Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления
Кафедра теории управления

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Цимфер Сергей Александрович

Применение функций Ляпунова для оценки поведения решений линейных дифференциально-разностных систем уравнений

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
заслуженный работник ВШ РФ,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Жабко А. П.

Рецензент,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Степенко Н. А.

Санкт-Петербург
2017

Содержание

Введение

Системы дифференциально-разностных уравнений моделируют динамику широкого класса реальных явлений и процессов. Например, задача о распространении эпидемии с учетом вакцинации приводит к системе дифференциальных уравнений с запаздыванием, равным времени действия вакцины. Свойства решений подобных задач определяются, в том числе, набором таких математических величин, как перерегулирование, степень затухания и время переходного процесса. Такие количественные характеристики дают возможность сравнивать решения, составляя тем самым основу задач вариационного исчисления, рассматриваемых, например, в [1]. Главной целью данной работы является оценка этих параметров на основе подхода Ляпунова – Красовского.

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений задача поставлена и решена Ляпуновым в монографии [2] в 1892 году. Для более сложных классов уравнений, в том числе и для уравнений с запаздывающим аргументом, задача ставится в работах [3, 4, 7, 8]. Для ее решения применяются методы, обзор которых приведен далее.

В следующем разделе сформулирована математическая постановка задачи, введены обозначения и определения, используемые в дальнейшем, а также приведен краткий обзор существующей литературы на исследуемую тему. Основная часть выпускной квалификационной работы состоит из двух глав, в которых приведены необходимые вспомогательные теоретические сведения, представлены полученные результаты и описана программная реализация алгоритма в среде MATLAB, решающего поставленную задачу. Работа программы проиллюстрирована на численном примере.

Постановка задачи

Рассмотрим систему линейных стационарных дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ — вектор, $A, B \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ — квадратные матрицы, $h > 0$ — некоторое положительное запаздывание. Зададимся, кроме того, некоторой кусочно-непрерывной начальной функцией $\varphi\colon [-h, 0] \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Функция $x(t, \varphi)$, удовлетворяющая условию $x(\vartheta, \varphi) = \varphi(\vartheta)$ для всех $\vartheta \in [-h, 0]$ и системе (1) при $t \geqslant t_0$, называется решением этой системы с заданными начальными условиями.

Определение 1. Функция $x_t(\vartheta, \varphi) = x(t + \vartheta, \varphi)$, определенная при $\vartheta \in [-h, 0]$ называется состоянием системы (1) в момент времени t.

Определение 2. Величина $x(t)$ называется положением системы.

Определение 3. Назовем квадратную $n \times n$ матрицу $K(t)$ фундаментальной матрицей системы (1), если она удовлетворяет матричному уравнению

$$\frac{d}{dt}K(t) = K(t)A + K(t-h)B, \quad t > 0,$$

и, кроме того, $K(t) = 0_{n\times n}$ для $t < 0$, $K(0) = E_{n\times n}$. Здесь и в дальнейшем E — единичная матрица.

Евклидова метрика и индуцированная ею нормы используются для векторов и матриц. Пространство кусочно-непрерывных функций дополнено следующей нормой

$$\|\varphi\|_h = \sup_{\vartheta\in[-h,0]} \|\varphi(\vartheta)\|.$$

Определение 4. Система (1) называется *экспоненциально устойчивой*, если существуют такие постоянные $\gamma \geqslant 1$ и $\sigma > 0$, что для любой начальной функции $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ при всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\|x(t, \varphi)\| \leqslant \gamma e^{-\sigma t} \, \|\varphi\|_h. \tag{2}$$

Определение 5. Постоянную $\gamma \geqslant 1$ назовем *величиной перерегулирования*, а $\sigma > 0$ — *степенью затухания.*

Определение 6. Время T, необходимое системе для подавления начального отклонения $\|\varphi\|_h$ до заданной величины безразличия $\varepsilon > 0$, назовем временем переходного процесса.

Неравенство (2) позволяет получить следующую оценку для времени переходного процесса T

$$T \geqslant \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{\gamma \|\varphi\|_h}{\varepsilon} \right). \tag{3}$$

В приложениях обычно используют значение $\varepsilon = 0,05\ \|\varphi\|_h$.

Целью данной работы является оценка параметров γ, σ и T, основываясь на подходе Ляпунова – Красовского.

