Санкт-Петербургский государственный университет

**Кафедра математической теории моделирования систем управления**

Тренин Георгий Вячеславович

## Выпускная квалификационная работа бакалавра

# Сравнение квазидифференциалов и экзостеров для решения негладких задач безусловной оптимизации.

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Аббасов М. Э.

Санкт-Петербург
2017

Saint-Peterburg State University
**Department of Mathematical Modelling of Control Systems**

Trenin Georgii Vyacheslavovich

## Bachelor's Thesis

# Comparison of quasidifferentials and exhausters for solving unconstrained nonsmooth optimization problems.

010400

Applied mathematics and fundamental informatics

Scientific supervisor,
Ph.D.,
Associate Professor
Abbasov M. E.

Saint-Peterburg
2017

# Оглавление


**1 Введение** **4**

**2 Постановка задачи** **5**

**3 Рассматриваемые методы** **6**

**3.1 Квазидифференциалы** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

**3.1.1 Некоторые формулы квазидифференциального исчисления** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

**3.1.2 Необходимое условие минимума** . . . . . . . . 7

**3.2 Экзостеры** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

**3.2.1 Условие минимума в терминах экзостеров** . 12

**4 Сравнение** **14**

**5 Заключение** **21**

**Литература** **22**

# Глава 1

# Введение

Негладкий анализ возник в середине XX века [1–4] для исследования функций, не обладающих дифференциалом в обычном классическом смысле. Основной целью исследования этих функций является нахождение экстремумов. Для решения таких задач с момента образования негладкого анализа до наших дней было придумано множество инструментов, такие как производная клакрка [5], суб- [6] , квази- [6–8], и кодифференциалы [7, 9], экзостеры и коэкзостеры [10–13], аппроксимационные методы и другие [14]. В этой работе мы будем рассматривать оптимизацию функций с помощью квазидифференциалов и экзостеров, введенных В.Ф Демьяновым.

# Глава 2

# Постановка задачи

Квазидифференциал - инструмент негладкого анализа, введенный в работах [3, 6] Он позволяют исследовать большой класс недифференцируемых функций. Для расширения этого класса В.Ф. Демьяновым в работах [13,15] были предложены экзостеры. Однако оказалось, что применение этих объектов является более удобным при применнии численных методов оптимизации. Целью данной работы является исследование и иллюстрация этого факта. Для проведения этого сравнения рассмотрим квазидифференциалы и экзостеры в работе с функциями вида

$$f(x) = \min_{i \in I} \max_{j \in J} a_{ij}(x) \tag{2.1}$$

где $a_{ij}(x)$ - афинные или квадратичные функции нескольких переменных. Отметим, что приведенные функции часто встречаются на практике во многих отраслях, таких как техника, экономика и других. Поэтому рассмотрение именно этих функций обосновано.

# Глава 3

# Рассматриваемые методы

Приведем вспомогательные результаты [6, 12], которые нам понадобятся в дальнейшем.

## 3.1 Квазидифференциалы

Пусть на открытом множестве $S \subset \mathbb{R}^n$ задана конечная функция $f(x)$. Будем говорить, что функция $f(x)$ квазидифференцируема в точке $x_0 \in S$, если она дифференцируема в точке $x_0$ по любому направлению $g \in \mathbb{R}^n$ и если существуют выпуклые компакты $\underline{\partial f(x_0)} \subset \mathbb{R}^n$ и $\overline{\partial f(x_0)} \subset \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial g} \equiv \lim_{a \to +0} a^{-1}[f(x_0 + ag) - f(x_0)] = \max_{v \in \underline{\partial f(x_0)}} (v, g) + \min_{w \in \overline{\partial f(x_0)}} (w, g) \quad (3.1)$$

Пару множеств

$$Df(x_0) = [\underline{\partial f(x_0)}, \overline{\partial f(x_0)}] \quad (3.2)$$

назовем квазидифференциалом функции f(x) в точке $x_0$, а множества $\underline{\partial f(x_0)}$ и $\overline{\partial f(x_0)}$ - соответственно субдифференциалом и супердифференциалом функции $f(x)$ в точке $x_0$

### 3.1.1 Некоторые формулы квазидифференциального исчисления

Приведем некоторые свойства квазидифференциалов используемые в данной работе

**Свойство 1.** Если функции $f_i(x), i \in I \equiv 1 : N$ , квазидифференцируемы в точке $x_0 \in S$, то функция

$$f(x) = \max_{i \in I} f_i(x) \tag{3.3}$$

является квазидифференцируемой в точке $x_0$, причем

$$Df(x_0) = [\underline{\partial f(x_0)}, \overline{\partial f(x_0)}], \tag{3.4}$$

где

$$\underline{\partial f(x_0)} = co\{\underline{\partial f_k(x_0)} - \sum_{i \in R(x_0), i \neq k} \overline{\partial f_i(x_0)} | k \in R(x_0)\} \tag{3.5}$$

$$\overline{\partial f(x_0)} = \sum_{k \in R(x_0)} \overline{\partial f_k(x_0)} \tag{3.6}$$

**Свойство 2.** Если функции $f_i(x), i \in I \equiv 1 : N$ , квазидифференцируемы в точке $x_0 \in S$, то функция

$$f(x) = \min_{i \in I} f_i(x) \tag{3.7}$$

является квазидифференцируемой в точке $x_0$, причем

$$Df(x_0) = [\underline{\partial f(x_0)}, \overline{\partial f(x_0)}], \tag{3.8}$$

