САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Фундаментальная математика и механика

Функциональный анализ

Савицкая Анна Андреевна

Разложение Джона

Дипломная работа

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент Храбров А.И.

Рецензент:

д. ф.-м. н., внс Дубцов Е.С.

Санкт-Петербург

2017

SAINT-PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Fundamental Mathematics and Mechanics

Functional Analysis

Savitskaya Anna Andreevna

John's Decomposition

Graduation Thesis

Scientific supervisor:

Assoc. Prof. A. Khrabrov

Reviewer:

Leading Researcher E. Dubtsov

Saint-Petersburg

2017

Содержание

1. Введение

Работа посвящена асимптотической выпуклой геометрии. Объектом изучения служат выпуклые тела: выпуклые компактные подмножества евклидова пространства с непустой внутренностью. Они используются в многих областях математики, таких как линейное программирование, теория вероятности, функциональный анализ и других.

Эллипсоид максимального объема внутри выпуклого тела был впервые охарактеризован Джоном в терминах точек касания x_i в [5] при помощи оптимизационной теоремы (теорема 1). Такие эллипсоиды имеют важную роль в изучении расстояний между выпуклыми телами (для ознакомления с некоторыми из них см., например, [8]). Если эллипсоид Джона — шар, то единичный оператор раскладывается в сумму проекций $x_i \otimes x_i$ с положительными коэффицентами. Это привело ко многим результатам в теории аппрокимации конечномерных нормированных пространств (см., например, [3], [8], [9]).

В работе приводится подробный разбор статей Гордона, Литвака, Мейера и Пажора [1] и Хименеса и Насоди [2].

В данной работе изучается аналог разложения Джона для произвольных выпуклых тел K, L, где K в положении максимального объема в L (следствие 1). Некоторые из важных применений такого разложения единичного оператора:

- получена оценка расстояния Банаха–Мазура между симметричным и произвольным выпуклыми телами и ее точность (теорема 6 и следствие 5);
- если L — строго выпуклое или гладкое тело и расстояние Банаха–Мазура между телами K и L равно n, то K — симплекс (теорема 9).

2. Обозначения

Введем стандартные обозначения. Пространство $\mathbb{R}^n$ снабжено Евклидовым скалярным произведением $\langle .,. \rangle$. I_n — тождественный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Пространство линейных операторов $\mathscr{L}$ снабжено скалярным произведением, которое определено по формуле $\langle S,T\rangle = \operatorname{tr}(S^*T)$ для всех $S,T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. $M_n(\mathbb{R})$ — пространство матриц с вещественными элементами.

Выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ — это компактное выпуклое множество с непустой внутренностью. Оно строго выпукло, если на границе не содержится ни одного невырожденного отрезка. Гладкое выпуклое тело — это выпуклое тело с единственной опорной гиперплоскостью в каждой точке границы.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело, такое что $0 \in K$. Обозначим его объем $|K|$ и поляру

$$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x,y\rangle \leqslant 1 \quad \forall x \in K\}.$$

Для $x \in \mathbb{R}^n$ введем норму, связывающую точки пространства с выпуклым телом

$$\|x\|_K = \inf\{\lambda > 0 \,|\, x \in \lambda K\}.$$

Для $x,y \in \mathbb{R}^n$ определим

$$y \otimes x(t) = \langle y,t\rangle x \quad \forall t \in \mathbb{R}^n.$$

Если $A,B \subset \mathbb{R}^n$, то

$$A + B = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}.$$

Если $z \in \mathbb{R}^n$, то $K_z = K - z$.

Будем говорить, что K' — положение K, если существуют $T \in \mathrm{GL}_n$, $a \in \mathbb{R}^n$, такие что $K' = TK + a$.

Пусть K, L выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$vr(L,K) = \inf_{K' \subset L} \left(\frac{|L|}{|K'|}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\widetilde{d}(K,L) = \inf\left\{\alpha\beta \,|\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \frac{1}{\beta}L \subset K \subset \alpha L\right\},$$

$$d(K,L) = \inf_{z,x\in\mathbb{R}^n, u\in \mathrm{GL}_n}\{\widetilde{d}(uK_z, L_x)\},$$

$\delta_K = \inf\{d(K,B) \mid B$ — симметричное относительно 0 выпуклое тело в $\mathbb{R}^n\}$.

Замечание 1. На самом деле, настоящей метрикой будет не $d(\cdot,\cdot)$, а $\ln d(\cdot,\cdot)$. Соответственно, неравенство треугольника

$$d(A,B) \leqslant d(A,C)\cdot d(C,B),$$

где A, B, C — выпуклые тела.

3. Факты

Теорема 1. (F. John, см. [5]) *Пусть* $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *—* C^1 *— функция,* S *компактное метрическое пространство и* $G : \mathbb{R}^N \times S \to \mathbb{R}^n$ *— непрерывная функция. Предположим, что для любого* $s \in S$ *существует градиент* $\nabla_z G(z, s)$*, который непрерывен на* $\mathbb{R}^N \times S$*. Пусть*

$$A = \{z \in \mathbb{R}^N \,|\, G(z, s) \geqslant 0 \quad \forall s \in S\}$$

и $z_0 \in A$ *удовлетворяет условию*

$$F(z_0) = \min_{z \in A} F(z).$$

Тогда, либо $\nabla_z F(z_0) = 0$*, либо для некоторого* $1 \leqslant m \leqslant N$ *существуют* $s_1, \ldots, s_m \in S, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \geqslant 0$*, такие что*

$$G(z_0, s_i) = 0, \tag{1}$$

$$\nabla_z F(z_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla_z G(z_0, s_i).$$

Замечание 2. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — конус. Тогда

$$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x, y\rangle \leqslant 1 \quad \forall x \in K\} = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x, y\rangle \leqslant 0 \quad \forall x \in K\}.$$

Теорема Каратеодори. (см., например, [6]) *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n$ *— компакт. Тогда*

$$\operatorname{conv} A = \Big\{y \in \mathbb{R}^n \,|\, y = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i,\, x_i \in A, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\Big\}.$$

4. Разложение Джона

Пусть C_1 — компактное подмножество $\mathbb{R}^n$ и C_2 — компактное подмножество аффиных форм на $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $C_1 \subset C_2^\circ$.

Определение. Назовем пару точек (x, y) парой касания (C_1, C_2), если выполнены следующие условия

1. $\langle x, y\rangle = 1$,
2. $x \in C_1 \cap \partial C_2^\circ$,
3. $y \in C_2 \cap \partial C_1^\circ$.

Лемма 1. *Пусть K — выпуклый компакт, $0 \in \operatorname{int} K$. Тогда K° — выпуклый компакт и $0 \in \operatorname{int} K^\circ$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in K^\circ$, $z \in K$, $t \in (0, 1)$. Тогда

$$\langle tx + (1-t)y, z\rangle = t\langle x, z\rangle + (1-t)\langle y, z\rangle \leqslant 1.$$

Замкнутость очевидна. Докажем ограниченность.

Заметим, что

$$(B(0, r))^\circ = B\Big(0, \frac{1}{r}\Big) \text{ и}$$
$$K_1 \subset K_2 \mapsto K_2^\circ \subset K_1^\circ.$$

По условию K — ограничено и имеет непустую внутренность, а значит существуют r и R, такие что

$$B(0, r) \subset K \subset B(0, R).$$

Поэтому

$$B\Big(0, \frac{1}{R}\Big) \subset K^\circ \subset B\Big(0, \frac{1}{r}\Big).$$

□

Замечание 3. Рассмотрим отображение

$$t \to (x \otimes y)(t),$$

где $t, x, y \in \mathbb{R}^n$. Матрица этого оператора — $\{x_i y_j\}_{i,j=1}^n$, где x_i, y_j — соответствующие координаты векторов x и y.

Лемма 2. *Пусть $F : \mathbb{R}^{n^2 \times n} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, определенная по формуле*

$$F(T, a) = -\det T,$$

где $a \in \mathbb{R}^n$ и $T \in \mathbb{R}^{n^2}$ — линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть S компакт. Определим функцию $G : \mathbb{R}^N \times S \to \mathbb{R}$ по формуле

$$G((T, a), (x, y)) = 1 - \langle a + Tx, y \rangle.$$

Тогда

1. $\nabla_{(T,a)} F = (-\det T \cdot (T^{-1})^*, 0)$,
2. $\nabla_{(T,a)} G(\cdot, (x, y)) = (-\nabla_T \langle Tx, y \rangle, -\nabla_a \langle a, y \rangle) = -(x \otimes y, y)$.

Доказательство. 1. Пусть $\{t_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — матрица невырожденного оператора T. Тогда матрица обратного оператора

$$T^{-1} = (\det T)^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента t_{ij}. Заметим, что сопряженная матрица совпадает с транспонированной, так как все элементы вещественные.

