

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра теоретической и прикладной механики

Выпускная квалификационная работа
на степень бакалавра

ДЕФОРМАЦИЯ АРМИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ

Выполнил: студент 4 курса Каменский Александр Вячеславович

Научный руководитель: Наумова Наталья Владимировна,
доцент, кандидат физико-математических наук.

Рецензент: Ершов Борис Александрович,
профессор, доктор физико-математических наук.

Санкт-Петербург
2017

Содержание

1	Аннотация	3
2	Введение.	3
3	Основные уравнения и предположения.	6
4	Аналитическое решение поставленной задачи.	8
5	Численное решение поставленной задачи.	10
6	Заключение.	13
7	Список литературы	15

1 Аннотация

Рассмотрена прямоугольная пластина, армированная параллельно расположенными волокнистыми полосками. Получено осредненное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка относительно прогиба пластины w . Вычислены значения максимальных прогибов армированных пластин, находящихся под действием внешнего давления. Приведено сравнение аналитических и численных результатов. Численные расчеты проведены с использованием программного комплекса ANSYS 13.

2 Введение.

В современной промышленности все чаще применяют сложные композитные материалы. Так, например, при армировании строительных материалов используют полипропиленовую фибру, которая представляет собой тонкие синтетические волокна разного размера и диаметра. Ее производят путем продавливания горячей массы полипропилена сквозь отверстия определенного диаметра. Затем нити нарезают на волокна нужной длины и обрабатывают специальным химическим веществом, обеспечивающим хорошее распределение фибры в материале. Полипропиленовая фибра (Рис. 1), как более дешевая технология строительства, постепенно вытесняет металлическую и пластиковую арматурную сетку. Используют ее в гражданском и промышленном монолитных строительствах - для возведения мостов, тоннелей, складских и производственных помещений, гидротехнических конструкций. Полы в складах или гаражах, где постоянно работает тяжелая техника, устроенные с применением фиброволокна, выдерживают серьезные нагрузки. Напольное покрытие не деформируется и не разрушается под тяжестью машин. Полимерный материал, из которого изготавливают, так на-

зываемую, мягкую фибру почти не впитывает жидкость, прочный, не боится агрессивного воздействия химических веществ (кислот, солей и щелочей). Еще одно существенное преимущество фибры полипропиленовой - ее стоимость. Цена значительно ниже арматурной и пластиковой сеток. Строительные работы с фиброй продвигаются значительно быстрее, чем со стальной арматурой.



Рис. 1. Полипропиленовая фибра.

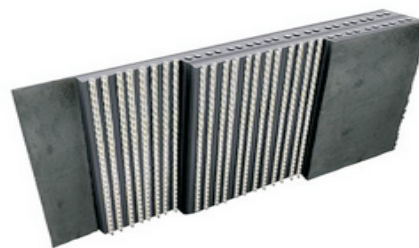


Рис. 2. Фрагмент техпластины ТМКЩ.

В электротехнике получили распространение пластмассовые пластины, армированные углеродным волокном, с непрерывными токопроводящими каналами. Это изобретение представляет собой биполярную пластину, которая обладает исключительной прочностью и долговечностью, даже, когда она выполнена относительно тонкой, что позволяет обеспечить установку большего количества пластин в устройстве.

И, наконец, техпластина ТМКЩ (Рис. 2) — незаменимый материал для уплотнителей (резиновых изделий, которые применяются с целью укрепить неподвижные конструкции, предотвратить трение поверхностей металлических деталей или смягчить возможный удар).

ТМКЩ — это тепло-морозо-кислото-щелочестойкая техпластина, которая отличается стойкостью под воздействием воздуха, инертных газов, азота, солевых растворов, пресной и морской воды, прекрасно ведет себя в кислотной и щелочной среде и выдерживает тем-

пературу от -45°C до $+80^{\circ}\text{C}$. Изделие может выдержать давление до 1 МПа. Такие пластины по многим показателям превосходят чисто металлические. В частности, после сгибания принимают первоначальную форму, подобно пружинной стали, и устойчивее металла к истиранию. Проведенные испытания показали, что техпластина, армированная базальто-пластиковой проволокой не расслаивается, устойчива к износу, не подвержена изломам.