Известно[4], что точная верхняя грань для степени затухания может быть найдена как $\sigma = -\max\limits_k \mathrm{Re}(\lambda_k)$, где λ_k — комплексные корни характерестического уравнения

$$\det(\lambda E - A - Be^{-\lambda h}) = 0,$$

однако ввиду сложности задачи вычисления корней в общем случае трансцендентного уравнения данный подход не приобрел распространения. Кроме того, он не позволяет оценить величину перерегулирования γ.

Другой подход к поставленной задаче предполагает использование различных линейных матричных неравенств, в качестве неизвестной в которых используется норма положения системы. Он подробно описан в [5].

Наконец, третья группа методов использует аппарат прямого метода Ляпунова. Они базируются либо на применении конечномерных функций положения системы — функциях Ляпунова – Разумихина [6], либо на использовании бесконечномерных функционалов на множестве состояний системы — функционалах Ляпунова – Красовского [7]. Во многих случаях результаты, полученные с помощью этих методов, являются прямым следствием теоремы Красовского об устойчивости [7]. В данной работе используются функционалы с заданной производной, в частности, функционалы полного типа, подробно описанные в [8].

Для систем линейных стационарных дифференциальных уравнений без запаздывания аналогичная задача рассмотрена в статье [9]. Результаты, полученные для поставленной задачи, представлены в [10].

Глава 1. Вспомогательные сведения

1.1. Функционалы полного типа

Сформулируем критерий экспоненциальной устойчивости — теорему Красовского для систем линейных стационарных дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Теорема 1[7]. *Система* (1) *является экспоненциально устойчивой, если существует функционал* $v : PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *такой, что выполняются следующие условия:*

1. *Для некоторых положительных постоянных* α_1, α_2 *выполняется*

$$\alpha_1 \|\varphi(0)\|^2 \leqslant v(\varphi) \leqslant \alpha_2 \|\varphi\|_h^2$$

2. *Для некоторого положительного* β *выполняется неравенство*

$$\frac{d}{dt} v(x_t)\bigg|_{(1)} \leqslant -\beta \|x(t)\|^2, \quad t \geqslant 0,$$

вдоль решений системы.

Данная теорема имеет несколько путей возможного применения. С одной стороны, можно взять функционал $v(\varphi)$ достаточно общего вида, который заведомо удовлетворяет первому условию теоремы, найти его производную в силу системы и исследовать ее отрицательную определенность. Во многих случаях эта задача приводит к необходимости решения уже упомянутых матричных неравенств, однако существенным недостатком данного подхода является то, что выбираемый функционал $v(\varphi)$, по сути, изначально никак не связан с системой (1).

С другой стороны, можно строить $v(\varphi)$ по его заведомо известной (и отрицательно-определенной) производной. По построению, функционал явно связан с рассматриваемой системой, поэтому может быть использован не только для анализа устойчивости, но и различных свойств системы (1). В то же время, вопрос существования (и, возможно,построения) квадратичных оценок снизу остается и в этом случае серьезной проблемой.

Рассмотрим функционал $w_0(x)$ в виде квадратичной формы с заданной матрицей W: $w_0(x) = x^{\mathrm{T}} W x$. Найдем функционал $v_0(\varphi)$, определенный на множестве кусочно-непрерывных функций, такой, что

$$\frac{d}{dt} v_0(x_t) = -w_0(x), \quad t \geqslant 0.$$

Предполагая экспоненциальную устойчивость системы (1) и используя формулу Коши [4], получим следующее выражение для искомого функционала:

$$\begin{gathered} v_0(\varphi) = \varphi^{\mathrm{T}}(0) U(0) \varphi(0) + 2\varphi^{\mathrm{T}}(0) \int_{-h}^{0} U(-h-\theta) B \varphi(\theta) d\theta + \\ + \int_{-h}^{0} \varphi^{\mathrm{T}}(\theta_1) B^{\mathrm{T}} \left[\int_{-h}^{0} U(\theta_1 - \theta_2) B \varphi(\theta_2) d\theta_2 \right] d\theta_1, \end{gathered} \tag{4}$$

где матрицу

$$U(\tau) = \int_0^{\infty} K^{\mathrm{T}}(t) W K(t+\tau) dt$$

будем называть матрицей Ляпунова, ассоциированной с матрицей W. Матрица $K(t)$ — фундаментальная матрица системы (1).

