреляционной размерности не происходит, из чего можно заключить, что удалённая сумма первых мод является шумом.

**SNP, очищенные данные (сумма мод с 5-й по 20-ю).**

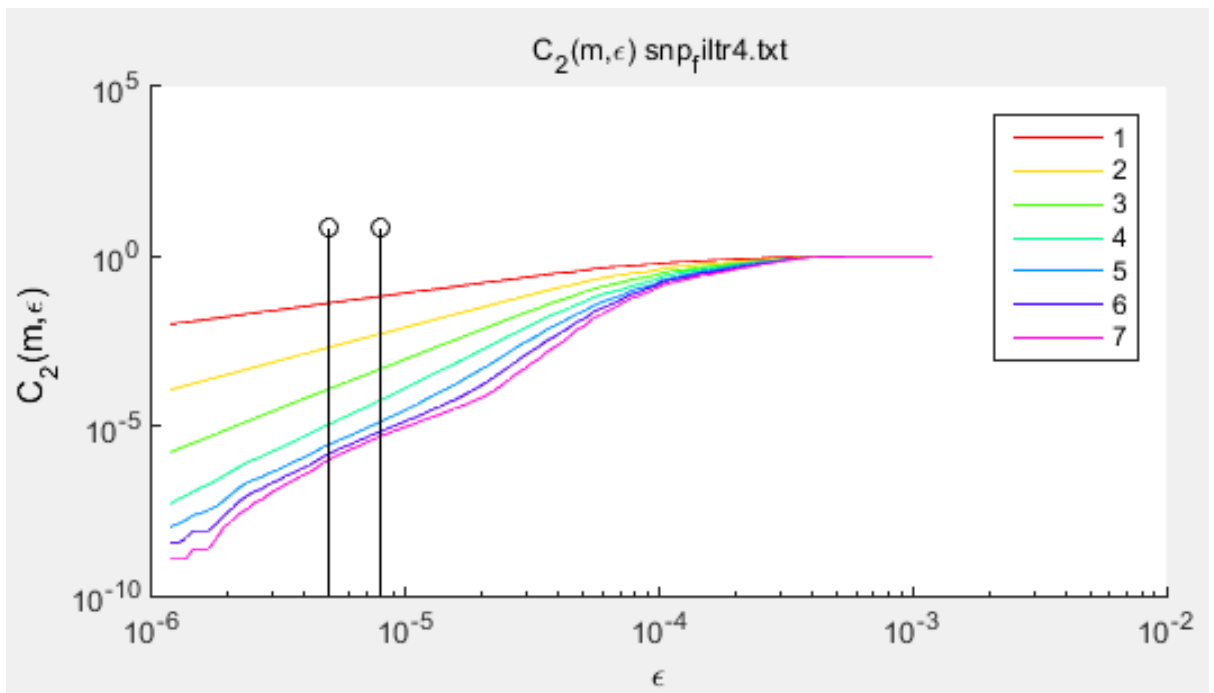


Рисунок 15. График  $C_2(m, \epsilon)$ . По оси абсцисс значения  $\epsilon$ , по оси ординат значения  $C_2$ , разным цветом отмечены графики для разного значения  $m$  (указано в легенде).

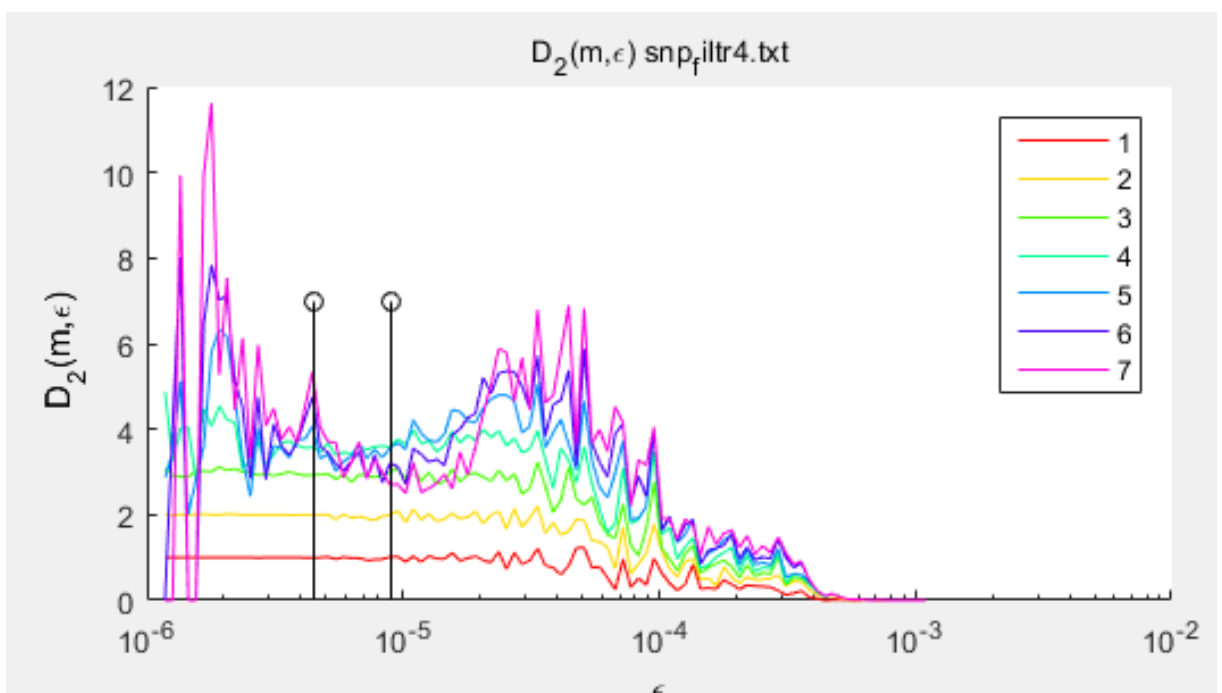


Рисунок 16. График  $D_2(m, \epsilon)$ . По оси абсцисс значения  $\epsilon$ , по оси ординат значения  $D_2$ , разным цветом отмечены графики для разного значения  $m$  (указано в легенде).

Выбранные значения  $\epsilon$  составили  $4.5e-06$  и  $9e-06$ .