Большинство задач на исследование колебаний и устойчивости армированных пластин решается либо методом конечных элементов в различных программных комплексах (см., например, [1]), либо методом граничных элементов (см., например, [2], [3], [4]). Асимптотические решения получены только для ряда частных случаев анизотропных пластин и оболочек в работах [5], [6], [7], [8]. В данной работе при исследовании колебаний и устойчивости армированной пластины применяются и асимптотические, и численные методы решения. Для проверки достоверности полученных асимптотических формул приведено сравнение аналитических и численных результатов. Численные расчеты проведены методом конечных с использованием программного комплекса ANSYS 13.

В настоящей работе рассмотрена прямоугольная пластина, армированная параллельно расположенными волокнистыми полосками. Предполагается, что длина такой полоски много больше ее ширины и полосок достаточно много. Получено осредненное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка относительно прогиба пластины w . Данное уравнение изначально записывалось для исследования статической задачи, но также может быть использовано и при исследовании колебаний и устойчивости армированной пластины с соответствующей заменой внешней (или инерционной) нагрузки. Преимущество полученного уравнения в его универсальности, и возможности дальнейшего его применения в различных задачах по исследованию тонкостенных конструкций. Так, например, задавая конкретные граничные условия, а также размер и

ориентацию волокон, можно провести качественный анализ решений поставленных задач. Получены значения максимальных прогибов армированных пластин, находящихся под действием внешнего давления. Для проверки достоверности полученных формул приведено сравнение аналитических результатов с численными результатами, полученными при использовании программного комплекса ANSYS.

3 Основные уравнения и предположения.

Рассмотрим квадратную пластину длины L и толщины h . Толщина пластины мала по сравнению с ее размерами в плане ($\frac{h}{L} < 0.1$). Принимая за исходную срединную поверхность пластины введем декартову систему координат $Oxyz$, как показано на Рис. 3. При построении математической модели рассматриваемой пластины принимаются две основные гипотезы. Первая гипотеза, принадлежащая Кирхгофу, предполагает, что нормаль к срединной поверхности пластины остается нормалью к ней после деформации. Вторая гипотеза утверждает, что напряженное состояние в точках пластины является двусосным, т.е. нормальными и касательными напряжениями в площадках, перпендикулярных оси z , можно пренебречь. Пусть волокна-полоски располагаются параллельно оси Oy .

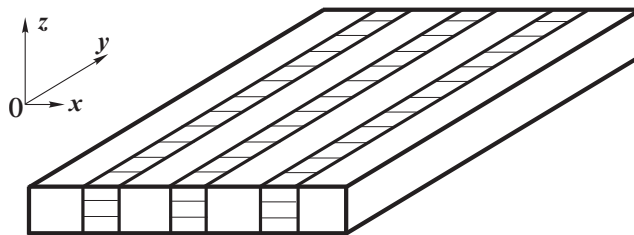


Рис. 3. Армированная пластина.

Для того, чтобы найти величину максимального прогиба w , а также исследовать деформацию армированной пластины, находящейся

под действием внешнего давления, выпишем уравнения теории оболочек и найдем асимптотическое решение краевой задачи.

Условие равновесия сил по оси z имеет вид

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = q. \quad (1)$$

Условие равновесия для моментов приводит к двум уравнениям:

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + Q_y = 0. \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения для удельных (на единицу длины) изгибающих M_x , M_y и крутящих M_{xy} моментов:

$$M_{xx} = aw_{xx} + bw_{yy}, \quad M_{yy} = bw_{xx} + aw_{yy}, \quad M_{xy} = (a - b)w_{xy}. \quad (4)$$

Величина a называется жесткостью единицы длины пластины

$$a = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)},$$

где E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, $b = \mu \cdot a$.

Введем безразмерные переменные \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{w} , \tilde{Q}_x , \tilde{Q}_y , \tilde{M}_x , \tilde{M}_{xy} , \tilde{M}_y :

$$w(x, y) = h\tilde{w}(L\tilde{x}, L\tilde{y}), \quad Q_x = \frac{a_0 h}{L^3} \tilde{Q}_x, \quad Q_y = \frac{a_0 h}{L^3} \tilde{Q}_y,$$

$$M_{xx} = \frac{a_0 h}{L^2} \tilde{M}_{xx}, \quad M_{yy} = \frac{a_0 h}{L^2} \tilde{M}_{yy}, \quad M_{xy} = \frac{a_0 h}{L^2} \tilde{M}_{xy}, \quad a = a_0 \cdot \tilde{a}.$$

Коэффициенты a и a_0 имеют размерность $\text{Н} \cdot \text{м}^2$. В дальнейшем будем считать, что $a_0 = 1 \text{Н} \cdot \text{м}^2$, а \tilde{a} является безразмерной функцией.