По построению функционал v_0 удовлетворяет второму условию теоремы Красовского, если матрица W является положительно-определенной. С другой стороны, как показано в [11], функционал v_0, вообще говоря, не допускает квадратичной оценки снизу, необходимой для выполнения первого условия теоремы 1, поэтому необходима существенная модификация функционала, выбираемого в качестве производной искомого.

Для трех симметричных матриц $W_j, j = 0, 1, 2$, определим функционал следующего вида

$$w(\varphi) = \varphi^{\mathrm{T}}(0) W_0 \varphi(0) + \varphi^{\mathrm{T}}(-h) W_1 \varphi(-h) + \int_{-h}^{0} \varphi^{\mathrm{T}}(\theta) W_2 \varphi(\theta) d\theta.$$

Как показано в [8], функционал $v(\varphi)$ будет определяться следующей формулой

$$v(\varphi) = v_0(\varphi) + \int_{-h}^{0} \varphi^{\mathrm{T}}(\theta) \left[W_1 + (h+\theta) W_2 \right] \varphi(\theta) d\theta, \tag{5}$$

где $v_0(\varphi)$ обозначает функционал вида (4), полученный с использованием матрицы Ляпунова, ассоциированной с матрицей $W = W_0 + W_1 + hW_2$. Вдоль решений системы (1) $v(\varphi)$ удовлетворяет условию

$$\frac{d}{dt} v(x_t) = -w(x_t), \quad t \geqslant 0.$$

Назовем функционал (5) функционалом полного типа, если матрицы $W_j, j = 0, 1, 2$, являются положительно-определенными. Кроме того, справедливы следующие результаты.

Лемма 1. *Пусть система* (1) *экспоненциально устойчива. Для трех положительно-определенных матриц* $W_j, j = 0, 1, 2$, *существуют положительные постоянные* β_1, β_2 *такие, что функционал полного типа, определяемый формулой* (5), *допускает следующую оценку снизу*

$$\beta_1 \|\varphi(0)\|^2 + \beta_2 \int_{-h}^{0} \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta \leqslant v(\varphi), \quad \varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^{\mathrm{n}}). \tag{6}$$

Постоянные β_1, β_2 выбираются таким образом, чтобы матрица

$$Q(\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} W_0 & 0 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} A + A^{\mathrm{T}} & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$

оставалась положительно-определенной.

Определение 7. Система (1) удовлетворяет условию Ляпунова, если спектр системы

$$\Lambda = \{\lambda \mid \det(\lambda E - A - Be^{-\lambda h}) = 0\}$$

не содержит такой точки λ_0, что точка $-\lambda_0$ также принадлежит спектру.

Лемма 2. *Пусть система* (1) *экспоненциально устойчива и, кроме того, удовлетворяет условию Ляпунова. Для трех положительно-определенных матриц* $W_j, j = 0, 1, 2$, *существуют положительные постоянные* δ_1, δ_2 *такие, что функционал полного типа, определяемый формулой* (5), *допускает следующую оценку сверху*

$$v(\varphi) \leqslant \delta_1 \|\varphi(0)\|^2 + \delta_2 \int_{-h}^{0} \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta, \quad \varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^{\mathrm{n}}). \tag{7}$$

В выражении (7) $\delta_1 = \|U\|_h (1 + h\|B\|)$, $\delta_2 = \delta_1 \|B\| + (\|W_1\| + h\|W_2\|)$.

Пользуясь оценками (6) и (7), получим условие, которому удовлетворяет функционал полного типа

$$\beta_1 \|\varphi(0)\|^2 \leqslant v(\varphi) \leqslant (\delta_1 + h\delta_2) \|\varphi\|_h. \tag{8}$$

Таким образом, функционал полного типа (5) по построению удовлетворяет второму условию теоремы Красовского, а леммы 1,2 и следующее из них неравенство (8) доказывают выполнение и первого условия в случае, когда исходная система экспоненциально устойчива и удовлетворяет условию Ляпунова. Следовательно, для подобных функционалов справедлив более сильный аналог теоремы Красовского.