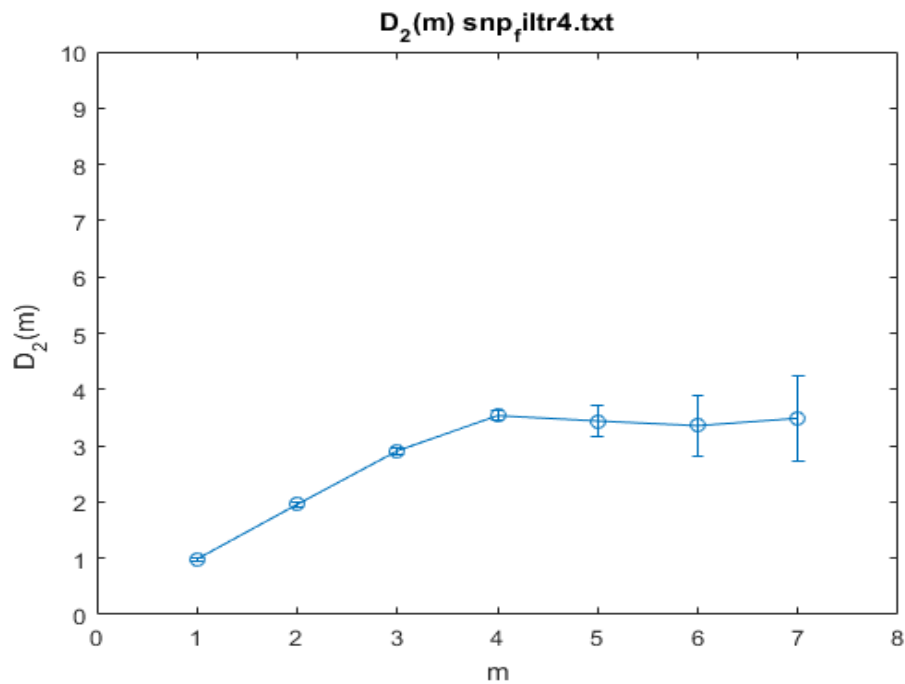


Рисунок 17. Зависимость  $\tilde{D}_2(m)$ . По оси абсцисс значения  $m$ , по оси ординат значения  $\tilde{D}_2$ . По данному графику можно говорить о насыщении корреляционной размерности, и следовательно, о детерминированности данных.

### SNP, удалённая сумма мод с 1-й по 4-ю.

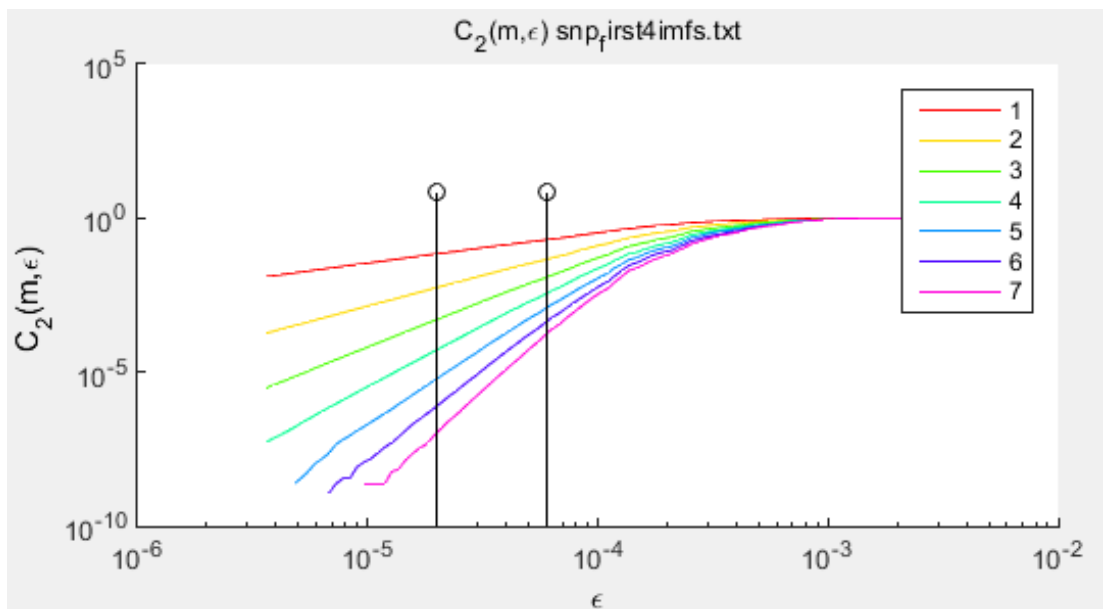


Рисунок 18. График  $C_2(m, \epsilon)$ . По оси абсцисс значения  $\epsilon$ , по оси ординат значения  $C_2$ , разным цветом отмечены графики для разного значения  $m$  (указано в легенде).

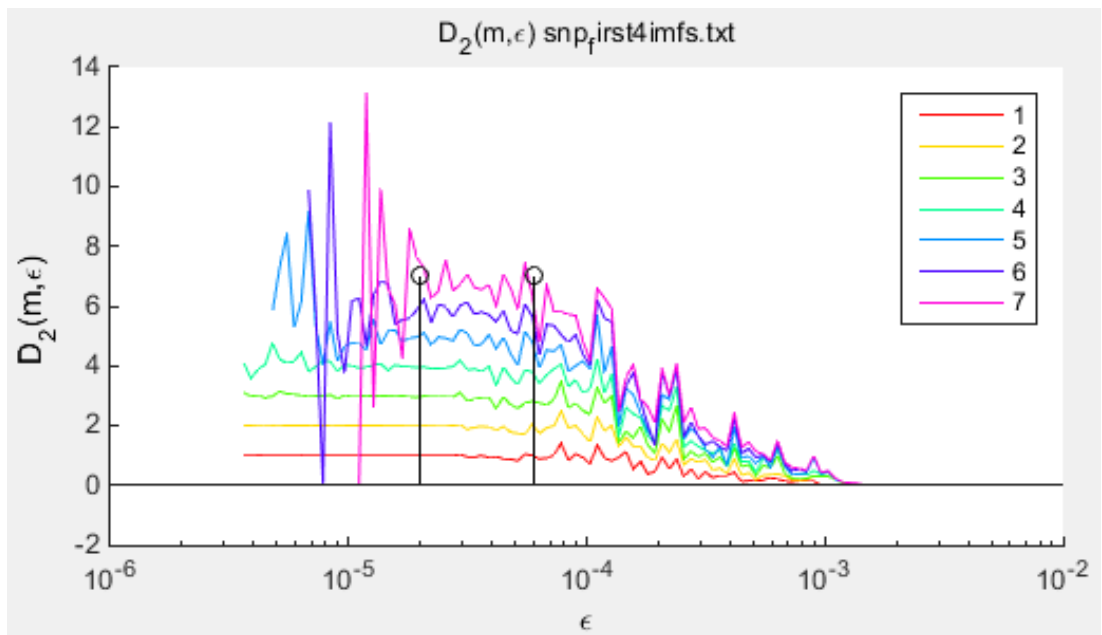


Рисунок 19. График  $D_2(m, \epsilon)$ . По оси абсцисс значения  $\epsilon$ , по оси ординат значения  $D_2$ , разным цветом отмечены графики для разного значения  $m$  (указано в легенде).

Выбранные значения  $\epsilon$  составили  $2 \times 10^{-4}$  и  $6 \times 10^{-4}$ .

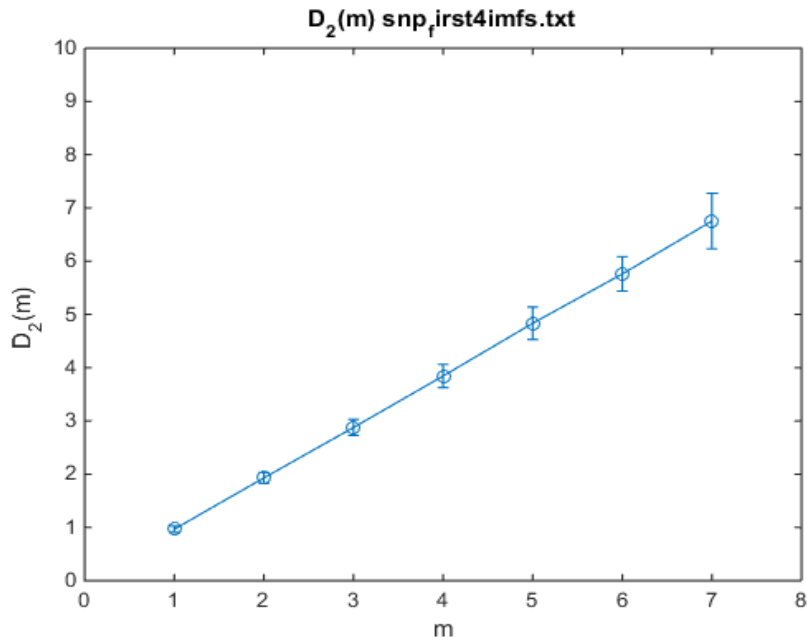


Рисунок 20. Зависимость  $\tilde{D}_2(m)$ . По оси абсцисс значения  $m$ , по оси ординат значения  $\tilde{D}_2$ . Как и предполагалось, насыщения корреляционной размерности не происходит, что говорит о шумовой природе данных.