Далее введенный для безразмерных переменных знак " \sim " опускается и используется в других целях.

4 Аналитическое решение поставленной задачи.

Применим метод многих масштабов, описанный в работах [9], [10]. Наряду с переменной x вводится, так называемая, *быстро меняющаяся* переменная $\xi = x/\varepsilon$, где ε — ширина шага (полосы), и каждая из неизвестных функций, зависящая от переменных x, y , формально станет зависящей и от переменной ξ .

Асимптотическое разложение для функции, описывающей поперечный прогиб w , представим в виде ряда

$$w = w_0(x, y) + \sum_{k=1}^n (w_k, N_k) \cdot \varepsilon^k, \quad (5)$$

где скобки означают скалярное произведение векторов, а вектора w_k имеют вид:

$$\begin{aligned} w_1 &= (w_{0x}, w_{0y}, 0, 0, 0), \\ w_2 &= (w_{0xx}, w_{0xy}, w_{0yy}, 0, 0), \end{aligned} \quad (6)$$

w_3 — вектор, составленный из третьих производных функции w_0 , не выписан в явном виде, т.к. далее не используется. Вектора N_k также имеют размерность 5. Учитывая правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\tilde{f}}{dx} = \frac{\partial\tilde{f}}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\xi}, \quad \frac{d^2\tilde{f}}{dx^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\xi} \right)^2 \tilde{f},$$

выпишем следующие выражения:

$$\begin{aligned} w_{xx} &= \varepsilon^{-1}(w_1, N_{1\xi\xi}) + (w_2, I_1 + 2N_{1,\xi} + N_{2,\xi\xi}) + \\ &\quad + \varepsilon(w_3, N_1 + 2N_{2,\xi} + N_{3,\xi\xi}) + \varepsilon^2(w_4, N_2 + 2N_{3,\xi} + N_{4,\xi\xi}), \\ w_{yy} &= (w_2, I_3) + \varepsilon(w_3, AN_1) + \varepsilon^2(w_4, AN_2) + \dots, \\ w_{xy} &= (w_2, I_2) + \varepsilon(w_3, B(N_{2\xi} + N_1)) + \varepsilon^2(w_4, B(N_2 + N_{3,\xi})) + \dots. \end{aligned} \quad (7)$$

A, B — матрицы из 0 и 1, I_k — единичный вектор размерности 5, все элементы 0, а единица стоит на k -ом месте.

$$M_{xx} = a\varepsilon^{-1} \cdot (w_1, N_{1,\xi\xi}) + \varepsilon^0 \cdot (w_2, a(I_1 + 2N_{1,\xi} + N_{2,\xi\xi}) + bI_3) +$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon(w_3, (a(N_1 + 2N_{2,\xi} + N_{3,\xi\xi}) + b(w_3, AN_1)) + \\
& + \varepsilon^2(w_4, (a(N_2 + 2N_{3,\xi} + N_{4,\xi\xi}) + bAN_2)).
\end{aligned}$$

Разложение Q_x и Q_y по ε :

$$\begin{aligned}
Q_x &= -\varepsilon^{-2} \cdot \frac{\partial \tilde{M}_{0xx}}{\partial \xi} - \varepsilon^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{M}_{1xx}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{M}_{0xx}}{\partial x} \right) - \\
& + \varepsilon^0 \cdot \left(\frac{\partial \tilde{M}_{2xx}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{M}_{1xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{M}_{0xy}}{\partial y} \right), \\
Q_y &= -\varepsilon^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{M}_{0xy}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{M}_{0yy}}{\partial y} \right) - \varepsilon^0 \cdot \left(\frac{\partial \tilde{M}_{1xy}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{M}_{1yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{M}_{0xy}}{\partial x} \right) - \\
& - \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial \tilde{M}_{2xy}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{M}_{2yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{M}_{1xy}}{\partial x} \right).
\end{aligned}$$