где

$$\underline{\partial f(x_0)} = \sum_{k \in R(x_0)} \underline{\partial f_k(x_0)} \tag{3.9}$$

$$\overline{\partial f(x_0)} = co\{\overline{\partial f_k(x_0)} - \sum_{i \in R(x_0), i \neq k} \underline{\partial f_i(x_0)} | k \in R(x_0)\} \tag{3.10}$$

В обоих свойствах

$$R(x) = \{i \in I | f_i(x) = f(x)\} \tag{3.11}$$

### 3.1.2 Необходимое условие минимума

**Теорема 3.1.** Для того чтобы квазидифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция $f(x)$ достигла в точке $x^* \in \mathbb{R}^n$ своего наименьшего на $\mathbb{R}^n$ значения, необходимо, чтобы

$$-\overline{\partial f(x_0)} \subset \underline{\partial f(x_0)} \tag{3.12}$$

Если условие (3.12) не выполнено, то можем выбрать $w_0 \in \overline{\partial f(x_0)}$ и $v_0 \in \underline{\partial f(x_0)}$так, чтобы

$$\max_{w \in \overline{\partial f(x_0)}} \min_{v \in \underline{\partial f(x_0)}} \|v + w\| = \min_{v \in \underline{\partial f(x_0)}} \|v + w_0\| = \|v_0 + w_0\| \tag{3.13}$$

Тогда $g_0 = -(v_0 + w_0)\|v_0 + w_0\|^{-1}$ является направлением наискорейшего спуска функции $f(x)$ в точке $x_0$

## 3.2 Экзостеры

Пусть задана функция $h : K \to R$, п.о. на $K$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ - конус. Выпуклая п.о. функция $\overline{h} : \mathbb{R}^n \to R$ называется верхней выпуклой аппроксимацией [17] функции $h$ на $K$, если

$$h(g) \leqslant \overline{h}(g) \quad \forall g \in K. \tag{3.14}$$

Вогнутая п.о. функция $\underline{h} : \mathbb{R}^n \to R$ называется нижней вогнутой [17] аппроксимацией функции $h$ на $K$, если

$$h(g) \geqslant \underline{h}(g) \quad \forall g \in K. \tag{3.15}$$

Множество $A^*$ верхних выпуклых аппроксимаций функции $h$ на $K$ называется исчерпывающим, если

$$h(g) = \inf_{\overline{h} \in A^*} \overline{h}(g) \quad \forall g \in K. \tag{3.16}$$

Множество $A_*$ нижних вогнутых аппроксимаций функции $h$ на $K$ называется исчерпывающим, если

$$h(g) = \sup_{\underline{h} \in A_*} \underline{h}(g) \quad \forall g \in K. \tag{3.17}$$

**Теорема 3.2. [13]** Пусть п.о. функция $h(g)$ задана на замкнутом конусе K, ограничена сверху на $B_{1K}$ т.е.

$$\sup_{g \in B_{1K}} h(g) < +\infty, \tag{3.18}$$

где $B_{1K} = \{g \in K \mid \|g\| \leqslant 1\}$. Тогда, если $h$ полунепрерывна сверху на $K$, то существует исчерпывающее семейство верхних выпуклых аппроксимаций функции $h$ на $K$.

Если $h$ полунепрерывна снизу на $K$, ограничена снизу на $B_{1K}$ т.е.

$$\inf_{g \in B_{1K}} h(g) > -\infty, \tag{3.19}$$

то существует исчерпывающее семейство нижних вогнутых аппроксимаций функции $h$ на $K$.

Каждая выпуклая п.о. функция $\overline{h}$ может быть единственным образом представлена [18] в виде

$$\overline{h}(g) = \max_{v \in \overline{C}(\overline{h})} \langle v, g \rangle \quad \forall g \in \mathbb{R}^n, \tag{3.20}$$

где $\overline{C}(\overline{h})$ - выпуклый компакт. Поэтому можем переписать (3.16) так;

$$h(g) = \inf_{C \in E^*} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle \quad \forall g \in K, \tag{3.21}$$

где $E^* = \{C \subset \mathbb{R}^n | C = \overline{C}(\overline{h}),\ \overline{h} \in A^*\}$. Множество $E^*$ называют верхним экзостереом функции $h$ по отношению к $K$.
Аналогично, так как каждая н.в.а $\underline{h}$ может быть единственным образом представлена [18] в виде

$$\underline{h}(g) = \min_{v \in \underline{C}(\underline{h})} \langle v, g \rangle \quad \forall g \in \mathbb{R}^n, \tag{3.22}$$

где $\underline{C}(\underline{h})$ - выпуклый компакт, то (3.17) можем переписать так:

$$h(g) = \sup_{C \in E_*} \min_{v \in C} \langle v, g \rangle \quad \forall g \in K, \tag{3.23}$$

где $E_* = \{C \subset \mathbb{R}^n | C = \underline{C}(\underline{h}),\ \underline{h} \in A_*\}$. Множество $E_*$ называют нижним экзостером функции $h$ по отношению к $K$.