Для удобства дальнейших вычислений, из очищенных от первых мод рядов и из сумм удалённых первых мод были нарезаны куски длиной 2000 отсчётов: с 1003 по 3002, с 15001 по 17000 и с 30001 по 32000. Для этих отрезков были посчитаны спектры ЛПР.

## 2.3. Вычисление нейросетевых спектров ЛПР

### 2.3.1. Сумма первых удалённых мод и очищенные от первых мод данные

Программа NeuroSLDE позволяет не только рассчитывать спектр локальных показателей разбегания, но и строить график ряда и его спектр мощности, что также является существенным моментом для выдвижения гипотезы о природе системы, породившей этот ряд. Типичные спектры мощности для исследуемых рядов представлены на рисунках ниже.

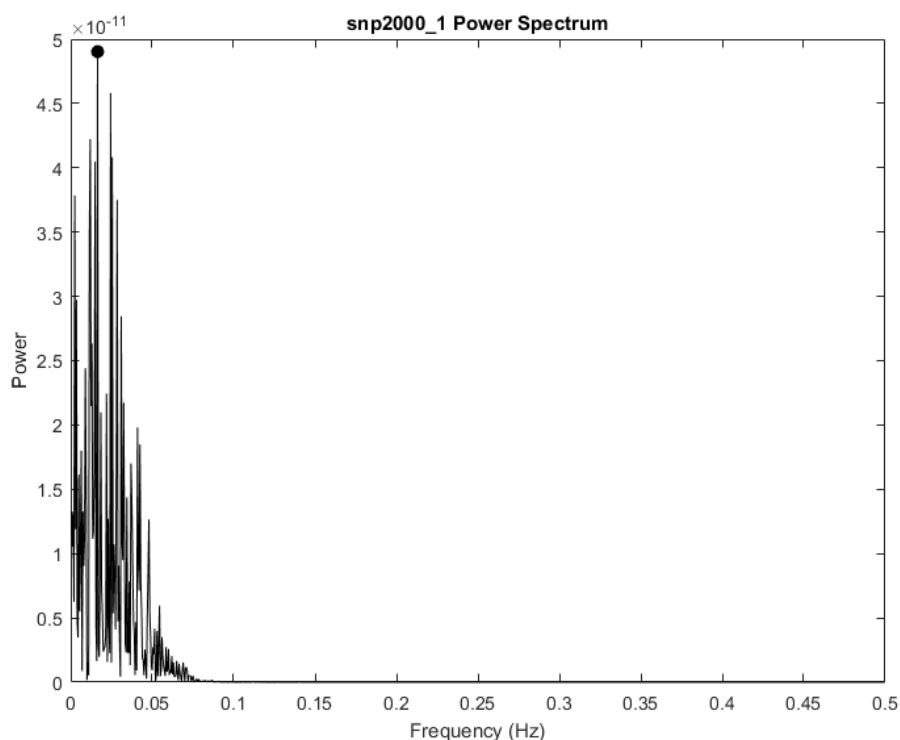


Рисунок 21. Спектр мощности для суммы мод с 5-й по 20-ю для логарифмических доходностей ряда SNP. Спектр достаточно широкий, что характерно для хаотических рядов. Похожие спектры имели все ряды логарифмических доходностей, очищенные от первых мод.

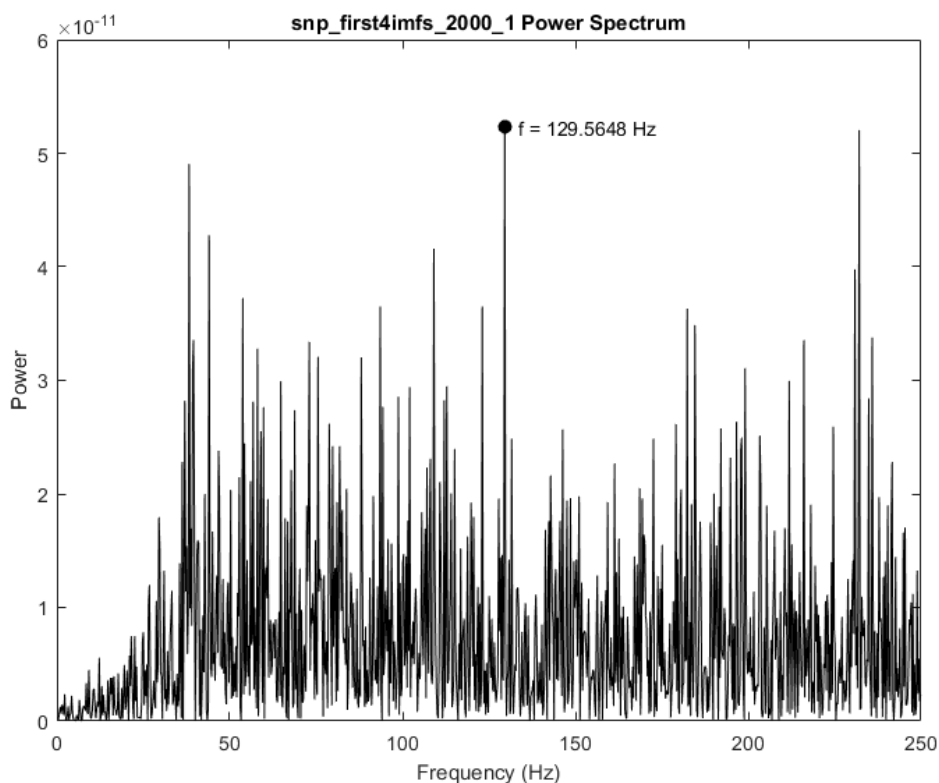


Рисунок 22. Спектр мощности для суммы мод с 1-й по 4-ю для логарифмических доходностей ряда SNP. Спектр имеет вид, характерный для стохастических данных, например, для белого шума. Похожие спектры имели все ряды, представляющие собой сумму первых мод.

Приведём графики для некоторых рядов. Вычисления проводились в версии NeuroSLDE 7.4.

Начнём с ряда суммы первых удалённых мод логарифмических доходностей индекса SNP, отсчёты с 1003 по 3002. Как и предполагалось, для суммы удалённых мод нейронные сети обучались очень плохо:  $R^2 = -0.0293$ ,  $MSE=0.057$ . Суммарный спектр ЛПР целиком находится в отрицательной области (рис. 24), поскольку для каждой сети среднее значение ЛПР отрицательно (рис. 23).

