САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра математической теории экономических решений

Ямщиков Семен Алексеевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Разработка моделей потребления на примере среднего класса

Направление 010400
Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Колбин В.В.

Санкт-Петербург
2017

Содержание

Введение

...В государстве
Три класса есть: во-первых, богачи,
Для города от них нет пользы, им бы
Лишь для себя побольше. Но опасны
И бедняки и чернь, когда свое
С угрозою подъемлют на имущих
Отравленное жало, подговорам
Послушная витий. Лишь средний класс
Для города опора; он законам
Покорствует и власти...

Еврипид, 420 г. до н.э.

Средний класс населения страны (СК) в наши дни является устойчивой социальной структурой, потребительские особенности которой положительно влияют на совокупный спрос на каждый отдельный вид экономических благ. Государство, будучи заинтересованным в увеличении совокупного спроса, как фактора, положительно влияющего на показатели производства в стране, должно стремиться увеличить эту прослойку населения как качественно, так и количественно.

Целью данной работы является отыскание значений инструментов социально-экономической политики РФ, позволяющих увеличить долю СК населения страны. Для достижения поставленной цели необходимо:

1. Определить значимые элементы государственного управления и сформулировать постановку задачи его оптимизации.
2. Построить функции, приближающие показатели потребления населения на основе исторических данных.
3. Формализовать понятие СК.
4. Определить и реализовать метод решения поставленной задачи оптимизации.

Для осуществления вышеперечисленных действий привлекаются различные математические аппараты и методы. Привнесенная работой новизна заключается в особенностях структуры модели СК. Для формализации этого понятия используется теория нечетких множеств и нечеткой логики, которая позволяет математически представить критерии причисления к СК с помощью логических высказываний естественного языка, поскольку критерии именно такого вида чаще всего используются в работах социологов и экономистов. Дополнительным аргументом в пользу использования нечетко-множественного аппарата является уход от четкого разделения населения на классы, что также представляется новой ступенью в анализе СК.

Глава 1. Постановка задачи многокритериальной оптимизации

Все население страны является является структурой слишком обобщенной, поэтому для повышения точности последующих построений будем рассматривать его, как совокупность видов домашних хозяйств (семей). Пусть $N = \{1, \ldots, 10\}$ — множество децильных групп распределения домохозяйств по располагаемым ресурсам.

Рассмотрим основные инструменты социально-экономической политики государства, влияющие на состав СК. *Государственным управлением* назовем вектор $u = \{u_n \in U_n\}$, $n = \overline{1, 33}$, компоненты которого имеют следующий смысл:

u_1 – u_8 — сумма налогов, начисленных к уплате:

- u_1 — налог на прибыль организаций (млрд руб.),
- u_2 — налог на добавленную стоимость (млрд руб.),
- u_3 — акцизы по товарам, произведенным в РФ (млрд руб.),
- u_4 — налог на имущество физических лиц (млрд руб.),
- u_5 — налог на имущество организаций (млрд руб.),
- u_6 — транспортный налог на физических лиц (млрд руб.),
- u_7 — транспортный налог на организации (млрд руб.),
- u_8 — налог на добычу полезных ископаемых (млрд руб.);

u_9 – u_{19} — расходы консолидированного бюджета РФ на:

- u_9 — пенсионное обеспечение (млрд руб.),
- u_{10} — социальное обслуживание (млрд руб.),
- u_{11} — социальное обеспечение (млрд руб.),
- u_{12} — топливно-энергетический комплекс (млрд руб.),
- u_{13} — рыболовство, сельское, водное и лесное хозяйства (млрд руб.),
- u_{14} — транспорт, дорожное хозяйство (млрд руб.),
- u_{15} — связь и информатика (млрд руб.),
- u_{16} — жилищно-коммунальное хозяйство (млрд руб.),
- u_{17} — образование и наука (млрд руб.),
- u_{18} — культура, кинематография и СМИ (млрд руб.),
- u_{19} — здравоохранение (млрд руб.);

u_{20} – u_{23} — прочие нормы:

- u_{20} — прожиточный минимум (руб.),

- u_{21} — минимальный размер оплаты труда (руб.),
- u_{22} — норма резервирования ЦБ (%),
- u_{23} — ключевая ставка ЦБ (%).

u_{23+i} — сумма налога на доход физических лиц, начисленного к уплате семьям i-го типа, $\forall i \in N$ (млрд руб.). Такое разбиение позволяет рассматривать случай дифференцированного налога.

В качестве выборки были рассмотрены временные ряды с интервалом в один год с 2008 г. по 2016 г. [13]. Для приведения показателей временного ряда к соизмеримому виду [5] ко всем стоимостным величинам из выборки была применена формула

$$G(t_0, t_i) = \frac{G(t_i, t_i)}{I(t_0, t_i)},$$

где $G(t_{i_1}, t_{i_2})$ — значение показателя в момент времени t_{i_2} в ценах базового момента t_{i_1}, $I(t_{i_1}, t_{i_2)}$ — индекс роста цен в период с t_{i_1} по t_{i_2}. Чтобы приблизить условия модели к реальным, ограничим U_n, $n = \overline{1, 33}$ минимальными и максимальными значениями показателей на выборке.

Поставим задачу оптимизации вектора [6] $u \in U = U_1 \times \cdots \times U_{33}$ по многоцелевому показателю $F(u) = (T(u), m(u))$, где

- $T(u) = \sum\limits_{n=1}^{8} u_n + \sum\limits_{n=24}^{33} u_n$ — сумма налоговых поступлений,
- $m(u)$ — доля СК от населения РФ, речь о которой пойдет в следующей главе.

Постановка задачи будет полной, если определить способ нормализации (для приведения критериев оптимальности к соизмеримому виду) и принцип выбора, по которому будет определен оптимальный вектор $\overline{u} \in U$. Будем далее использовать естественную нормализацию [6]

$$F(u) = \left(\frac{T(u) - \min\limits_{u \in U} T(u)}{\max\limits_{u \in U} T(u) - \min\limits_{u \in U} T(u)}, \frac{m(u) - \min\limits_{u \in U} m(u)}{\max\limits_{u \in U} m(u) - \min\limits_{u \in U} m(u)} \right). \tag{1}$$

В качестве принципа выбора оптимального управления $\overline{u} \in U$ определим принцип наименьшего уклонения [6]

$$\left\| F(\overline{u}) - F^* \right\| \leq \left\| F(u) - F^* \right\|, \text{ где } F^* = \big(\max_{u \in U} T(u), \max_{u \in U} m(u) \big),$$

который в случае применения формулы (1) примет вид

$$\left\| F(\overline{u}) - (1, 1) \right\| \leq \left\| F(u) - (1, 1) \right\|. \tag{2}$$

Таким образом, для того, чтобы приступить к решению задачи, необходимо определить долю СК от населения страны $m(u)$.