Определитель матрицы может быть найден по формуле

$$\det T = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} A_{ij},$$

поэтому

$$(\det T)'_{t_{ij}} = A_{ij}.$$

2. Первое равенство в формуле очевидно. Проверим второе. Пусть

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij} y_i x_j.$$

Продифференцируем сумму по элементу t_{ij}. Тогда

$$(\langle Tx, y\rangle)'_{t_{ij}} = y_i x_j.$$

По замечанию 3 это является матрицей оператора $x \otimes y$. $\square$

Замечание 4. Пусть C_1 и C_2 компактные подмножества $\mathbb{R}^n$, такие что $\operatorname{int}\operatorname{conv} C_1 \neq \emptyset$ и $0 \in \operatorname{int}\operatorname{conv} C_2$. Множество C_2° ограничено, следовательно $\det T$ ограничен на множестве $\{(T, a) \in \mathrm{GL}_n \times \mathbb{R}^n \mid T(\operatorname{conv} C_1) + a \subset C_2^\circ\}$. Поэтому существует положение $\operatorname{conv} C_1$, которое имеет максимальный объем в C_2°.

Теорема 2. *Пусть C_1 и C_2 компактные подмножества $\mathbb{R}^n$, такие что $\operatorname{int}\operatorname{conv} C_1 \neq \emptyset$ и $0 \in \operatorname{int}\operatorname{conv} C_2$. Если $\operatorname{conv} C_1$ в положении максимального объема в C_2°, то существует $m \leqslant n^2+n$ пар касания (x_i, y_i) для (C_1, C_2) и числа $c_1, \ldots, c_m > 0$, такие что*

1. $I_n = \sum_{i=1}^m c_i x_i \otimes y_i$,

2. $\sum_{i=1}^m c_i y_i = 0$.

Доказательство. Пусть $N = n^2 + n$ и $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n$. Определим функции F и G как в предыдущей лемме и $S = C_1 \times C_2$. Пусть $A = \{z \in \mathbb{R}^N \mid G(z, s) \geqslant 0 \quad \forall s \in S\}$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
(T, a) \in A &\Leftrightarrow G((T, a), (x, y)) \geqslant 0 \quad \forall (x, y) \in S \\
&\Leftrightarrow \langle a + Tx, y\rangle \leqslant 1 \ \forall x \in C_1, \forall y \in C_2 \\
&\Leftrightarrow a + Tx \subset C_2^\circ \quad \forall x \in C_1 \\
&\Leftrightarrow a + T(\operatorname{conv} C_1) \subset C_2^\circ.
\end{aligned}$$

Пусть отображение T невырождено, тогда

$$\nabla_{(T,a)} F = (-\det T \cdot (T^{-1})^*, 0) \text{ и}$$

$$\nabla_{(T,a)} G(\cdot, (x,y)) = (-\nabla_T \langle Tx, y\rangle, -\nabla_a \langle a, y\rangle) = -(x \otimes y, y).$$

Так как $\operatorname{conv} C_1$ в положении максимального объема в C_2°, минимум F достигается на $(I_n, 0)$. Поэтому по теореме 1 существуют $m \leqslant N$, $\lambda_i \geqslant 0$, $s_i \in S$, $s_i = (x_i, y_i)$, где $1 \leqslant i \leqslant m$, такие что

$$(-I_n, 0) = \nabla_{(T,a)} F(I_n, 0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla_{(T,a)} G((I_n, 0), s_i) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x_i \otimes y_i, y_i).$$

Сравнив следы в этом равенстве, получим, что

$$n = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i.$$

Проверим, что (x_i, y_i) — пара касания:

$$\langle x_i, y_i \rangle = 1 - G((I_n, 0), (x_i, y_i)) = 1, \tag{2}$$

так как выполняется условие (1) для всех $1 \leqslant i \leqslant m$. Из того, что $x_i \in C_1 \subset C_2^\circ$ и $y_i \in C_2 \subset C_1^\circ$, мы получаем, что $x_i \in \partial C_2^\circ$ и $y_i \in \partial C_1^\circ$. То есть (x_i, y_i) — пара касания и

$$I_n = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \otimes y_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i = 0.$$

□

Замечание 5. Без второго условия в теореме будет достаточно $m \leqslant n^2$ точек касания.

Следствие 1. *Пусть K и L выпуклые компактные подмножества $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью и $0 \in \operatorname{int} \operatorname{conv} L$. Если K в положении максимального объема в L, то существует $m \leqslant n^2 + n$ пар касания (x_i, y_i) для $(\overline{\operatorname{Ext}} K, \overline{\operatorname{Ext}} L^\circ)$ и числа $c_1, \dots, c_m > 0$, такие что*

1. $I_n = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \otimes y_i$,
2. $\sum_{i=1}^{m} c_i y_i = 0$.

Доказательство. Применим теорему 2 к $C_1 = \overline{\operatorname{Ext}} K$ и $C_2 = \overline{\operatorname{Ext}} L^\circ$. □

Следствие 2. *Пусть A — компактное подмножество конечномерного аффинного пространства E и B — компактное подмножество аффинных форм на E. Предположим, что единичный оператор максимизирует объем $T(\operatorname{conv} A)$ среди всех аффиных отображений T, таких что $T(A) \subset P(B) = \{M \in E \mid f(M) \leqslant 0 \quad \forall f \in B\}$.*

Тогда существуют пары $(M_i, f_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in A \times B$ и $c_1, \ldots, c_m > 0$, такие что

1. $f_i(M_i) = 0$ *для любого* $1 \leqslant i \leqslant m$,
2. $\sum_{i=1}^m c_i f_i = const$ *на* E,
3. $f = \sum_{i=1}^m c_i f(M_i) f_i$ *для любой аффинной формы* f *на* E.

Доказательство. После выбора начала координат и базиса, можем считать, что задача поставлена в $\mathbb{R}^n$. Предполагаем, что $\operatorname{int} P(B)$ непуста. После перемещения, также можем считать, что $0 \in \operatorname{int} P(B)$. В этих условиях, $P(B)$ — поляра. Повторяя доказательство теоремы 2 с функцией

$$G((T, a), (x, y)) = -\langle a + Tx, y \rangle$$

и учитывая условие (1), получим следущее равенство вместо условия (2)

$$0 = -G((I_n, 0), (x_i, y_i)) = \langle x_i, y_i \rangle.$$

□

Теорема 3. *Пусть K и L выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью, такие что K в положении максимального объема в L. Тогда существуют $z \in \operatorname{int} K$ и $m \leqslant n^2 + n$ пар касания $(u_i, v_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ для $(\overline{\operatorname{Ext}} K_z, \overline{\operatorname{Ext}} L_z^\circ)$ и числа $a_1, \ldots, a_m > 0$, такие что*

1. $I_n = \sum_{i=1}^m a_i u_i \otimes v_i$,
2. $\sum_{i=1}^m a_i u_i = \sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$.

Доказательство. Считаем, что $0 \in \operatorname{int} K$. Пусть $(x_i, y_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ — существующие по следствию 1 пары касания для $(\overline{\operatorname{Ext}} K, \overline{\operatorname{Ext}} L^\circ)$ с числами $c_1, \ldots, c_m > 0$.

Пусть

$$z = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{m} c_i x_i.$$

Из того, что K — выпукло и $\sum \frac{c_i}{n} = 1$, следует, что $\frac{\sum c_i x_i}{n} \in K$. Это равносильно тому, что $\frac{n+1}{n} z \in K$, а значит

$$z \in \frac{n}{n+1} K \subset \frac{n}{n+1} L.$$

Заметим, что $z \in \operatorname{int} L$. Так как $K \subset L$, точка касания y_i принадлежит $L^\circ \subset K^\circ$, а значит $\langle x, y_i\rangle \leqslant 1$ для любого $x \in K$. То есть

$$\langle z, y_i\rangle = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{m} c_j \langle x_j, y_i\rangle \leqslant \frac{n}{n+1} < 1.$$

Определим для $1 \leqslant i \leqslant m$

$$u_i = x_i - z \text{ и } v_i = \gamma_i y_i, \text{ где } \gamma_i = (1 - \langle y_i, z\rangle)^{-1}.$$

Так как x_i — точка касания, $u_i \in \overline{\operatorname{Ext}} K_z \cap \partial L_z$. Для $z \in \operatorname{int} L$ определим отображение $Q : L^\circ \to \mathbb{R}^n$ по формуле

$$Q(y) = \frac{y}{1 - \langle y, z\rangle}.$$

Оно биективно из L° в L_z°. Обратное отображение определено формулой

$$Q^{-1}(s) = \frac{s}{1 + \langle s, z\rangle}.$$

Рассмотрим точку $x = tQ(a) + (1-t)Q(b)$, принадлежащую отрезку с концами $Q(a)$ и $Q(b)$. Пусть $\langle a, z\rangle =: a_z$ и $\langle b, z\rangle =: b_z$. Тогда

$$Q^{-1}(x) = \frac{t\frac{a}{1-a_z} + (1-t)\frac{b}{1-b_z}}{1 + t\langle \frac{a}{1-a_z}, z\rangle + (1-t)\langle \frac{b}{1-b_z}, z\rangle} = c_1 a + c_2 b,$$