Подставляем все вышеперечисленные выражения в уравнения (1)–(3).

$$\text{при } \varepsilon^{-3} : \quad \frac{\partial \tilde{Q}_{0x}}{\partial \xi} = 0, \quad (8)$$

$$\text{при } \varepsilon^{-2} : \quad \frac{\partial \tilde{Q}_{1x}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{Q}_{0x}}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$\text{при } \varepsilon^{-1} : \quad \frac{\partial \tilde{Q}_{2x}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{Q}_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{Q}_{0y}}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

$$\text{при } \varepsilon^0 : \quad \frac{\partial \tilde{Q}_{3x}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{Q}_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{Q}_{1y}}{\partial y} + \dots = 0. \quad (11)$$

Применяем процедуру осреднения и получаем следующее уравнение:

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 M_{1xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{1yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{0xy}}{\partial x \partial y} + \dots + q \right) d\xi = 0. \quad (12)$$

Обозначим выражение

$$a(I_1 + N_{2,\xi\xi}) + bI_3 = C, \quad \text{где} \quad C = \frac{I_3 \int_0^1 \frac{b}{a} d\xi + I_1 l}{\int_0^1 \frac{d\xi}{a}} = \text{Const.}$$

Тогда

$$M_{1xx} = (w_2, a(I_1 + N_{2,\xi\xi}) + bI_3) = (C, w_2), \quad (13)$$

$$M_{1yy} = (w_2, b(I_1 + N_{2,\xi\xi}) + aI_3) = (w_2, b(C - bI_3)/a + aI_3), \quad (14)$$

$$M_{0xy} = (w_2, I_2). \quad (15)$$

Таким образом, уравнение (12) с учетом выражений (13)–(15) является осредненным дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка относительно прогиба пластины w .

5 Численное решение поставленной задачи.

Разработанная авторами теория и программы, написанные в пакете Mathematica для нахождения искомых величин по аналитическим формулам, пока позволяют рассчитывать только прямоугольные пластины с параллельной одной из сторон.

В таблице 1 представлены величины постоянных коэффициентов, определяющих свойства выбранных материалов.

Материал	Модуль Юнга, $E, 10^{11} \text{ N/m}^2$	Плотность материала, $\rho, \text{ kg/m}^3$	Коэффициент Пуассона, ν
Сталь	1.93	8030	0.29
Титан	1.02	4850	0.30

Таблица 1. Свойства материалов.

В качестве примеров, демонстрирующих достоверность полученных формул и возможность дальнейшего их использования при проведении расчетов деформаций армированных пластин, были проведены следующие расчеты. Рассматривалась квадратная пластина

со стороной 1 метр. Аппроксимировалась моделью, разбитой на 1600 (40×40) оболочечных элементов shell63.

Нами были составлены пластины, состоящие из нескольких полосок (см. первый столбец таблицы 2). В частности, в экспериментах менялось количество полос. Каждая полоса, в свою очередь, была составлена из двух полосок с различными свойствами материала. Таким образом, целая пластина представляет собой периодически повторяющуюся последовательность полос. Пластина находится под действием нормального равномерного распределенного давления, величиной $q = 10 \text{ N/m}^2$, либо $q = 100 \text{ N/m}^2$.

В четвертом столбце таблицы 2 представлены значения величины максимального прогиба пластины, полученные по асимптотическим формулам (12)–(15). Процедура подстановки выражений (13)–(15) в (12) и решение этого уравнения методом Бубнова-Галеркина осуществлялись в пакете прикладных программ Mathematica 8. В пятом столбце представлены значения величины максимального прогиба пластины, полученные численным методом конечных элементов. В программном комплексе ANSYS 14 была создана математическая модель армированной пластины. Программа написана на языке APDL при помощи учебных пособий [[11]], [[12]]. На рис. 8 изображена деформация армированной пластины под действием равномерного внешнего давления.

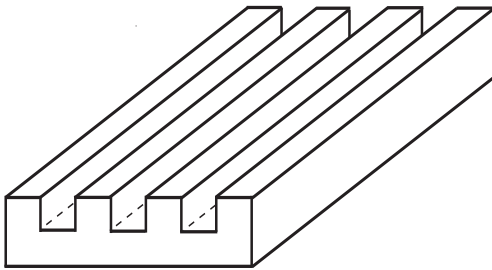


Рис. 4. Вариант армированной пластины.