Глава 2. Нечеткое представление среднего класса

На данный момент в социологии и экономике не существует единого подхода к определению критериев выделения СК. Используются разные: от самоопределения и профессии до заработной платы и уровня образования. В работах и [10, 11] одними из ведущих факторов, участвующих в определении СК являются показатели потребления, которые наиболее точно связывают СК с его экономической ролью.

2.1. Аппроксимация величин, определяющих средний класс в рамках модели потребления

Говоря о моделях потребления, нельзя обойти вниманием сами объекты потребления. Сперва основные экономические блага, потребляемые населением, разобьем на 13 групп:

1. продукты питания и безалкогольные напитки,
2. алкоголь и табачные издеия,
3. одежда и обувь,
4. содержание и ремонт жилья,
5. услуги ЖКХ и топливо,
6. предметы домашнего обихода,
7. услуги здравоохранения,
8. транспортные средства и их эксплуатация,
9. транспортные услуги,
10. услуги связи,
11. организация отдыха и культурные мероприятия,
12. образовательные услуги,
13. услуги гостиниц, кафе и ресторанов.

Пусть $B = \{1, \ldots, 13\}$ — множество видов благ.

Для дальнейшей разработки модели будем использовать функции, приближающие величины двух видов:

- Средние месячные располагаемые ресурсы домашнего хозяйства i-го типа на одного члена семьи — I^i, $\forall i \in N$.
- Средние месячные затраты на блага j-го вида на одного члена семьи — q_j, $\forall j \in B$.

2.1.1. Располагаемые ресурсы домохозяйств

На основе исторических данных построим функции, определяющие количество располагаемых ресурсов домохозяйств в зависимости от факторов, влияющих на них. Областью определения и, соответственно, набором факторов для функции I^i, будем называть $U^{I^i} = U_4 \times U_8 \times U_9 \times U_{10} \times U_{11} \times \times U_{20} \times U_{21} \times U_{22} \times U_{23} \times U_{23+i}$. Чтобы построенная функция была способна в действительности приближать необходимые значения, факторы были отобраны таким образом, чтобы модуль коэффициента парной корреляции для любой пары факторов был ниже, чем $0,8$.

Исходя из предположения об ограниченности U_n, $n = \overline{1,33}$, в качестве аппарата аппроксимации выберем искусственную нейронную сеть радиальных базисных функций (ИНС РБФ) [14], реализующую локальную аппроксимацию. В случае одного выходного нейрона ИНС РБФ имеет вид линейной комбинации $\widetilde{m}$ радиальных функций Гаусса с центрами в точках c_m, $m = \overline{1,\widetilde{m}}$

$$I^i(u^i) = \sum_{m=1}^{\widetilde{m}} a_m e^{-\frac{\left\|u^i - c_m\right\|^2}{2\sigma_i^2}}, \quad c_m, u^i \in U^{I^i}, \text{ где}$$

$$\sigma_i^2 = \frac{\max\limits_{m_1, m_2 = \overline{1,\widetilde{m}}} \left\|c_{m_1} - c_{m_2}\right\|^2}{2\widetilde{m}}, \quad c_{m_1}, c_{m_2} \in U^{I^i}.$$

Точками c_m в модели будут являться данные выборки из [13] за каждый год, тогда $\widetilde{m} = 9$. Таким образом, получена система из $\widetilde{m}$ уравнений, линейных относительно a_m, в правой части которой будут стоять данные о располагаемых ресурсах семей из [12]. При решении ее любым методом решения СЛАУ (например, методом обратной матрицы) получены коэффициенты, приведенные в приложении 1.

2.1.2. Затраты домохозяйств на потребление благ

Для каждого вида благ построим функции, описывающие зависимость между затратами домохозяйства любого типа на потреблние благ

j-го вида и факторами, влияющими на них:

$$q_j = q_j(u^{q_j}, I),\ u^{q_j} \in U^{q_j},\ \text{где}$$

I — располагаемые ресурсы домохозяйства, потребляющего блага,

- $U^{q_1} = U_1 \times U_2 \times U_5 \times U_7 \times U_{13} \times U_{22} \times U_{23}$,
- $U^{q_2} = U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_5 \times U_7 \times U_{22} \times U_{23}$,
- $U^{q_3} = U_1 \times U_2 \times U_5 \times U_7 \times U_{22} \times U_{23}$,
- $U^{q_4} = U_1 \times U_2 \times U_5 \times U_7 \times U_{22} \times U_{23}$,
- $U^{q_5} = U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_5 \times U_7 \times U_8 \times U_{12} \times U_{13} \times U_{16} \times U_{22} \times U_{23}$,
- $U^{q_6} = U_1 \times U_2 \times U_5 \times U_7 \times U_{22} \times U_{23}$,
- $U^{q_7} = U_1 \times U_2 \times U_5 \times U_7 \times U_{19} \times U_{22} \times U_{23}$,
- $U^{q_8} = U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_5 \times U_7 \times U_8 \times U_{12} \times U_{13} \times U_{14} \times U_{22} \times U_{23}$,
- $U^{q_9} = U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_5 \times U_7 \times U_8 \times U_{12} \times U_{13} \times U_{14} \times U_{22} \times U_{23}$,
- $U^{q_{10}} = U_1 \times U_2 \times U_5 \times U_7 \times U_{15} \times U_{22} \times U_{23}$,
- $U^{q_{11}} = U_1 \times U_2 \times U_5 \times U_7 \times U_{18} \times U_{22} \times U_{23}$,
- $U^{q_{12}} = U_1 \times U_2 \times U_5 \times U_7 \times U_{17} \times U_{22} \times U_{23}$,
- $U^{q_{13}} = U_1 \times U_2 \times U_5 \times U_7 \times U_{22} \times U_{23}$.

Для каждой функции, таким образом, был выбран свой набор факторов, который, как и в пункте 2.1.1., сформирован экспертным образом в соответствии с предположением о том, что любая пара факторов должна иметь низкое значение модуля коэффициента корреляции.

Введем предположение о том, что эластичность затрат на потребление благ j-го вида по располагаемым ресурсам [4] постоянна

$$E_j = \frac{\partial \ln q_j(u^{q_j}, I)}{\partial \ln I} = const, \tag{3}$$

так как свойства блага, существующего само по себе, не зависят ни от типа семьи, которая его потребляет, ни от времени потребления. Далее величину E_j будем называть *качественностью* благ j-го вида.