где

$$c_1 = \frac{t(1-b_z)}{1 - a_z + t(a_z - b_z)} \text{ и } c_2 = \frac{t(a_z - 1) + 1 - a_z}{1 - a_z + t(a_z - b_z)},$$

а значит $c_1+c_2=1$, то есть прообраз точки x лежит на отрезке с концами a и b. Это влечет равенство $Q(\overline{\mathrm{Ext}} L^\circ) = \overline{\mathrm{Ext}} L^\circ_z$. По определению v_i, $Q(y_i) = v_i$ для любого i и

$$\langle u_i, v_i\rangle = \langle x_i - z, \gamma_i y_i\rangle = \gamma_i(\langle x_i, y_i\rangle - \langle z, y_i\rangle) = \gamma_i(1 - \langle z, y_i\rangle) = 1.$$

Из того, что $u_i \in K_z$ и $v_i \in L^\circ_z \subset K^\circ_z$ следует, что $v_i \in \partial K^\circ_z$. То есть (u_i, v_i) — пара касания для $(\overline{\mathrm{Ext}} K_z, \overline{\mathrm{Ext}} L^\circ_z.)$

Пусть $a_i = \frac{c_i}{\gamma_i} > 0$. Тогда по следствию 1 для любого $x \in \mathbb{R}^n$ верны следущие равенства

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^m a_i u_i \otimes v_i\Big)x &= \sum_{i=1}^m a_i \langle u_i, x\rangle v_i = \sum_{i=1}^m a_i \gamma_i \langle x_i - z, x\rangle y_i = \\ &= \sum_{i=1}^m c_i \langle x_i, x\rangle y_i - \sum_{i=1}^m c_i y_i \langle z, x\rangle = \\ &= I_n(x) - 0 \cdot \langle z, x\rangle = x.\end{aligned}$$

То есть $I_n = \sum_{i=1}^m a_i u_i \otimes v_i$ и

$$\sum_{i=1}^m a_i v_i = \sum_{i=1}^m c_i y_i = 0.$$

Из равенства $\sum_{i=1}^m c_i = n$ следует, что

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m a_i u_i &= \sum_{i=1}^m c_i(1 - \langle z, y_i\rangle)(x_i - z) = \\ &= \sum_{i=1}^m c_i x_i - \sum_{i=1}^m c_i \cdot z - \sum_{i=1}^m c_i \langle z, y_i\rangle x_i + \Big\langle z, \sum_{i=1}^m c_i y_i\Big\rangle z = \\ &= (n+1)z - nz - I_n(z) - z \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

□

Определение. Если для некоторых выпуклых тел K, $L \subset \mathbb{R}^n$ выполнены условия теоремы, то будем говорить, что K в позиции Джона в L. То есть $K \subset L$ и выполнены равенства

$$I_n = \sum_{i=1}^m a_i u_i \otimes v_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0$$

для некоторых $m \in \mathbb{N}$, $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \partial L \cap \partial K$, $\{v_i\}_{i=1}^m \subset \partial L^\circ \cap \partial K^\circ$, $a_1, \ldots, a_m > \ 0$ и $\langle u_i, v_i \rangle = 1$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$.

5. Разложение Джона: частные случаи

Лемма 3. *Пусть A — компактное хаусдорфово пространство и $g, g_0 : A \to \mathbb{R}$ — полунепрерывные сверху функции. Предположим, что $g_0 \leqslant 1$ и из того, что $g_0(x) = 1$, следует, что $g(x) \leqslant 0$. Тогда*

1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \nu \leqslant 1$, такое что если $g_0(x) \geqslant 1 - \nu$, то $g(x) \leqslant \varepsilon$;

2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует константа M_ε, такая что

$$g - \varepsilon g_0 \leqslant M_\varepsilon(1 - g_0).$$

Доказательство. 1. Предположим противное, то есть существует $\varepsilon > 0$, такой что для любого $0 < \delta \leqslant 1$ существует $x \in A$, такой что $g_0(x) \geqslant 1 - \delta$ и $g(x) \geqslant \varepsilon$.

- Если $g_0(x) = 1$, то $0 < \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant 0$ — противоречие.

- Если $g_0(x) < 1$, то рассмотрим множества $B_k = \{x \in A \,|\, g_0(x) < 1 - \frac{1}{k}\}$, которые являются открытыми, так как функция g_0 — полунепрерывна. Этот набор является покрытием A. Пространство A — компактно, поэтому можем выделить конечное подпокрытие

  $$A = \bigcup_{k=1}^{N} B_k.$$

  Тогда

  $$1 - \delta \leqslant g_0(x) < 1 - \frac{1}{N}.$$

  Пусть $\delta = \frac{1}{2N} < 1$. Получаем противоречие.

2. Пусть

$$\beta = \sup_{x \in A} g(x) < +\infty.$$

Тогда

1) если $g_0(x) \geqslant 1 - \nu$ и $M \geqslant \varepsilon$, то $g(x) + (M - \varepsilon) g_0(x) \leqslant \varepsilon + (M - \varepsilon) \leqslant M$,

2) если $g_0(x) \leqslant 1 - \nu$ и $M \geqslant \frac{\beta}{\nu}$, то

$$g(x) + (M - \varepsilon) g_0(x) \leqslant g(x) + (M - \varepsilon)(1 - \nu) \leqslant \beta + M - M\nu - \varepsilon(1 - \nu) \leqslant M.$$

Поэтому константа $M_\varepsilon = \max\left\{\varepsilon, \frac{\beta}{\nu}\right\}$ подходит. $\square$

Через X^* будем обозначать сопряженное к нормированному пространству X. Для $A \subset X$ и $B \subset X^*$ определим поляры как

$$A^\circ = \{y \in X^* \,|\, y(x) \leqslant 1 \quad \forall x \in A\} \text{ и}$$

$$B^\circ = \{x \in X \,|\, y(x) \leqslant 1 \quad \forall y \in B\}.$$

Теорема 4. *Пусть U — непустое открытое подмножество нормированного пространства X, A — $\sigma(X^*, X)$-компактное подмножество X^* и $F : X \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая по Гато функция. Для $x_0 \in A^\circ \cap U$ определим*

$$B(x_0) = \operatorname{conv}\{f \in A \,|\, f(x_0) = 1\}.$$

Тогда

1. Если x_0 — локальный максимум F на $A^\circ \cap U$, то либо $dF(x_0) = 0$, либо существует $\lambda > 0$, такая что $dF(x_0) \in \lambda \overline{B(x_0)}$.

2. Пусть выполнены следущие условия

а) $dF(x_0) = 0$, или существует $\lambda > 0$, такая что $dF(x_0) \in \lambda \overline{B(x_0)}$,

б) U — выпуклое,

в) F — вогнута на U.

Тогда x_0 — глобальный максимум F на $A^\circ \cap U$.

Доказательство. Пусть

$$C = \{x \in X \,|\, \exists t > 0 : x_0 + tx \in A^\circ \cap U\}.$$

Из того, что U — открыто и A — выпукло, следует равенство

$$C = \{x \in X \,|\, \exists t > 0 : x_0 + tx \in A^\circ\}.$$

Пусть $x \in C$ и $x_0' = dF(x_0) \in X^*$. Тогда

$$F(x_0 + tx) = F(x_0) + tx_0'(x) + t\varepsilon_x(t),$$

где $\lim_{t\to 0} \varepsilon_x(t) = 0$.

1. Если x_0 — локальный максимум F на A°, то

$$F(x) \leqslant F(x_0) \Leftrightarrow x_0'(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in C.$$

Пусть

$$D = \{x \in X \mid \text{из того, что } f(x_0) = 1 \text{ и } f \in A \text{ следует, что } f(x) \leqslant 0\}.$$

Заметим, что D — $\sigma(X, X^*)$-замкнуто. Докажем, что

$$\overline{C}^{\sigma(X,X^*)} = D.$$

Пусть $x \in C$ и $f(x_0) = 1$. Тогда существует $t > 0$, такое что $x_0 + tx \in A^\circ$ $\Leftrightarrow \langle f, x_0 + tx\rangle \leqslant 1$ для всех $f \in A$. То есть

$$f(x_0) + tf(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow tf(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \leqslant 0,$$

а значит $x \in D$.