Теорема 2. *Система* (1) *является экспоненциально устойчивой тогда и только тогда, когда существует функционал полного типа, удовлетворяющий для некоторых положительных* α_1,α_2 *условию*

$$\alpha_1\|\varphi(0)\|^2 \leqslant v(\varphi) \leqslant \alpha_2\|\varphi\|_h^2.$$

Кроме того, постоянные γ и σ, участвующие в определении экспоненциальной устойчивости (2), при использовании функционалов полного типа могут быть выбраны следующим образом

$$\gamma \geqslant \sqrt{\frac{\delta_1 + h\delta_2}{\beta_1}} = \sqrt{\frac{\mathrm{v}(1+bh)^2 + h\|W_1\| + h^2\|W_2\|}{\beta_1}}, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \sigma \leqslant \max\left\{\frac{\lambda_{min}(W_0)}{2\delta_1}, \frac{\lambda_{min}(W_2)}{2\delta_2}\right\} = \\ = \max\left\{\frac{\lambda_{min}(W_0)}{2\mathrm{v}(1+bh)}, \frac{\lambda_{min}(W_2)}{2(\mathrm{v}b(1+bh) + \|W_1\| + h\|W_2\|)}\right\}, \end{gathered} \tag{10}$$

где $\mathrm{v} = \|U\|_h,\ b = \|B\|$.

Для вычисления правых частей оценок (9), (10) необходимо уметь вычислять матрицу Ляпунова $U(\tau)$, ассоциированную с заданной матрицей W. В то же время видно, что точность этих оценок зависит от конкретных матриц $W_j, j = 0, 1, 2,$ и их оптимальный выбор может существенно улучшить получаемые результаты.

1.2. Вычисление матрицы Ляпунова

Прежде чем переходить к непосредственному вычислению матрицы Ляпунова, сформлируем некоторые ее общие свойства [8].

Лемма 3. *Матрица Ляпунова $U(\tau)$ непрерывно зависит от τ.*

Лемма 4. *Матрица Ляпунова $U(\tau)$ удовлетворяет динамическому свойству*

$$\frac{d}{dt}U(\tau) = U(\tau)A + U(\tau - h)B, \quad \tau \geqslant 0.$$

Лемма 5. *Матрица Ляпунова $U(\tau)$ удовлетворяет алгебраическому свойству*

$$U(0)A + U(-h)B + A^{\mathrm{T}}U(0) + B^{\mathrm{T}}U(h) = -W.$$

Лемма 6. *Матрица Ляпунова $U(\tau)$ удовлетворяет симметрическому свойству*

$$U(-\tau) = U^{\mathrm{T}}(\tau), \quad \tau \geqslant 0.$$

Для нахождения матрицы $U(\tau)$ для системы (1) введем две вспомогательные матрицы

$$Y(\tau) = U(\tau), \quad Z(\tau) = U(\tau - h), \quad \tau \in [0, h]. \tag{11}$$

Лемма 7. *Пусть матрица Ляпунова $U(\tau)$ ассоциирована с симметричной матрицей W. Тогда матрицы* (11) *удовлетворяют следующей системе матричных уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}Y(\tau) = Y(\tau)A + Z(\tau)B, \\ \dfrac{d}{d\tau}Z(\tau) = -B^{\mathrm{T}}Y(\tau) - A^{\mathrm{T}}Z(\tau), \end{cases} \tag{12}$$

с граничными условиями

$$Y(0) = Z(h), \quad A^{\mathrm{T}}Y(0) + Y(0)A + B^{\mathrm{T}} + Z(0)B = -W. \tag{13}$$

Преобразуем задачу (12),(13) к виду, удобному для практических вычислений. Введем оператор векторизации $\mathrm{vec}(P)$, который сопоставляет произвольной матрице P вектор p, полученный «вытягиванием» столбцов матрицы в один. С использованием этого оператора получим следующую систему

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} \tag{14}$$

с граничными условиями

$$M \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} y(h) \\ z(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -w \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Здесь используются обозначения

$$L = \begin{pmatrix} E \otimes A & E \otimes B \\ -B^{\mathrm{T}} \otimes E & -A^{\mathrm{T}} \otimes E \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} E \otimes E & \mathbb{O}_{n\times n} \otimes \mathbb{O}_{n\times n} \\ A^{\mathrm{T}} \otimes E + E \otimes A & E \otimes B \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{n\times n} \otimes \mathbb{O}_{n\times n} & -E \otimes E \\ B^{\mathrm{T}} \otimes E + E \otimes A & \mathbb{O}_{n\times n} \otimes \mathbb{O}_{n\times n} \end{pmatrix},$$

где $y(\tau) = \mathrm{vec}(Y(\tau))$, $z(\tau) = \mathrm{vec}(Z(\tau))$, $w = \mathrm{vec}(W)$, а знаком $\otimes$ обозначено Кронекерово произведение соответствующих матриц.