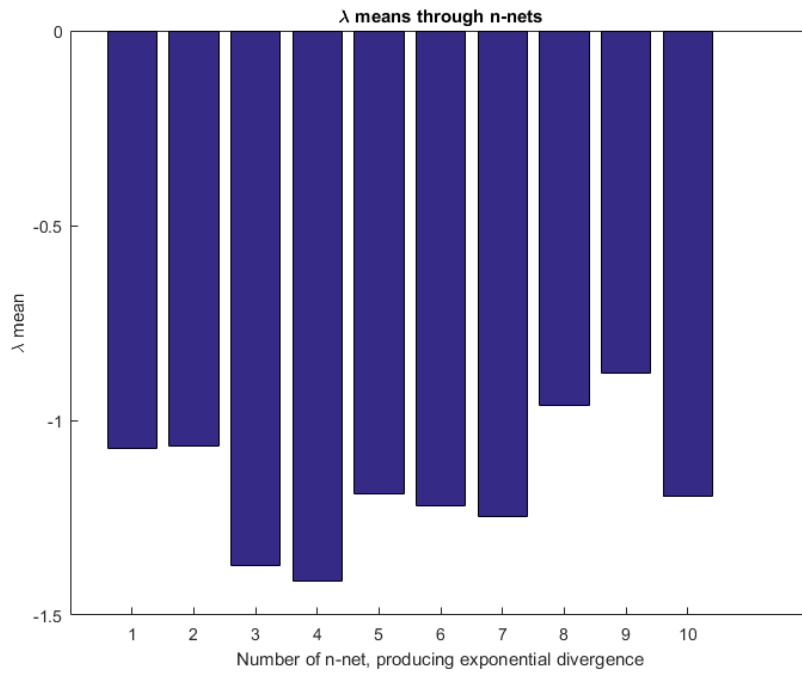


Рисунок 23. Среднее значение ЛПР для каждой сети комитета для суммы первых четырёх мод ряда логарифмических доходностей индекса SNP.

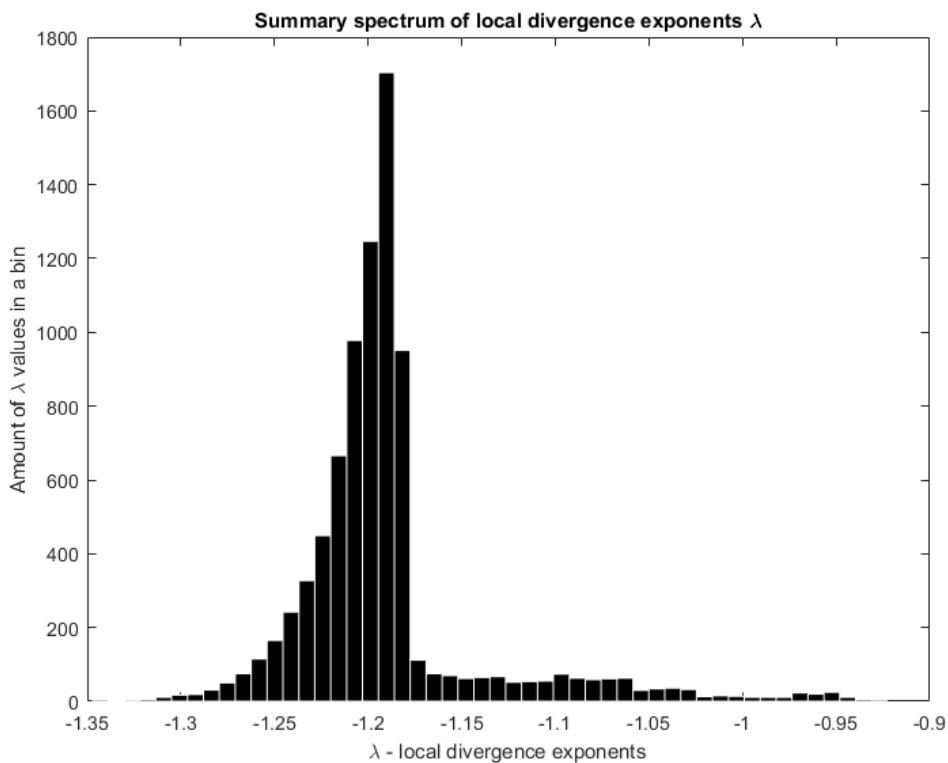


Рисунок 24. Усреднённый по комитету сетей спектр ЛПР для суммы первых четырёх мод ряда логарифмических доходностей индекса SNP.

Похожие ситуации наблюдаются для всех отрезков по 2000 отсчётов, взятых из рядов суммы первых удалённых мод. Подробнее результаты представлены в табл. 2.

Теперь рассмотрим случай очищенных данных, сумма мод с 5-й по 20-ю логарифмических доходностей индекса SNP, отсчёты с 1003 по 3002. На этот раз нейронные сети обучались сравнительно неплохо:  $R^2=95.3851$ ,  $MSE=0.0036$ . Суммарный спектр ЛПР находится преимущественно в положительной области (рис. 26), хотя есть некоторый процент отрицательных ЛПР (табл. 2). Такой вид спектра позволяет полагать, что данные вероятнее всего имеют хаотическую природу.

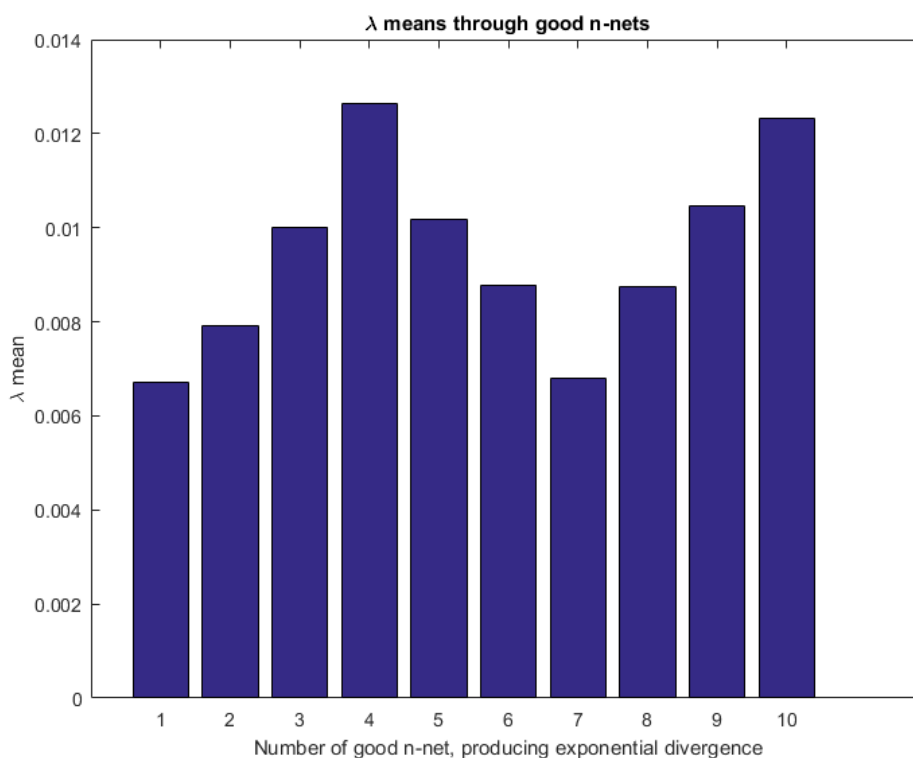


Рисунок 25. Среднее значение ЛПР для каждой сети комитета для логарифмических доходностей индекса SNP, очищенных от первых четырёх мод.