Докажем, что $D \subset \overline{C}$. Применяя лемму 3 к $g(f) = f(x)$ и $g_0(f) = f(x_0)$, где $f \in A$ — $\sigma(X, X^*)$-компакт и $x \in D$, получим, что

$$f(x) + f(x_0)(M_\varepsilon - \varepsilon) \leqslant M_\varepsilon,$$

то есть

$$tf(x) + f(x_0)(1 - t\varepsilon) \leqslant 1, \text{ где } t = \frac{1}{M_\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$(1 - \varepsilon t)x_0 + tx \in A^\circ,$$

а значит

$$x - \varepsilon x_0 \in C.$$

Следовательно, если $x \in D$, то $x \in \overline{C}$.

Если $\{f \in A \mid f(x_0) = 1\} = \emptyset$, то $D = X$ и, так как x_0 — точка максимума, $x_0' = 0$. Иначе $B(x_0) \neq \emptyset$. Пусть $\mathfrak{B}$ — выпуклый конус, порожденный $\overline{B(x_0)}$ в X^*. Докажем, что $\mathfrak{B}$ $\sigma(X^*, X)$-замкнуто. Рассмотрим $\{y_i'\} \subset \mathfrak{B}$, где $y_i' = a_i x_i'$, $x_i' \in \overline{B(x_0)}$, $a_i \geqslant 0$ и $y_i' \to y' \in X^*$ в топологии $\sigma(X^*, X)$. Тогда $y_i'(x_0) = a_i \to y'(x_0)$ и

- если $y'(x_0) = 0$, то $a_i \to 0$ и из того, что $\overline{B(x_0)}$ замкнуто, следует, что $y_i' \to 0 = y'$, поскольку $B(x_0)$ подмножество компакта A и поэтому ограничено.

- если $y'(x_0) \neq 0$, то x_i' сходятся в топологии $\sigma(X^*, X)$ в $\overline{B(x_0)}$ и $y' \in \mathfrak{B}$.

Значит конус $\sigma(X^*, X)$-замкнут и $D = \mathfrak{B}^\circ$. Так как $x_0'(x) \leqslant 0$ для любого $x \in C \subset D = \mathfrak{B}^\circ$, по теореме о биполяре получаем

$$x_0' \in \mathfrak{B}^{\circ\circ} = \overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}.$$

2. Пусть $x_1 \in A^\circ \cap U$. Тогда $x_1 - x_0 \in C \subset \mathfrak{B}^\circ$. Пусть $x_0' \in \mathfrak{B}$, а значит $x_0'(x_1 - x_0) \leqslant 0$, так как $\mathfrak{B}$ — конус. Из вогнутости F на $A^\circ \cap U$ получаем

$$F(x_1) = F(x_0 + x_1 - x_0) \geqslant F(x_0) + dF(x_0)(x_1 - x_0) =$$

$$= F(x_0) + x_0'(x_1 - x_0) \geqslant F(x_0).$$

$\square$

Замечание 6. Докажем теорему 2 при помощи теоремы 4.

Доказательство. Пусть $X = X^* = M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ с произведением

$$\langle (S, s), (T, t) \rangle = \operatorname{tr}(S^* T) + \langle s, t \rangle.$$

Рассмотрим компакт

$$A = \{(y \otimes x, y) \mid x \in C_1,\, y \in C_2\} \subset X^*.$$

Пусть функция $F : X \to \mathbb{R}$ определена по формуле

$$F(T,t) = \det T.$$

Так как C_1 в положении максимального объема в C_2°, $\max F(T,t)$ достигается на $(I_n, 0)$, то есть

$$dF(I_n,0) = (I_n,0) \in \lambda \overline{B(I_n,0)}.$$

Рассмотрим $B(I_n, 0)$:

$$\begin{aligned} B(I_n,0) &= \operatorname{conv}\{f \in A \mid f(I_n,0) = 1\} = \\ &= \operatorname{conv}\{(y \otimes x, y) \mid \operatorname{tr}((y\otimes x)^* I_n) = 1\} = \\ &= \operatorname{conv}\left\{(y \otimes x, y) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1\right\} = \\ &= \operatorname{conv}\{(y \otimes x, y) \mid \langle x, y\rangle = 1\}. \end{aligned}$$

По теореме Каратеодори

$$B(I_n,0) = \left\{ z \in \mathbb{R}^{n^2+n} \mid z = \sum_{i=1}^{n^2+n+1} \lambda_i (y_i \otimes x_i, y_i),\ \lambda_i \geqslant 0,\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n^2+n+1} \lambda_i = 1,\ (y_i \otimes x_i, y_i) \in A\right\}.$$

Если $x_i \in C_1$, $y_i \in C_2$ и $(y_i \otimes x_i, y_i) \in A$, то $\langle x_i, y_i\rangle = 1$. Следовательно, $x \in C_1 \cap \partial C_2^\circ$ и $y \in C_2 \cap \partial C_1^\circ$. □

Следствие 3. *Пусть C_1 и C_2 компактные подмножества $\mathbb{R}^n$, такие что* $\operatorname{int}\operatorname{conv} C_1 \neq \emptyset$ *и* $0 \in \operatorname{int}\operatorname{conv} C_2$. *Пусть Y — N-мерное линейное подпространство $M_n(\mathbb{R})$ и U — открытое выпуклое подмножество Y, такое что отображение $T \to \det T$ положительно и логарифмически вогнуто на U. Тогда $(I_n, 0) \in U \times \mathbb{R}^n$ — точка максимума для $\det T$ при условии*

$$T \in U,\ a \in \mathbb{R}^n,\ a + T(C_1) \subset C_2^\circ$$

тогда и только тогда, когда существуют $m \leqslant N+n$ пар касания (x_i, y_i) для (C_1, C_2) и $c_1, \ldots, c_m > 0$, такие что

1. $I_n = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \otimes y_i$,
2. $\sum_{i=1}^{m} c_i y_i = 0$.

Доказательство. По теореме 2 необходимость верна и без дополнительных предположений на функцию. Докажем достаточность. Пусть $A = \{S \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, a + S(C_1) \subset C_2^\circ\}$, $F(T) = \ln \det T$ и $G(T) = \det T$. Заметим, что из монотонности логарифма следует, что

$$\operatorname{argmax}_{T \in U} F(T) = \operatorname{argmax}_{T \in U} G(T).$$

По условию, функция G логарифмически выпукла на U, то есть

$$\det(aA + (1-a)B) \geqslant (\det(A))^a \cdot (\det(B))^{1-a}.$$

Тогда из монотонности логарифма следует

$$F(aA + (1-a)B) = \ln\det(aA + (1-a)B) \geqslant \ln((\det(A))^a \cdot (\det(B))^{1-a}) =$$
$$= aF(A) + (1-a)F(B).$$

То есть отображение F — вогнутое.

Проверим справедливость условия на дифференциал теоремы 4. В данном случае,

$$B(I_n) = \{S \in A \,|\, \operatorname{tr} S = 1\}.$$

Рассмотрим дифференциал Гато функции F в I_n

$$d_{I_n}F(H) = \lim_{t \to 0} \frac{F(I_n + tH) - F(I_n)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{F(I_n + tH)}{t}.$$

Пусть матрица H — $\{h_{ij}\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Тогда

$$\det(I_n + tH) = 1 + \operatorname{tr} T \cdot t + \sum_{k=2}^{n} c_k \cdot t^k,$$

где c_k — некоторые вещественные числа. Следовательно,

$$\langle d_{I_n}F, H\rangle = d_{I_n}F(H) = \operatorname{tr} H = \langle I_n, H\rangle$$

то есть $d_{I_n}F = I_n$ и

$$d_{I_n}F \in \overline{B(I_n)}.$$

$\square$

6. Приложения

Теорема 5. *Пусть* K, $L \in \mathbb{R}^n$ *— выпуклые тела с непустой внутренностью. Тогда существуют* $T \in GL_n$ *и* $x, z \in \mathbb{R}^n$, *такие что*

$$K_z \subset T(L_x) \subset -nK_z.$$

Если K *в положении максимального объема в* L, *то*

$$K_z \subset L_z \subset -nK_z.$$

Доказательство. Применяя аффинное преобразование, если нужно, считаем, что K в положении максимального объема в L и $0 \in \operatorname{int} L$. По теореме 3 существуют $z \in \operatorname{int} K$, $m \leqslant n^2 + n$ пар касания $(u_i, v_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ для $(\overline{\operatorname{Ext}} K_z, \overline{\operatorname{Ext}} L_z^\circ)$ и $a_1, \ldots, a_m > 0$ такие что

$$I_n = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \otimes v_i, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} a_i = n. \tag{4}$$

Для $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$c(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \langle v_i, x \rangle.$$

Докажем, что $c(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть существует x_0, такой что $c(x_0) < 0$. То есть $\langle v_i, x_0 \rangle < 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$. Из того, что $a_i > 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$, следует, что $a_i \langle v_i, x_0 \rangle < 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$, а значит $\sum_{i=1}^{m} a_i \langle v_i, x_0 \rangle < 0$. Но $\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0$. Поэтому

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} a_i v_i, x_0 \right\rangle = 0.$$

Получаем противоречие.