Пользуясь известным видом решения системы (14), можно переписать начальные условия (15) в виде

$$\left[M + Ne^{Lh}\right] \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -w \end{pmatrix},$$

откуда, предполагая существование и единственность решения, окончательно получаем

$$\begin{pmatrix} y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} = e^{L\tau}\left[M + Ne^{Lh}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -w \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Следующие утверждения позволяют вернуться от вспомогательных переменных к исходной задаче вычисления матрицы Ляпунова.

Лемма 8. *Если пара матриц* $Y(\tau), Z(\tau)$ *удовлетворяет системе* (12) *с граничными условиями* (13), *то*

$$U(\tau) = \frac{1}{2}\left[Y(\tau) + Z^{\mathrm{T}}(h-\tau)\right], \quad \tau \in [0,h].$$

Лемма 9. *Если пара матриц* $Y(\tau), Z(\tau)$ *является единственным решением системы* (12) *с граничными условиями* (13), *то*

$$U(\tau) = Y(\tau), \quad \tau \in [0,h].$$

Обе леммы предполагают, что полученное решение $U(\tau)$ может быть продолжено с отрезка $[0,h]$ на отрезок $[-h,0)$ с помощью симметрического свойства.

Выполнение условия Ляпунова, упоминавшегося ранее, является критерием единственности матрицы $U(\tau)$.

Теорема 3. *Система* (1) *имеет единственную матрицу Ляпунова* $U(\tau)$, *ассоциированную с заданной симметричной матрицей* W *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Ляпунова.*

Для вспомогательных переменных $Y(\tau)$, $Z(\tau)$ эта теорема принимает следующий вид.

Теорема 4. *Система* (1) *удовлетворяет условию Ляпунова тогда и только тогда, когда*

$$\det\left(M + Ne^{Lh}\right) \neq 0.$$

Таким образом, задача вычисления матрицы Ляпунова сведена к задаче решения обыкновенного стационарного линейного дифференциального уравнения со специальными граничными условиями. Следует отметить, что в формуле (16) от выбора матрицы W зависит только последний множитель, что существенно упрощает вычисления матриц $U(\tau)$, ассоциированных с различными W.

Глава 2. Основные результаты

2.1. Экстремальные задачи

Рассмотрим экспоненциально устойчивую систему (1). Неравенства (9) и (10) позволяют оценить величины γ и σ, однако точность оценки зависит от выбора матриц W_j, $j = 0, 1, 2$. Составим соответствующие задачи оптимизации.

$$\begin{cases} \gamma(W_0, W_1, W_2) = \sqrt{\frac{\delta_1 + h\delta_2}{\beta_1}} \longrightarrow \min\limits_{W_0, W_1, W_2}, \\ W_j \geqslant 0, \quad j = 0, 1, 2, \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} \sigma(W_0, W_1, W_2) = \max\left\{\frac{\lambda_{min}(W_0)}{2\delta_1}, \frac{\lambda_{min}(W_2)}{2\delta_2}\right\} \longrightarrow \max\limits_{W_0, W_1, W_2}, \\ W_j \geqslant 0, \quad j = 0, 1, 2. \end{cases} \tag{18}$$

Условие $W_j \geqslant 0$ означает принадлежность матрицы W_j к классу положительно-полуопределенных матриц.

Сразу отметим неединственность решений данных экстремальных задач. Действительно, для любого $\alpha > 0$ выполняются равенства

$$\gamma(\alpha W_0, \alpha W_1, \alpha W_2) = \gamma(W_0, W_1, W_2),$$
$$\sigma(\alpha W_0, \alpha W_1, \alpha W_2) = \sigma(W_0, W_1, W_2),$$

обеспечивая неединственность решений задач оптимизации. В то же время это позволяет рассматривать только те матрицы W_j, $j = 0, 1, 2$, все компоненты которых ограниченны сверху некоторым числом, например, единицей.