Мы будем рассматривать случай $K = \mathbb{R}^n$. Определение функции $h$ связано с изучением главного члена приращения некоторой исследуемой функции $f$ в некоторой т. $x$. По сути экзостеры дают представление этого члена: пусть $f : X \to R$, где $X \in \mathbb{R}^n$ - открытое множество, и верно разложение

$$f(x + g) = f(x) + h_x(g) + o_x(g), \tag{3.24}$$

где $o_x(g)$ удовлетворяет одному из условий

$$\lim_{a \downarrow 0} \frac{o_x(\alpha g)}{\alpha} = 0 \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \tag{3.25}$$

или

$$\lim_{g \to 0} \frac{o_x(g)}{\|g\|} = 0 \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \tag{3.26}$$

Будем говорить, что у функции $f$ в точке $x$ существует верхний экзостер $E^*(x)$ в смысле Дини или Адамара, если в (3.24)

$$h_x(g) = \inf_{C \in E^*(x)} \max_{v \in C} \langle v, g \rangle, \tag{3.27}$$

$o_x(g)$ удовлетворяет(3.25) или (3.26) соответственно, а $E^*(x)$ - семейство выпуклых замкнутых ограниченных множеств в $\mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что у функции $f$ вточке $x$ существует нижний экзостер $E_*(x)$ в смысле Дини или Адамара, если в (3.24)

$$h_x(g) = \underset{C \in E_*(x)}{sup} \underset{v \in C}{min} \langle v, g \rangle, \tag{3.28}$$

$o_x(g)$ удовлетворяет (3.25) или (3.26) соответственно, а $E_*(x)$ - семейство выпуклых замкнутых ограниченных множеств в $\mathbb{R}^n$.

**Замечание** Отметим, что верхний $E^*(x)$ и нижний $E_*(x)$ экзостеры функции $f$ в точке $x$ совпадают с соответствующими экзостерами функции $h_x(g)$ в $0_n$, поэтому в дальнейшем, если не обговаривается иное, будем рассматривать именно функцию $h_x(g)$ в нуле и использовать обозначения $h(g), E^*, E_*$.

В [19] было показано, что если $h(g)$ - п.о. липшицевая функция, то она может быть записана как в виде

$$h(g) = h_1(g) = \underset{C \in E^*}{min} \underset{v \in C}{max} \langle v, g \rangle, \tag{3.29}$$

так и в виде

$$h(g) = h_2(g) = \underset{C \in E_*}{max} \underset{v \in C}{min} \langle v, g \rangle, \tag{3.30}$$

где семейства множеств $E^*, E_*$ ограничены в совокупности (то есть найдется такое $r > 0$, что $C \subset B_r(0_n)$ для всех $C \in E^*$ $(E_*)$, где $B_r(0_n) \in \mathbb{R}^n$ - шар радиуса $r$ с центром в нуле)

Получаем, что в случае, когда функция $f$ $D$-д.п.н в точке $x$ и удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности этой точки, у нее в точке $x$ существуют одновременно и верхний и нижний экзостеры, представляющие собой семейства выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$:

$$f(x+g) = f(x) + \underset{C \in E^*(x)}{min} \underset{v \in C}{max} \langle v, g \rangle + o(g), \tag{3.31}$$

$$f(x+g) = f(x) + \underset{C \in E_*(x)}{max} \underset{v \in C}{min} \langle v, g \rangle + o(g), \tag{3.32}$$

Существует широкий класс негладких функций, допускающих разложения (3.31), (3.32) [7, 13]

**Теорема 3.3** Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$. Тогда существует верхний и нижний экзостеры, состоящие из одного одноточечного множества каждый

$$E^*(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}, \tag{3.33}$$

$$E_*(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}, \tag{3.34}$$

где $\nabla f(x_0)$ - градиент функции $f$ вточке $x_0$.

**Теорема 3.4** Пусть функция $f(x)$ субдифференцируема в точке $x_0$. Тогда существуют верхний и нижний экзостеры вида

$$E^*(x_0) = \{\underline{\partial} f(x_0)\}, \tag{3.35}$$

$$E_*(x_0) = \{\{v\}|\ v \in \underline{\partial} f(x_0)\}, \tag{3.36}$$

где $\underline{\partial} f(x_0)$ - субдифференциал функции $f$ в точке $x_0$.

**Теорема 3.5** Пусть функция $f(x)$ супердифференцируема в точке $x_0$. Тогда существуют верхний и нижний экзостеры вида

$$E^*(x_0) = \{\{v\}|\ v \in \overline{\partial} f(x_0)\}, \tag{3.37}$$

$$E_*(x_0) = \{\overline{\partial} f(x_0)\}, \tag{3.38}$$

где $\overline{\partial} f(x_0)$ - супердифференциал функции $f$ в точке $x_0$.

**Теорема 3.6** Пусть функция $f(x)$ квазидифференцируема в точке $x_0$. Тогда существуют верхний и нижний экзостеры вида

$$E^*(x_0) = \{C = w + \underline{\partial} f(x_0)|\ w \in \overline{\partial} f(x_0)\}, \tag{3.39}$$

$$E_*(x_0) = \{C = v + \overline{\partial} f(x_0)|\ v \in \underline{\partial} f(x_0)\}, \tag{3.40}$$

где $[\underline{\partial} f(x), \overline{\partial} f(x)]$ - квазидифференциал функции $f$ в точке $x_0$.

Таким образом, любая квазидифференцируемая функция имеет как верхний, так и нижний экзостеры. Обратное, вообще говоря, не верно.