Для всех $x \in \mathbb{R}^n$ из формулы (3) верно равенство

$$-x = \sum_{i=1}^{m} a_i \langle v_i, -x \rangle u_i.$$

Используя тождество $\sum_{i=1}^m a_i u_i = 0$, получаем, что

$$-x = c(x)\sum_{i=1}^m a_i u_i - \sum_{i=1}^m a_i \langle v_i, x\rangle u_i = \sum_{i=1}^m a_i (c(x) - \langle v_i, x\rangle) u_i.$$

Так как $c(x) - \langle v_i, x\rangle \geqslant 0$ и $u_i \in K_z$, $1 \leqslant i \leqslant m$, из последнего равенства следует, что

$$-x \in \Big(\sum_{i=1}^m a_i (c(x) - \langle v_i, x\rangle)\Big) K_z.$$

Используя формулы (4), получаем соотношения

$$-x \in \Big(\sum_{i=1}^m a_i c(x) - \Big\langle \sum_{i=1}^m a_i v_i, x\Big\rangle\Big) K_z = nc(x) K_z.$$

Так как $v_i \in L_z^\circ$,

$$L_z \subset \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, c(x) \leqslant 1\}, \quad 0 \in K_z.$$

Тогда

$$-L_z \subset nK_z \Leftrightarrow L_z \subset -nK_z.$$

□

Следствие 4. *Пусть $K, L \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые тела. Тогда*

$$vr(K,L)vr(L,K) \leqslant n.$$

Доказательство. Применяя теорему 5 получаем соотношение $K_z \subset T(L_x) \subset -nK_z$. Сдвиг не изменяет объем, поэтому получаем следущее неравенство

$$(vr(K,L)vr(L,K))^n \leqslant \frac{|K|}{n^{-n}|\det T||L_z|} \cdot \frac{|L|}{|\det T^{-1}||K_z|} = n^n.$$

□

Теорема 6. *1. Пусть $K, L \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые тела и L имеет центр симметрии. Тогда*

$$d(K,L) \leqslant n.$$

2. Пусть K в положении максимального объема в $L, 0 \in L$ и L центрально симметрично относительно точки $a \in L$. Тогда существует $b \in \mathbb{R}^n$, такое что

$$K - b \subset L - b \subset n(K - b).$$

Доказательство. Пусть K в положении максимального объема в L. Тогда по теореме 5 существует $z \in \mathbb{R}^n$, такое что

$$K_z \subset L_z \subset -nK_z.$$

Не умоляя общности, считаем, что $z = 0$. Так как L центрально симметрично относительно точки a, верно следущее соотношение

$$L - a = -(L - a) \Leftrightarrow L = -L + 2a.$$

Пусть $b = -\frac{2a}{n-1}$. Тогда

$$K - b \subset L - b = -L + 2a + \frac{2a}{n-1} \subset nK + 2a\frac{n}{n-1} = n(K - b).$$

□

Замечание 7. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ — невырожденный симплекс. Тогда минимальная константа k, такая что $S \subset -kS$, равна n.

Следствие 5. *Если $S \subset \mathbb{R}^n$ — невырожденный симплекс и $L \subset \mathbb{R}^n$ — центрально симметричное выпуклое тело, тогда $d(S, L) = n$.*

Доказательство. Неравенство $d(S, L) \leqslant n$ следует из предыдущей теоремы. Предположим, что $S \subset L \subset tS$ для некоторого t. Пусть b — центр симметрии L, то есть $L = -L + 2b$, а значит $-L + 2b \subset tS$. Следовательно, $L \subset -tS + 2b$. Поэтому $S \subset -tS + 2b$. Пусть $a := \frac{2b}{t+1}$, тогда $S_a \subset -tS_a$, что влечет неравенство $t \geqslant n$.

□

Следствие 6. *Пусть $K, L \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые тела. Тогда*

$$d(K, L) \leqslant n \cdot \min\{\delta_K, \delta_L\}.$$

Доказательство. Пусть δ_K и δ_L реализуются на симметричных относительно 0 телах B_K и B_L соответственно. Допустим, что $\min\{\delta_K, \delta_L\} = \delta_K$, то есть минимум достигается на B_K. Тогда по неравенству треугольника

$$d(K, L) \leqslant d(K, B_K) \cdot d(L, B_K) \leqslant \delta_K \cdot n.$$

□

Лемма 4. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, такие что $n \leqslant m$. Тогда функция $f(m) = \left(\frac{n}{m}\right)^n C_m^n$ монотонно возрастает.*

Доказательство. Для доказательства нужно проверить, что $\frac{f(m)}{f(m+1)} \leqslant 1$:

$$\frac{n^n \cdot m!}{m^n \cdot n! \cdot (m-n)!} \cdot \frac{(m+1)^n \cdot (m-n+1)! \cdot n!}{n^n \cdot (m+1)!} =$$

$$= \frac{(m+1-n) \cdot (m+1)^{n-1}}{m^n} = \Big(1 + \frac{1-n}{m}\Big)\Big(1 + \frac{1}{m}\Big)^{n-1}.$$

По неравенству Бернулли получаем, что

$$\Big(1 + \frac{1-n}{m}\Big)^{\frac{1}{n-1}} \leqslant 1 + \frac{1}{n-1}\frac{1-n}{m} = 1 - \frac{1}{m}.$$

Тогда

$$\Big(\Big(1 + \frac{1-n}{m}\Big)\Big(1 + \frac{1}{m}\Big)^{n-1}\Big)^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \Big(1 - \frac{1}{m}\Big)\Big(1 + \frac{1}{m}\Big) = 1 - \frac{1}{m^2} \leqslant 1.$$

□

Лемма 5. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, такие что $n \leqslant m$ и $c_i > 0$. Тогда*

$$\sum_{|I|=n} \prod_{i \in I} c_i \leqslant C_m^n \cdot \Big(\sum_{i=1}^m \frac{c_i}{m}\Big)^n. \tag{5}$$

Доказательство. Из полиномиальной формулы следует, что

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{m}\Big)^n = \frac{1}{m^n} \sum_{k_1+\dots+k_m=n, k_j\in\mathbb{N}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} c_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot c_m^{k_m}, \tag{6}$$

где

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Введем обозначение

$$[a] = [a_1, \dots, a_m] = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma} c_{\sigma(1)}^{a_{\sigma(1)}} \cdot \dots \cdot c_{\sigma(m)}^{a_{\sigma(m)}},$$

где σ — перестановка набора чисел множества $\{1, \dots, m\}$. Тогда

$$[\alpha] = [\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ единиц}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n \text{ нулей}}] = \big(C_m^n\big)^{-1} \sum_{|I|=n} \prod_{i\in I} c_i,$$

а (6) состоит из орбит

$$([n, 0, \dots, 0], [n-1, 1, \dots, 0], [n-2, 2, 0, \dots, 0], [n-2, 1, 1, 0, \dots, 0], \dots),$$

каждая из которых мажорирует орбиту $[\alpha]$. По теореме Мюрхеда (см., например, [7]), получаем требуемое утверждение. □

Определение. Пусть K и L выпуклые тела. Будем говорить, что K в положении максимального объема в L по отношению к точке $a \in \mathbb{R}^n$, если $a \in K \cap L$ и для любого $T \in \mathrm{GL}_n$, такого что $TK_a \subset L_a$, следует, что $|\det T| \leqslant 1$.

Замечание 8. Заметим, что если K в позиции максимального объема в L и оба тела имеют центр симметрии, то есть для некоторых $a, b \in \mathbb{R}^n$ выполнены равенства

$$K_a = -K_a \text{ и } L_b = -L_b,$$

то

$$K_a \subset L_a = L_b + b - a \text{ и } K_a = -K_a \subset -L_a = L_b + a - b.$$

Тогда
$$K_a = \frac{K_a + K_a}{2} \subset \frac{L_b + a - b + L_b - a + b}{2} = L_b.$$
В частности, если $K = -K$ и $L = -L$, то достаточно предполагать, что K в положении максимального объема в L по отношению к 0.

Теорема 7. *Пусть $K, L \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ — центрально симметричные выпуклые тела, такие что K в положении максимального объема в L по отношению к 0. Тогда существуют параллелепипед P и октаэдр C, такие что*
$$C \subset K \subset L \subset P \text{ и } \left(\frac{|P|}{|C|}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\Big(C_{n^2}^n \cdot n!\Big)^{\frac{1}{n}} < n.$$

Доказательство. По следствию 1 и замечанию 5, существуют $c_i \geqslant 0$ и $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$, где $1 \leqslant i \leqslant m$ и $n \leqslant m \leqslant n^2$, такие что $I_n = \sum_{i=1}^m c_i x_i \otimes y_i$. Пусть A, B — матрицы $m \times n$, определенные следующим образом
$$A = \{c_i x_i\}_{i \leqslant m} = \{c_i x_{ij}\}_{i \leqslant m, j \leqslant n}, \quad B = \{y_i\}_{i \leqslant m} = \{y_{ij}\}_{i \leqslant m, j \leqslant n},$$
где x_{ij}, y_{ij} — координаты x_i, y_i в стандартном базисе. Заметим, что $B^*A = I_n$.