Теорема 5. *Задачи условной оптимизации* (17) *и* (18) *имеют решение.*

Утверждение теоремы сразу следует из теоремы Вейерштрасса о достижении функции на компакте своего максимального и минимального значений.

2.2. Алгоритм Нелдера – Мида

В силу особенностей поставленных экстремальных задач, а именно – высокой ресурсоемкости вычислений целевых функций и соответствующей сложности численного получения значений их градиентов, в качестве метода оптимизации необходимо использовать либо детерменированный метод нулевого порядка (то есть метод, использующий только значения функции, но не ее производные), либо стохастические методы оптимизации.

Детерменированные методы нулевого порядка тем или иным образом имитируют антиградиент, а затем используют его в качестве минимизирующего направления для шага некоторой величины. Два этих параметра – метод нахождения направления движения и величина шага – и определяют основные различия разных методов оптимизации. Наибольшей популярностью пользуются алгоритм Гаусса (покоординатной оптимизации) и метод Нелдера – Мида. Первый метод требует значительно б**о**льшего количества вычислений целевой функции, поэтому рассмотрим подробнее второй из них.

Пусть поставлена задача безусловной минимизации некоторой функции n аргументов:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \min.$$

На первом этапе выберем $n+1$ точки $x^i = (x_1^i, \ldots, x_n^i)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, которые образуют n-мерный симплекс, и вычислим в них значения целевой функции. Будем считать этот набор точек отсортированным по возрастанию, т. е.

$$f(x^1) \leqslant f(x^2) \leqslant \cdots \leqslant f(x^{n+1}).$$

Кроме того, вычислим центр тяжести первых n точек:

$$x_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x^i$$

В зависимости от соотношения значений целевой функции в точках x^{n+1} и x_c произведем одну из следующих деформаций симлекса:

- отражение x^{n+1} относительно центра тяжести x_c;
- приближение x^{n+1} к центру тяжести x_c;
- глобальное сжатие симплекса к точке с минимальным значением.

Масштабы сжатия, приближения и отражения определяются соответствующими заранее заданными параметрами метода.

В качестве критерия остановки используется норма близости разных точек симплекса, т. е.

$$\underset{i,j=1\ldots n+1}{\operatorname{argmax}} \|x^j - x^i\| \leqslant \varepsilon.$$

Стоит отметить, что на каждой последующей итерации метода требуется не более трех дополнительных вычислений целевой функции: в новом центре тяжести точек, в отраженной точке относительно центра тяжести и, возможно, в некоторой точке отрезка $[x^{n+1}, x_c]$.

Основным недостатком используемого алгоритма является отсутствие теории сходимости. Более того, существуют примеры бесконечно-дифференцируемых функций на которых метод расходится. В то же время, для широкого класса задач (в том числе для задач с однородной целевой функцией) алгоритм достаточно надежен. Другим недостатком является значительное замедление работы алгоритма при больших размерностях поставленной задачи, свойственное детерменированным алгоритмам поиска минимума.

2.3. Программная реализация

Для практической реализации задача условной оптимизации (на множестве положительно-полуопределенных матриц) сведена к задаче безусловной оптимизации с помощью метода штрафных функций. Он заключается в замене исходной задачи минимизации целевой функции $f(x)$ с наложенными на нее ограничениями $g_i(x) \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ на минимизацию некоторой функции $F(x) = f(x) + R(g_i(x))$ без ограничений. Функция $R(\cdot)$ выбирается таким образом, чтобы ее значения быстро возрастали по мере приближения значения любого из ограничений к нулю.

Теорема 5, гарантирующая существование решений задач (17) и (18), позволяет использовать численные методы нахождения матриц, доставляющих соответствующим функционалам оптимальное значение.

Описанный выше оптимизационный алгоритм реализован в среде MATLAB. В качестве штрафной функции используется логарифмическая функция. Вычисление целевых функций реализовано с помощью подхода, описанного во втором параграфе первой главы: матрица Ляпунова найдена как решение специальной системы обыкновенных стационарных линейных уравнений с граничным условием особого вида, после чего дальнейшее вычисление γ и σ как функций своих аргументов не представляет сложности.