### 3.2.1 Условие минимума в терминах экзостеров

Пусть задана функция $f : X \to R$, где $X$ - открытое множезство из $\mathbb{R}^n$, для которой в окрестности точки $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место разложение

$$f(x+g) = f(x) + h(g) + o_x(g), \tag{3.41}$$

где $h$ - положительно однородная функция. Тогда имеет место

**Теорема 3.7** Если в (3.41) $o_x(g)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{a \downarrow 0} \frac{o_x(\alpha g)}{\alpha} = 0 \ \forall g \in \mathbb{R}^n \tag{3.42}$$

то $f$ является $D$-д.п.н. в точке $x$, а условие

$$h(g) \geq 0 \ \forall g \in \mathbb{R}^n \tag{3.43}$$

является необходимым условием локального минимума функции $f$ на $X$. Если оказалось, что

$$\lim_{\|g\| \to 0} \frac{o_x(g)}{\|g\|} = 0 \ \forall g \in \mathbb{R}^n \tag{3.44}$$

то $f$ является $D$-д.п.н. в точке $x$, условие (3.43) является необходимым условием локального минимума функции $f$ на $X$, а условие

$$h(g) > 0 \ \forall g \in \mathbb{R}^n \tag{3.45}$$

является условием строгого локального минимума функции $f$ на $X$.

**Теорема 3.8** Если в (3.41) $o_x(g)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{a \downarrow 0} \inf \frac{o_x(\alpha g)}{\alpha} = 0 \ \forall g \in \mathbb{R}^n \tag{3.46}$$

то $f$ является $D$-н.д.п.н. в точке $x$, а условие

$$h(g) \geq 0 \ \forall g \in \mathbb{R}^n \tag{3.47}$$

является необходимым условием локального минимума функции $f$ на $X$. Если оказалось, что

$$\lim_{\|g\| \to 0} \inf \frac{o_x(g)}{\|g\|} = 0 \ \forall g \in \mathbb{R}^n \tag{3.48}$$

то $f$ является $D$-н.д.п.н. в точке $x$, условие (3.47) является необходимым условием локального минимума функции $f$ на $X$, а условие

$$h(g) > 0 \ \forall g \in \mathbb{R}^n \tag{3.49}$$

является условием строгого локального минимума функции $f$ на $X$.

**Теорема 3.9 [13]** Для того чтобы было выполнено неравенство

$$h(g) = \underset{C \in E^*}{min} \underset{v \in C}{max} \langle v, g \rangle \geq \ \forall g \in S \tag{3.50}$$

где $E^*$ - семейство выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы

$$0_n \in C \ \ \forall C \in E^* \tag{3.51}$$

**Теорема 3.10 [13]** Для того чтобы было выполнено неравенство

$$h(g) = \underset{C \in E^*}{min} \underset{v \in C}{max} \langle v, g \rangle > \ \forall g \in S \tag{3.52}$$

где $E^*$ - семейство выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы

$$0_n \in intC \ \ \forall C \in E^* \tag{3.53}$$

Если необходимые условия минимума в терминах собственных экзостеров не выполнены, то можем найти направление спуска.
Например, если (3.53) не имеет места в точке $x$, то существет $\widetilde{C} \in E^*(x)$ такое, что $0_n \notin C$. Положив

$$d(C) = \underset{v \in C}{min} \|v\| = \|v_c\| > 0, \quad g_C = -\frac{v_C}{\|v_C\|} \tag{3.54}$$

получим

$$h(g_{\widetilde{C}}) = \underset{C \in E^*(x)}{min} \underset{v \in C}{max} \langle v, g_{\widetilde{C}} \rangle \leqslant \underset{v \in \widetilde{C}}{max} \langle v, g_{\widetilde{C}} \rangle = -d(\widetilde{C}). \tag{3.55}$$

Найдя $\hat{C}$, для которого

$$d(\hat{C}) = \underset{C \in E^*(x)}{sup} d(C), \tag{3.56}$$

Получим направление наискорейшего спуска $\hat{(g)} = g_{\widetilde{C}}$ и скорость наимскорейшего спуска $-d(\hat{C})$ функции $f$ в точке $x$
И в терминах экзостеров [12] и в терминах квазидифференциалов [6] сформулировано условие максимума, но мы будем заниматься только минимизацией, так как задача максимизации может быть сведена к задаче минимизации.

# Глава 4

# Сравнение

И квазидифференциалы и верхние экзостеры используются для нахождения экстремумов функций. Подробно рассмотрим алгоритм нахождения минимума функции $f(x)$ при помощи верхних экзостеров или квазидифференциалов:

1. Выбирается начальная координата $x_0$
2. Для $f(x_k)$ находится квазидифференциал (верхний экзостер), где $k$ - количество сделанных шагов спуска
3. Проверяется условие минимума функции по (3.12)( (3.53) для верхнего экзостера), если оно не выполнено, то переходим к пункту 4, если выполнено, то завершаем вычисления и берем найденную точку в качестве решения
4. При помощи квазидифференциала (верхнего экзостера) находится направление наискорейшего спуска $g$ по формулам (3.13) ((3.56) для верхнего экзостера)
5. Для найденного направления происходит одномерная минимизация функции $f(x_k - \alpha g)$ методом нулевого порядка, например методом золотого сечения
6. Из пункта 5 получаем следующую точку спуска $x_{k+1}$
7. Увеличиваем k на единицу и переходим к пункту 2