Пусть $I \subset \{1, \dots, m\} =: M$. По формуле Бине–Коши получим
$$\begin{aligned}1 = \det I_n &= \sum_{I \subset M, |I| = n} \det_{i \in I}\{c_i x_i\} \cdot \det_{i \in I}\{y_i\} \leqslant \\ &\leqslant \max_{|I|=n}\Big(|\det_{i\in I}\{x_i\}| \cdot |\det_{i\in I}\{y_i\}|\Big) \cdot \sum_{|I|=n}\prod_{i \in I} c_i \leqslant \\ &\leqslant \max_{|I|=n}\Big(|\det_{i\in I}\{x_i\}| \cdot |\det_{i\in I}\{y_i\}|\Big) \cdot C_m^n \cdot \left(\sum_{i=1}^m \frac{c_i}{m}\right)^n.\end{aligned}$$
Так как $n \leqslant m \leqslant n^2$ и $\sum_{i=1}^m c_i = n$, получаем неравенства
$$C_m^n \cdot \left(\sum_{i=1}^m \frac{c_i}{m}\right)^n = \left(\frac{n}{m}\right)^n C_m^n \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^n C_{n^2}^n < n^n. \tag{7}$$
Пусть максимум $|\det\{x_i\}_{i \in I}| \cdot |\det\{y_i\}_{i\in I}|$ достигается на $I_0 \subset M$, тогда
$$1 \leqslant |\det\{x_i\}_{i \in I_0}| \cdot |\det\{y_i\}_{i \in I_0}| \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n C_{n^2}^n. \tag{8}$$

Пусть

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |\langle x, y_i\rangle| \leqslant 1 \ \forall i \in I_0\} \text{ и}$$

$$C = (\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |\langle x, x_i\rangle| \leqslant 1 \ \forall i \in I_0\})^\circ.$$

Выпуклые компакты K и L центрально симметричны, поэтому из того, что $y_i \in \partial L^\circ$ и $x_i \in \partial K$ следует, что $L \subset P$ и $K^\circ \subset C^\circ$. Поэтому $C \subset K$ и

$$|C| = \frac{2^n}{n!}\Big|\det_{i\in I_0}\{x_i\}\Big| \text{ и } |P| = 2^n\Big|\det_{i\in I_0}\{y_i\}\Big|^{-1}.$$

Тогда по неравенствам (7) и (8) верно следующее

$$\Big(\frac{|P|}{|C|}\Big)^{\frac{1}{n}} = \Big(\frac{n!}{|\det\{x_i\}_{i\in I}|\cdot|\det\{y_i\}_{i\in I}|}\Big)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\Big(n!\cdot C_{n^2}^n\Big)^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{n}(n^{2n})^{\frac{1}{n}} = n.$$

□

Теорема 8. *Пусть $K, L \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые тела, такие что*

1. $0 \in K \cap \operatorname{int} L$,

2. K в положении максимального объема в L по отношению к 0.

Тогда существуют симплексы S_1 и S_2, такие что $S_1 \subset K$ и $S_2 \subset L^\circ$ и

$$(|S_1||S_2|)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{n^2}.$$

Доказательство. По следствию 1 и замечанию 5 для некоторого $n < m \leqslant n^2$ существуют $c_i > 0$, $x_i \in \partial K$, $y_i \in \partial L^\circ$, где $1 \leqslant i \leqslant m$, такие что

$$I_n = \sum_{i=1}^m c_i x_i \otimes y_i \text{ и } \sum_{i=1}^m c_i = n.$$

Пусть A, B — матрицы размера $m\times(n+1)$, в которых первые n столбцов как в предыдущей теореме и $x_{ik} = y_{ik} = 1$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$ и $k = n+1$. Заметим, что $B^*A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, где $a_{ij} = \delta_{ij}$ для $1 \leqslant i,j \leqslant n$ и $a_{kk} = n$, если $k = n+1$. Повторяя предыдущее доказательство, получим

$$n = \det B^*A \leqslant \max_{|I|=n+1}\Big(|\det_{i\in I}\{x_i\}|\cdot|\det_{i\in I}\{y_i\}|\Big)\cdot\sum_{|I|=n+1}\prod_{i\in I} c_i \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|I|=n+1}\Big(|\det_{i\in I}\{x_i\}|\cdot|\det_{i\in I}\{y_i\}|\Big)\cdot C_m^{n+1}\cdot\Big(\frac{n}{m}\Big)^{n+1}.$$

Пусть максимум достигается на I_0, $S_1 \subset K$ — симплекс с вершинами x_i, $i \in I_0$ и $S_2 \subset L^\circ$ — симплекс с вершинами y_i, $i \in I_0$. Тогда

$$
\begin{aligned}
|S_1||S_2| &= (n!)^{-2}|\det_{i\in I_0}\{x_i\}| \cdot |\det_{i\in I_0}\{y_i\}| \geqslant \\
&\geqslant n(n!)^{-2}(C_m^{n+1})^{-1}\Big(\frac{m}{n}\Big)^{n+1} = \\
&= \frac{n}{n!\cdot n!}\cdot\frac{(m-n-1)!(n+1)!}{m!}\cdot\frac{m^{n+1}}{n^{n+1}} = \\
&= \frac{1}{n!}\cdot\frac{n+1}{(m-n)\cdot\ldots\cdot m}\cdot\frac{m^{n+1}}{n^n} > \\
&> \frac{1}{n^n}\cdot\frac{n+1}{m^{n+1}}\cdot\frac{m^{n+1}}{n^n} = \frac{n+1}{n^{2n}} > \frac{1}{n^{2n}}.
\end{aligned}
$$

□

Замечание 9. Докажем теорему 5 вторым способом, чтобы в дальнейшем использовать приведенные выкладки.

Доказательство. Пусть K в позиции Джона в L с $m \in \mathbb{N}$, $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \partial L \cap \partial K$, $\{v_i\}_{i=1}^m \subset \partial L^\circ \cap \partial K^\circ$, $a_1, \ldots, a_m > 0$ и $x \in L$. Тогда

$$
\begin{aligned}
-x &= -\sum_{i=1}^m a_i\langle x, v_i\rangle u_i = \\
&= -\sum_{i=1}^m a_i\langle x, v_i\rangle u_i + \Big(\sum_{i=1}^m a_i u_i\Big)\max_{j=1,\ldots,m}\langle x, v_j\rangle = \\
&= \sum_{i=1}^m(\max_{j=1,\ldots,m}\langle x, v_j\rangle - \langle x, v_i\rangle)a_i u_i.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Из этого следует, что

$$
\begin{aligned}
\|-x\|_K &\leqslant \sum_{i=1}^m(\max_{j=1,\ldots,m}\langle x, v_j\rangle - \langle x, v_i\rangle)a_i\|u_i\|_K = \\
&= \max_{j=1,\ldots,m}\langle x, v_j\rangle\sum_{i=1}^m a_i - \Big\langle x, \sum_{i=1}^m a_i v_i\Big\rangle = \\
&= n\cdot\max_{j=1,\ldots,m}\langle x, v_j\rangle \leqslant n.
\end{aligned}
$$

□

Лемма 6. *Выпуклое тело K в позиции Джона в L с $m \in \mathbb{N}$, $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \partial L \cap \partial K$, $\{v_i\}_{i=1}^m \subset \partial L^\circ \cap \partial K^\circ$ и $a_1, \ldots, a_m > 0$. Предположим, что $x \in \partial L \cap (-n\partial K)$. Пусть $w \in \partial K^\circ$, такая что $\langle -x, w\rangle = n$. Тогда*

$$-\frac{x}{n} \in \operatorname{conv}\{u_i \,|\, i \in B\}, \tag{10}$$

$$-\frac{w}{n} \in \operatorname{conv}\{v_i \,|\, i \in A\}, \tag{11}$$

$$\langle x, v_i\rangle = 1 \text{ для всех } i \in A, \tag{12}$$

где

$$A := \{i \,|\, \langle u_i, w\rangle < 1\} \text{ и } B := \{i \,|\, \langle u_i, w\rangle = 1\}.$$

Доказательство. Заметим, что $\|x\|_K = n$, так как $x \in \partial L \cap (-n\partial K)$. Следовательно, неравенства в замечании 9 переходят в равенство и, в частности,

$$\max_{j=1,\ldots,m} \langle x, v_j\rangle = 1.$$

Используя последнее равенство (9), получаем

$$\begin{aligned} n = \langle -x, w\rangle &= \sum_{i=1}^m \Big(\max_{j=1,\ldots,m} \langle x, v_j\rangle - \langle x, v_i\rangle\Big) a_i \langle u_i, w\rangle \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^m \Big(\max_{j=1,\ldots,m} \langle x, v_j\rangle - \langle x, v_i\rangle\Big) a_i = \\ &= \max_{j=1,\ldots,m} \langle x, v_j\rangle \sum_{i=1}^m a_i - \Big\langle x, \sum_{i=1}^m a_i v_i\Big\rangle = n. \end{aligned} \tag{13}$$

То есть в неравенстве (13) равенство, а значит либо

$$\langle u_i, w\rangle = 1,$$

либо

$$\langle x, v_i\rangle = \max_{j=1,\cdots,m} \langle x, v_j\rangle = 1.$$

Это влечет условие (12).