Условию (3) удовлетворяет функция Кобба-Дугласа, подробно описанная в работе [5]. Выберем ее в качестве аппарата аппроксимации. Тогда функции, приближающие значения из [12], будут иметь вид

$$q_j(u_j, I) = b_0 u_{j1}^{b_1} \cdot \ldots \cdot u_{jh}^{b_h} I^{E_j}, u \in U^{q_j},$$

где h — размерность U^{q_j}. Коэффициенты $b_0, \ldots, b_h$ будем надодить с помощью метода наименьших квадратов по целевым значениям, взятым из [13]. Найденные коэффициенты приведены в приложении 2.

2.2. Нечеткое множество «Средний класс»

В абсолютном большинстве случаев критерии выделения среднего класса имеют либо лингвистическое представление, либо подразумевают размытые границы. В добавок к этому факту, четкая классификация, где каждому элементу множества ставится в соответствие класс, к которому он принадлежит, в условиях социальной стратификации не является адекватной. Учитывая вышеупомянутые причины, построим модель СК, как нечеткого множества.

Нечетким множеством типа 1 (НМТ1) [3] F будем называть множество упорядоченных пар вида

$$\left\{x \mid \mu^F(x)\right\}, x \in X,$$

где $\mu^F : X \to [0,1]$ — *функция принадлежности* F [3].

Введем НМТ1 «Средний класс» — M :

$$\left\{i \mid \ \mu^M(i)\right\}, i \in N. \tag{4}$$

Таким образом, каждый тип домохозяйств будет иметь ту или иную степень принадлежности к СК в рамках модели.

Определим два критерия причисления к СК, которые выразим через НМТ1:

1. «Средний класс 1» — $M_1 : \left\{i \mid \ \mu^{M_1}(i)\right\}$, $i \in N$. Характеризует принадлежность к СК как соответствие стандартам потребления.
2. «Средний класс 2» — $M_2 : \left\{i \mid \ \mu^{M_2}(i)\right\}$, $i \in N$. Характеризует принадлежность к СК в момент времени t как изменение степени принадлежности к СК по отношению к моменту времени $t-1$, исходя из соответствия стандартам изменения располагаемых ресурсов.

Тогда (4) можно представить как пересечение критериев 1 и 2:

$$M = M_1 \cap M_2 : \mu^M(i) = \mu^{M_1}(i) \wedge \mu^{M_2}(i) = \min\left\{\mu^{M_1}(i), \mu^{M_2}(i)\right\}.$$

Такой подход к отысканию решения предложен в работе [1].

2.2.1. Стандарты потребления

Обратимся к НМТ1 «Средний класс 1». Для оценки соответствия стандартам потребления семьями i-го типа будем использовать модель нечеткого экспертного управления, примеры которой описаны в [9]. Для этого введем следующее определение:

Лингвистической переменной [7] L будем называть набор $\{N^L, T^L, V^L, K^L\}$, где

- N^L — имя переменной,
- T^L — терм-множество значений переменной,
- V^L — область определения функций принадлежности термов из K^L,
- K^L — множество функций принадлежности термов из T^L.

Перейдем к рассмотрению модели нечеткого экспертного управления степенью принадлежности семьи i-го типа к СК $\mu^{M_1}(i)$. Далее опишем все этапы нечеткой продукции:

1. *Выходная переменная.* Введем одну управляемую лингвистическую переменную $\mu^{M_1}(i) = \left\{N^{\mu^{M_1}(i)}, T^{\mu^{M_1}(i)}, V^{\mu^{M_1}(i)}, K^{\mu^{M_1}(i)}\right\}$, где
   - $N^{\mu^{M_1}(i)}$ = «Степень принадлежности семьи i-го типа к среднему классу»;
   - $T^{\mu^{M_1}(i)} = \{t_1^{\mu^{M_1}}$ = «очень низкая»$, t_2^{\mu^{M_1}}$ = «низкая»$, t_3^{\mu^{M_1}} =$ $=$ «высокая»$, t_4^{\mu^{M_1}}$ = «очень высокая»$\}$;
   - $V^{\mu^{M_1}(i)} = [0, 1]$;
   - $K^{\mu^{M_1}(i)}(v) = \left\{\mu_s^{\mu^{M_1}(i)}(v)\right\}, \ s = \overline{1,4}, \ v \in V^{\mu^{M_1}(i)}$.

   Функции принадлежности из $K^{\mu^{M_1}(i)}$ определим экспертно тривиальным образом с помощью треугольных функций принадлежности [8] (см. рис. 1).

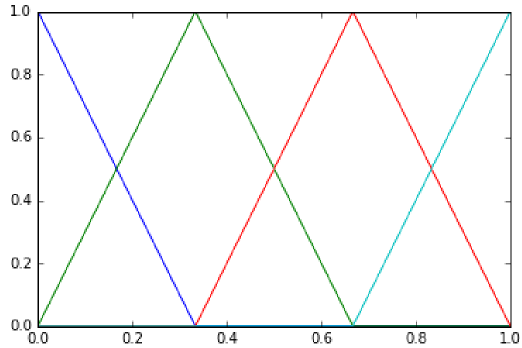

Рис. 1: Функции принадлежности из $K^{\mu^{M_1}(i)}$.

2. *Входные переменные.* Введем 14 управляющих лингвистических переменных:

   $S_j = \{N^{S_j}, T^{S_j}, V^{S_j}, K^{S_j}\}$, $j \in B$, где

- N^{S_j} = «Доля расходов на потребление благ j-го вида от располагаемых ресурсов семьи»;
- $T^{S_j} = \{t_1^{S_j}$ = «очень низкая», $t_2^{S_j}$ = «низкая», $t_3^{S_j}$ = «средняя», $t_4^{S_j}$ = «высокая», $t_5^{S_j}$ = «очень высокая»$\}$;
- $V^{S_j} = \left[S_j^{\min}, S_j^{\max}\right]$;
- $K^{S_j}(v) = \left\{\mu_k^{S_j}(v)\right\},\ k = \overline{1,5},\ v \in V^{S_j}$.

V^{S_j} ограничим минимальным и максимальным значениями $\frac{q_j}{I^i}$ на выборке. Чтобы снизить экспертную нагрузку на модель, функции принадлежности из K^{S_j} определим как ломаные, проходящие через точки, полученные в результате реализации алгоритма нечеткой кластеризации c-means [15] на данных выборки (см. рис. 2).