Для того, чтобы сравнить аппарат экзостеров с аппаратом квазидифференциала, рассмотрим задачу минимизации следующей функции

$$\begin{aligned} F = \min\{\max\{x^0 + x^1 + 1, x^0 - x^1 + 1, -2x^0 + x^1 - 14\}, \max\{-x^0 \\ - x^1 + 1, 5x^0 - x^1 - 12, x^1 - x^0 + 1\}\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $x = (x^0, x^1) \in R^2$

Для начала, чтобы показать сходство квазидифференциалов и экзостеров, рассмотрим случай $x_0 = (-1, -1)$
Подробно рассмотрим построение квазидифференциала:

1. Построим функции
   $h_1 = x^0 + x^1 + 1$, $h_2 = x^0 - x^1 + 1$
   $h_3 = -2x^0 + x^1 - 14$, $h_4 = -x^0 - x^1 + 1$
   $h_5 = 5x^0 - x^1 - 12$, $h_6 = x^1 - x^0 + 1$
   $h_7 = \max\{h_1, h_2, h_3\}$, $h_8 = \max\{h_4, h_5, h_6\}$
   $F = \min\{h_7, h_8\}$
2. Функции $h_1 - h_7$ являются гладкими, поэтому находим по определению квазидифференциал гладких функций :
   $\underline{\partial} h_1 = (1, 1)$, $\overline{\partial} h_1 = (0, 0)$
   $\underline{\partial} h_2 = (1, -1)$, $\overline{\partial} h_2 = (0, 0)$
   $\underline{\partial} h_3 = (-2, 1)$, $\overline{\partial} h_3 = (0, 0)$
   $\underline{\partial} h_4 = (-1, -1)$, $\overline{\partial} h_4 = (0, 0)$
   $\underline{\partial} h_5 = (5, -1)$, $\overline{\partial} h_5 = (0, 0)$
   $\underline{\partial} h_6 = (-1, 1)$, $\overline{\partial} h_6 = (0, 0)$
3. По формуле (3.4)
   $\underline{\partial} h_7 = (1, -1)$, $\overline{\partial} h_7 = (0, 0)$
   $\underline{\partial} h_8 = (-1, -1)$, $\overline{\partial} h_8 = (0, 0)$
4. Далее по формуле (3.8)
   $\underline{\partial} h(x) = (1, -1)$ $\overline{\partial} h(x) = (0, 0)$

Верхний экзостер можно взять напрямую из функции, так как она уже находится в минимаксной форме, последовательно объединяя в выпуклую оболочку активные под максимумом внутренние функции. Каждый активный максимум будет отдельным элементом верхнего экзостера. В данном случае активная функция всего одна $x^0 - x^1 + 1$

$$E^* = (1, -1) \tag{4.2}$$

Поиск направлений в терминах квазидифференциалах по формуле (3.13) по своей практической сути представляет собой следующие шаги:

1. Выбирается точка из минус супердифференциала и находится расстояние от нее до субдифференциала.

2. Переходим к следующим точкам супердифференциала и выбираем максимальное полученное в шаге 1 расстояние.

3. Точки на супер- и субдифференциале между которыми получено это расстояние дают направление спуска.

В терминах экзостеров в практическом смысле поиск направления по формуле (3.56) выглядит аналогично квазидифференциалам, только вместо точек супердифференциала берется 0, а вместо субдифференциала - элементы верхнего экзостера.
Шаги минимизации приведены в таблице:

| $x_0$ | квд | экзостер | направление | шаг |
|---|---|---|---|---|
| (-1,-1) | $(1,-1), \{0\}$ | (1,-1) | (-1,1) | 1 |
| (0,-2) | $co\{(1,-1),\ (1,1)\},\ \{0\}$ | $co\{(1,-1),\ (1,1)\}$ | (0,-1) | 3 |
| (0,-5) | $co\{(1,1),$ $(-2,1)$,$(1,-1)\},\ \{0\}$ | $co\{(1,1)$,$(-2,1)$, $(1,-1)\}$ | Выполнено условие минимума | 0 |

Как видно, на всех шагах субдифференциалы и экзостеры совпадают, супердифференциал равен 0, а также полученные направления,как и способ их получения, абсолютно идентичны, поэтому в данном примере разницы между методами нет.

Теперь рассмотрим случай, когда разница есть и она существенна. Исходной точкой возьмем $x_0 = (0,0)$
Для $x_0 = (0,0)$ $E^*$, выписанный напрямую, принимает вид

$$E^* = \{co\{(1,1),(1,-1)\}, co\{(-1,-1)(-1,1)\}\} \tag{4.3}$$

Подробно рассмотрим построение квазидифференциала:

1. Построим функции
   $h_1 = x^0 + x^1 + 1$ $h_2 = x^0 - x^1 + 1$
   $h_3 = -2x^0 + x^1 - 14$, $h_4 = -x^0 - x^1 + 1$
   $h_5 = 5x^0 - x^1 - 12$, $h_6 = x^1 - x^0 + 1$
   $h_7 = \max\{h_1, h_2, h_3\}$, $h_8 = \max\{h_4, h_5, h_6\}$
   $F = \min\{h_7, h_8\}$