Используя разложение единичного оператора (3) и условие на коэффициенты (4), получаем

$$w = \sum_{i=1}^{m} a_i \langle u_i, w\rangle v_i = \sum_{i\in B} a_i \langle u_i, w\rangle v_i + \sum_{i\in A} a_i \langle u_i, w\rangle v_i =$$
$$= \sum_{i\in B} a_i v_i + \sum_{i\in A} a_i \langle u_i, w\rangle v_i = -\sum_{i\in A} a_i v_i + \sum_{i\in A} a_i \langle u_i, w\rangle v_i =$$
$$= \sum_{i\in A} a_i \Big(\langle u_i, w\rangle - 1\Big) v_i.$$

Заметим, что последняя сумма — линейная комбинация v_i. Далее,

$$\sum_{i\in A} a_i \Big(\langle u_i, w\rangle - 1\Big) v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, w\rangle - \sum_{i\in B} a_i \langle u_i, w\rangle - \sum_{i\in A} a_i =$$
$$= 0 - \sum_{i\in B} a_i - \sum_{i\in A} a_i = -n.$$

То есть выполнено условие (11). Условие (10) получается аналогично. $\square$

Лемма 7. *Пусть K в позиции Джона в L с $m \in \mathbb{N}$, $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \partial L \cap \partial K$, $\{v_i\}_{i=1}^m \subset \partial L^\circ \cap \partial K^\circ$ и $a_1, \dots, a_m > 0$. Предположим, что $u_m \in \operatorname{conv}\{u_i\}_1^{m-1}$ или $v_m \in \operatorname{conv}\{v_i\}_1^{m-1}$. Тогда для любого $i \in \{1, \dots, m-1\}$ существуют $b_i > 0, w_i \in \partial L \cap \partial K$ и $z_i \in \partial L^\circ \cap \partial K^\circ$, такие что*

$$\langle w_i, z_i\rangle = 1,$$

$$I_n = \sum_{i=1}^{m-1} b_i w_i \otimes z_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} b_i w_i = \sum_{i=1}^{m-1} b_i z_i = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $u_m \in \operatorname{conv}\{u_i\}_1^{m-1}$. Следовательно, существуют $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1} \geqslant 0$, такие что

$$u_m = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i u_i \ \text{ и } \ \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i = 1.$$

Применяя теорему 3, получим следущее равенство

$$I_n = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \otimes v_i = \sum_{i=1}^{m-1} u_i \otimes (a_i v_i + a_m \lambda_i v_m).$$

Пусть $b_i = \langle u_i, a_i v_i + a_m \lambda_i v_m \rangle = a_i + a_m \lambda_i \langle u_i, v_m \rangle$. Заметим, что $b_i > 0$ и

$$1 = \langle u_m, v_m \rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i u_i, v_m \Big\rangle = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \langle u_i, v_m \rangle \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i = 1,$$

то есть $\langle u_i, v_m \rangle = 1$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$. Следовательно,

$$I_n = \sum_{i=1}^{m-1} u_i \otimes (a_i v_i + a_m \lambda_i v_m) = \sum_{i=1}^{m-1} b_i u_i \otimes \frac{a_i v_i + a_m \lambda_i v_m}{b_i}.$$

Пусть

$$z_i = \frac{a_i v_i + a_m \lambda_i v_m}{b_i} = \frac{a_i v_i + a_m \lambda_i v_m}{a_i + a_m \lambda_i} \in \operatorname{conv}\{v_i \,|\, i = 1, \dots, m\} \text{ и } w_i = u_i.$$

Тогда

$$I_n = \sum_{i=1}^{m-1} b_i w_i \otimes z_i \text{ и}$$

$$\langle w_i, z_i \rangle = \langle u_i, z_i \rangle = \frac{b_i}{b_i} = 1. \tag{14}$$

Из равенства (14) следует, что $z_i \in \partial L^\circ \cap \partial K^\circ$.

Рассмотрим суммы

$$\sum_{i=1}^{m-1} b_i u_i = \sum_{i=1}^{m-1} (a_i + a_m \lambda_i) u_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i u_i + \sum_{i=1}^{m-1} a_m \lambda_i u_i =$$
$$= -a_m u_m + a_m \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i u_i = -a_m u_m + a_m u_m = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} b_i z_i = \sum_{i=1}^{m-1} (a_i v_i + a_m \lambda_i v_m) = \sum_{i=1}^{m-1} a_i v_i + \sum_{i=1}^{m-1} v_m a_m \lambda_i =$$
$$= -a_m v_m + a_m v_m \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i = -a_m v_m + a_m v_m = 0.$$

□

Определение. Положительной (соответственно, отрицательной) гомотетией выпуклого тела K будем называть множество вида $aK + t$ (соответственно, $-aK+t$), где $a > 0$ и $t \in \mathbb{R}^n$. Гомотетия $-aK+t$ меньше гомотетии $-bK + t$, если $0 < a < b$.

Лемма 8. *Пусть U и V выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$, $V \subset U$ и $0 \in \operatorname{int} U$. Предположим, что ни одна положительная гомотетия U, меньшая U, не содержит V. Тогда $0 \in \operatorname{conv}(\partial U^\circ \cap \partial V^\circ)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда можно разделить 0 и $\operatorname{conv}(\partial U^\circ \cap \partial V^\circ)$ гиперплоскостью. То есть существует $t \in \mathbb{R}^n$, такой что $\langle t, y\rangle < 0$ для всех $y \in \partial U^\circ \cap \partial V^\circ$. Пусть функция $f : U \to \mathbb{R}$ определена по правилу $f(x) = \inf\{a > 0 \,|\, x + at \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int} U\}$.

- Если $f(x) = 0$, то $x \in \partial U$ и $x + at \notin \operatorname{int} U$ для всех $a > 0$, а значит существует $y \in \partial U^\circ$, такой что $\langle x, y\rangle = 1$ и $\langle x + at, y\rangle \geqslant 1$ для всех a, то есть $\langle t, y\rangle \geqslant 0$.

- Если $f(x) > 0$, то функция непрерывна в x. Поэтому сужение f на U непрерывная, положительная функция на компакте, а значит достигает своего минимума c. Тогда $V \subset \operatorname{int} U - \frac{c}{2}t$, что противоречит условию.

$\square$

Лемма 9. *Пусть T — k-мерный симплекс и $-aT + t$ — отрицательная гомотетия T, которая пересекает все его грани. Тогда $\frac{1}{k} \leqslant a$.*

Доказательство. Можем считать, что вписанная в T сфера — единичная с центром в 0. Тогда $-\frac{1}{k}T$ центрированный симплекс, который касается всех граней T по замечанию 7. А значит для любого $t \neq 0$ симплекс $-\frac{1}{k}T + t$ не будет пересекать как минимум одну грань T. $\square$

Определение. Будем говорить, что набор векторов $\{a_i\}_{i=1}^s$ — аффинно зависим, если существует индекс k, такой что

$$a_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{s} \lambda_i a_i, \quad \sum_{i=1, i\neq k}^{s} \lambda_i = 1.$$

Замечание 10. Если $\{a_i\}_{i=1}^s \subset \mathbb{R}^n$ — аффинно независимые, то $s \leqslant n+1$.