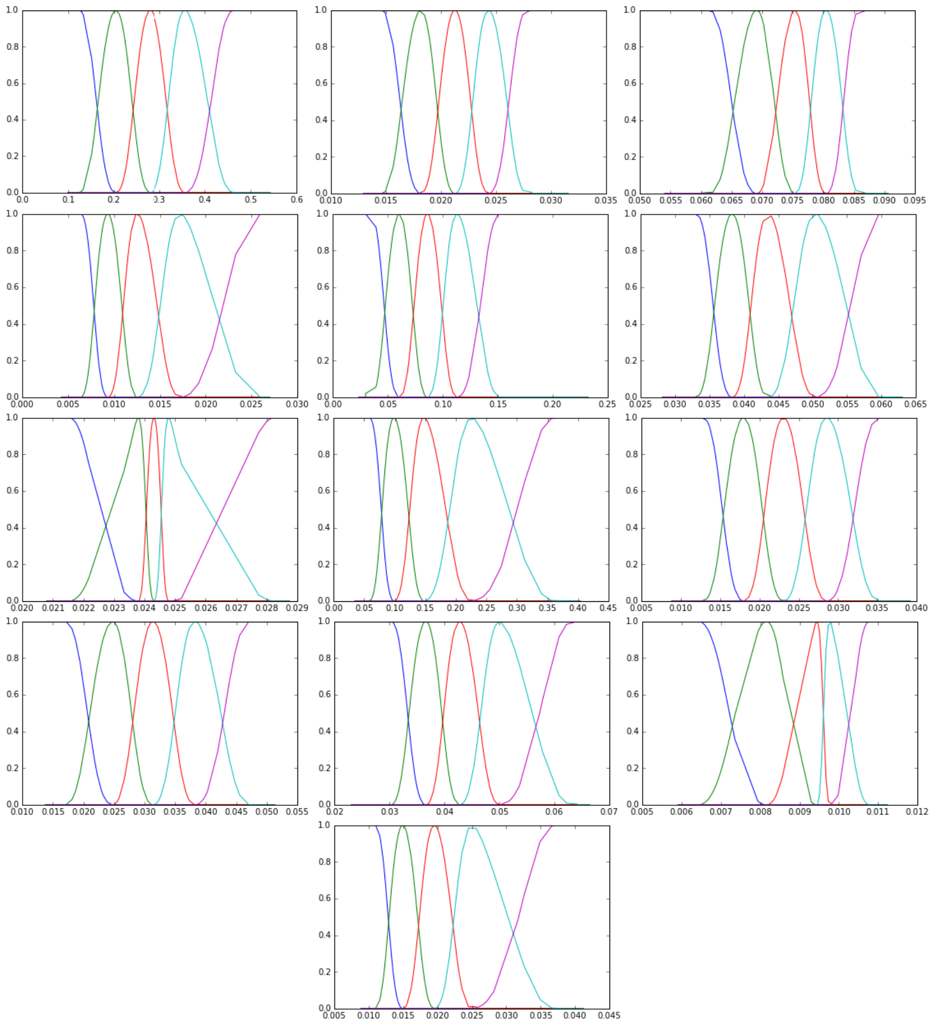

Рис. 2: Функции принадлежности из $K^{S_j}, j = \overline{1,13}$.

$E = \{N^E, T^E, V^E, K^E\}$, где

- N^E = «Качественность благ»;
- $T^E = \{t_1^E$ = «очень низкая», t_2^E = «низкая», t_3^E = «средняя»,

$t_4^E =$ «высокая», $t_5^E =$ «очень высокая»};

- $V^E = \left[\min\limits_j E_j, \max\limits_j E_j\right]$;
- $K^E(v) = \left\{\mu_l^E(v)\right\}, \; l = \overline{1,5}, \; v \in V^E$.

Для построения функций из K^E используем алгоритм c-means (см. рис. 3).

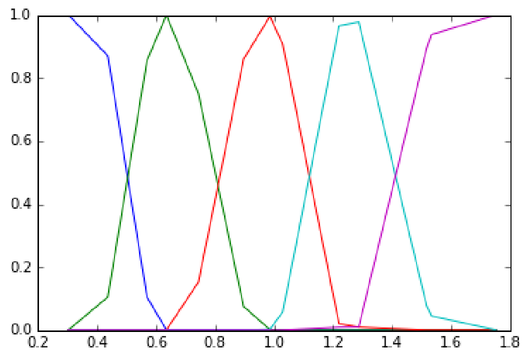

Рис. 3: Функции принадлежности из K^E.

3. *База продукционных правил вывода.* Определим структуру потребительского бюджета семьи, принадлежащей к СК, с помощью набора лингвистических правил [17], которые будут иметь следующий вид:

$$\text{ЕСЛИ } E = t_l^E \text{ И } S_j = t_k^{S_j}, \text{ ТО } \; \mu^{M_1}(i) = t_s^{\mu^{M_1}(i)}. \tag{5}$$

База правил полностью определяется экспертной матрицей D, составленной на основе [10, 11]

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Пусть булева переменная R_{jkls} означает вхождение или невхождение правила (5) в базу:

$$R_{jkls} = \begin{cases} 1, & d_{kl} = s, \forall j \in B, \\ 0, & d_{kl} \neq s, \forall j \in B. \end{cases}$$

4. *Композиционный max-min вывод. Композиционным правилом вывода*

[9] будем называть НМТ1 F :

$$\left\{ u \mid \mu^F(u) = \bigvee_{i\in I} \mu_i^{x_1}(u_1) \wedge \ldots \wedge \mu_i^{x_n}(u_n) \wedge \mu_i^F(u) \right\}, \qquad (6)$$

где I — множество продукционных правил вывода, x_k — входная лингвистическая переменная: $u_k \in V^{x_k}$, $k = 1, \ldots, n$.

Тогда, приняв min за $\wedge$, а max за $\vee$, функция принадлежности выходной переменной будет находиться по формуле (6)

$$\mu^{\mu^{M_1(i)}}(v_1, v_2, v_3) = \max_{jkls} \min \left\{ \mu_l^E(v_1), \mu_k^{S_j}(v_{2_j}), \mu_s^{\mu^{M_1(i)}}(v_3), R_{jkls} \right\}.$$

5. *Дефаззификация.* Для получения четкого значения $\mu^{M_1}(i)$ необходимо провести дефаззификацию. Из всех возможных методов дефаззификации выберем метод левого модального значения:

$$\mu^{M_1}(i) = \mu^{M_1}(v_1(i), v_2(i)) = \arg\min_{v_3 \in V^{\mu^{M_1(i)}}} \max \mu^{\mu^{M_1(i)}} \left(v_1(i), v_{2_j}(i), v_3 \right).$$

2.2.2. Стандарты изменения располагаемых ресурсов

Рассмотрим сперва выпуклую комбинацию двух нечетких множеств:

$$\overline{\mu}(u) = \xi \mu^{F_1}(u) + (1 - \xi)\mu^{F_2}(u), \quad \xi \in [0, 1]. \qquad (7)$$

Представим

$$\mu^{F_1}(u) = \min \left\{ 1, \mu^{F_3}(u) + \eta \right\},$$
$$\mu^{F_2}(u) = \max \left\{ 0, \mu^{F_3}(u) - \eta \right\}.$$

Тогда (7) примет вид

$$\overline{\mu}(u) = \xi \min \left\{ 1, \mu^{F_3}(u) + \eta \right\} + (1 - \xi) \max \left\{ 0, \mu^{F_3}(u) - \eta \right\}, \qquad (8)$$

Обратимся к НМТ1 «Средний класс 2». Будем искать вид его функции принадлежности как элемент выпуклой комбинации вида (8) [17]:

$$\mu^{M_2}(i) = \mu^{M_2}(\xi(i), \mu_{t-1}^M(i)) = \xi(i) \min \left\{ 1, \mu_{t-1}^M(i) + \eta \right\} +$$
$$+ (1 - \xi(i)) \max \left\{ 0, \mu_{t-1}^M(i) - \eta \right\},$$

где μ_{t-1}^M — функция принадлежности НМТ1 «Средний класс» за предыдущий промежуток времени, η — максимальная величина, на которую может измениться степень принадлежности к СК за минимальный промежуток времени, $\xi(i)$ характеризует изменение принадлежности семьи к СК по сравнению с прошлым моментом времени.