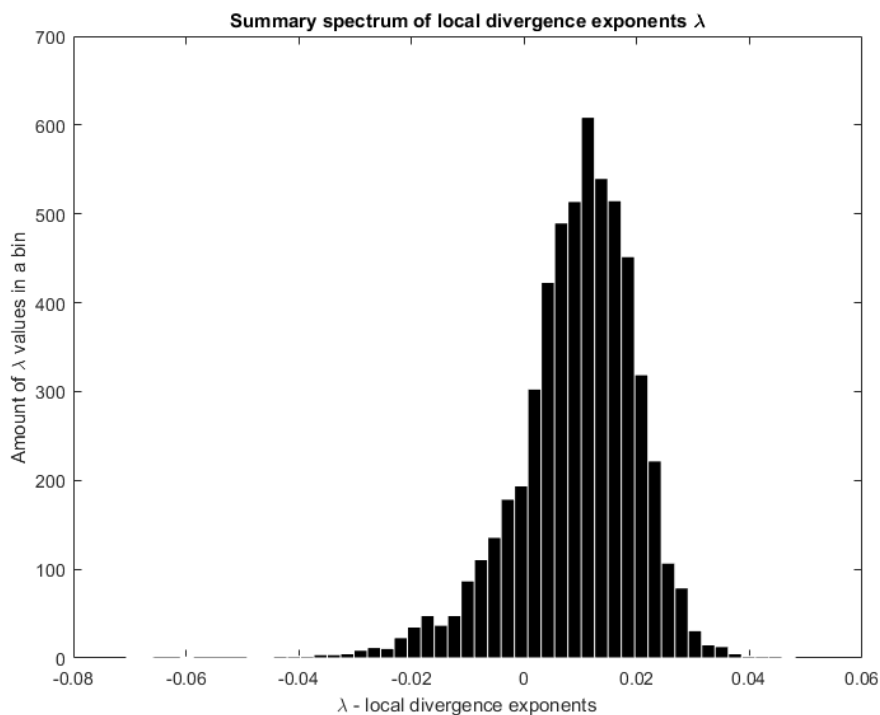


Рисунок 26. Усреднённый по комитету спектр ЛПР для логарифмических доходностей индекса SNP, очищенных от первых четырёх мод.

Ниже приведена сводная таблица результатов анализа для исследуемых рядов: отрезки с 1003 по 3002 отсчёты (1) и с 30001 по 32000 отсчёты (2). В ней отображены показатели качества обучения нейронных сетей и некоторые характеристики полученных ЛПР:

- Dim – размерность пространства вложения;
- Lag – временная задержка;
- $R^2$  – средний по сетям комитета коэффициент детерминации;
- MSE – средняя по сетям комитета среднеквадратичная ошибка;
- N – среднее по комитету число полученных ЛПР;
- LambdaMean – среднее по комитету значение ЛПР;
- LambdaStd – стандартное отклонение среднего по комитету значения ЛПР;
- PosPerMean – средняя по комитету доля положительных ЛПР.

Данные	Dim	Lag	$R^2$	MSE	N	Lambda Mean	Lambda Std	PosPerMean
SNP 1	7	10	0.9538	0.0036	559	0.0095	0.0021	0.84±0.04
SNP 2	9	8	0.9901	0.0004	2145	0.0156	0.0027	0.86±0.02
MICEX 1	7	13	0.9334	0.0018	503	0.0169	0.0044	0.82±0.07
MICEX 2	8	8	0.9874	0.0009	435	0.0075	0.011	0.77±0.02
SNP first imfs 1	7	3	-0.0293	0.057	8284	-1.19	0	0
SNP first imfs 2	7	5	-0,0476	0.019	26861	-1.6532	0.1139	0
MICEX first imfs 1	7	4	0,0074	0.012	10979	-1.49	0.1405	0
MICEX first imfs 2	8	3	0.0232	0.014	10932	-1.2175	0.126	0

Таблица 2. Общие сведения о результатах анализа исследуемых рядов в программе NeuroSLDE 7.4.

Таблица 2 наглядно показывает, насколько различно качество обучения нейросетей на очищенных от первых мод данных и на сумме удалённых первых мод. Для суммы удалённых мод коэффициент  $R^2$  очень мал или даже отрицателен, а среднеквадратичная ошибка MSE в среднем на порядок больше, чем на очищенных данных. Критерий отбора «хороших» регрессий для суммы удалённых мод был достаточно мягким: это обусловлено тем, что в данном критерии учитывается минимальное стандартное отклонение среди построенных регрессий, а оно оказалось достаточно большим (что было ожидаемо), поэтому данному критерию удовлетворило большое число построенных регрессий. В связи с этим, общее количество ЛПР для суммы первых мод существенно больше, чем для очищенных данных, при этом все они отрицательны, в то время как для очищенных данных в среднем порядка 80% всех ЛПР больше нуля.



Аналогичные расчёты были проведены в версии NeuroSLDE 7.3 для рядов, очищенных от первых четырёх мод и нарезанных на куски длиной 2000 отсчётов: с 1003 по 3002 (1), с 15001 по 17000 (3) и с 30001 по 32000 (2). Спектры ЛПР по форме получились аналогичны рис. 27, то есть находились преимущественно в положительной области. Параметры обучения сетей и характеристики ЛПР приведены ниже в таблице 3.

Данные	Dim	Lag	$R^2$	MSE	N	Lambda Mean	Lambda Std	PosPerMean
SNP 1	7	10	0.9531	0.0035	742	0.0097	0.0021	0.85±0.04
SNP 2	9	8	0.99	0.0003	1278	0.0154	0.0029	0.87±0.04
SNP 3	5	9	0.9853	0.0012	428	0.011	0.0031	0.82±0.05
MICEX 1	7	13	0.9339	0.0018	317	0.0178	0.0055	0.85±0.04
MICEX 3	7	9	0.9619	0.003	1037	0.0104	0.0017	0.82±0.04

Таблица 3. Общие сведения о результатах анализа исследуемых рядов в программе NeuroSLDE 7.3.

Сравнивая таблицы результатов, можно отметить, что существенные различия возникают в количестве полученных ЛПР. Это объясняется тем, что в разных версиях программы используются разные критерии, по которым отбираются «хорошие» регрессии, следовательно, отбиралось разное число регрессий и потому получалось разное число ЛПР. В остальном основные характеристики практически одинаковые. Сети обучались достаточно неплохо, о чём говорят значения  $R^2$  и MSE. При этом более 80% всех ЛПР выше нуля, а средние значения ЛПР по всем данным в пределах стандартного отклонения положительны. Эти результаты соответствуют выдвигаемой в настоящем исследовании гипотезе так же, как и результаты, полученные в версии NeuroSLDE 7.4 и представленные в табл. 2.

### 2.3.2. Неочищенные данные

Чтобы проверить, является ли релевантным предложенный метод очищения данных от первых четырёх мод, были проведены вычисления спектра ЛПР для неочищенных данных в версии NeuroSLDE 7.3. Был взят отрезок ряда логарифмических доходностей индекса MICEX длиной 2000 значений, отсчёты с 30001 по 32000.