Теорема 9. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело, $D \subset \mathbb{R}^n$ — строго выпуклое или гладкое тело и $K \subset D$ в позиции Джона с $m \in \mathbb{N}$, $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \partial D \cap \partial K$, $\{v_i\}_{i=1}^m \subset \partial D^\circ \cap \partial K^\circ$ и $a_1, \dots, a_m > 0$. Предположим, что наименьшая отрицательная гомотетия K, содержащая D, это $-nK$. Тогда K — симплекс.*

Доказательство. По лемме 7 можем считать, что все u_i и v_i различны. Не умаляя общности считаем, что $0 \in \operatorname{int} D$. Так как $-nK$ наименьшая гомотетия, содержащая D,

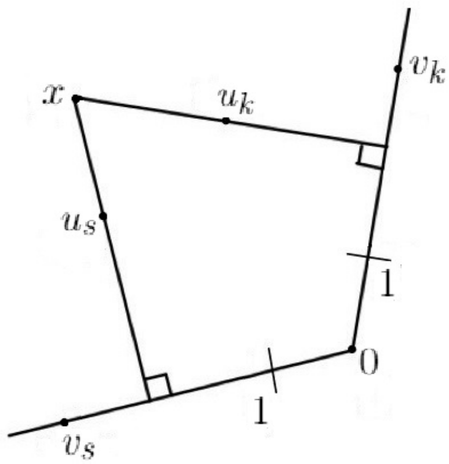
$$\partial D \cap -n\partial K \neq \emptyset.$$

Пусть $x \in \partial D \cap -n\partial K$ и w, A, B — как в лемме 6. Если $A = \emptyset$, то $\langle u_i, w\rangle = 1$ для любого $1 \leqslant i \leqslant m$, но тогда возникает противоречие с тем, что $\sum_{i=1}^m a_i u_i = 0$. Следовательно, $A \neq \emptyset$. Предположим, что $k, s \in A$, $k \neq s$. Тогда $v_k \neq v_s$ и по лемме 6

$$\langle x, v_k\rangle = \langle x, v_s\rangle = 1. \tag{15}$$

- Пусть D — гладкое. Тогда равенство (15) противоречит единственности опорной гиперплоскости в точке x. Следовательно, A — одноточечно. Предположим, что $A = \{k\}$. Так как $\langle u_k, v_k\rangle = \langle x, v_k\rangle = 1$, $x = u_k$.

- Пусть D — строго выпуклое. Если $\langle x, v_k\rangle = 1$ и $\langle u_k, v_k\rangle = 1$, то в силу строгой выпуклости D, отрезок, соединяющий точки x и u_k, лежит внутри D и, значит, $\langle y, v_k \rangle < 1$ для любой точки отрезка $y = \lambda x + (1-\lambda) u_k$.



С другой стороны, $\langle y, v_k \rangle = \lambda \langle x, v_k \rangle + (1-\lambda)\langle u_k, v_k \rangle = 1$. Следовательно, отрезок вырожден и точки x и u_k совпадают.

Делаем вывод, что если $x \in \partial D \cap -n\partial K$, то $x = u_k$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, m\}$. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что для некоторого $1 \leqslant r \leqslant m$ выполнено равенство

$$\partial D \cap -n\partial K = \{u_i\}_{i=1}^{r}. \tag{16}$$

По лемме 6 каждому $x = u_i$, где $i \in \{1, \ldots, r\}$, соответствует некоторое w_i. Множество A одноточечно, значит $w_i = -nv_i$ из равенства (11). Тогда для любого $k \in \{1, \ldots, r\}$ выполнены следущие равенства

$$\langle u_i, v_k \rangle = -\frac{1}{n} \text{ при } i \neq k \text{ и } \langle u_k, v_k \rangle = 1. \tag{17}$$

Поэтому

$$\partial D^\circ \cap -\frac{1}{n}\partial K^\circ = \{v_i\}_{i=1}^{r}. \tag{18}$$

Докажем, что $\{u_i\}_{i=1}^{r}$ и $\{v_i\}_{i=1}^{r}$ аффинно независимы.

- Предположим, что набор $\{u_i\}_{i=1}^r$ — аффинно зависим. То есть существует k, такой что

$$u_k = \sum_{i \neq k} c_i u_i \text{ и } \sum_{i \neq k} c_i = 1.$$

Тогда

$$-\frac{1}{n} = \langle u_k, v_j \rangle = \sum_{i \neq k} c_i \langle u_i, v_j \rangle = \sum_{i \neq k, i \neq j} c_i \langle u_i, v_j \rangle + c_j \langle u_j, v_j \rangle =$$
$$= -\frac{1}{n} \sum_{i \neq k, i \neq j} c_i + c_j = -\frac{1}{n}(1 - c_j) + c_j = c_j\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) - \frac{1}{n}.$$

То есть $c_j = 0$ для всех j.

Поэтому $r \leqslant n+1$. Применяя лемму 8 к $U = -nK$ и $V = D$, получим, что $0 \in \operatorname{conv}\{v_i\}_{i=1}^r$. Докажем, что

$$0 \in \operatorname{relint} \operatorname{conv}\{v_i\}_{i=1}^r.$$

- Предположим противное и, не умаляя общности, считаем, что

$$0 = \sum_{i=1}^{r-1} c_i v_i \text{ и } \sum_{i=1}^{r-1} c_i = 1.$$

Тогда для любого $k \in \{1, \ldots, r-1\}$ верны равенства

$$0 = \sum_{i=1}^{r-1} c_i \langle u_k, v_i \rangle = c_k \langle u_k, v_k \rangle + \sum_{i=1, i \neq k}^{r-1} c_i \langle u_k, v_i \rangle =$$
$$= c_k - \frac{1}{n}(1 - c_k).$$

То есть $c_k = \frac{1}{n+1}$. Если

$$\sum_{i=1}^{r-1} c_i = \frac{r-1}{n+1} = 1,$$

то $r = n+2$ — противоречие.

Докажем, что $r = n + 1$. Пусть

$$C := (\{v_i\}_{i=1}^r)^\circ.$$

Допустим, что $r \leqslant n$. Тогда $C = T \times Y$ — цилиндр, в котором $T = C \cap \operatorname{span}\{v_i\}_{i=1}^r$ — симплекс размерности $r - 1$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$ — линейное подпространство размерности $n - r + 1$. Заметим, что v_k — нормаль к соответствующей грани T. Из условия (17) следует, что u_k принадлежит относительной внутренности этой грани (аналогично предыдущему рассуждению). По условию (18), $-nK \subset C$. Из того, что $\{u_i\}_{i=1}^r \subset K$, следует включение

$$\{u_i\}_{i=1}^r \subset -\frac{1}{n}C. \tag{19}$$

Пусть $\{u_i'\}_{i=1}^r$ — ортогональная проекция $\{u_i\}_{i=1}^r$ на $(r-1)$-мерное подпространство, порожденное T. Тогда u_i' принадлежит относительной внутренности каждой грани T с нормалью v_i соответственно для любого $1 \leqslant i \leqslant r$. Более того, из условия (19), $\{u_i'\}_{i=1}^r \subset -\frac{1}{n}T$. Применяя лемму 9 к симплексам T и $-\frac{1}{n}T$ размерности $r-1$, получим, что $r - 1 \geqslant n$. Следовательно, $r = n + 1$.

Пусть $S := \operatorname{conv}\{u_i\}_{i=1}^r$. По определению,

$$S \subset K.$$

Условие (17) влечет, что $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v_i \rangle \leqslant 1\}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant r$ является опорным полупространством для граней $-nS$, а значит $-nS = C$. Так как $-nK \subset C$,

$$K \subset S.$$

То есть $K = S$ и, значит, K — симплекс. □

Следствие 7. *Если L — строго выпуклое или гладкое тело и расстояние Банаха–Мазура между телами K и L равно n, то K — симплекс.*

Доказательство. Применяя аффинное преобразование, если нужно, считаем, что K в положении максимального объема в L. Из теоремы 5 следует, что существуют $x, z \in \mathbb{R}^n$, такие что

$$K_z \subset L_z \subset -nK_z. \tag{20}$$

Если $d(K, L) = n$, то коэффицент гомотетии в (20) нельзя улучшить. Следовательно, наименьшая отрицательная гомотетия K_z, содержащая L_x, это $-nK_z$.

$\square$

7. Заключение

В данной работе описано разложение аффинного преобразования T при помощи пар касания двух выпуклых тел K и L, когда $T(K)$ в позиции максимального объема в L. Приведены примеры применения такого представления к некоторым задачам.

В работе Палмона [10] доказано, что выпуклым телом с наибольшим расстоянием Банаха–Мазура от шара является симплекс. Теорема 9 является обобщением этого утверждения.

Список литературы

[1] Gordon Y., Litvak A. E., Meyer M. and Pajor A., *John's decomposition in the general case and applications,* J. Differential Geom., 68 (2004), 99-119.

[2] Jimenez C.H., Naszodi M., *On the extremal distance between two convex bodies,* Israel J. Math., 183 (2011), 103–115.

[3] Ball K., *An Elementary Introduction to Modern Convex Geometry* Flavors of geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ., Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[4] Barvinok A., *A course in convexity,* Amer. Math. Soc., Providence, 2002.

[5] John F., *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions,* Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948, 187–204, Interscience Publishers, Inc., New York, NY, 1948.

[6] Лейхтвейс К., *Выпуклые множества,* М., Наука, 1985.

[7] Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г., *Неравенства,* М., ИЛ., 1948.

[8] Tomczak-Jaegermann N., *Banach–Mazur distances and finite-dimensional operator ideals*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, New York, 1989.

[9] Pisier G., *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics, 94, Cambridge, Cambridge University Press, 1989.

[10] Palmon O., *The only convex body with extremal distance from the ball is the simplex,* Israel J. Math., 80 (1992), 337–349.