2. Функции $h_1 - h_7$ являются гладкими, поэтому находим по определению квазидифференциал гладких функций :
   $\underline{\partial} h_1 = (1, 1),\ \overline{\partial} h_1 = (0, 0)$
   $\underline{\partial} h_2 = (1, -1),\ \overline{\partial} h_2 = (0, 0)$
   $\underline{\partial} h_3 = (-2, 1),\ \overline{\partial} h_3 = (0, 0)$
   $\underline{\partial} h_4 = (-1, -1),\ \overline{\partial} h_4 = (0, 0)$
   $\underline{\partial} h_5 = (5, -1),\ \overline{\partial} h_5 = (0, 0)$
   $\underline{\partial} h_6 = (-1, 1),\ \overline{\partial} h_6 = (0, 0)$

3. По формуле (3.4)
   $\underline{\partial} h_7 = co\{(1, 1), (1, -1)\}, \overline{\partial} h_7 = (0, 0)$
   $\underline{\partial} h_8 = co\{(-1, 1), (-1, -1)\}, \overline{\partial} h_8 = (0, 0)$

4. Далее по формуле (3.8)
   $\underline{\partial} h(x) = co\{(0, 2), (0, -2)\}, \overline{\partial} h(x) = co\{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$

Квазидифференциал найденный по указанным формулам (3.4) (3.8), но с супердифференциалом взятым со знаком минус согласно (3.12), будет выглядеть следующим образом (Рис.1):

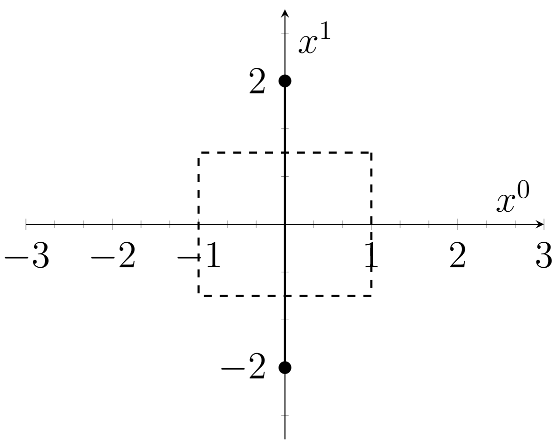


Рис.1 Квазидифференциал в точке $x_0 = (0, 0)$

Искать направление можно в терминах квазидифференциалов по формуле (3.13) или построить верхний экзостер из квазидифференциала и использовать поиск направления в терминах экзостеров. Построение верхнего экзостера происходит по формуле (3.39). Поиск направления спуска по (3.13), по сути, эквивалентен построению напраления спуска по формуле (3.56) для верхнего экзостера, построенного по квазидифференциалу. Это следует непосредственно из сопоставления формулы (3.13) с выражениями (3.39), (3.56).

Рассмотрим построение верхнего экзостера из квазидифференциала подробно:

$$E^* = \{C = w + \underline{\partial} f(x_0)|\ w \in \overline{\partial}\ f(x_0)\}$$
$$= \{(1,1) + co\{(0,-2),(0,2)\},\ (1,-1) + co\{(0,-2),(0,2)\},$$
$$(-1,-1) + co\{(0,-2),(0,2)\},\ (-1,1) + co\{(0,-2),(0,2)\}\}$$
$$= \{co\{(-1,-3)(-1,1)\}, co\{(-1,3)(-1,-1)\},$$
$$co\{(1,-3)(1,1)\}, co\{(1,3)(-1,-1)\}$$

Так как по количеству действий поиск направления через квазидифференциал и через построенный из него верхний экзостер эквивалентны, то мы будем искать направление в терминах верхних экзостеров. Обусловлено это тем, что сравнение с верхним экзостером, построеным напрямую из функции минимаксного вида, будет более наглядным. Оба экзостера представлены на рисунках (Рис.2, Рис. 3):

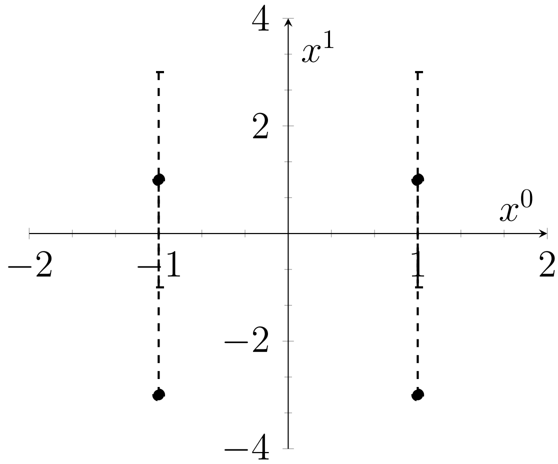

Рис.2 Верхний экзостер из КВД

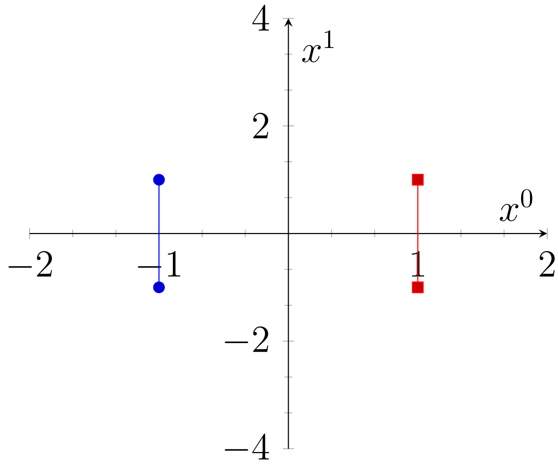

Рис.3 Верхний экзостер (4.3) из функции

Как можно заметить экзостер построенный из квазидифференциала имеет больше элементов и более сложную структуру в целом, что осложняет поиск направления. Экзоостер выписанный напрямую проще и требует меньше действий для нахождения направления, которые в обоих случаях получаются одинаковые: 2 направления (1,0) и (-1,0) . Для верхнего экзостера построенного по квазидифференциалу нужно искать минимальное расстояние от нуля до четырех множеств, а затем выбирать из них максимальное, во втором же случае - всего до двух множеств Дальнейшие шаги спуска представлены в таблице