Введем стандарты изменения располагаемых ресурсов для определения $\xi(i)$, для чего используем рассмотренную в пункте 2.2.1. модель нечеткого экспертного управления:

1. *Выходная переменная.* Введем одну управляемую лингвистическую переменную $\xi(i) = \left\{N^{\xi(i)}, T^{\xi(i)}, V^{\xi(i)}, K^{\xi(i)}\right\}$, где
   - $N^{\xi(i)}$ = «Изменение домохозяйством степени принадлежности к СК»;
   - $T^{\xi(i)} = \{t_1^{\xi(i)} =$ «уменьшение», $t_2^{\xi(i)} =$ «отсутствует», $t_3^{\xi(i)} =$ = «увеличение»$\}$;
   - $V^{\xi(i)} = [0, 1]$;
   - $K^{\xi(i)}(v) = \left\{\mu_z^{\xi(i)}(v)\right\}$, $z = \overline{1,3}$, $v \in V^{\xi(i)}$ (см. рис. 4).

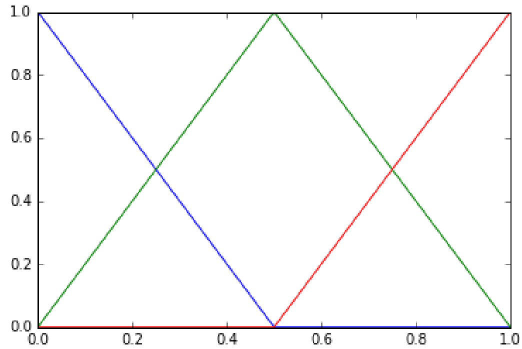

Рис. 4: Функции принадлежности из $K^{\xi(i)}$.

2. *Входная переменная.* Введем одну управляющую лингвистическую переменную $\delta I = \{N^{\delta I}, T^{\delta I}, V^{\delta I}, K^{\delta I}\}$, где
   - $N^{\delta I}$ = «Изменение количества располагаемых ресурсов домохозяйства»;
   - $T^{\delta I} = \{t_1^{\delta I} =$ «сильное уменьшение», $t_2^{\delta I} =$ «уменьшение», $t_3^{\delta I} =$ = «отсутствует», $t_4^{\delta I} =$ «увеличение», $t_5^{\delta I} =$ «сильное увеличение»$\}$;
   - $V^{\delta I} = \left[\delta I^{min}, \delta I^{max}\right]$;
   - $K^{\delta I}(v) = \left\{\mu_w^{\delta I}(v)\right\}$, $w = \overline{1,5}$, $v \in V^{\delta I}$.

   Ограничим $V^{\delta I}$ минимальным и максимальным значениями $\frac{I_t^i}{I_{t-1}^i}$ на выборке. Для построения функций из $K^{\delta I}$ используем алгоритм c-means (см. рис. 5).

3. *База продукционных правил вывода.* Построим набор лингвистических

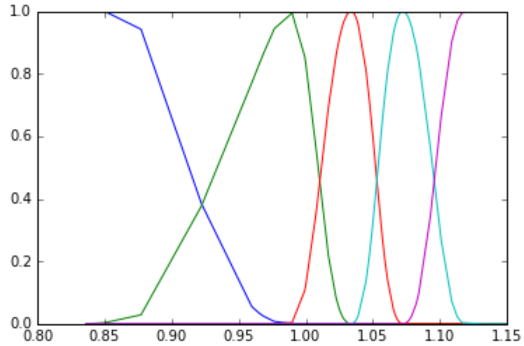

Рис. 5: Функции принадлежности из $K^{\delta I}$.

правил, связывающих изменение количества располагаемых ресурсов семьи с изменением ее принадлежности к СК. Правила будут иметь следующий вид:

$$\text{ЕСЛИ } \delta I = t_w^{\delta I}, \text{ ТО } \xi(i) = t_z^{\xi(i)}. \tag{9}$$

База правил полностью определяется экспертным вектором D:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть булева переменная R_{wz} будет означать вхождение или невхождение правила (9) в базу:

$$R_{wz} = \begin{cases} 1, & d_w = z, \\ 0, & d_w \neq z. \end{cases}$$

4. *Композиционный max-min вывод.* Воспользуемся формулой (6):

$$\mu^{\xi(i)}(v_1, v_2) = \max_{wz} \min \left\{ \mu_w^{\delta I}(v_1), \mu_z^{\xi(i)}(v_2), R_{wz} \right\}.$$

5. *Дефаззификация.* Четкое значение найдем методом центра максимумов. Тогда

$$\xi(i) = \xi\left(v_1(i)\right) = \frac{\arg\min_{v_2 \in V^{\xi(i)}} \max \mu^{\xi(i)}(v_1(i), v_2)}{2} + \frac{\arg\max_{v_2 \in V^{\xi(i)}} \max \mu^{\xi(i)}(v_1(i), v_2)}{2}.$$

2.3. Вычисление доли среднего класса на данных выборки

В процессе построения модели в параграфе 2.2., попутно вводились все ее параметры, связанные с входными и выходными лингвистическими переменными. Единственным параметром, который остался без конкретного значения, является η. Здесь и далее положим $\eta = 0,1$, что соответствует максимальному 10%-ому изменению степени принадлежности к СК для каждого домохозяйства за один год для второго критерия. Отметим также, что в рамках второго критерия степень принадлежности к СК зависит от этого же значения в предыдущем году. Значит, будем определять СК в 2008 году, используя лишь первый критерий, а для последующих лет воспользуемся обоими критериями.