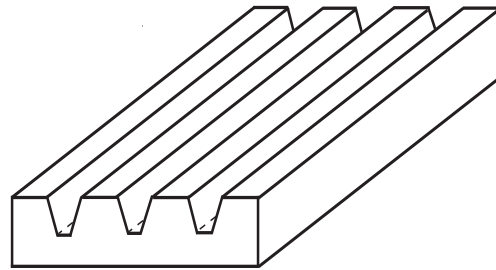


Рис. 5. Вариант армированной пластины.

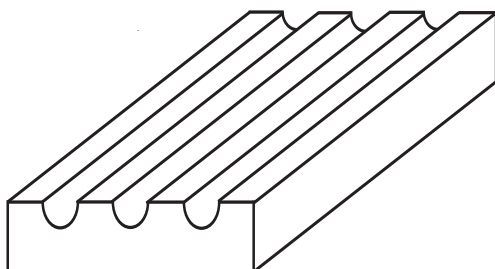


Рис. 6. Вариант армированной пластины.

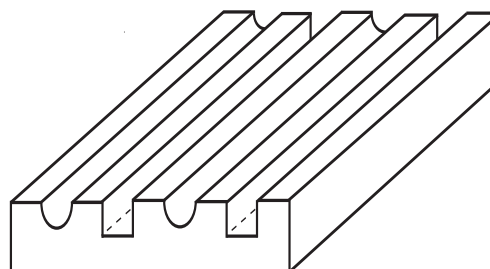


Рис. 7. Вариант армированной пластины.

Кол-во полос	Материал, толщина, метр	Ширина, метр	Асимптот. формулы (12)–(15)	Метод конеч. элементов ANSYS
3	Сталь, $h=0.01$	$l_1=0.2$	$1.63 \cdot 10^{-4}$	$1.69 \cdot 10^{-4}$
	Титан, $h=0.005$	$l_2=0.1$		
6	Сталь, $h=0.01$	$l_1=0.1$	$1.63 \cdot 10^{-4}$	$1.69 \cdot 10^{-4}$
	Титан, $h=0.005$	$l_2=0.05$		
10	Титан, $h=0.01$	$l_1=0.05$	$2.65 \cdot 10^{-4}$	$2.71 \cdot 10^{-4}$
	Титан, $h=0.005$	$l_2=0.05$		

Таблица 2. Величины максимальных прогибов армированной пластины.

В эксперименте, отраженном в таблице 3, рассматривалась квадратная пластина со стороной 1 метр. Аппроксимировалась моделью, разбитой на 1604 (42×42) оболочечных элементов shell63. толщина первой полоски, по-прежнему, - 0.01 м, а второй - 0.005 м, но общее количество полос было равно 7, так что ширина мини-полос $2/42$ и $4/42$ м.

Кол-во полос	Граничные условия	Материал	Нагрузка, Па	Асимптотические формулы, м (12)–(15)	Метод конечных элементов, м ANSYS
7	ЖЗ	Сталь	10	$0.252 \cdot 10^{-5}$	$0.248 \cdot 10^{-5}$
7	ЖЗ	Сталь	100	$0.252 \cdot 10^{-4}$	$0.248 \cdot 10^{-4}$
7	ШР	Сталь	10	$0.748 \cdot 10^{-5}$	$0.774 \cdot 10^{-5}$
7	ШР	Сталь	100	$0.748 \cdot 10^{-4}$	$0.774 \cdot 10^{-4}$
7	ЖЗ	Титан	10	$0.476 \cdot 10^{-5}$	$0.467 \cdot 10^{-5}$
7	ЖЗ	Титан	100	$0.476 \cdot 10^{-4}$	$0.467 \cdot 10^{-4}$
7	ШР	Титан	10	$0.141 \cdot 10^{-4}$	$0.146 \cdot 10^{-4}$
7	ШР	Титан	100	$0.141 \cdot 10^{-3}$	$0.146 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3. Величины максимальных прогибов армированной пластины.