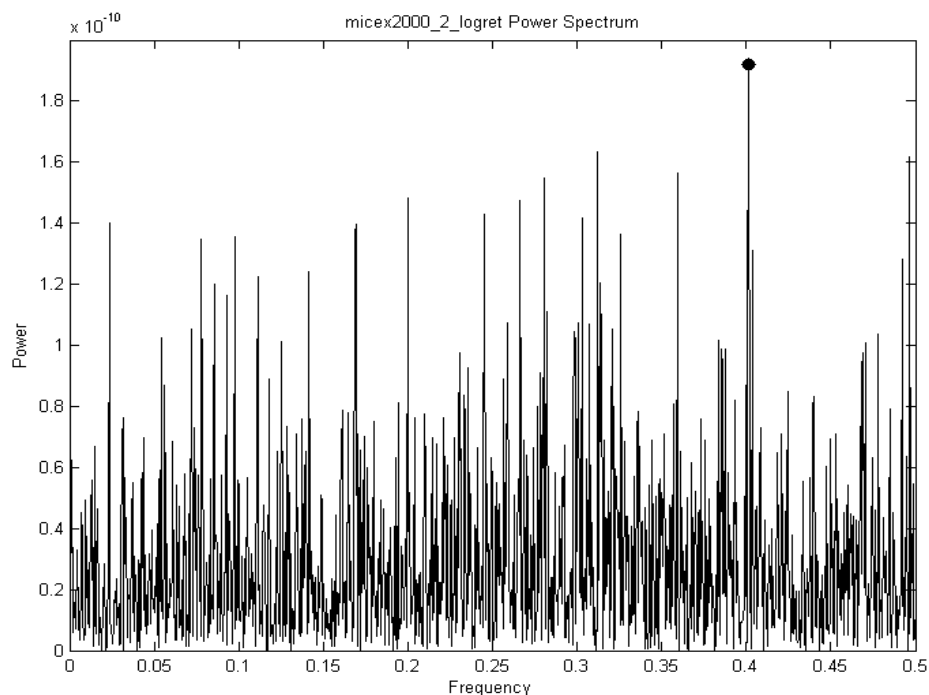


Рисунок 27. Спектр мощности для неочищенных данных логарифмических доходностей индекса MICEX. Спектр имеет вид, характерный для стохастических рядов и очень похож на спектры, полученные для суммы первых мод (рис. 22).

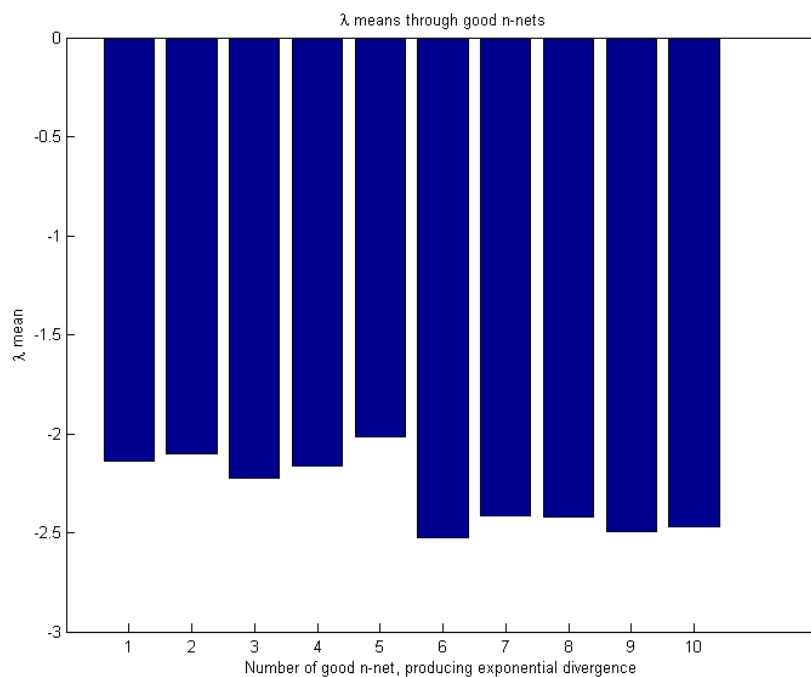


Рисунок 28. Среднее значение ЛПР по каждой из сетей комитета для неочищенного ряда логарифмических доходностей индекса МІСЕХ.

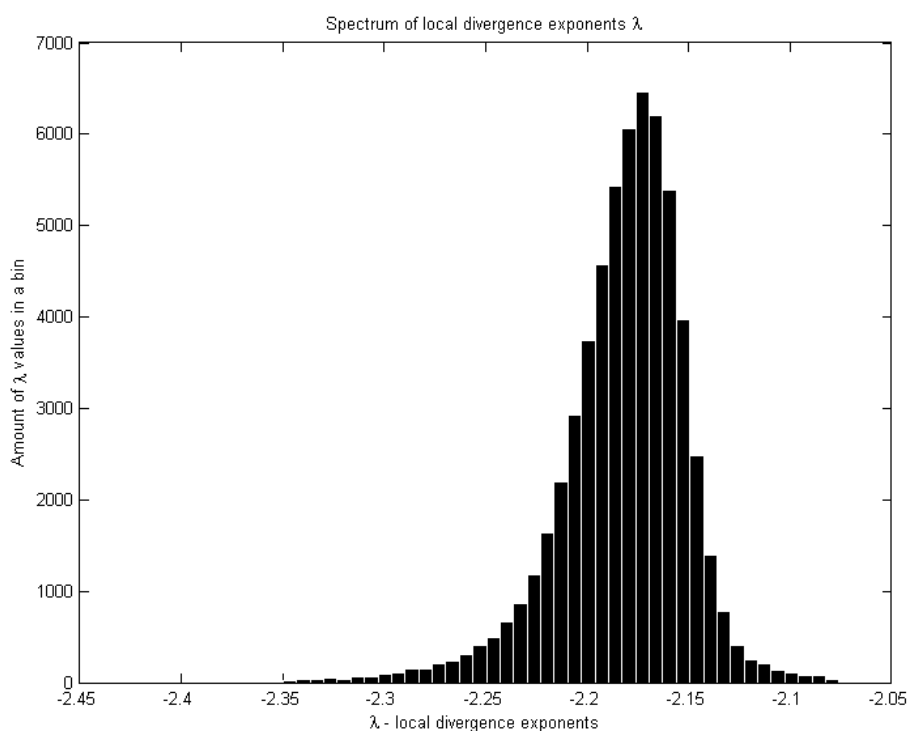


Рисунок 29. Усреднённый по комитету сетей спектр ЛПР для неочищенного ряда логарифмических доходностей индекса МІСЕХ.

Данные	Dim	Lag	$R^2$	MSE	N	Lambda Mean	Lambda Std	PosPerMean
Неочищенные логарифмические доходности индекса MICEX	8	4	-0.0137	0.014	16073	-2.296	0.1861	0

Таблица 3. Общие сведения о результатах анализа неочищенных данных.

Из табл. 4 видим, что сети обучались плохо, а положительные ЛПР отсутствуют вовсе. Это позволяет говорить о том, что шумовая компонента в неочищенных данных очень сильно влияет на их анализ и не позволяет определить наличие предполагаемой хаотической компоненты. Отсюда следует вывод, что при анализе рядов логарифмических доходностей финансового инструмента на наличие хаотической динамики необходимо очищать их от шума, и метод EMD-разложения хорошо подходит для этого.