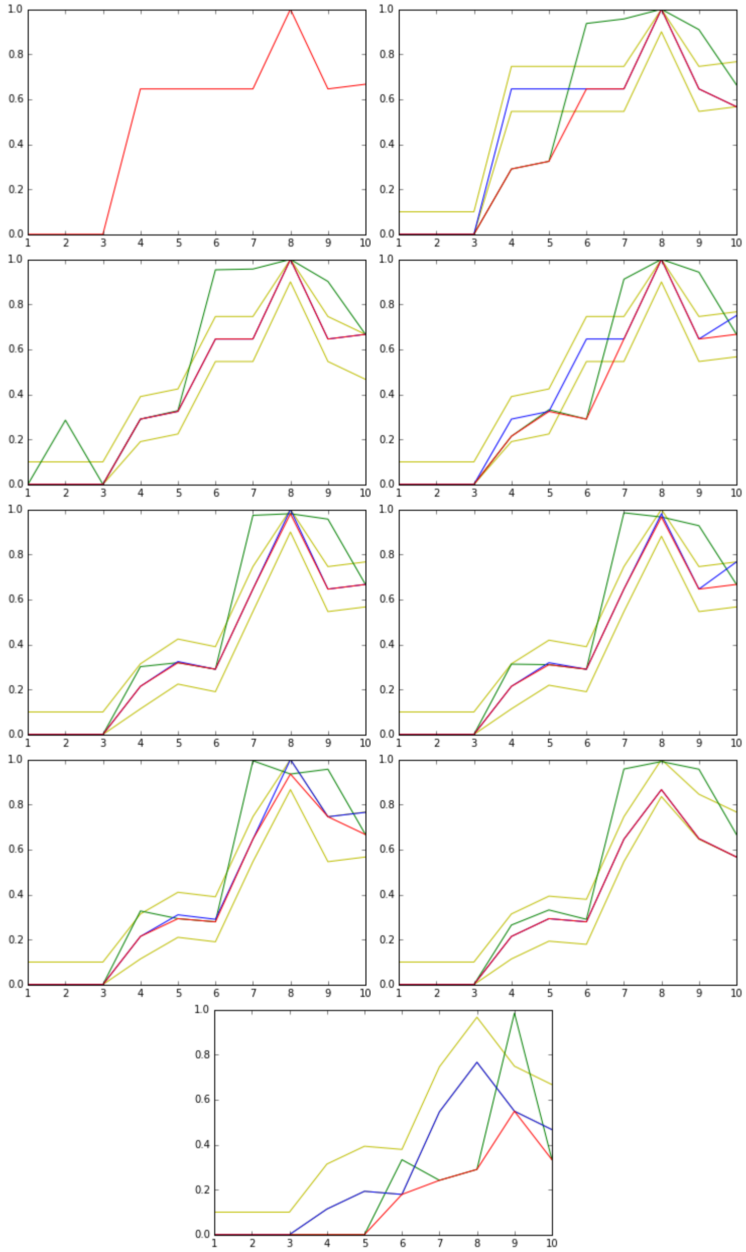

Рис. 6: Функции принадлежности μ^M, μ^{M_1}, μ^{M_2} с 2008 г. по 2016 г.

Когда все параметры были определены, можно переходить к реализации модели СК на данных выборки. Был написан программный код на языке python, реализующий построения из параграфа 2.2. Нечеткие множества, характеризующие модель, приведены на рис. 6.

На рис. 6 зеленым цветом выделена функция принадлежности НМТ1 «Средний класс 1», желтым цветом — границы возможножных значений функции принадлежности НМТ1 «Средний класс 2», синим цветом — функция принадлежности НМТ1 «Средний класс 2», а красным цветом выделена искомая функция принадлежности НМТ1 «Средний класс». Стоит обратить внимание на то, что функции заданы поточечно для каждого типа семьи в отдельности, но для удобства восприятия были соединены линиями.

Построенное нечеткое множество, безусловно, является носителем информации о качественном и количественном составе СК, но чаще всего необходимо оперировать числовым значением, описывающим СК. В рамках данной работы этим значением является один из критериев оптимальности государственного управления, упомянутый в главе 1, а именно, доля СК от населения страны m. Так как каждый рассмотренный тип домохозяйств (децильная группа) включает в себя равное количество домохозяйств страны, определим m как среднее значение степеней принадлежности к СК каждого типа семей [16]

$$m = \frac{1}{10} \sum_{i \in N} \mu^M(i).$$

Тогда

- $m = 0,4895$, 2008 г.,
- $m = 0,4151$, 2009 г.,
- $m = 0,4217$, 2010 г.,
- $m = 0,3785$, 2011 г.,
- $m = 0,3761$, 2012 г.,
- $m = 0,3738$, 2013 г.,
- $m = 0,3745$, 2014 г.,
- $m = 0,3609$, 2015 г.,
- $m = 0,1661$, 2016 г.

Из полученных результатов видно, что СК в РФ за последние 9 лет сократился почти втрое, но коренной перелом в его структуре произошел лишь в 2016 году, а рис. 6 показывает, что ядро СК сдвинулось в сторону более обеспеченных семей.

Глава 3. Эволюционный алгоритм решения задачи многокритериальной оптимизации

Перейдем к решению задачи, описанной в главе 1. Необходимо отыскать такое государственное управление, которое будет оптимальным по принципу наименьшего уклонения (2). Проблема состоит в том, что критерий $m(u)$ не является дифференцируемым и, значит, классические градиентные методы оптимизации не могут быть применены. Прибегнем к такому эвристическому методу отыскания оптимума, как эволюционный алгоритм [2]. Отметим сразу, что эволюционный алгоритм не находит абсолютного оптимума, но с успехом находит решение, близкое к оптимальному.

3.1. Описание алгоритма

Пусть имеется начальная популяция P, состоящая из q особей:

$$P = \{p_i \in U\}, i = \overline{1, q}.$$

Для каждой особи может быть вычислено ее значение приспособленности в соответствии с (2)

$$fitness(p) = -\left\| F(p) - (1,1) \right\|. \tag{10}$$

Чем оно больше, тем особь приспособленнее, а решение p оптимальнее. Определим операторы, преобразующие популяцию [2]:

1. *Скрещивание.* Будем скрещивать $2qs_1$ особей с наивысшей функцией приспособленности (10), $s_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Родительские пары будем выбирать случайно из множества "лучших". В процессе операции скрещивания получаются qs_1 новых особей. Пусть p^{parent_1} и p^{parent_2} — родительские особи, а p^{child} — это их потомок. Тогда k-ый признак потомка наледуется от родителей по одному из трех равновероятных сценариев:
   - $p_k^{child} = p_k^{parent_1}$,
   - $p_k^{child} = p_k^{parent_2}$,
   - $p_k^{child} = \frac{1}{2}(p_k^{parent_1} + p_k^{parent_2})$.

   После операции скрещивания все потомки добавляются в состав популяции, размер которой, таким образом, становится равен $q(1 + s_1)$.

2. *Селекция.* Удаляем из популяции qs_1 особей с наименьшими значениями приспособленности. После операции селекции размер популяции вновь будет равен q.