2.4. Численный пример

Рассмотрим пример системы (1), используемый в работах других авторов[12]:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 4 & 0{,}1 \end{pmatrix},$$

в результате работы программы при $h = 0{,}5$ были получены значения $\gamma = 5{,}04$ и $\sigma = 1{,}149$. Для сравнения, в [12] эти значения получены точными методами и равны соответственно $\gamma = 4{,}9997$ и $\sigma = 1{,}1534$.

На Рис. 1 демонстрируется выполнение определения экспоненциальной устойчивости: норма решения $\|x(t,\varphi)\|$ не превосходит функцию $\gamma e^{-\sigma t}\|\varphi\|_h$ при $t \geqslant 0$. В качестве параметров γ и σ используются полученные в результате выполнения программы. Рис. 2 показывает траекторию, соответствующую решению, на фазовой плоскости.

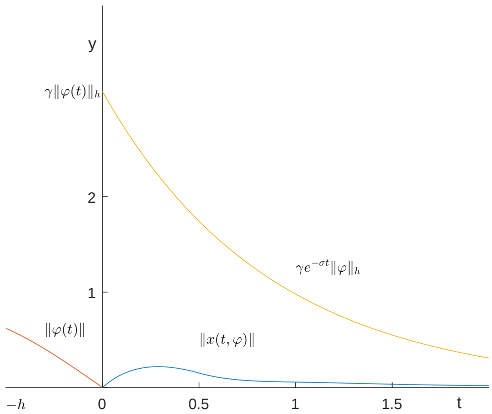

Рис. 1: Ограниченность нормы.

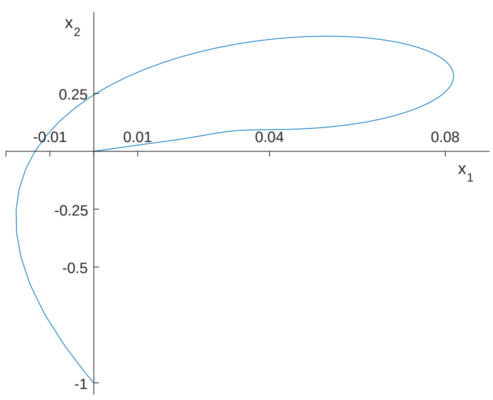

Рис. 2: Фазовый портрет.

Заключение

В работе поставлена и решена задача оценки решений системы линейных стационарных дифференциально-разностных уравнений. На основе прямого метода Ляпунова предложен оптимизационный алгоритм оценки параметров переходных процессов устойчивых систем и его программная реализация. С помощью программных пакетов MATLAB и GEOGEBRA проиллюстрирована корректность полученных оценок и некоторые свойства решений.

Заметим, что реализованный в работе подход, вообще говоря, не позволяет найти точные оценки перерегулирования и степени затухания переходных процессов. Поэтому в качестве направлений для дальнейшего исследования следует отметить проблему получения точных оценок переходного процесса на основе прямого метода Ляпунова, а также возможное обобщение результатов на системы уравнений с несколькими запаздываниями разной величины, а также использование недетерминированных методов оптимизации для программной реализации.

Список литературы

[1] Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью: Учебное пособие. СПб.: Лань, 2013. 448 с.

[2] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М. : ОНТИ. Гл. ред. общетехн. лит., 391 с.

[3] Зубов В. И. Устойчивость движения. М. : Высшая школа, 1973. 273 с.

[4] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 424 с.

[5] Boys S. P., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994. 206 p.

[6] Разумихин Б. С. Устойчивость систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 4. С. 500–512.

[7] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гос.изд-во физ.-мат. литературы, 1959. 211 с.

[8] Kharitonov V. L. Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices.. Basel: Birkhauser, 2013. 311 p.

[9] Цимфер С. А. Оценка параметров переходного процесса линейной системы на основе прямого метода Ляпунова // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3. № 1. С. 138–143.

[10] Цимфер С. А. Метод Нелдера – Мида в задаче оценки параметров переходного процесса линейной дифференциально-разностной системы // Процессы управления и устойчивость. 2017. В печати.

[11] Huang, W.: Generalizations of Lyapunov's theorem in a linear delay system. J. Math. Anal. Appl. 142, 1989. P. 83-–94

[12] Mondie S., Kharitonov V. L. Exponential estimates for retarded time-delay systems: an LMI approach // IEEE Trans. Autom. Control. 2005. Vol. 50, no. 2. P. 268–273.

[13] Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.