### 2.3.3. Суррогатный ряд

Тест на суррогатных данных производится для подтверждения гипотезы о том, что имеющийся временной ряд имеет хаотическую динамику[33]. Основная идея состоит в том, что путём перемешивания исходных данных генерируется суррогатный ряд, имеющий такие же характеристики спектра мощности или вероятностного распределения, как исходные данные. При этом предполагается, что сложная нелинейная динамика исходного ряда будет разрушена, и анализируемые для него показатели хаоса (в нашем случае это ЛПР) будут другими. Подробнее о смысле суррогатного теста и его видах написано в работах [33-34].

Настоящий тест проводился для отрезка ряда очищенных логарифмических доходностей индекса MICEX длиной в 2000 отсчётов, с 30001 по 32000. С помощью перемешивания исходных данных был

сформирован суррогатный ряд с сохранением распределения. Ниже приведены результаты анализа суррогатного ряда.

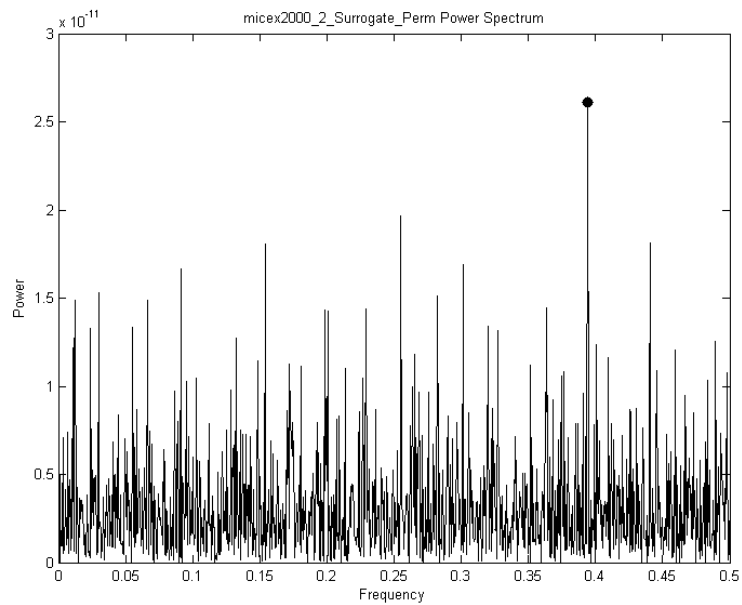


Рисунок 30. Спектр мощности суррогатного ряда.

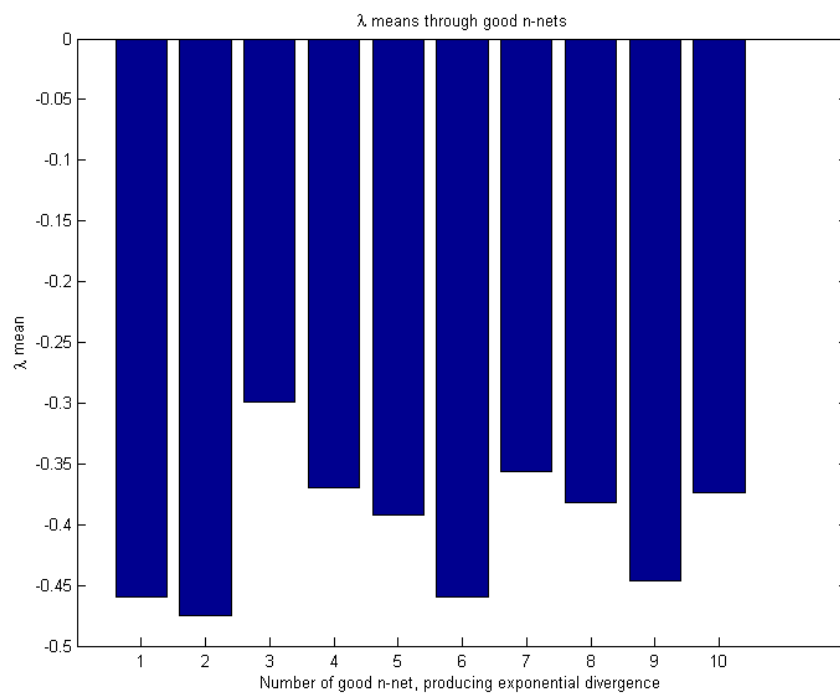


Рисунок 31. Средние значения ЛПР по каждой сети комитета для суррогатного ряда.

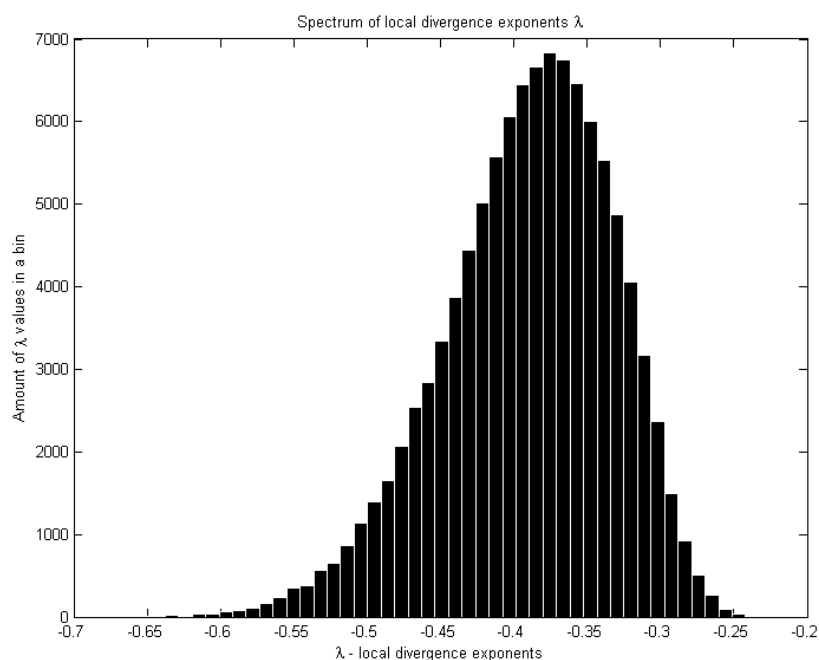


Рисунок 32. Усреднённый по комитету спектр ЛПР для суррогатного ряда.

Данные	Dim	Lag	$R^2$	MSE	N	Lambda Mean	Lambda Std	PosPerMean
Суррогатный ряд	7	1	0.8543	0.011	106484	-0.4014	0.0567	0

Таблица 4. Общие сведения о результатах анализа суррогатного ряда.

Из приведённых выше графиков и значений в табл. 5 можно сделать следующие выводы. Спектр мощности суррогатного ряда похож на спектры мощности случайных рядов и на спектры мощности сумм удалённых первых мод (рис.22). Несмотря на то, что  $R^2$  здесь значительно выше, чем при обучении на сумме удалённых первых мод, которые предположительно являются случайным рядом, все характеристики ЛПР такие же, как для суммы удалённых мод. Именно, среднее значение ЛПР в пределах отклонения отрицательно, по всем сетям положительных значений ЛПР нет, спектр ЛПР находится полностью в области отрицательных значений (рис.32). Полученный суррогатный ряд не имеет хаотической динамики и представляется случайным. Таким образом, тест на суррогатных данных

пройден успешно и подтверждает гипотезу о том, что исходные данные хаотичны.