3. *Мутация.* Каждый признак каждой особи из популяции с вероятностью s_2 равен случайному значению из U_k.

Таким образом, признаки, увеличивающие значение приспособленности особей, приживаются в популяции. Один повтор операторов 1, 2 и 3 назовем *эпохой.* По прошествии d эпох *решением, близким к оптимальному*, назовем

$$\overline{u} = \arg\max_{p \in P} fitness(p). \tag{11}$$

3.2. Реализация алгоритма и отыскание решения

Сгенерируем начальную популяцию, состоящую из $q = 20$ особей со случайными признаками из U. Запустим эволюционный алгортим со следующими параметрами:

- $s_1 = 0,4$,
- $s_2 = 0,02$,
- $d = 100$.

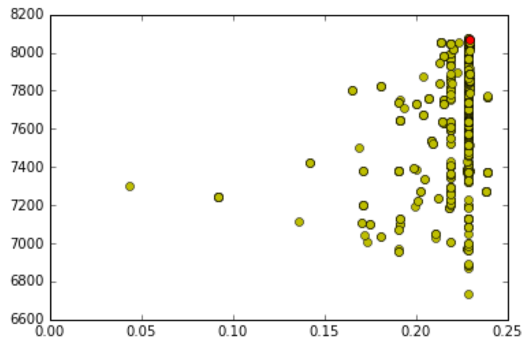

Рис. 7: Реализация гентического алгортима.

На рис. 7 приведены точки в пространстве ненормированных критериев оптимальности $T(u)$ и $m(u)$, в зависимости от каждой особи, когда-либо появлявшейся в популяции. Красным цветом обозначена точка, полученная в зависимости от решения, близкого к оптимальному $\overline{u}$, найденного по формуле (11):

- $\overline{u}_1 = 1723,5$,
- $\overline{u}_2 = 1454,8$,

- $\overline{u}_3 = 617,4$,
- $\overline{u}_4 = 23,5$,
- $\overline{u}_5 = 396,8$,
- $\overline{u}_6 = 66,3$,
- $\overline{u}_7 = 21,9$,
- $\overline{u}_8 = 1760,2$,
- $\overline{u}_9 = 3336,1$,
- $\overline{u}_{10} = 43,5$,
- $\overline{u}_{11} = 1002,2$,
- $\overline{u}_{12} = 81,6$,
- $\overline{u}_{13} = 218,5$,
- $\overline{u}_{14} = 848,3$,
- $\overline{u}_{15} = 26,7$,
- $\overline{u}_{16} = 693,9$,
- $\overline{u}_{17} = 1028,3$,
- $\overline{u}_{18} = 271,5$,
- $\overline{u}_{19} = 971,2$,
- $\overline{u}_{20} = 5165,5$,
- $\overline{u}_{21} = 2822,8$,
- $\overline{u}_{22} = 3,7$,
- $\overline{u}_{23} = 7,2$,
- $\overline{u}_{24} = 46,2$,
- $\overline{u}_{25} = 70,7$,
- $\overline{u}_{26} = 87,1$,
- $\overline{u}_{27} = 106,2$,
- $\overline{u}_{28} = 113,4$,
- $\overline{u}_{29} = 141,9$,
- $\overline{u}_{30} = 208,8$,
- $\overline{u}_{31} = 245,9$,
- $\overline{u}_{32} = 321,7$,
- $\overline{u}_{33} = 657,3$.

Такое решение доставляет многоцелевому функционалу значение $F(\overline{u}) = (8068,1,\ 0,2291)$. СК в таком случае описывается нечеткими множествами, представленными на рис. 8, из которого видно, что $\overline{u}$ позволяет увеличить степень принадлежности к СК почти каждого типа домохозяйств,

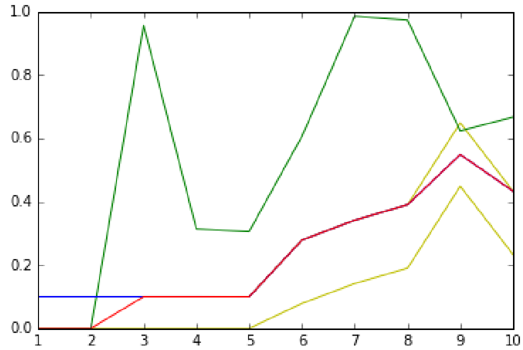

Рис. 8: Функции принадлежности μ^M, μ^{M_1}, μ^{M_2} при $\overline{u}$.

помимо ядра СК и двух, наименее обеспеченных, децильных групп распределения домохозяйств по располагаемым ресурсам.

Заключение

В работе была построена модель СК с помощью аппарата нечетких множеств, что позволило не разбивать элементы населения на классы четким образом. В качестве кртиериев выделения СК были использованы показатели потребления, подчеркивающие влияние этой прослойки на экономику государства. Для моделирования этих показателей потребления были использованы такие аппроксимационные аппараты, как производственные функции и искусственные нейронные сети, коэффициенты которых легко находятся с помощью классического метода наименьших квадратов. Из результатов аппробации модели на данных выборки был выявлен факт почти трехкратного уменьшения доли СК от всего населения страны за последние 9 лет. Ядром СК за это время стали более обеспеченные семьи, в то время, как менее обеспеченные семьи вышли из состава СК.

Отдельно в работе рассматриваются элементы социально-экономической политики государства, и решается задача оптимизации этого государственного управления в критериях налоговой политики и численности среднего класса. Полученное решение задачи позволяет увеличить долю СК населения страны на 6%, оставляя налоговые поступления на достаточно высоком уровне. Для нахождения этого решения был разработан эволюционный алгоритм, операторы которого соответствуют семантике задачи и позволяют приблизиться к решению за малое количество итераций.

Построенная модель СК показывает свою работоспособность на исторических данных и может применяться на практике и в дальнейших расчетах. Необходимо отметить, что список критериев причисления к СК открыт и может быть расширен по замыслу эксперта сколь угодно много. А решение задачи оптимизации, полученное при реализации эволюционного алгоритма может послужить основой для принятия государственных решений.

Список литературы

[1] Беллман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М.: Мир. 1976. Т. 4. С. 172—215.

[2] Вороновский Г. К. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности. Харьков: Основа. 1997. С. 10–24.

[3] Олизаренко С. А., Капранов В. А., Перепелица А. В. Интервальные нечеткие множества типа 2. Терминология, представление, операции // Системи обробки інформації. Харьков: ХУПС. 2011. Вип. 2 (92). С. 39–45.

[4] Колбин В. В. Производственная функция и её свойства (часть 1). СПб.: Изд-во СПбГУ. 2008. С. 17.