| $x_0$ | квд | экзостер | направление | шаг |
|---|---|---|---|---|
| (0,0) | $co\{(0,2),(0,-2)\}$, $co\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$ | $\{co\{(1,1),(1,-1)\}$, $co\{(-1,-1)(-1,1)\}\}$ | (0,-1) | 5 |
| (0,-5) | $co\{(1,1),(-2,1),(1,-1)\}$, $\{0\}$ | $co\{(1,1),(-2,1),(1,-1)\}$ | Выполнено условие минимума | 0 |

По таблице видно, что в дальнейших шагах никакой разницы между экзостером и квазидиффиренциалом нет.
Для наглядности рассмотрим еще один пример

$$F = \min\{\max\{x^0+x^1+1, x^0-x^1+1, -2x^0+x^1-12\}, \max\{-x^0-x^1+1, 5x^0 - x^1-12, x^1-x^0+1\}, \max\{5x^0+5x^1-21, x^0-4x^1+1, -2x^1-3x^0+1\}\} \tag{4.4}$$

Исходной точкой возьмем $x_0 = (0,0)$
Для $x_0 = (0,0)$ $E^*$, выписанный напрямую, принимает вид

$$E^* = \{co\{(1,1),(1,-1)\}co\{(-1,-1),(-1,1)\}, co\{(1,-4),(-2,-3)\}\} \tag{4.5}$$

Квазидифференциал найденный по указанным формулам (3.4) (3.8), но с супердифференциалом взятым со знаком минус согласно (3.12), будет выглядеть следующим образом (Рис. 4):

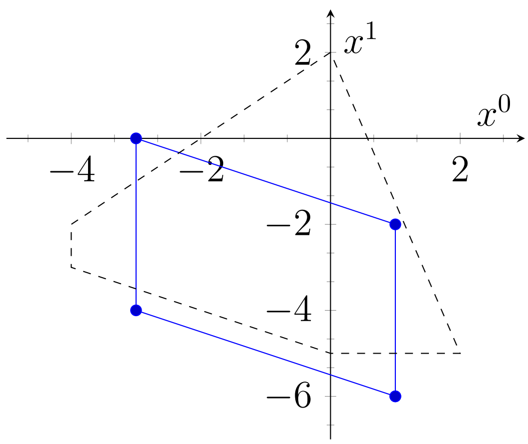


Рис.4 Квазидифференциал в точке $x_0 = (0,0)$

$$\underline{\partial} F(x) = co\{(1,-6),(1,-2),(-3,0),(-3,-4)\}, \tag{4.6}$$

$$\overline{\partial} F(x) = -co\{(0,2),(-4,-2),(-4,-3),(0,-5),(2,-5)\} \tag{4.7}$$

В этом случаем искать направление мы снова будем в терминах экзостеров. Строить экзостер из квазидифференциала будем по формуле (3.39).

Экзостер, получившийся из квазидифференциала мы можем сравнить с напрямую полученным из функции. Оба экзостера представлены на рисунках (Рис.5, Рис. 6):

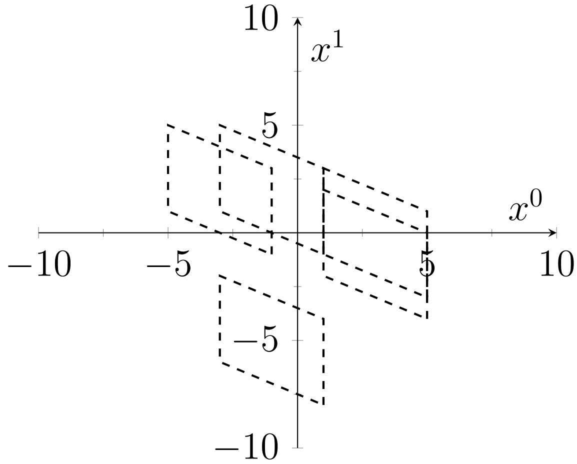

Рис.5 Верхний экзостер из КВД

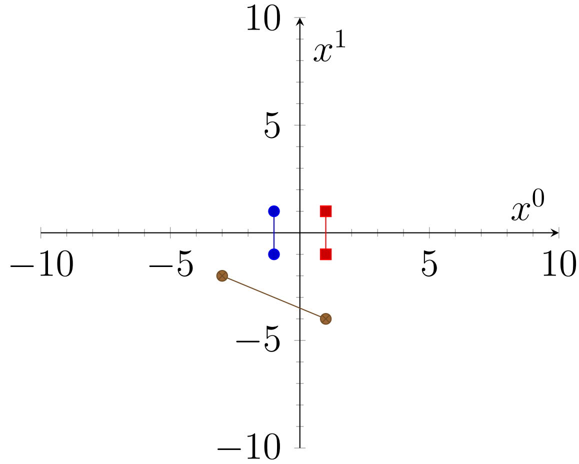

Рис.6 Верхний экзостер (4.5) из функции

Оба случая дают направление (-1,-2), Однако для экзостера по функции пришлось найти расстояние всего до 3 одномерных множества, для экзостера из КВД - до 5 двумерных. Разница весьма существенная дальнейшие шаги представлены в таблице:

| $x_0$ | квд | экзостер | направление | шаг |
|---|---|---|---|---|
| (0,0) | $co\{(1,-6),$ $(1,-2),(-3,0),$ $(-3,-4)\},$ $-co\{(0,2),$ $(-4,-2),(-4,-3)$ $,(0,-5),(2,-5)\}$ | $\{co\{(1,1),(1,-1)\}$ $co\{(-1,-1),(-1,1)\},$ $co\{(1,-4),(-2,-3)\}\}$ | (-1,-2) | 1 |
| (1,2) | $co\{(5,5),$ $(1,-4)$,$(-3,-2)\},$ $\{0\}$ | $co\{(5,5),$ $(1,-4)$,$(-3,-2)\}$ | Выполнено условие минимума | 0 |

В этом примере наглядно показано насколько сложнее выглядит экзостер построенный через квазидифференциал. Эта сложность приводит к лишним вычислениям для нахождения направления спуска, поэтому использовать квазидифференциал в таких случая крайне неэффективно по сравнению с экзостерами. Более того, во всех случаях использования квазидифференциала мы либо явно, либо неявно переходим к экзостерам на шаге поиска направления спуска.

# Глава 5

# Заключение

В данной работе была произведена оптимизация нескольких функций при помощи экзостеров и квазидифференциалов и произведено сравнение, которое наглядно показало что в функциях рассматримаего типа экзостеры значительно превосходят квазидифференциалы по эффективности, так как искать направление спука в них гораздо проще. Исходя из этого, использование экзостеров в задачах, где их нахождение не предполагает вычисление квазидифференциала , является более эффективным, а в тех задачах где предполагает [20] столь же эффективным, как и квазидифференциал. Поэтому можно сказать что использование экзостеров в задачах негладкой оптимизации более оправдано, чем использование квазидифференциалов.

# Литература


[1] Данскин Дж. М. Теория максимина и ее приложения к задачам распределения вооружения, - М.: Советское радио, 1970.

[2] Б. Т. Поляк, Минимизация негладких функционалов, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, том 9, номер 3, 509–521

[3] Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. - М.: Наука, 1969

[4] Шор Н.З. О классе почти-дифференцируемых функций и одном методе оптимизации функций этого класса. - Кибернетика, 1972, №4. с. 65-70.

[5] Clarke F.H. Generalized gradients and applications. - Trans. Amer. Math. Soc., 1975, v. 205, p.247-262

[6] Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М: Наука, 1981 С. 16 - 29.

[7] Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Элементы квазидифференциального исчисления // «Негладкие задачи теории оптимизации и управления» под ред. В.Ф.Демьянова. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1982. С.5-127.

[8] Пшеничный Б.Н. О необходимых условиях экстремума для негладких функций. - Кибернетика, 1977, № 6, с. 92-96

[9] Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление М.: Наука, 1990.

[10] Аббасов М.Э. Условия экстремума в терминах несобственных экзостеров // Вестник Санкт-Петербургского университета, серия 10, вып.2. 2011. С. 3-8.

[11] Аббасов М.Э. Условия экстремума в терминах несобственных экзостеров // Информационный бюллетень АМП, N 12 (Тез. докл. Всеросс.конф. МпиП). Екатеринбург, Уро РАН, 2011. С. 17-18.

[12] Аббасов М. Э. Учебное пособие по кафедральному курсу Негладкий анализ. 2016. С. 16 - 29.

[13] Demyanov V.F. Exhausters and Convexificators – New Tools in Nonsmooth Analysis // In: V. Demyanov and A. Rubinov (Eds.) Quasidifferentiability and related topics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. P. 85-137.

[14] J. V. Burke, Descent methods for composite nondifferentiable optimization problems, Math. Program., 33 (1985), pp. 260–279.

[15] Demyanov V.F., Roschina V.A. Optimality conditions in terms of upper and lower exhausters // Optimization. Vol. 55, N 5/6, 2006. P. 525- 540.

[16] Аббасов М.Э., Демьянов В.Ф. Условия экстремума негладкой функции в терминах экзостеров и коэкзостеров. // Труды института математики и механики УрО РАН, Т. 15, 2009. С. 10-19.

[17] Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука. 1980. – 320 с.

[18] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. – 472 с.

[19] Castellani M. A Dual Representation for Proper Positively Homogeneous Functions. // Journal of Global Optimization, Volume 16, Number 4, 2000. P. 393-400

[20] Аббасов М. Э.'Экзостеры: исчисление, условия экстремума, сравнение с квазидифференциалами, 2016. С. 16 - 29.

[21] Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление М: Высшая школа, 2005. – 335 с.

[22] M. E. Abbasov, V. F. Demyanov. Proper and adjoint exhausters in nonsmooth analysis: optimality conditions // J. Glob. Optim., 2013. Vol.56, Issue 2, P. 569–585.