### **3. Выводы.**

Исходя из полученных результатов, можно сделать несколько важных выводов. Во-первых, EMD-разложение логарифмических доходностей финансовых временных рядов высокой частоты нарезки хорошо подходит в качестве фильтра исследуемых данных. Оно даёт возможность выделить и исключить из данных шумовую компоненту. Требуется дальнейшего исследования вопрос о соотношении амплитуд первых удаленных мод и амплитуды оставшегося ряда. Во-вторых, исходя из вида спектров распределения локальных показателей разбегания, рассчитанных с помощью комитета нейронных сетей, и средних значений ЛПР для каждой сети, можно сделать выводы о том, что доходности исследуемых в работе финансовых инструментов имеют хаотическую компоненту. Полученные результаты подтверждает проведённый тест на суррогатных данных. Как следствие, можно говорить о том, что традиционная идея моделирования доходностей финансовых временных рядов случайными процессами (белым шумом, фрактальными шумами, приращениями стабильных случайных процессов Леви и др.) требует более пристального внимания и изучения.

## Список литературы

1. Ott E., Chaos in Dynamical Systems. New York: Cambridge University Press, 1993.
2. Малинецкий Г., Потапова А. Современные проблемы нелинейной динамики, М.: Эдиториал УРСС, 2000.
3. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Dynamical Systems and Turbulence, no. 898, pp. 366–381, 1981.
4. Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. Geometry from a time series // Physical Review Letters. – 45, pp. 712–716, 1980,.
5. Huang N. E., Shen Z., Long S. R., Wu M. C., Shih H. H., Zheng Q., Yen N.-C., Tung C. C., Liu H. H. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis // Proc. of R. Soc. London, Ser. A, 454, pp. 903-995, 1998.
6. Huang N. E. et al., The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for non-linear and non-stationary time series analysis // Proc. Royal Soc. London A, vol. 454, 1998, pp. 903-995.
7. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D. – 9, 1983.
8. Albano A.M., Muench J., Schwartz C., Mees A.I., Rapp P.E. Singular-value decomposition and the Grassberger-Procaccia algorithm // Physical Review A. – 38, 1988, pp. 3017–3026.
9. Fraser A.M., Swinney H.L. Independent coordinates for strange attractor from mutual information // Physical Review A. – 33, 1986, pp. 1134-1140.
10. Hegger R., Kantz H., Schreiber T. Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package // CHAOS – 9, 1999, pp. 413-435.



11. Kennel M. B., Brown R., Abarbanel H. D. I. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction // *Physical Review A*. – 45, 1992, pp. 3403.
12. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М: Изд-во физико-математической литературы. 2001.-236 с .
13. Kantz H., Schreiber T. *Nonlinear time series analysis*. Cambridge University Press, Cambridge. 1997. 304 p.
14. Oseledets V. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems // *Moscow Math. Soc.*, no. 19, pp. 197-231, 1968.
15. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A., Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica 16D*, №3, 1985.
16. Куперин Ю. А., Дмитриева Л. А., Чепилко С.С. Количественные методы определения уровня хаоса на мировых финансовых рынках // *Современные финансовые рынки: стратегии развития : сборник материалов IV Международной научно-практической конференции / под науч. ред. И.А. Максимцева, А.Е. Карлика, В.Г. Шубаевой*. – СПб.: Изд-во СПбГЭУ, 2013. – 518 с.
17. Дмитриева Л. А., Куперин Ю. А., Сметанин Н. М. Нейросетевой метод вычисления показателей Ляпунова для временных рядов // *Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук* – №04(87). 2016.
18. Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., Strelcin, J.M. Lyapunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems: A method for computing all of them // Pt. I: Theory. Pt. II: Numerical applications. *Meccanica*. – 1980 – №15 – P. 9-30.
19. Wolf, A., Swift, J., Swinney, H., Vastano, J. Determining Lyapunov Exponents from a Time Series // *Physica D*. – 1985 – №16 – P.285-301.
20. Sano, M., Sawada, Y.: Measurements of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series // *Phys. Rev. Lett.* – 1985 – №55, – P.1082-1085.

21. Eckman, J.P., OliffsonKamphorst, S., Ruelle D., Ciliberto, S.: Lyapunov Exponents from Time Series. Phys. Rev. A. – 1986 – №34 – P.4971-4979.
22. Терехов С.А., Научная сессия МИФИ–2007.// IX всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика–2007»: Лекции по нейроинформатике. Часть 2. – М.: МИФИ, 2007. – 148 с.
23. Yang, H. L., & Lin, H. C. Integrating EMD, chaos-based neural network and PSO for financial time series forecasting // Economic computation and economic cybernetics studies and research, 49(1), 2015 – 17 p.
24. Wang J., Wang J., Fang W, Niu H. Financial time series prediction using Elman recurrent random neural networks // Computational Intelligence and Neuroscience, vol. 2016, Article ID 4742515, 2016.
25. Wang J, Wang J. Forecasting stochastic neural network based on financial empirical mode decomposition //Neural Networks №90, 2017, pp. 8-20.
26. Головкин В.А. Нейросетевые методы обработки хаотических процессов// Нейроинформатика-2005. VII Всероссийская научно-техническая конференция. Лекции по нейроинформатике. М.: МИФИ. – 2005. – С. 43-91.
27. Головкин В.А., Савицкий Ю.В. Нейросетевые методы определения спектра Ляпунова по наблюдаемой реализации // Международный журнал «Компьютинг».-2002.-№1- С.80-86
28. Головкин В.А., Чумерин Н.Ю., Савицкий Ю.В.Нейросетевой метод оценки спектра Ляпунова// Вестник Брестского государственного технического университета.-2002. – №4 – С.66-70.
29. Dmitrieva L.A., Chepilko S.S., KuperinYu.A. Method of Neural Networks Committees in Calculation of Time Series Maximal Lyapunov Exponents. / Proceedings of the International Conference “DAYS on DIFFRACTION 2008”. June 3-6 2008. Saint-Petersburg, Russia. Spb: SpBU. – 2008. – P.34-41.

30. Дмитриева Л. А., Куперин Ю. А., Чепилко С. С. Исследование свойств реконструированных аттракторов временных рядов с помощью искусственных нейронных сетей // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук – №11(82), 2015. – с. 23-29.

31. Tsonis A. Chaos: from Theory to Application. NY: Premium Press, 1992. 286 p.

32. Описания фондовых индексов. MICEXURL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D0%B4%D0%B5%D0%BA%D1%81\\_%D0%9C%D0%9C%D0%92%D0%91](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D0%B4%D0%B5%D0%BA%D1%81_%D0%9C%D0%9C%D0%92%D0%91) (дата обращения: 19.05.2017)  
S&P 500 URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/S%26P\\_500](https://ru.wikipedia.org/wiki/S%26P_500) (дата обращения: 19.05.2017)

33. Theiler J., Eubank S., Longtin A., Galdrikian B. Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data // Physica D, №94, 1992. – pp. 58-77.

34. Schreiber T., Schmitz A. Surrogate time series. // Physica D, № 142, 2000. – pp. 346-382.

## **Благодарности**

В заключение автор выражает признательность своей кафедре Проблем конвергенции естественных и гуманитарных наук за возможность изучения действительно интересных и важных проблем. Автор выражает благодарность своему научному руководителю, Людмиле Анатольевне Дмитриевой, за помощь в написании ВКР и всестороннюю поддержку в процессе работы. Автор также благодарен всем преподавателям кафедры за их труд, помощь и неоценимый вклад в обучение, в особенности Герману Анатольевичу Черных и Ирине Сергеевне Князевой. Автор признателен рецензенту, Немнюгину Сергею Андреевичу, за согласие прочитать работу и предоставить отзыв.