[5] Колбин В. В. Производственная функция и её свойства (часть 2). СПб.: Изд-во СПбГУ. 2008. С. 9–10.

[6] Колбин В. В. Теория решений. Германия: Palmarium Academic Publishing. 2013. С. 338–344.

[7] Колбин В. В. Теория рисков (часть 2). СПб.: Изд-во ВВМ. 2012. С. 150–158.

[8] Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ, 2011. С. 50.

[9] Перфильева И. Г. Приложения теории нечетких множеств // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика». М.: ВИНИТИ. 1990. С. 83–151.

[10] Петухов В. В. Структура, возможности и модели потребления среднего класса // Средний класс в современной России: 10 лет спустя. Аналитический доклад ИС РАН. 2014. С. 52–68. [Электронный ресурс]: URL:http://www.isras.ru/analytical_report_sredny_klass_10_let_spustya.html (дата обращения: 17.09.2016).

[11] Чикирева В. М. Универсалистские нормы и стандарты потребления как конституирующие элементы глобального среднего класса // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2007. Т. 13. № 2. С. 644–652.

[12] Федеральная служба государственной статистики. Доходы, расходы и потребление домашних хозяйств [Электронный ресурс]: URL:http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/publications/catalog/doc_1140096812812 (дата обращения: 21.01.2017).

[13] Федеральное казначейство. Консолидированный бюджет Российской Федерации и бюджетов государственных внебюджетных фондов [Электронный ресурс]: URL: http://www.roskazna.ru/ispolnenie-byudzhetov/konsolidirovannyj-byudzhet (дата обращения: 12.02.2017).

[14] Хайкин С. Нейронные сети: полный курс, 2-е издание. Издательский дом Вильямс. 2008. С. 341–416.

[15] Штовба С. Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику [Электронный ресурс]: URL:http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book1/index.php (дата обращения: 20.11.2016).

[16] Ямщиков С. А., Курносых З. А., Красун С. В. Оптимальное государственное упавление в рамках модели среднего класса как решение задачи многокритериальной оптимизации // Современные тенденции развития науки и технологий: По материалам XXII международной научно-практической конференции. Т. 1. № 2. Белгород. С. 35–39.

[17] Ямщиков С. А., Гулидова А В. Нечетко-множественный анализ среднего класса населения страны // Процессы управления и устойчивость: Тр. XLVIII науч. конф. студентов и аспирантов факультета ПМ-ПУ. СПб.: НИИ Химии СПбГУ. 2017. (в печати)

Приложения

Приложение 1

I	I^1	I^2	I^3	I^4	I^5
a_1	2916,8	4207,6	5220,7	6242,3	7428,4
a_2	2904,8	4143,9	5101,7	6099,9	7285,5
a_3	3028,2	4360,7	5351,6	6318,3	7471,2
a_4	3300,5	4647,5	5671	6718,1	7892
a_5	3497,8	5008,6	6129	7263,8	8523,9
a_6	2493,5	3275,5	4366,1	5207,4	6137,9
a_7	2889,7	4070,3	5047	5947,5	6898,3
a_8	3570,1	5074,1	6238,7	7373,1	8658,1
a_9	2761,5	4182,4	5204,3	6239,9	7486,5

I	I^6	I^7	I^8	I^9	I^{10}
a_1	9106,6	11582	14429	18274	38328
a_2	8979	11111	13580	17350	30045
a_3	9022,8	11187	13862	17808	33722
a_4	9379,1	11458	14251	18858	36526
a_5	10131	12384	15590	20844	41670
a_6	7298,9	8980,2	11258	15315	32584
a_7	8290,3	10241	13697	18923	40012
a_8	10481	12788	15956	20715	42206
a_9	8963	10707	13213	17375	33372

Приложение 2

q	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
E	0,437	0,743	0,897	1,516	0,303	1,219	0,985
b_0	566,65	$3,38 \cdot 10^{10}$	19,964	230,575	12118	0,691	$2,77 \cdot 10^{-6}$
b_1	0,466	0,015	0,336	3,033	-0,091	-0,721	-0,483
b_2	-0,72	-1,223	-0,53	-4,41	0	0,643	1,124
b_3	0	1,757	0	0	0,185	0	0
b_4	0	0	0	0	0	0	0
b_5	-0,031	-3,967	-0,257	-1,528	0	-0,462	0,553
b_6	0	0	0	0	0	0	0
b_7	-0,069	-1,497	-0,642	-0,004	-0,213	-0,235	0,665
b_8	0	0	0	0	-0,649	0	0
b_9	0	0	0	0	0	0	0
b_{10}	0	0	0	0	0	0	0
b_{11}	0	0	0	0	0	0	0
b_{12}	0	0	0	0	0,211	0	0
b_{13}	-0,135	0	0	0	0	0	0
b_{14}	0	0	0	0	0	0	0
b_{15}	0	0	0	0	0	0	0
b_{16}	0	0	0	0	-0,157	0	0
b_{17}	0	0	0	0	0	0	0
b_{18}	0	0	0	0	0	0	0
b_{19}	0	0	0	0	0	0	0,01
b_{20}	0	0	0	0	0	0	0
b_{21}	0	0	0	0	0	0	0
b_{22}	-0,063	-0,374	0,032	-0,388	0,349	0,159	0,027
b_{23}	0,211	0,199	0,033	2,062	-0,499	-0,475	-0,309

q	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{12}	q_{13}
E	1,753	0,635	0,569	1,286	1,029	1,532
b_0	$8,45 \cdot 10^{-5}$	0,081	0,104	0,70	$1,85 \cdot 10^{-4}$	
b_1	0	0	-0,7	-0,132	-1,303	0,469
b_2	0	0	1,213	-0,018	2,03	-0,605
b_3	0,257	-2,261	0	0	0	0
b_4	0	0	0	0	0	0
b_5	0,369	7,01	-0,068	-0,2	-1,5	-0,068
b_6	0	0	0	0	0	0
b_7	-0,019	-0,646	0,107	-0,485	-0,256	0,081
b_8	0,163	-2,502	0	0	0	0
b_9	0	0	0	0	0	0
b_{10}	0	0	0	0	0	0
b_{11}	0	0	0	0	0	0
b_{12}	0,056	0,547	0	0	0	0
b_{13}	0	0	0	0	0	0
b_{14}	-0,126	-0,55	0	0	0	0
b_{15}	0	0	0,09	0	0	0
b_{16}	0	0	0	0	0	0
b_{17}	0	0	0	0	0,182	0
b_{18}	0	0	0	0,067	0	0
b_{19}	0	0	0	0	0	0
b_{20}	0	0	0	0	0	0
b_{21}	0	0	0	0	0	0
b_{22}	-0,003	2,388	0,072	0,113	0,177	-0,061
b_{23}	-0,169	-1,176	-0,457	-0,199	-0,774	0,376