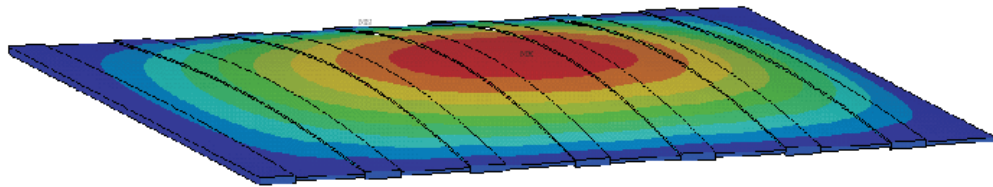


Рис. 8. Деформация армированной пластины под действием равномерного внешнего давления.

6 Заключение.

Разработанная авторами теория и программы, написанные в пакете Mathematica для нахождения искоемых величин по аналитическим формулам, пока позволяют рассчитывать только прямоугольные пластины с параллельной одной из сторон. Анализ всех экспериментов по исследованию деформации пластин с переменными параметрами под действием внешнего давления показывает достоверность приведенных формул. Исследование было основано на сравнении аналитических и численных результатов, полученных методом

конечных элементов, при использовании программного комплекса ANSYS. Данная работа опубликована в сборнике публикаций научного журнала "Globus" по материалам XVIII международной научно-практической конференции: "Достижения и проблемы современной науки" г. Санкт-Петербурга в 2017 году (см. список публикаций [13]).

7 Список литературы

Список литературы

- [1] *Madenci E., Guven I.* The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS, C.8, Springer, New York. 2006. pp. 403-412
- [2] *L. de Oliveira Neto, J.B. de Paiva* A special BEM for elastostatic analysis of building floor slabs on columns. *Computers and Structures*, 2003. Vol.81, no.6, pp. 359-372.
- [3] *Sanches L.C.F., Mesquita E., Pavanello R., Palermo L.* Dynamic Stationary Response of Reinforced Plates by the Boundary Element Method. Hindawi Publishing Corporation. Mathematical Problem in Engineering. V. 2007, Article ID 62157, 17 pages. DOI: 10.1155/2007/62157
- [4] *Fernandes G. R., Venturini W. S.* Stiffened plate bending analysis by the boundary element method, *Computational Mechanics*, 2002, Volume 28, Issue 3, pp. 275-281.
- [5] *Filippov S.B., Naumova N.V.* Vibrations and buckling of cylindrical shell made of a general anisotropic elastic material // Proc. of the 10th Shell Structures Theory and Applications Conference - CRC Press/Balkema, London, UK, 2013. Vol. 3, pp. 289-292.
- [6] *Naumova N.V., Ivanov D.N.* Vibrations of an inhomogeneous rectangular plate // *Technische Mechanik*, 2011. - Vol. Band 31, Heft 1. pp. 25-33.
- [7] *Tovstik P.E., Tovstik T.P., Naumova N.V.* Long-wave vibrations and waves in anisotropic beam. *Vestnik SPbU. Seria.1.* 2017. е 2, pp. 43-69. [in Russian]
- [8] *Nazarov S.A., Slutskij A.S., Sweers G.H.* Korn Inequalities for a Reinforced Plate. *Journal of Elasticity*, 2012, Volume 106, Issue 1, pp. 43-69
- [9] *Argatov I., Mishuris G.* Contact Mechanics of Articular Cartilage Layers. Asymptotic Models. Springer. 2015. 335 p. ISBN:978-3-319-20082-8
- [10] *Bakhvalov N.S., Panasenko G.* Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media: Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials. Springer, 2013, 366 p. ISBN-13: 978-9401075060
- [11] *Наумова Н.В., Иванов Д.Н.* Решение задач теории упругости и гидродинамики в пакете ANSYS: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2012. – 99 с.
- [12] *Наумова Н.В., Иванов Д.Н.* Исследование статических деформаций, колебаний и устойчивости конструкций в пакете ANSYS. Учебное пособие. СПб., 2007.
- [13] *Наумова Н.В., Иванов Д.Н., Каменский А.В.* Деформация армированной пластины. Сборник публикаций научного журнала "Globus" по материалам XVIII международной научно-практической конференции: "Достижения и проблемы современной науки" г. Санкт-Петербурга: сборник со статьями (уровень стандарта, академический уровень). - С-П. : Научный журнал **Globus**, 2017. - с. 52-60.